Χώροι L^p, $p \in [1,\infty)$ φυσικός

• Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε τον
$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{K}$, f μετρήσιμη και
$\int |f|^p d\mu < \infty \}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

• Παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{L}^p$ είναι γραμμικός χώρος:
- Έστω $f, g : X \to \mathbb{K}$ μετρήσιμες με $\int |f|^p d\mu$, $\int |g|^p d\mu < \infty$. Τότε, η $f+g$ είναι μετρήσιμη και

$$|f+g|^p \leq 2^p (\max\{|f|, |g|\})^p = $$
$$= 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq$$
$$\leq 2^p (|f|^p + |g|^p).$$ Άρα, $\int |f+g|^p d\mu \leq$
$\leq 2^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right) < \infty$ και δηλαδή
$f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

- Επίσης, για $c \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}^p$, $|cf|^p = c^p |f|^p$ και
$\int |cf|^p d\mu = c^p \int |f|^p d\mu < \infty$. Δηλαδή, $cf \in \mathcal{L}^p$.

• Ορίζουμε τη «νόρμα» στον $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ με
$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$, $f \in \mathcal{L}^p$.

Παρατηρούμε ότι η $\|\cdot\|_p$ δεν είναι νόρμα στον $\mathcal{L}^p$ καθώς υπάρχουν $f \neq 0$ με $\|f\|_p = 0$ (είναι ημινόρμα)

↳ $\int |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow |f| = 0$ μ-σ.π.

Ταυτίζοντας όλες αυτές τις συναρτήσεις με το μηδέν, λαμβάνουμε χώρο με νόρμα. Δηλαδή, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p$: $f \sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_p = 0 \Leftrightarrow f = g$ μ-σ.π. και συμβολίζουμε με $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ τον χώρο πηλίκο.

Στον L^p ορίζουμε $[f]+[g]=[f+g]$
$c\cdot[f] = [cf]$

Οι πράξεις αυτές είναι καλώς ορισμένες και πλέον έχουμε τον γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{K}$ $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Στο εξής θα γράφουμε με f ένα στοιχείο του L^p και όχι με $[f]$.

• Στον L^p, $p \in [1, \infty)$, το p ορίζει νόρμα. Πράγματι, για $f, g \in L^p$, $c \in \mathbb{K}$:

1) $\|f\|_p \geq 0$ και αν $\|f\|_p = 0$, τότε $|f| = 0$ μ-σ.π. $\Rightarrow f \overset{L^p}{=} 0$.
2) $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$
3) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski)

Η ανισότητα Minkowski είναι συνέπεια της Hölder :

$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ με $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\hookrightarrow \left(\int |f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

<u>Θεώρημα</u>: Ο $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Banach όταν εφοδιαστεί με τη νόρμα $\|\cdot\|_p$. Δηλαδή, η μετρική που επάγεται απ' τη νόρμα είναι πλήρης.

Χρειαζόμαστε το <u>λήμμα</u>: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι Banach

ii) Αν $(x_n)_n$ ακολουθία στον X τ.ω. $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$, τότε η $\sum_1^\infty x_n$ συγκλίνει στον X.

Απόδειξη λήμματος:

i) → ii): Έστω ότι ο X είναι πλήρης και έστω (x_n) ακολουθία στον X τ.ω. $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$. Έστω $s_n = \sum_{m=1}^{n} x_m$, $n \in \mathbb{N}$. Ισχυρισμός: Η $(s_n)_n$ είναι Cauchy.

Για κάθε $n \geq m$ φυσικούς, είναι

$\|s_n - s_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|$. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$, τότε για $n > m \geq n_0$ είναι

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon,$$

άρα η $(s_n)_n$ είναι Cauchy και αφού ο X είναι Banach η $(s_n)_n$ συγκλίνει, δηλ. $\sum_1^\infty x_n < \infty$.

$$* \quad \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=n_0}^{n} \|x_k\| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\|$$

αύξουσα και θετική η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

ii) $\to$ i): Έστω ότι ισχύει το ii) και έστω $(x_n)_n$ βασική ακολουθία του X. Τότε, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\exists\, n_k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$ $\forall\, n, m \geq k$ και μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_1 < n_2 < \dots$ Τώρα, έχουμε ότι $\sum_1^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_1^\infty \frac{1}{2^k} = 1$. Άρα, εξ υποθέσεως $\sum_1^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x$ για κάποιο $x \in X$ (δηλαδή η σειρά συγκλίνει στον X).

