Χώροι L^p, $p \geq 1$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) := \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f$ μετρήσιμη και $\int |f|^p d\mu < +\infty \}$ όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

O $\mathcal{L}^p$ είναι γρ. χώρος.

Έστω $f, g : X \to \mathbb{K}$ μετρήσιμες με $\int |f|^p d\mu < +\infty$ και $\int |g|^p d\mu < +\infty$.
τότε $f+g$ μετρ. $|f+g|^p \leq$
$\leq (2\max\{|f|,|g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$
Τότε $\int |f+g|^p d\mu \leq 2^p\left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right) < +\infty$.

Επίσης προφανώς αν $c \in \mathbb{K}$ τότε $|cf|^p = c^p |f|^p$ και άρα $\int |cf|^p d\mu = c^p \int |f|^p d\mu < +\infty$.

Ορίζουμε $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ για κάθε $f \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$. (P)

Παρατήρηση: η $\|\cdot\|_p$ στον $\mathcal{L}^p$ δεν είναι νόρμα γιατί υπάρχουν $f \neq 0$ τ.ω. $\int |f|^p d\mu = 0$. (είναι ημινόρμα). Ταυτίζοντας όμως αυτές τις συναρτήσεις με το μηδέν παίρνουμε χώρο με νόρμα.

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p$: $f \sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_p = 0 \Leftrightarrow f = g$ μ-σχ.π. και ονομάζουμε $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ τον χώρο πηλίκο.

Στον L^p ορίζουμε
$$[f] + [g] = [f+g]$$
$$c \cdot [f] = [cf].$$

Οι πράξεις αυτές είναι καλά ορισμένες (έλεγχος) και ο L^p γίνεται γραμμικός χώρος. Στο εξής θα γράφουμε f αντί για $[f]$ για τα στοιχεία του L^p.

Στον L^p η (P) ορίζει νόρμα. Πράγματι:

1) $\|f\|_p \geq 0$ και $\|f\|_p = 0 \Rightarrow |f| = 0$ μ-σχ.π. $\Rightarrow f \overset{L^p}{=} 0$.
2) $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$ $\forall c \in \mathbb{K}$.
3) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Ανισότητα Minkowski).

Η αν. Minkowski είναι συνέπεια της αν. Hölder:

(H) $\int |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ με $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_p$ νόρμα στον L^p.

<u>Θεώρημα</u> ο χώρος $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ με την νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι χώρος Banach, δηλ. η μετρική που επάγεται από την νόρμα είναι πλήρης.

<u>Λήμμα</u> X χώρος με νόρμα. ΤΑΕΙ
1) ο X είναι πλήρης χώρος με νόρμα
2) Αν $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X τ.ω. $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ συγκλίνει στο X.

<u>Απόδειξη Λήμματος</u>

Έστω ότι X είναι πλήρης & έστω $(x_n)_{\mathbb{N}}$ τ.ω. $\sum\|x_n\|<+\infty$. Έστω $S_n=\sum_{m=1}^{n}x_m$, $m\in\mathbb{N}$. <u>Ισχυρισμός</u>: (S_n) είναι βασική.

$$\|S_n-S_m\|=\Big\|\sum_{k=\min\{n,m\}+1}^{\max\{n,m\}}x_k\Big\|\le\sum_{k=n\wedge m+1}^{n\vee m}\|x_k\| \quad \left(\begin{array}{l} n\vee m:=\max\{n,m\}\\ n\wedge m:=\min\{n,m\}\end{array}\right)$$

Δοθέντος ε>0 $\exists\, n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ $\sum_{n\ge n(\varepsilon)}^{+\infty}\|x_n\|<\varepsilon$ τότε για $n,m\ge n(\varepsilon)$ είναι $\|S_n-S_m\|<\varepsilon$. Άρα (S_n) βασική & άρα, αφού X πλήρης, η (S_n) συγκλίνει.

Αντίστροφα έστω ότι ισχύει η (2) & έστω (x_n) βασική. έχουμε τότε $\forall k\in\mathbb{N}$ $\exists n_k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}$ $\forall n,m\ge n_k$. μάλιστα μπορούμε να πάρουμε τα n_k ώστε $n_1<n_2<\cdots$

Τώρα έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty$ άρα από (2) $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x$ συγκλίνει στο X. Δηλ.

$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x$ το άθροισμα μέσα στο όριο είναι τηλεσκοπικό & άρα γίνεται $\lim_{j\to\infty}(x_{n_{j+1}}-x_{n_1})=x$ άρα $\lim_{j\to\infty}(x_{n_{j+1}})=x+x_{n_1}$ άρα η $(x_{n_j})_j$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n) η οποία είναι βασική άρα & η (x_n) είναι συγκλίνουσα $x_n\longrightarrow x+x_{n_1}$ □

<u>Απόδειξη Θεωρήματος</u> ($(L^p, \|\cdot\|_p)$ χώρος Banach)

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον L^p με $\sum_{n=1}^{\infty}\|f\|_p<+\infty$. Ορίζουμε $\sigma:=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ και $\sigma_n:=\sum_{k=1}^{n}|f_k|$, $n\in\mathbb{N}$. Απο αν. Minkowski $\|\sigma_n\|_p\leq\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p$. Επομένως $\left(\int\sigma^p d\mu\right)^{1/p}=\lim_{n\to\infty}\left(\int\sigma_n^p d\mu\right)^{1/p}\leq$
$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p<+\infty$. Έπεται οτι $|\sigma(x)|<+\infty$ μ-σχ.π. Άρα η σειρά $s=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ συγκλίνει απολύτως μ-σχ.π. Έστω $s_n=\sum_{k=1}^{n}f_k$

Θέλουμε να δείξουμε οτι $s_n\xrightarrow{L^p}s$ δηλ. $\|s_n-s\|_p\to 0$. Γνωρίζουμε οτι $|s_n-s|^p\to 0$ μ-σχ.π. $|s_n(x)-s(x)|^p\leq\left(|s_n(x)|+|s(x)|\right)^p\leq$
$\leq 2^p\left(\max\{|s_n(x)|,|s(x)|\}\right)^p\leq 2^p\left(\max\{\sigma_n(x),\sigma(x)\}\right)^p\leq$
$\leq 2^p\sigma(x)^p\in L^p$. Άρα απο Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης
$\int|s_n-s|^p d\mu\to 0\Rightarrow\|s_n-s\|_p\to 0$ □

<u>Χώρος $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$</u> $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu):=\{f:X\to\mathbb{K}\mid f$ μετρήσιμη και $\|f\|_\infty<+\infty\}$. όπου $\|f\|_\infty=\inf\{t>0\mid\mu(\{x\in X\mid |f(x)|>t\})=0\}$ το ουσιώδες φράγμα της f.

<u>Παρατηρήσεις</u> (1) $\{x\in X\mid f(x)>t\}$ φθίνουσα καθώς t αυξάνει, αρα απο μονοτονία του μέτρου $\mu(\{x\in X\mid |f(x)|>t\})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Άρα απο την συνέχεια του μέτρου απο κάτω $\left(\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\text{ για }(A_n)\text{ αύξουσα}\right)$ έπεται οτι

$\mu\{x\in X:|f(x)|>t\}\xrightarrow{t\downarrow t_0}\mu\{x\in X:|f(x)|>t_0\}$. Απο αυτό έπεται
$\mu\{x\in X:|f(x)|>\|f\|_\infty\}=\lim_{t\downarrow\|f\|_\infty}\mu\{x\in X:|f(x)|>t\}=0$

(2) $\mu(\{x\in X:|f(x)|>\|f\|_\infty\})=0$.

<u>$\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι γρ. χώρος</u>

- $\|cf\|_\infty=|c|\cdot\|f\|_\infty$ $\forall c\in\mathbb{K}$ $f\in\mathcal{L}^\infty$
- $\|f+g\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ (Minkowski για $p=\infty$)

<u>Απόδειξη</u> $\{x\in X\mid |f(x)+g(x)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\}\subseteq$
$\subseteq\{x\in X:|f(x)|+|g(x)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\}\subseteq$
$\subseteq\{x\in X:|f(x)|>\|f\|_\infty\}\cup\{x\in X:|g(x)|>\|g\|_\infty\}$. Άρα
$\mu\{x\in X:|f(x)+g(x)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\}\leq\mu\{|f(x)|\geq\|f\|_\infty\}+\mu\{|g(x)|\geq\|g\|_\infty\}=0.$

Έπεται ότι $\|f+g\|_\infty = \inf\{t>0 : \mu\{x\in X : |f(x)+g(x)|>t\}=0\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Καλούμε $f\sim g$ ανν $\|f-g\|_\infty = 0$. ανν $f=g$ μ-σχ.π.
$L^\infty :=$ κλάσεις ισοδυναμίας. Ορίζουμε πράξεις στις κλάσεις ισοδυναμίας.
ώστε $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.

<u>Θεώρημα</u> Ο $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ με την $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach

<u>Απόδειξη</u> Νδο $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολ.
$A_{n,m} := \{x\in X : |f_n(x)-f_m(x)| > \|f_n-f_m\|_\infty\}$ $\quad \mu(A_{n,m})=0 \ \forall n,m$ (από παρατήρηση (2)). Θέτω $A := \bigcup_n \bigcup_m A_{n,m}$. είναι $\mu(A) \leq \sum_{n,m} \mu(A_{n,m}) = 0$
Άρα $\mu(X\setminus A^c)=0$. Για $x\in A^c$ έχουμε $|f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n-f_m\|_\infty \ \forall n,m$.
Αυτό δείχνει ότι $\forall x\in A^c$ η αριθμητική ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, άρα συγκλίνει. Άρα $\forall x\in A^c \ \exists f(x)\in\mathbb{K}$ τ.ω. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$
$|f_n(x)-f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x)-f_m(x)| \leq \lim_{m\to\infty} \|f_n-f_m\|_\infty$

Δοθέντος $\varepsilon>0$, υπάρχει $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|f_n-f_m\|_\infty < \varepsilon \ \forall n \geq n(\varepsilon)$. Άρα $\|f_n(x)-f(x)\| < \varepsilon \ \underset{\forall x\in A^c}{\forall n\geq n(\varepsilon)} \Rightarrow \sup_{x\in A^c} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon \ \forall n\geq n(\varepsilon)$. Έπεται $\|f_n-f\|_\infty < \varepsilon \ \forall n\geq n(\varepsilon)$ (αφού $\mu(X\setminus A^c)=0$) ; αφού το ε ήταν τυχόν έχουμε $\|f_n-f\|_\infty \longrightarrow 0$ □

<u>Ορισμός</u> Αν $p,q>1$ τ.ω. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ οι p,q λέγονται <u>συζυγείς εκθέτες</u>. Επίσης τα 1 ; $+\infty$ είναι συζυγείς εκθέτες.

Ο δυϊκός του L^p

Γραμμικοί Τελεστές X, Y γρ. χώροι σε σώμα $\mathbb{K}$ με νόρμα.
$T: X \to Y$ είναι γραμμική αν $T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$.
Μια γρ. απεικόνιση είναι φραγμένη αν υπάρχει σταθερά $C \in (0,+\infty)$ τ.ω. $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ $\forall x \in X$.

Πρόταση Αν X, Y γρ. χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γρ. τελεστής ΤΑΕΙ
(a) T συνεχής
(b) T συνεχής στο 0
(c) T φραγμένος.

Απόδειξη (a)$\Rightarrow$(b) προφανής
(b)$\Rightarrow$(c) Για $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(x)\| < 1$. Έστω $x \in X$ τότε $\|x \cdot \frac{\delta}{\|x\|}\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\frac{\delta}{\|x\|}\| < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{1}{\delta}\|x\|$. $(C = \frac{1}{\delta})$
(c)$\Rightarrow$(a) Αρκεί νδο T συνεχής στο 0 γιατί αν T συνεχής στο 0 και $x_0 \in X$ τότε $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\|$ δίνει ότι T συνεχής στο x_0.
Έστω ότι $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ $\forall x \in X$ για κάποιο $C \in (0,+\infty)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $\delta = \varepsilon/2C$. Αν $\|x\| < \delta$ τότε $\|T(x)\| \leq C\|x\| = C\frac{\varepsilon}{2C} < \varepsilon$. □

Ορισμός Αν $T: X \to Y$ γρ. τελεστής όπου X, Y χώροι με νόρμα, τότε ορίζουμε την νόρμα του τελεστή $\|T\| = \inf\{c \in (0,+\infty) \mid \forall x \in X \ \|T(x)\| \leq c\|x\|\}$

Παρατήρηση ① Ισχύει $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ $\forall x \in X$
Απόδειξη $C_n = \|T\| + \frac{1}{n}$ αν $x \in X \Rightarrow \|T(x)\| \leq C_n\|x\| \xrightarrow{n\to\infty} \|T\| \cdot \|x\|$

② $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$
Απόδειξη Αν $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ τότε $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\|$
άρα $\sup\{\|T(x)\| : x \in X \ \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|T(x)\| : x \in X \ \|x\| \leq 1\} \leq \|T\|$.
Αντίστροφα ορίζουμε $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$. Αν $x \in X$ τότε $\|T(x)\| = \|x\| \, \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq A\|x\|$ άρα $\|T\| \leq A$ □

Πρόταση Αν X, Y γρ. χώροι με νόρμα τότε ο χώρος $B(X,Y)$ των φραγμένων τελεστών από το X στο Y είναι γρ. χώρος με νόρμα και αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $B(X,Y)$ είναι Banach.
Απόδειξη Αν $S, T \in B(X,Y)$ και $c \in \mathbb{K}$ τότε $(S+T)(x) = S(x) + T(x)$ και $(c \cdot T)(x) = c \cdot T(x)$ είναι γρ. απεικονίσεις.
$\|(S+T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq \|S\| \cdot \|x\| + \|T\|\|x\| =$
$= (\|S\| + \|T\|)\|x\|$. Άρα $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$. Άρα $(S+T) \in B(X,Y)$
Επίσης για $x \in X$ $\|(cT)(x)\| = \|c\,T(x)\| = |c| \cdot \|T(x)\| \leq |c| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$
άρα $\|cT\| \leq |c|\|T\|$. Αν $T \in B(X,Y)$ τότε $(cT) \in B(X,Y)$ και $\|cT\| \leq |c| \cdot \|T\|$. Όμως $\|T\| = \|c^{-1} \cdot cT\| \leq |c|^{-1}\|cT\| \Rightarrow$
$\Rightarrow |c| \cdot \|T\| \leq \|cT\|$ Άρα τελικά $\|cT\| = |c|\|T\|$, $(c \neq 0)$

Προφανώς $\|T\| \geq 0$ $\forall T \in B(X,Y)$ & αν $\|T\|=0$ τοτε $\|T(x)\| \leq 0\,\|x\|=0$ $\forall x\in X$ αρα $T(x)=0$ $\forall x\in X$ δηλ. $T\equiv 0$.

Εστω τώρα οτι Y είναι πλήρης. Θέλουμε να δείξουμε οτι $B(X,Y)$ είναι πλήρης. Εστω λοιπόν $(T_n)_{\mathbb{N}}$ Cauchy ακολουθία στον $B(X,Y)$. Εστω $x\in X$ $\|T_n(x)-T_m(x)\| = \|(T_n-T_m)(x)\| \leq$ $\leq \|T_n-T_m\|\,\|x\|$ η ανισότητα δείχνει οτι η $(T_n(x))_{\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον Y, όμως Y πλήρης αρα ορίζεται $T: X\to Y$. Απο ιδιότητες ορίων ο T είναι γραμμικός τελεστής.

<u>Τ φραγμένος</u>: αφου (T_n) είναι βασική, για $\varepsilon=1$ υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|T_n-T_m\|\leq 1$ $\forall n,m\geq n_1$. $C=\max\{\|T_1\|,\|T_2\|,\dots,\|T_{n_1}\|+1\}$ τοτε $\|T\|\leq C$: $\|T(x)\| = \lim|T_n(x)| \leq \lim\|T_n\|\,\|x\| \leq C\|x\|$

<u>$\|T_n-T\|\to 0$</u>: Εστω $\varepsilon>0$ $\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$ $\forall n,m\geq n(\varepsilon)$. Για αυθαίρετο $x\in X$ $\|T_n(x)-T(x)\| =$ $=\lim\|T_n(x)-T_m(x)\| \leq \lim\|T_n-T_m\|\,\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$ $\forall n\geq n(\varepsilon)$

Επεται $\|T_n-T\|\leq\varepsilon$ $\forall n\geq n(\varepsilon)$ δηλ. $T_n\to T$ στο $B(X,Y)$

<u>Ορισμός</u> Αν X χώρος Banach τοτε ο χώρος των φρ. τελ. $B(X,\mathbb{K})$ είναι ο δυϊκός χώρος του X, συμβολίζεται X^* & τα στοιχεία του δηλ. οι φραγμένοι γρ. τελεστές $\varphi: X\to\mathbb{K}$ λέγονται φρ. γρ. συναρτησοειδή.

Νόρμα $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|: \|x\|\leq 1\}$ $(\varphi\in X^*)$.

Αν X,Y χώροι Banach & υπάρχει $T: X\to Y$ φρ. γρ. τελ. <u>1-1</u> & <u>επί</u> & ο T^{-1} είναι επίσης φραγμένος, τοτε X & Y λέγονται <u>ισόμορφοι</u>.

Αν επι πλέον ο T μπορεί να επιλεγεί ισομετρία, οι X,Y λέγονται <u>ισομετρικά ισόμορφοι</u>.

<u>Δυϊκοι χώροι των L^p</u> $1\leq p<\infty$ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

<u>Πρόταση</u> Οι απλές συναρτήσεις $s: X\to\mathbb{K}$ για τις οποίες $\mu\{x\in X: s(x)\neq 0\}<\infty$ είναι <u>πυκνές</u> στον $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$

<u>Απόδειξη</u> • Εστω s απλή με διακεκριμένες τιμές $a_1,\dots,a_n$ & $A_k := s^{-1}(\{a_k\})\in\mathcal{A}$ & $\mu(A_k)<+\infty$ $\forall k$. Τοτε $s=\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ $s\in L^p$: $\int|s|^p d\mu = \sum\int_{A_k}|a_k|^p d\mu = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\mu(A_k)<+\infty$

Κάθε s απλή μετρήσιμη με $\mu(\{x\in X: s(x)\neq 0\})<\infty$ γράφεται όπως παραπάνω δηλ. με $\mu(A_k)<+\infty$ $\forall k$ τ.ω. $a_k\neq 0$

• Έστω $f \in L^p$. Θεωρούμε απλές συναρτήσεις (μετρήσιμες) $0 \leq s_n \leq |f|$ & θέτουμε $f_n = s_n \cdot \operatorname{sgn}(f)$. $f_n \to f$ κατά σημείο & κάθε f_n έχει $\mu(\{x \in X : f_n(x) \neq 0\}) < \infty$. $|f_n - f|^p \leq |f|^p \in L^1$
Άρα από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης $\int |f_n - f|^p d\mu \to 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$ □

• Έστω $p > 1$. Έστω p, q συζυγείς εκθέτες. Αν $f \in L^p$, $g \in L^q$ από Hölder $\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < +\infty$. Άρα το $\varphi_g : L^p \to \mathbb{K}$ με $\varphi_g(f) = \int f \cdot g\, d\mu$ θα είναι καλά ορισμένο.