Δηλαδή, $\lim_{j\to\infty} \left\{ \sum_1^j (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right\} = x$, όμως το άθροισμα είναι τηλεσκοπικό και άρα λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{j\to\infty} (x_{n_{j+1}} - x_{n_1}) = x \Rightarrow \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} = x + x_{n_1}.$$

Επομένως, η $(x_{n_j})_j$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_n)_n$ και καθώς η $(x_n)_n$ είναι Cauchy με μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έπεται ότι η $(x_n)_n$ συγκλίνει. Συνεπώς, ο X είναι πλήρης.

$$\left(x_n \xrightarrow{n} x + x_{n_1} \right) \quad \square$$

• Απόδειξη του Θεωρήματος ((L^p, $\|\cdot\|_p$) χώρος Banach):

Έστω $(f_n)_n$ ακολουθία στον L^p με $\sum_1^\infty \|f_n\|_p < \infty$. Ορίζουμε $\sigma := \sum_1^\infty |f_n|$ και $\sigma_n = \sum_1^n |f_k|$. Από ανισότητα Minkowski $\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p$. Επομένως,

$$\left(\int \sigma^p \, d\mu \right)^{1/p} \underline{\underline{\text{ΘΜΣ}}} \lim_{n\to\infty} \left(\int \sigma_n^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \underbrace{\sum_1^\infty \|f_k\|_p < \infty}_{\uparrow\ \text{υπόθεση}}$$

Συνεπώς, $|\sigma(x)| < \infty$ μ-σ.π. άρα η σειρά $s = \sum_1^\infty f_n$ συγκλίνει κατά σημείο μ-σ.π. Έστω $s_n = \sum_1^n f_k$, θέλουμε ν.δ.ο. $s_n \xrightarrow{L^p} s$, δηλαδή ότι $\|s_n - s\|_p \xrightarrow{n} 0$.

Γνωρίζουμε ότι $|s_n - s|^p \longrightarrow 0$ μ-σ.π. άρα για κάθε n $|s_n(x)-s(x)|^p \le (|s_n(x)|+|s(x)|)^p \le$
$\le 2^p(\max\{|s_n(x)|,|s(x)|\})^p \le 2^p\cdot(\max\{\sigma_n(x),\sigma(x)\})^p \le$
$\le 2^p\cdot\sigma(x)^p \in L^1$. Άρα, από Θ.Κ.Σ.

$\int |s_n - s|^p d\mu \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \|s_n - s\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, δηλαδή

$s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} s$. □

Χώρος $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$

• Σε πρώτη φάση ορίζουμε τον $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu) := \{f: X\to\mathbb{K},$ f μετρήσιμη και $\|f\|_\infty<\infty\}$, όπου
$\|f\|_\infty = \inf\{t>0 : \mu(\{x\in X: |f(x)|>t\})=0\}$, το ουσιώδες άνω φράγμα της f (essential supremum ή esssup).

* $\|f\|_\infty = \inf\{t>0 : |f(x)|\le t \ \mu\text{-σ.π.}\}$

• Παρατηρήσεις

1) Για $t>0$, η οικογένεια $\{x\in X : f(x)>t\}$ είναι φθίνουσα καθώς το t αυξάνει ($\{f>t_1\}\subseteq\{f>t_2\}$ για $t_1\ge t_2$), άρα από μονοτονία του μέτρου η $\mu(\{x\in X: |f(x)|>t\})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t.

Για $t_1>t_2 \Rightarrow \{|f|>t_1\}\subseteq\{|f|>t_2\} \Rightarrow$
$\mu(\{|f|>t_1\}) \le \mu(\{|f|>t_2\})$.