Για σταθερό $g \in L^q$, η φ_g θα είναι γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στον L^p. Για $f \in L^p$ $|\varphi_g(f)| = |\int f \cdot g\, d\mu| \leq \int |fg|\, d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p$
Άρα $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Άρα για κάθε $g \in L^q$ είναι $\varphi_g \in (L^p)^*$.

Ορίζεται μια απεικόνιση $T : L^q \to (L^p)^* : g \mapsto \varphi_g = T(g)$
η T είναι προφανώς γραμμική $T(a_1 g_1 + a_2 g_2) = a_1 \varphi_{g_1} + a_2 \varphi_{g_2}$

Η T είναι <u>ισομετρία</u>. Έχουμε δείξει ότι $\|Tg\| = \|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$.
Ορίζουμε $f = |g|^{q-1} \operatorname{sng}(g)$.

$(*)$ $|\varphi_g(f)| = |\int f \cdot g\, d\mu| = \int |g|^q d\mu = \|g\|_q^q$

$(**)$ $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |g|^{(q-1)p} d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/p} = \|g\|_q^{p/q}$

Έχουμε $|\varphi_g(f)| \overset{(*)}{=} \|g\|_q^q = \|g\|_q \cdot \|g\|_q^{q-1} \overset{(**)}{=} \|g\|_q \cdot \|f\|_p$ $\quad (p/q = q-1)$

Έπεται $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_q$. Άρα $\|\varphi_g\| = \|T(g)\| = \|g\|_q$

<u>Άρα T είναι ισομετρία.</u>

Θα δείξουμε ότι <u>T είναι επί</u>

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu(X) < +\infty$. Έστω $\varphi \in (L^p)^*$.
Ορίζουμε $\nu(A) := \varphi(\mathbb{1}_A)$ για $A \in \mathcal{A}$. Καλά ορισμένο
$\|\mathbb{1}_A\|_p = \mu(A)^{1/p} < \infty$ αφού $\mu(X) < \infty$.

Το ν είναι μέτρο: $\nu(\emptyset) = \varphi(\mathbb{1}_\emptyset) = \varphi(0) = 0$.

Έστω $A_1, \ldots \in \mathcal{A}$. ξένα ανά δύο. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $\sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{A_m} = \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m}$

$\nu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \varphi\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m}\right) = \varphi\left(\sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{A_m}\right) = \sum_{m=1}^{n} \varphi(\mathbb{1}_{A_m}) = \sum_{m=1}^{n} \nu(A_m)$

καθώς $n \to \infty$ το δεξί μέλος $\to \sum_{m=1}^{\infty} \nu(A_m)$ (αν υπάρχει το όριο)
το όριο υπάρχει γιατί το αριστερό μέλος είναι

$\nu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \varphi\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m}\right) \xrightarrow[\varphi \text{ συνεχής}]{n \to \infty} \varphi\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m}\right) = \nu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)$

Η σύγκλιση $\mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m} \longrightarrow \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m}$ είναι κατά σημείο. άρα

$\left| \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m} - \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m} \right|^p \longrightarrow 0$ κ.σ. ύ' $\left| \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m} - \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m} \right| \leq 1$

Αρα από Θ.Κ.Σ. $\mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{n} A_m} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m}$ Άρα ν μέτρο.
(προσημασμένο ή μιγαδικό)

Παρατηρούμε ότι $|\nu(A)| = |\varphi(\mathbb{1}_A)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\mathbb{1}_A\|_p =$
$= \|\varphi\| \cdot \mu(A)^{1/p}$ άρα $\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0$ άρα $\underline{\nu \ll \mu}$

Από Θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει μετρήσιμη $g: X \to \mathbb{K}$ που ικανοποιεί $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$. (συνεχίζεται...)

<u>Θεώρημα</u> Ο $L^p(X,\mathcal{A},\mu)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(X,\mathcal{A},\mu)$

Αν $g\in L^q$ τότε $\varphi_g(f)=\int fg\,d\mu$ $(f\in L^p)$ ορίζει στοιχείο του $(L^p)^*$ ꞔ η απεικόνιση $T: L^q\to(L^p)^*$: $T(g)=\varphi_g$ είναι γρ. ισομετρία

<u>Ο Τ είναι επί</u>: 1η Περίπτωση : $\mu(X)<+\infty$.

Έστω $\varphi\in(L^p)^*$ ορίζουμε $\nu: X\to\mathbb{K} : A\mapsto\varphi(\mathbb{1}_A)$ είναι μέτρο ꞔ $\nu\ll\mu$. Απο το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g: X\to\mathbb{K}$ τ.ω. $\nu(A)=\int_A g\,d\mu$. $\forall A\in\mathcal{A}$ ⊛.

Απο την ⊛ έπεται οτι $\varphi(f)=\int fg\,d\mu$ για f απλή στον L^p.

Πράγματι $f=\sum a_i\chi_{A_i}$ $\varphi(f)=\sum a_i\varphi(A_i)=\sum a_i\nu(A_i)=\int fg\,d\mu$.

Δείχνουμε οτι $g\in L^q$. Υπάρχουν απλές μετρίσιμες $h_n\geq 0$ ꞔ $h_n\leq h_{n+1}$ ꞔ $h_n\nearrow|g|$. Ορίζουμε $f_n=h_n^{q-1}\operatorname{sgn}(g)$ απλή.

$\varphi(f_n)=\int f_n g\,d\mu=\int h_n^{q-1}|g|\,d\mu\geq\int h_n^q\,d\mu=\|h_n\|_q^q$

$|\varphi(f_n)|\leq\|\varphi\|\cdot\|f_n\|_p=\|\varphi\|\cdot\|h_n\|_q^{q-1}$

$\|f_n\|_p=\left(\int|f_n|^p d\mu\right)^{1/p}=\left(\int h^{(q-1)p}d\mu\right)^{1/p}=\|h_n\|_q^{q/p}=\|h_n\|_q^{q-1}$

$\|h_n\|_q^q\leq\|\varphi\|\cdot\|h_n\|_q^{q-1}\Leftrightarrow\|h_n\|_q\leq\|\varphi\|$. $h_n^q\uparrow|g|^q$ αρα $\int|g|^q d\mu=$
$=\lim\int h_n^q\,d\mu\leq\|\varphi\|<+\infty$ Άρα $g\in L^q$.

Δείχνουμε οτι $\varphi(f)=\int fg\,d\mu$ $\forall f\in L^p$. Είδαμε οτι αυτό ισχύει για $f\in L^p$ απλές. Ορίζουμε $\varphi_g(f)=\int fg\,d\mu$ $\forall f\in L^p$. Οι απλές στον L^p είναι πυκνές στον L^p. Αφου φ ꞔ φ_g είναι συνεχείς πρέπει $\varphi=\varphi_g$ σε όλο το L^p.

$\varphi_g(f)=\int f\cdot g\,d\mu$ $f\in L^p$, $g\in L^q$ $T(g)=\varphi_g$ είναι γρ. ισομετρία επί.

Αν το μέτρο μ είναι <u>σ-πεπερασμένο</u>. Έστω X_n ακολουθία ξένων ανα δυο συνόλων με $X_n\in\mathcal{A}$ $\mu(X_n)<+\infty$ ꞔ $X=\cup X_n$.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $\mu_n(A)=\mu(A\cap X_n)$, $A\in\mathcal{A}$. Πεπερασμένο μέτρο. $\varphi_n(f)=\varphi(f\mathbb{1}_{X_n})$ $f\in L^p$. όπου $\varphi\in(L^p)^*$ έχει δοθεί. Καλά ορισμένο γιατί $f\in L^p(\mu_n)\Leftrightarrow f\mathbb{1}_{X_n}\in L^p(\mu)$ ✓.

φ_n γρ. συναρτησοειδής στον $L^p(\mu_n)$ που είναι φραγμένο :

$|\varphi_n|=|\varphi(f\mathbb{1}_{X_n})|\leq\|\varphi\|\cdot\|f\mathbb{1}_{X_n}\|_{L^p(\mu)}=\|\varphi\|\cdot\|f\|_{L^p(\mu_n)}$

Έπεται για κάθε $f\in L^p(\mu_n)$ οτι $\|\varphi\|_n\leq\|\varphi\|<+\infty$. Άρα $\varphi_n\in\left(L^p(\mu_n)\right)^*$

Απο 1η περίπτωση $\exists\, g_n: X\to\mathbb{K}$ που να ισχύει $\varphi_n(f)=\int f\cdot g_n\,d\mu_n$ $\forall f\in L^p(\mu_n)\Leftrightarrow\varphi(f\mathbb{1}_{X_n})=\int_{X_n}fg_n\,d\mu$ $\forall f\in L^p(\mu_n)$.

μπορώ να επιλέξω την g_n τ.ω. $g_n(x)=0$ $\forall x\notin X_n$.

Ορίζουμε $g=\sum g_n$ δηλ. $g(x)=g_n(x)$ για $x\in X_n$. g καλά ορισμένη.

<u>Δείχνουμε ότι η $g\in L^q$</u>: Ορίζουμε $G_m=\sum_1^m g_n$ και $\nu_m=\mu|_{\bigcup_1^m X_n}$

$\Phi_m(f)=\phi(f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n})$ για $f\in L^p(\nu_m)\Leftrightarrow f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}\in L^p(\mu)$

$G_m= g\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}$.

$\Phi_m(f)=\varphi(f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n})=\sum_1^m\varphi(f\mathbb{1}_{X_n})=\sum_1^m\int_{X_n} f g_n\,d\mu=\int\sum_1^m f\mathbb{1}_{X_n}g_n\,d\mu$

$=\int f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}G_m\,d\mu=\int f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}G_m\,d\nu_m=\int fG_m\,d\nu_m$

$\|G_m\|_{L^q(\nu_m)}=\|\sum_1^m g_n\|_{L^q(\nu_m)}\le\sum_1^m\|g_n\|_{L^q(\nu_m)}<+\infty.$

Συμπεραίνω ότι $\|\Phi_m\|=\|G_m\|_q$. $|\Phi_m(f)|=|\phi(f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n})|\le$

$\le\|\phi\|\cdot\|f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}\|_{L^p(\mu)}\le\|\phi\|\cdot\|f\|_{L^p(\nu_m)}\ \forall f\in L^p(\nu_m)$.

Άρα $\|\Phi_m\|\le\|\phi\|$ άρα <u>$\|G_m\|\le\|\phi\|$.</u>

$g=\lim_m G_m$ $\int|g|^q\,d\mu=\int\lim|G_m|^q\,d\mu\le\underline{\lim}\int|G_m|^q\,d\mu\le$

$\le\|\phi\|^q<+\infty$. Άρα $g\in L^q(\mu)$

Μένει να δείξουμε ότι $\varphi(f)=\int fg\,d\mu\ \forall f\in L^p(\mu)$

$\Phi_m(f)=\int f\sum_1^m g_n\,d\mu\ \forall f\in L^p(\mu)$ $f\in L^p(\nu_m)$

Για $f\in L^p(\mu)$ έχουμε $f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}\longrightarrow f\Leftrightarrow|f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}-f|\longrightarrow 0$

και $|f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}-f|^p\le|f|^p\in L^1(\mu)$ άρα από κυριαρχημένη σύγκλιση έχουμε $f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n}\longrightarrow f$ στον L^p.

Έπεται ότι $\phi(f\mathbb{1}_{\bigcup_1^m X_n})\longrightarrow\phi(f)$ από συνέχεια της ϕ στον L^p.

Γνωρίζουμε ότι $f\sum_1^m g_n=fG_m\longrightarrow fg$. ($g_n(x)\neq 0$ για το πολύ ένα $n\in\mathbb{N}$)

$|G_m|=|\sum_1^m g_n|=\sum_1^m|g_n|\le\sum_1^\infty|g_n|=|g|$

Επομένως $|fG_m|\le|fg|\in L^1(\mu)$ από αν. Hölder.

Από κυριαρχημένη σύγκλιση $\int fG_m\,d\mu\xrightarrow[m]{}\int fg\,d\mu$

Δείξαμε ότι $\phi(f)=\int fg\,d\mu$.

Άρα $(L^p(\mu))^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$ □

<u>Θεώρημα 2</u> Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος σ-πεπ. μέτρου. Τότε ο $L^1(\mu)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^\infty(\mu)$.

<u>Απόδειξη</u> Αν $g\in L^\infty(\mu)$ τότε $\varphi_g(f)=\int fg\,d\mu\ \forall f\in L^1(\mu)$ ορίζει γρ. συναρτησοειδές φραγμένο

$|\varphi_g(f)|=|\int fg\,d\mu|\le\int|fg|\,d\mu\le\|g\|_\infty\int|f|\,d\mu=\|f\|_1\|g\|_\infty$

Άρα $\|\varphi_g\|\le\|g\|_\infty$. $T:L^\infty(\mu)\longrightarrow L^1(\mu)^*$ με $T(g)=\varphi_g$ είναι γρ. ισομετρία. Πράγματι δοθέντος $\varepsilon>0$ $\mu(\{x\in X\mid |g(x)|>\|g\|_\infty-\varepsilon\})>0$

Επειδή μ σ-πεπ. υπάρχει $B \subseteq \{x \mid |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ τ.ω.
$0<\mu(B)<+\infty$ $f = \mathbb{1}_B \operatorname{sgn}(g) \in L^1(\mu)$. $|\varphi_g(f)| = \left|\int fg\,d\mu\right| =$
$= \left|\int_B |g|\,d\mu\right| \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(B) = (\|g\|_\infty-\varepsilon)\|f\|_1$
άρα $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ αφού ε τυχόν έχουμε $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Δείχνουμε ότι η T είναι επί. Υποθέτουμε ότι $\mu(X)<+\infty$
Έστω $\varphi \in L^1(\mu)^*$ $\nu(A) = \varphi(\mathbb{1}_A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ ορίζει μέτρο.
$|\nu(A)| = |\varphi(\mathbb{1}_A)| \leq \|\varphi\|\|\mathbb{1}_A\| = \|\varphi\|\cdot\mu(A)$ άρα $\nu \ll \mu$. Από Θ.
Radon-Nikodym υπάρχει $g: X \to \mathbb{K}$ τ.ω. $\nu(A) = \int_A g\,d\mu$. $\forall A\in\mathcal{A}$.
Η σχέση $\varphi(f) = \int fg\,d\mu$ ισχύει για f απλές στον $L^1(\mu)$.
Δείχνουμε ότι $g\in L^\infty(\mu)$. Έστω όχι τότε $\forall M>0$
$\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |g(x)|>M\}}_{A})>0$ $f=\mathbb{1}_A\cdot \operatorname{sgn}(g)$ τότε $\varphi(f) = \int fg\,d\mu =$
$= \int_A |g|\,d\mu > M\mu(A) = M\|f\|_1$
Άρα $\|\varphi\|\geq M$ αφού M τυχόν θα έχουμε φ μη φραγμένο άτοπο
άρα πρέπει $g\in L^\infty(\mu)$.

Έπεται ότι φ_g καλά ορισμένη συνεχής. Έχουμε $\varphi_g=\varphi$ για απλές $f\in L^1$. Από συνέχεια έπεται ότι $\varphi_g=\varphi$ σε όλο το L^1.
Δηλ. $\varphi(f)=\int fg\,d\mu$ $\forall f \in L^1(\mu)$

Σχόλια • το "πρόσημο" ενός μιγαδικού αριθμού $sgn(z) = \frac{z}{|z|}$ $(z \neq 0)$

• όταν δείχνουμε ότι ο T παίρνουμε $\varphi \in (L^p)^*$ και ψάχνουμε $g \in L^q$ τ.ω. $T(g) = \varphi$ υποθέτουμε $\mu(X) < \infty$ ορίζαμε $\nu(A) = \varphi(\mathbb{1}_A)$ ορίζαμε g παράγωγος Radon-Nikodym του ν ως προς μ ορίζουμε απλές συναρτήσεις $0 \leq h_n \uparrow |g|$ $f_n = h_n^{q-1} sgn(g)$. Αυτές όταν $g: X \to \mathbb{R}$ είναι απλές. Η απόδειξη που κάναμε δουλεύει οπότε αποδεικνύουμε ότι T είναι επί όταν φ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Για την γενική περίπτωση $\varphi \in (L^p)^*$ γράφουμε $\varphi(f) = \mathrm{Re}\,\varphi(f) + i\,\mathrm{Im}\,\varphi(f)$. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα για το πραγματικό και φανταστικό μέρος παίρνουμε $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ τ.ω. $\mathrm{Re}\,\varphi(f) = \int f g_1 \, d\mu$ και $\mathrm{Im}\,\varphi(f) = \int f g_2 \, d\mu$ $\forall f \in L^p$. Τότε η $g = g_1 + i g_2$ δίνει $\varphi(f) = \int f g \, d\mu$. οι $g_1, g_2 \in L^q$ έπεται ότι $g \in L^q$. $|g|^q = (\sqrt{g_1^2 + g_2^2})^q \leq 2^{q/2} (\max\{g_1^2, g_2^2\})^{q/2} =$
$= 2^{q/2} \max\{|g_1|^q, |g_2|^q\} \leq 2^{q/2} (|g_1|^q + |g_2|^q)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Προσέγγιση συναρτήσεων του L^p από καλές.

1. <u>Πρόταση</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε οι απλές συναρτήσεις $s: X \to \mathbb{K}$ με $\mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < +\infty$ είναι πυκνές στον $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. $\forall p \geq 1$ $(p < +\infty)$.

Έστω X μ.χ. $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ Borel σ-άλγεβρα. Ένα μέτρο $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ λέγεται <u>κανονικό</u> αν

• $\mu(K) < +\infty$ για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.