Έτσι, από τη συνέχεια του μέτρου από κάτω ($\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$, $(A_n)_n$ αύξουσα), έπεται ότι

$$\mu(\{x\in X : |f(x)|>t\}) \xrightarrow{t \searrow t_0} \mu(\{x\in X : |f(x)|>t_0\}).$$

Από αυτό έπεται ότι $\mu(\{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty\}) =$

$$= \lim_{t\searrow \|f\|_\infty} \underbrace{\mu(\{x\in X : |f(x)|>t\})}_{=0} = 0$$ και έτσι λαμβάνουμε τη 2η παρατήρηση:

2) $\mu(\{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty\}) = 0.$

* Δηλ. το $\|f\|_\infty$ ανήκει στο σύνολο των $t>0$ του οποίου θέλουμε το infimum, άρα το $\inf\{\dots\}$ γίνεται $\min\{\dots\}$

* Δες το και έτσι: $\mu(\{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty\}) =$

$$= \mu\Big(\bigcup_{1}^{\infty}\{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty + 1/n\}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(\{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty + 1/n\}) = 0,$$

καθώς $\mu(\{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty + 1/n\}) = 0$ $\forall n$ (ιδιότητα infimum)

• Ο $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι γραμμικός χώρος:

- $\|cf\|_\infty = |c|\cdot\|f\|_\infty \quad \forall c\in\mathbb{K},\ \forall f\in\mathcal{L}^\infty$
- $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Minkowski για $p=\infty$).

Απόδειξη: Είναι $\{x\in X : |f(x)+g(x)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\}$
$\subseteq \{x\in X : |f(x)|+|g(x)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\} \subseteq$
$\subseteq \{x\in X : |f(x)|>\|f\|_\infty\} \cup \{x\in X : |g(x)|>\|g\|_\infty\}.$

Άρα, $\mu(\{x\in X : |f(x)+g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) \leq$
$\leq \mu(\{x\in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) + \mu(\{x\in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\})$
$= 0.$

Έπεται ότι $\|f+g\|_\infty = \inf\{t>0 : \mu(\{|f|>t\})=0\}$
$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$

$\rightarrow$ Δηλαδή, έχουμε υποπροσθετικότητα ως προς την πρόσθεση και ταυτόχρονα η $\|\cdot\|_\infty$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.

- $\|cf\|_\infty = |c|\cdot\|f\|_\infty$: Για $c=0$ ισχύει. Έστω $c\neq 0$. Δείχνω ότι $|c|\|f\|_\infty \leq \|cf\|_\infty$ ή
$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|c|}\cdot\|cf\|_\infty$.

Είναι $\mu(\{x\in X : |f(x)| > \frac{1}{|c|}\cdot\|cf\|_\infty\}) =$

$= \mu(\{x\in X : |c\cdot f(x)| > \|c\cdot f\|_\infty\}) = 0 \Rightarrow$

$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|c|}\cdot\|cf\|_\infty \Rightarrow |c|\cdot\|f\|_\infty \leq \|cf\|_\infty.$ (1)

Και $\mu(\{x\in X : |cf(x)| > |c|\,\|f\|_\infty\}) =$

$= \mu(\{x\in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0 \Rightarrow$

$\left.\|cf\|_\infty \underset{(1)}{\leq} |c|\,\|f\|_\infty\right\} \Rightarrow \|cf\|_\infty = |c|\cdot\|f\|_\infty$

Άρα, μαζί με την υποπροσθετικότητα του βαθμωτού πολ/μου έχουμε και την 2η ιδιότητα της νόρμας για την $\|\cdot\|_\infty$

* $\|f\|_\infty \geq 0$ και $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f=0$ μ-σ.π. $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_\infty$ ημι-νόρμα

• Στον δ.χ. $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέμε ότι $f \sim g \iff \|f - g\|_\infty \iff f = g$ μ-σ.π.

Ορίζουμε $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim \; = \{[f] : f \in \mathcal{L}^\infty\}$ και ορίζουμε πράξεις στις κλάσεις έτσι ώστε ο $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ να είναι γραμ. χώρος με νόρμα.