• $\mu(B) = \inf\{\mu(U) \mid U$ ανοικτό $B \subseteq U\}$

• $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K$ συμπαγές $K \subseteq B\}$

<u>Ορισμός</u> X μ.χ. λέγεται <u>τοπικά συμπαγής</u> αν $\forall x \in X$ $\exists r > 0$ τ.ω. $\overline{U(x,r)} = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ είναι συμπαγές

<u>Πρόταση</u> Έστω X τοπικά συμπαγής μ.χ. και μ κανονικό μέτρο Borel. Τότε $C_c(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid$ συνεχής με συμπαγή φορέα$\}$ είναι πυκνές στο $L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)$. $(1 \leq p < +\infty)$
(φορέας $supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$)

<u>Απόδειξη</u> Έστω $f \in L^p$. Θέλουμε να βρούμε $\forall \varepsilon > 0$ μια $g_\varepsilon \in C_c(X)$ τ.ω. $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Από την πρόταση 1 αρκεί να γίνει αυτό για απλές (στον L^p)

Έστω f απλή $f(X)\setminus\{0\}=\{a_1,\dots,a_k\}$ και $A_j=f^{-1}(a_j)$
Τότε $f=\sum_{j=1}^{k} a_j A_j$ και αν $f\in L^p$ τότε $\mu(A_j)<+\infty$. Από εδώ φαίνεται ότι αρκεί να προσεγγίσουμε χαρακτηριστικές μετρήσιμων συνόλων πεπ. μέτρου από συναρτήσεις του $C_c(X)$. Πράγματι αν $f_1,\dots,f_k$ είναι συναρτήσεις στον $C_c(X)$ τ.ω. $\|\mathbb{1}_{A_j}-f_j\|_p<\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{k}|a_j|}$ τότε $\|f-\sum_{j=1}^{k}a_if_i\|_p\le\sum|a_j|\,\|\mathbb{1}_{A_j}-f_j\|_p\le$
$\le\sum_{j=1}^{k}|a_j|\cdot\frac{\varepsilon}{\sum|a_j|}=\varepsilon$. Άρα αρκεί να προσεγγίσω την $\mathbb{1}_A$ με συναρτήσεις στον $C_c(X)$ για $A\in\mathcal{A}$ $\mu(A)<+\infty$.

Έστω $\varepsilon>0$. Από κανονικότητα $\exists\, U_\varepsilon$ ανοικτό τ.ω. $A\subseteq U_\varepsilon$ και $\mu(U_\varepsilon\setminus A)<\varepsilon/2$. $\exists\, K_\varepsilon$ συμπαγές τ.ω. $A\supseteq K_\varepsilon$ και $\mu(A\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon/2$. Για κάθε $x\in X$ $\exists\, r_x>0$ τ.ω. $\overline{U(x,r_x)}$ συμπαγής. Για κάθε $x\in K$ $\exists\,\delta_x>0$ με $\delta_x<r_x$ τ.ω. $U(x,\delta_x)\subseteq U_\varepsilon$ από συμπάγεια K_ε υπάρχουν $x_1,\dots,x_n$ τ.ω. $\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i,\delta_{x_i}/2)\supseteq K$. Έστω $V=$
$=\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i,\delta_{x_i}/2)$ ανοικτό και $K_\varepsilon\subseteq V\subseteq\overline{V}$. Τότε $\overline{V}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U(x_i,\delta_{x_i}/2)}$ είναι συμπαγής και $\overline{V}\subseteq U$. Ορίζουμε $f(x)=\frac{d(x,V^c)}{d(x,V^c)+d(x,K_\varepsilon)}$

$f(x)=0$ για $x\in V^c$, $f(x)=1$ για $x\in K_\varepsilon$
$0\le f\le 1$. $\forall x\in X$. f συνεχής. Φορέας της $f\subseteq\overline{V}$ για αυτήν την f έχουμε $f\in C_c(X)$ $\mathbb{1}_{K_\varepsilon}\le f\le\mathbb{1}_U$. επίσης $\mathbb{1}_{K_\varepsilon}\le\mathbb{1}_A\le\mathbb{1}_U$ τότε
$|f-\mathbb{1}_A|^p\le\|\mathbb{1}_U-\mathbb{1}_K\|^p\le\mathbb{1}_{U\setminus K}$ $\quad\|f-\mathbb{1}_A\|_p\le\mu(U_\varepsilon\setminus K_\varepsilon)^{1/p}<\varepsilon^{1/p}$. $\square$

Πρόταση Αν X μ.χ. και μ πεπ. μέτρο Borel στον X τότε $\forall B\in\mathcal{B}(X)$ και $\forall\varepsilon>0$ $\exists\, U_\varepsilon$ ανοικτό και F_ε κλειστό τ.ω. $F_\varepsilon\subseteq B\subseteq U_\varepsilon$ $\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$

Εφαρμογές

1) X συμπαγής μ.χ. μ πεπ. Borel τότε είναι κανονικό. Άρα για κάθε συμπαγή μ.χ. και πεπερασμένο μέτρο Borel οι $C(X)$ είναι πυκνές στο $L^p(X,\mathcal{B}(X),\mu)$

2) Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ είναι κανονικό. Επειδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγής, οι συναρτήσεις $C_c(X)$ είναι πυκνές στον $L^p(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\lambda)$ (λ_n: το μέτρο Lebesgue)

Απόδειξη κανονικότητας του μέτρου Lebesgue: $\lambda_n(K)<+\infty$ για κάθε συμπαγές επειδή κάθε συμπαγές περιέχεται σ' ένα ορθογώνιο πεπερασμένο

- Κανονικό από έξω: Εξ ορισμού εξωτ. μέτρο $\lambda_n^*(B)=\lambda_n(B)$ για $B\in\mathcal{B}(X)$ όπου $\lambda_n^*(B)=\inf\{\sum \lambda_i(U_i): U_i$ ανοικτά ορθογώνια τ.ω. $B\subseteq \bigcup U_i\}$
- Κανονικό από μέσα: Έστω X_k μια αρίθμηση των ορθογωνίων $[m_1,m_1+1]\times[m_2,m_2+1]\times\dots\times[m_k,m_k+1]$ $m_i\in\mathbb{Z}$.

Ορίζουμε $\mu_k(B)=\lambda_n(B\cap X_k)$ $k\in\mathbb{N}$. Δοθέντος B $\exists$ F_k κλειστό τ.ω. $F_k\subseteq B\cap X_k$ $\mu(F_k)\geq \mu_k(B\cap X_k)-\varepsilon/2^k$

F_k συμπαγής $\sum_{k=1}^{m}\lambda_n(F_k)=\sum_{k=1}^{m}\mu_k(F_k)\geq\sum_{k=1}^{m}\mu_k(B\cap X_k)-$

$-\sum_{k=1}^{m}\varepsilon/2^k=\sum_{k=1}^{m}\lambda_n(B\cap X_k)-\sum_{k=1}^{m}\varepsilon/2^k \underset{m\to\infty}{=} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B\cap X_k)\right)-\varepsilon.$

$\lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}F_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_n(F_k)\longrightarrow\lambda_n(B)-\varepsilon.$ αφού αυτό γίνεται για κάθε $\varepsilon>0$ $\lambda_n(B)=\sup\{\lambda(K) \mid K\subseteq B,\ K$ συμπαγής$\}$.

<u>Απόδειξη Πρότασης 1</u> X μ.χ. μ μέτρο Borel πεπερασμένο. Έστω B Borel σύνολο. Θέλουμε νδο $\forall\varepsilon>0$ $\exists U_\varepsilon, F_\varepsilon$ ανοικτό, κλειστό αντίστοιχα τ.ω. $F_\varepsilon\subseteq B\subseteq U_\varepsilon$ ξ' $\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$.

Ορίζουμε $\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{B}(X): \forall\varepsilon>0\ \exists F_\varepsilon$ κλ. U_ε αν. τ.ω. $F_\varepsilon\subseteq A\subseteq U_\varepsilon$ ξ' $\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon\}$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. $X\in\mathcal{A}$ ($F_\varepsilon=U_\varepsilon=X$ $\forall\varepsilon>0$).

Έστω $A\in\mathcal{A}$ Έστω $\varepsilon>0$ $\exists F_\varepsilon, U_\varepsilon$ κλ. αν. $F_\varepsilon\subseteq A\subseteq U_\varepsilon$ ξ' $\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$. Τότε $F_\varepsilon^c, U_\varepsilon^c$ αν. κλ. $U_\varepsilon^c\subseteq A^c\subseteq F_\varepsilon^c$ ξ'

$\mu(F_\varepsilon^c\setminus U_\varepsilon^c)=\mu(U_\varepsilon\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon.$

Τέλος έστω $(A_i)\in\mathcal{A}$ ξ' $\varepsilon>0$. Έστω F_i, U_i κλ. αν. $F_i\subseteq A_i\subseteq U_i$ ξ' $\mu(U_i\setminus F_i)<\varepsilon/2^{i+1}$

θέτω $U=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ $F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$. U ανοικτό ξ' F κλειστό

όπου n τ.ω. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)<\varepsilon/2$ $\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\nearrow\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right.$

$\left.\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\nearrow\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)\right)$

κλειστό $F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq U$ ανοικτό

$\mu(U\setminus F)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\cap\bigcap_{i=1}^{n}F_i^c\right)=$

$=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\cap\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i^c\right)+\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i^c\setminus\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i^c\right)\right)\leq$

$\leq\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i\cap F_i^c)\right)+\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(U_i\setminus F_i)+\varepsilon/2=\varepsilon$

Έπεται ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ άρα <u>$\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα</u>.

Θα δείξουμε ότι κάθε κλειστό ανήκει στην $\mathcal{A}$. ξ' θα έπεται ότι η Borel σ-άλγεβρα περιέχεται στην $\mathcal{A}$.

Έστω F κλειστό & $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $F_\varepsilon = F$. Έστω $U_n = \{x \in X \mid d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ $U_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = F$ $\mu(U_n) \downarrow \mu(F)$ (μ πεπ.)
U ανοικτό άρα $\mu(F) \geq \mu(U_n) - \varepsilon$ για n αρκετά μεγάλο
$\mu(U_n \setminus F) < \varepsilon$ άρα $\mu(U_n \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ έπεται $F \in \mathcal{A}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Χώροι Hilbert

Ένας γραμμικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν υπάρχει μια συνάρτηση $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ με

(1) $\langle x,x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$ και $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

(3) $\langle ax+y, z \rangle = a\langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$ ορίζουμε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} \quad \forall x \in X$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz $\forall x,y \in X \quad |\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
(Απόδειξη παρακάτω)

Πρόταση X γρ. χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot,\cdot \rangle$ και θέτουμε $\|x\| = \sqrt{\langle x,y \rangle}$, $x \in X$ $y \in X$ τότε ο X με την $\|\cdot\|$ γίνεται χώρος με νόρμα.

Απόδειξη $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|ax\|^2 = \langle ax, ax \rangle = a\bar{a} \langle x,x \rangle = |a|^2 \|x\|^2$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|^2 +$
$+ \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\square$

Κανόνας Παραλληλογράμμου Σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Απόδειξη $\|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle =$
$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. $\square$

Τον κανόνα του παρ/μου τον ικανοποιούν μόνο νόρμες που προέρχονται από εσωτερικό γινόμενο.

Παρατήρηση Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο το εσ. γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την νόρμα.

Απόδειξη (x_n), (y_n) ακολ. στον X. τ.ω. $x_n \to x$ και $y_n \to y$
$(\|x_n - x\| \to 0$ και $\|y_n - y\| \to 0)$ τότε $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x,y \rangle| =$
$= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x,y \rangle| \leq$
$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x,y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\| \quad \circledast$

Η $(\|x_n\|)$ είναι φραγμένη αφού (x_n) συγκλίνει. και άρα από τριγ. ανισότητα $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$ η $(\|x_n\|)_n$ συγκλίνει στο $\|x\|$. Άρα $\circledast \leq \sup\|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\| \to 0$

Ορισμός Ένας γρ. χώρος με εσ. γινόμενο λέγεται <u>χώρος Hilbert</u> αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσ. γινόμενο (δηλ. X χώρος Banach με την νόρμα του εσ. γινομένου).

Ορισμός Έστω X χώρος με εσ. γινόμενο $x,y \in X$. Τα x,y λέγονται <u>κάθετα</u> $(x \perp y)$ αν $\langle x,y\rangle = 0$

Αν M γρ. υπόχωρος του X τότε $M^{\perp} := \{y \in X \mid \langle x,y\rangle = 0 \ \forall x \in M\}$

Παρατηρήσεις (1) Το $0 \perp x \ \forall x \in X$ $(\langle 0,x\rangle = \langle x-x,x\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle)$

Το 0 είναι το μόνο στοιχείο με αυτή την ιδιότητα: αν $\langle x,y\rangle = 0$ $\forall y \in X$ τότε $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(2) Αν $x,y \in X$ με $\langle x,y\rangle = 0$ τότε $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (<u>Θεώρημα Πυθαγόρα</u>)

Θεώρημα (Ορθογώνια Προβολή)

Αν H χώρος Hilbert & M κλειστός υπόχωρος & $x \in H$ τότε υπάρχει μοναδικό $y \in M$ τ.ω. $\|x-y\| = dist(x,M) = \min\{\|x-z\| \mid z \in M\}$. Αυτό το $y \in M$ συμβολίζεται $P_M(x)$ & λέγεται η <u>προβολή του x στο M</u>. Επιπλέον $x - P_M(x) \in M^{\perp}$

Πόρισμα Αν H χώρος Hilbert & M κλ. υπόχωρος. Τότε κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά στην μορφή $x = x' + x''$ τ.ω. $x' \in M$ & $x'' \in M^{\perp}$.

Απόδειξη (Πορίσματος) Αν $x \in H$ τότε $x' = P_M(x)$ & $x'' = x - P_M(x)$.

Για το μονοσήμαντο: $x = x' + x'' = y' + y''$ με $x', y' \in M$ & $x'', y'' \in M^{\perp}$ Παίρνουμε $x' + x'' - y' - y'' = 0 \Rightarrow$

$\|x'+x''-y'-y''\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|(x'-y') + (x''-y'')\|^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\|x'-y'\|^2 + \|x''-y''\|^2 = 0 \Rightarrow x' = y'$ & $x'' = y''$

Για $z \in M$ $\|x-y'\|^2 \leq \|x-y'\|^2 + \|z-y'\|^2 = \|x-z\|^2$ άρα $y' = P_M(x) = x'$ $\square$

Απόδειξη θεωρήματος Έστω (y_n) στο M τ.ω. $\|x-y_n\| \longrightarrow \delta := \inf\{\|x-z\| \mid z \in M\}$. $\|y_n - y_m\|^2 + \|2x - y_n - y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2$ $\left(\|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \leq 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\delta^2 \longrightarrow 0 \quad n,m \to \infty\right)$

Έπεται ότι η (y_n) είναι βασική & από πληρότητα $y_n \to y \in M$

Τότε $\|x-y\| = \lim \|x-y_n\| = \delta$. (συνέχεια νόρμας)

Μοναδικότητα: Έστω $y' \in M$ τ.ω. $\|x-y'\|=\delta$. κανόνας παρ/μου
$\|y-y'\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|y'-x\|^2 - \|2x-y-y'\|^2 \le 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$
άρα $y=y'$.

Να δείξουμε ότι $x - P_M(x) \in M^{\perp}$. Έστω $z = x - P_M(x)$
$\langle z,w\rangle = |\langle z,w\rangle| e^{i\vartheta}$ για κάποιο $\vartheta \in \mathbb{R}$ $\|z - te^{i\vartheta}w\|^2 =$
$= \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - t\langle z,w\rangle e^{i\vartheta} - te^{i\vartheta}\langle w,z\rangle =$
$= \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(\langle z,w\rangle e^{i\vartheta}) =$
$= \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t|\langle z,w\rangle|$. Αν $w \in M$ $\|z - te^{i\vartheta}w\|^2 =$
$= \|x - P_M(x) - te^{i\vartheta}\|^2$. Η συνάρτηση αυτή του t ελαχιστοποιείται στο $t=0$ άρα πρέπει η παράγωγος στο $t=0$ να μηδενίζονται.

Η παράγωγος είναι $2t\|w\|^2 - 2|\langle z,w\rangle|$ και στο $t=0$ είναι $2|\langle z,w\rangle|$ άρα πρέπει $\langle z,w\rangle = 0$. □

Πόρισμα Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος με $M \ne H$ τότε $\exists x \in H \setminus \{0\}$ με $x \in M^{\perp}$

Απόδειξη Αν $M \ne H$ $\exists y \in H \setminus M$ και $y \ne 0$. $x = y - P_M(y)$ και αφού $y \notin M$ το $x \ne 0$. □

Γραμμικά Συναρτησοειδή H χώρος Hilbert. Αν $a \in H$ τότε $\varphi_a(x) := \langle x,a\rangle$ $x \in H$ είναι γρ. συναρτησοειδές. Είναι και φραγμένο γιατί $|\varphi_a(x)| = |\langle x,a\rangle| \le \|a\|\cdot\|x\|$. άρα $\|\varphi_a\| \le \|a\|$.
Για $x=a$ $|\varphi_a(a)| = \|a\|^2 = \|a\|\cdot\|a\|$ αυτό δείχνει ότι $\|\varphi_a\| \ge \|a\|$
Άρα έχουμε $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

Αυτό δίνει απεικόνιση $T: H \to H^*$ όπου $T(a) = \varphi_a$ και η T είναι ισομετρία όπως είδαμε. Η T είναι αντιγραμμική δηλ. $T(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda}T(a) + \bar{\mu}T(b)$ για $a,b \in H$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.

Θεώρημα Riesz Αν H χώρος Hilbert και $\varphi \in H^*$ τότε $\exists a \in H$ τ.ω. $\varphi = \varphi_a$ δηλ. $\varphi(x) = \langle x,a\rangle$. $\forall x \in H$.

Απόδειξη Θεωρούμε τον $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \in H \mid \varphi(x) = 0\}$. κλειστός γρ. υπόχωρος του H. Αν $\mathrm{Ker}\varphi = H$ τότε $\varphi \equiv 0$ οπότε μπορούμε να πάρουμε $a=0$.
Αν $\mathrm{Ker}\varphi \ne H$ τότε $\exists z \in H, z \ne 0$ $z \in \mathrm{Ker}\varphi^{\perp}$. Για $y \in H$
$\varphi(z\varphi(y) - \varphi(z)y) = 0$ άρα $z\varphi(y) - \varphi(z)y \in \mathrm{Ker}\varphi$ $\forall y \in H$
άρα $\langle z, z\varphi(y) - \varphi(z)(y)\rangle = 0$ $\forall y \in H$
$\langle z\varphi(y) - \varphi(z)y, z\rangle = 0$ $\forall y \in H$ $\varphi(y)\|z\|^2 = \varphi(z)\langle y,z\rangle$
$\varphi(y) = \langle y, \underbrace{\frac{\overline{\varphi(z)}}{\|z\|^2}z}_{a}\rangle$ $\forall y \in H$

Μοναδικότητα: Έστω $\varphi(y) = \langle y, b\rangle$ για κάποιο $b \in H$. Τότε $\langle y, b-a\rangle = \varphi(y) - \varphi(y) = 0$ $\forall y \in H$ άρα $b - a = 0$ επειδή το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο σε όλα είναι το μηδέν. $\square$

Απόδειξη της Cauchy-Schwarz:

Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $0 \leq \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle =$
$= \|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2 = (\|x\| + t\|y\|)^2$. Το τριώνυμο είναι ≥ 0 άρα έχει διακρίνουσα ≤ 0 δηλ.
$4t^2\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2 t^2 \|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $x, y \in X$ $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda = |\lambda| e^{i\vartheta}$ για κάποιο $\vartheta \in \mathbb{R}$.
$\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| e^{it}$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. $0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle =$
$= \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle =$
$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(|\lambda| e^{-i\vartheta} |\langle x,y\rangle| e^{it}\right) +$
$+ |\lambda|^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2|\lambda| |\langle x,y\rangle| \cos(t-\vartheta) + |\lambda|^2\|y\|^2$

Επιλέγω ϑ τ.ω. $\cos(t-\vartheta) = -1$ άρα $0 \leq \|x\|^2 - 2|\lambda| |\langle x,y\rangle| + |\lambda|^2\|y\|^2$
$\forall |\lambda| \in \mathbb{R}_+$ Επιλέγω $|\lambda| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ $(\|y\| \neq 0)$ οπότε έχουμε
$0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{\|x\|}{\|y\|}|\langle x,y\rangle| + \|x\|^2 \Leftrightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Αν $y = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει τετριμένα.

Αρμονική Ανάλυση

X γρ. χώρος. με εσ. γινόμενο. Ένα υποσύνολο $\{e_i : i\in I\} \subseteq X$ λέγεται <u>ορθοκανονικό</u> αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

<u>Παρατήρηση</u> Κάθε ο/κ σύνολο είναι γρ. ανεξάρτητο. Πράγματι, αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ & $e_1, \dots, e_n \in X$ με $\sum \lambda_i e_i = 0$ τοτε $0 = \langle \sum \lambda_i e_i, e_j\rangle = \lambda_j$

<u>Ορισμός</u> Ένα αριθμήσιμο ο/κ σύνολο λέγεται <u>ο/κ βάση</u> αν $X = \overline{\text{span}}\,\{e_i : i\in I\}$.

<u>Πρόταση</u> Καθε διαχ. χώρος Hilbert εχει ο/κ βάση. (αριθμήσιμη)

<u>Απόδειξη</u> Επειδή X διαχ. κάθε ο/κ σύνολο είναι αριθμήσιμο. Λόγος: αν $\{e_i : i\in I\}$ είναι ο/κ τοτε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ $\forall i\neq j$. Σε ένα διαχωρίσημο χώρο δεν μπορούμε να έχουμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία με $\|e_i - e_j\| \geq \delta$ για κάποιο $\delta > 0$.

Θεωρούμε την κλάση των ορθοκανονικών υποσυνόλων του X με την διάταξη του υποσυνόλου. Κάθε αλυσίδα ως προς αυτή τη διάταξη εχει μέγιστο. Απο το Λήμμα Zorn, υπάρχει μεγιστικό ο/κ σύνολο. Αυτό θα είναι αριθμήσιμο & θα είναι βάση. Πράγματι, αν $H \neq \overline{\text{span}}\{e_i : i\in I\}$ τοτε $\exists v\neq 0$ $v\in H$ $v\notin \overline{\text{span}}\{e_i\}$ τοτε υπάρχει $v' \perp \overline{\text{span}}\{e_i : i\in I\}$ & $v'\neq 0$ & αρα το $\{v'\}\cup\{e_i : i\in I\}$ είναι ο/κ & είναι μεγαλύτερο απο το μεγιστικό $\{e_i : i\in I\}$ άτοπο αρα $\{e_i : i\in I\}$ είναι ο/κ βάση. $\square$

<u>Λήμμα</u> αν X χώρος με εσ. γινόμενο & $\{e_i : i\in I\}$ ο/κ σύνολο τοτε $\forall x\in X$ $d(x, \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}) =$
$$= \|x - \textstyle\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|.$$

<u>Απόδειξη</u> $\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 \overset{(*)}{=} \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 + \|\sum_{i=1}^n (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\|^2$. Επειδή $\langle x - \sum\langle x, e_i\rangle e_i, \sum(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\rangle =$
$$= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \overline{(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)} - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x, e_i\rangle \overline{(\langle x, e_j\rangle - \lambda_j)} \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} =$$
$$= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \overline{(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)} - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \overline{(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)} = 0$$
Άρα απο την $(*)$ $\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 \geq \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2$ $\square$

<u>Παρατήρηση</u> (Ανισότητα Bessel) Σε ένα γρ. χώρο με εσ. γινόμενο, αν $\{e_i : i\in I\}$ (αριθμ.) ο/κ σύνολο τοτε
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη Έστω $I=\mathbb{N}$ $s_n(x)=\sum_{i=1}^n \langle x,e_i\rangle e_i$. Από το Λήμμα $\langle x-s_n(x), s_n(x)\rangle=0$.

$$\langle x-s_n(x), s_n(x)\rangle = \sum_{i=1}^n |\langle x,e_i\rangle|^2 - \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x,e_k\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle e_k,e_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n|\langle x,e_i\rangle|^2-\sum_{i=1}^n|\langle x,e_i\rangle|^2.$$ Από Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|x\|^2=\|x-s_n(x)\|^2+\|s_n(x)\|^2 \geq \|s_n(x)\|^2=\sum_{i=1}^n|\langle x,e_i\rangle|^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

παίρνοντας όριο $n\to\infty$ $\|x\|^2\geq\sum_{i\in\mathbb{N}}|\langle x,e_i\rangle|^2$ □

<u>Θεώρημα</u> Έστω H χώρος Hilbert. $\{e_i \mid i\in I\}$ αριθμ. ο/κ σύνολο. ΤΑΕΙ

(1) Το $\{e_i \mid i\in I\}$ είναι ο/κ βάση

(2) Αν $x\in H$ έχει $\langle x,e_i\rangle=0$ $\forall i\in I \Rightarrow x=0$.

(3) Αν για $x\in H$, ορίζουμε $s_n(x)=\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i$ τότε $s_n(x)\to x$

(4) Ισχύει η ταυτότητα Parceval: $\|x\|^2=\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2$.

<u>Απόδειξη</u> $I=\mathbb{N}$

<u>(1)⇒(2)</u> $\overline{span}\{e_i \mid i\in\mathbb{N}\}=H$ άρα υπάρχει για τυχόν $x\in H$ μια ακολ. $y_n\in span\{e_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ τ.ω. $y_n\to x$. Έστω $\langle x,e_i\rangle=0$ $\forall i\in\mathbb{N}$. Άρα $\langle x,y_n\rangle=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $\langle\cdot,\cdot\rangle$ συνεχής $\langle x,y_n\rangle\to\langle x,x\rangle$ άρα $\langle x,x\rangle=0$ άρα $x=0$.

<u>(2)⇒(3)</u> Από την αν. Bessel $\sum_{n=1}^\infty |\langle x,e_n\rangle|^2\le\|x\|^2<+\infty$ άρα

$$\|s_n(x)-s_m(x)\|^2=\Big\|\sum_{\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}}\langle x,e_k\rangle e_k\Big\|^2=\sum_{\min}^{\max}|\langle x,e_k\rangle|^2\longrightarrow0$$

(από την Bessel) άρα (s_n) είναι βασική ακολουθία άρα συγκλίνει. Έστω $y=\lim y_n$. Θα δείξουμε ότι $y=x$.
Έχουμε $\langle x-y,e_k\rangle=\lim_{n\to\infty}(\langle x,e_k\rangle-\langle s_n(x),e_k\rangle)$ από τον ορισμό του $s_n(x)$ είναι $\langle s_n(x),e_k\rangle=\langle x,e_k\rangle$ για $n\geq k$ άρα $\langle x-y,e_k\rangle=\lim_n(\langle x,e_k\rangle-\langle x,e_k\rangle)=0$ το k ήταν τυχόν άρα από (2) έχουμε $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

<u>(3)⇒(4)</u> Στην απόδειξη της Bessel $\|x\|^2=\|x-s_n(x)\|^2+\|s_n(x)\|^2 =$

$$= \|x-s_n(x)\|^2+\sum_{k=1}^n|\langle x,e_k\rangle|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0+\sum_{k\in\mathbb{N}}|\langle x,e_k\rangle|^2.$$

<u>(4)⇒(1)</u> Από την ίδια ισότητα $\|x-s_n(x)\|^2=\|x\|^2-\|s_n(x)\|^2 =$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^n|\langle x,e_k\rangle|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2-\sum_{k\in\mathbb{N}}|\langle x,e_k\rangle|^2=0 \text{ (Parceval)}$$

Όμως $s_n(x)\in span\{e_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ άρα $x=\lim_n s_n(x)\in\overline{span}\{e_i\}$

Αφού το x ήταν τυχόν $H=\overline{span}\{e_i \mid i\in\mathbb{N}\}$

□

Συζυγείς Τελεστές

<u>Θεώρημα</u> Έστω H χώρος Hilbert και $T: H \to H$ γρ. φραγμένος. τότε $\forall y \in H\ \exists!\ T^*(y)$ τ.ω. $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle\ \forall x \in H$ το T^* ορίζει φραγμ. γρ. τελεστή που ονομάζεται <u>συζυγής γρ. τελεστής</u>. Επι πλεον έχουμε $(T^*)^* = T$, $\|T^*\| = T$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $y \in H$ τοτε $\varphi_y(x) = \langle T(x), y\rangle$, $x \in H$. ορίζει γρ. συναρτησοειδές στο H.

Πράγματι: $\varphi_y(a_1x_1 + a_2x_2) = \langle T(a_1x_1 + a_2x_2), y\rangle =$
$= \langle a_1T(x_1) + a_2T(x_2), y\rangle = a_1\langle T(x_1), y\rangle + a_2\langle T(x_2), y\rangle =$
$= a_1\varphi_y(x_1) + a_2\varphi_y(x_2)$.

$|\varphi_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| \leq \|T(x)\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \|x\| \cdot \|y\|$ και αρα $\|\varphi_y\| \leq \|T\| \|y\|$. Αρα απο Θεώρημα Riesz υπάρχει μοναδικός $T^*(y)$ τ.ω. $\varphi_y(x) = \langle x, T^*(y)\rangle \Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle\ \forall x \in H$.

<u>Γραμμικότητα του T^*</u>: $\langle x, T^*(b_1y_1 + b_2y_2)\rangle =$
$= \langle T(x), b_1y_1 + b_2y_2\rangle = \langle T(x), y_1\rangle \bar{b}_1 + \langle T(x), y_2\rangle \bar{b}_2 =$
$= \langle x, T^*(y_1)\rangle \bar{b}_1 + \langle x, T^*(y_2)\rangle \bar{b}_2 = \langle x, b_1T^*(y_1) + b_2T^*(y_2)\rangle$
αρα απο μοναδικότητα $T^*(b_1y_1 + b_2y_2) = b_1T^*(y_1) + b_2T^*(y_2)$.

<u>T^* φραγμένος</u>: $\|T^*(y)\|^2 = \langle T^*(y), T^*(y)\rangle = \langle T(T^*(y)), y\rangle \leq$
$\leq \|T(T^*(y))\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwarz) $\leq \|T\| \cdot \|T^*(y)\| \cdot \|y\|$ (ορσ νόρμας)
Αρα $\|T^*(y)\| \leq \|T\| \cdot \|y\|\ \forall y \in H$ αρα $\|T^*\| \leq \|T\|$. αρα T^* φραγμένος.

<u>$(T^*)^* = T$</u>: $\langle T^*x, y\rangle = \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \overline{\langle T(y), x\rangle} =$
$= \langle x, T(y)\rangle\ \forall x, y \in H$ αρα $(T^*)^*(y) = T(y)$
(επειδή $(T^*)^*$ και T ορίζουν το ίδιο γρ. συναρτησοειδές.)
αυτό για κάθε $y \in H$ αρα $(T^*)^* = T$.

Τώρα έπεται επίσης $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$. Αρα $\|T\| = \|T^*\|$. $\square$

Μεγιστική Συνάρτηση Hardy-Littlewood & Θεώρημα Διαφόρισης του Lebesgue

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολ/μη $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Αν η f είναι συνεχής στο $x\in(a,b)$ τότε F είναι διαφορίσιμη στο x.

& $F'(x)=f(x)$ δηλ. $\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right)\longrightarrow f(x)$.

$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ $\quad \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(y)\,dy \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ για $x\in(a,b)$ σημείο συνέχειας της f.

Δηλ. $\frac{1}{h+h'}\int_{x-h}^{x+h'} f(y)\,dy \xrightarrow{h,h'\to 0} f(x)$ $\quad ⊛ \ \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy \xrightarrow[\lambda(I)\to 0]{} f(x)$

I αν. διάστημα, $x\in I$ & $\lambda(I)$ μέτρο Lebesgue του I.

Η ⊛ ισχύει σχεδόν παντού για Riemann ολ/μες συναρτήσεις.

Ερώτημα: Ισχύει για η ⊛ σχεδόν παντού για $f\in L^1(\mathbb{R})$ ή γενικότερα για $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ή για $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Η απάντηση είναι ναι! (Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue).

Απόδειξη της ⊛ για x σημείο συνέχειας της f: Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ & x σημείο συνέχειας της f. δοθέντος $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ $|x-y|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Αν I αν. διάστημα με $x\in I$ & $\lambda(I)<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ $\forall y\in I$ άρα $\left|\frac{1}{\lambda(I)}\int_I f(y)\,dy - f(x)\right| =$

$$= \left|\frac{1}{\lambda(I)}\int_I f(y)\,dy - \frac{1}{\lambda(I)}\int_I f(x)\,dy\right| = \left|\frac{1}{\lambda(I)}\int_I \left(f(y)-f(x)\right)dy\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda(I)}\int_I |f(y)-f(x)|\,dy \le \frac{\varepsilon\,\lambda(I)}{\lambda(I)} = \varepsilon.$$

Η ίδια απόδειξη γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$ με I αν. ~~[illegible]~~ μπάλες περιοχών του x.

$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\quad f^*(x)=\sup\limits_{\substack{B\text{ ανοικτ.}\\ \text{μπάλες}\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f|\,d\lambda_n$

Άσκηση
Υπολογίστε f^*, Mf για $f=\mathbb{1}_{[a,b]}$

η $f^*(x)$ είναι η μεγιστική (μη κεντραρισμένη) συνάρτηση της f.

κεντραρισμένη μεγιστική $\quad M(f)(x)=\sup\limits_{r>0}\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f|\,d\lambda_n$

$$f^*\ge Mf \qquad f^*\le 2^n Mf$$

Αρμονική Ανάλυση

Θεώρημα Παραγώγισης Lebesgue - Μεγιστική Συνάρτηση Littlewood.

Παρατήρηση $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B f\,d\lambda_n = f(x)$ για x σημείο συνέχειας της f.

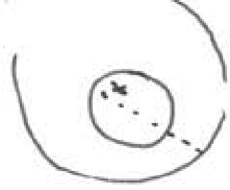
Για f μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^n$ $f^*(x) := \sup\limits_{\substack{x\in B\\ B \text{ αν. μπάλα}}} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f|\,d\lambda_n$

η μη κεντραρισμένη μεγιστική συνάρτηση της f.

κεντραρισμένη μεγιστική συνάρτηση $Mf(x) := \sup\limits_{r>0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f|\,d\lambda_n$

Παρατήρηση $Mf(x) \le f^*(x) \le 2^n Mf(x)$.

Αν B μπάλα που περιέχει το x τότε $B\subseteq B(x,2r)$ όπου r η ακτίνα της B.



$$\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f|\,d\lambda_n \le \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_{B(x,2r)} |f|\,d\lambda_n =$$

$$= \frac{\lambda_n(B(x,2r))}{\lambda_n(B)} \frac{1}{\lambda_n(B(x,2r))}\int_{B(x,2r)} |f|\,d\lambda_n \le \frac{(2r)^n \lambda_n(B(0,1))}{r^n \lambda_n(B(0,1))} Mf(x) =$$

$$= 2^n Mf(x).$$

Παράδειγμα $n=1$. $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$. $f^*(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{b-x} & x\le a \\ \frac{b-a}{x-a} & x\ge b \\ 1 & a<x<b \end{cases}$

$$Mf(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)} & x\le a \\ 1 & a<x<b \\ \frac{b-a}{2(x-a)} & x\ge b \end{cases}$$

Παρατήρηση Αν $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε f^* μετρήσιμη. Συγκεκριμένα κάθε $\{x\in\mathbb{R}^n \mid f^*(x)>a\}$ είναι ανοικτό. δηλ. f^* είναι κάτω ημισυνεχής. Πράγματι, έστω $a\in\mathbb{R}$ & $x\in\mathbb{R}^n$ τ.ω. $f^*(x)>a$. Υπάρχει ανοικτή μπάλα B τ.ω. $x\in B$ & $\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f|\,d\lambda_n > a$ τότε $f^*(y)>a$ $\forall y\in B$. Άρα το $(f^*)^{-1}(a,+\infty)$ περιέχει μαζί με το x μια ανοικτή μπάλα γύρω από το x. άρα $(f^*)^{-1}(a,+\infty)$ είναι ανοικτό.

Μια πραγματική συνάρτηση f είναι κάτω ημισυνεχής σε ένα x_0 αν $\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x_0) = \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$

Μια συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής αν $f^{-1}(a,+\infty)$ ανοικτό $\forall a \in \mathbb{R}$.

<u>Ορισμός</u> Ένας γρ. τελεστής από έναν υπόχωρο του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ στις μετρήσιμες συναρτήσεις ενός χώρου μέτρου $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ λέγεται <u>υπογραμμικός</u> αν $|T(cf)| = c|T(f)|$ $\forall c \geq 0$ κ'

$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ $\forall f,g$ στο πεδίο ορισμού του T.

Ένας υπογραμμικός τελεστής καλείται <u>ισχυρού τύπου (p,q)</u> αν ορίζεται στον $L^p(\mu)$ $\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p$.

Λέγεται ασθενούς τύπου (p,q) αν

$\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > t\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q$ $\forall t \geq 0$

Ισχυρού τύπου $\Rightarrow$ ασθενούς τύπου.

Πράγματι, αν $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ $\forall f \in L^p(\mu)$

$\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > t\}) \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{t^q}$ (Markov) $\leq C^q \frac{\|f\|_p^q}{t^q}$

<u>Θεώρημα</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε f^* ικανοποιεί ασθενούς τύπου $(1,1)$ ανισότητα, συγκεκριμένα $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n | f^*(x) > t\}) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{t}$

<u>Παρατήρηση</u> Συνήθως $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^n)$

<u>Πόρισμα</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $f^* < +\infty$ λ_n-σχ. π.

<u>Απόδειξη</u> $\{x \in \mathbb{R}^n | f^*(x) = +\infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n | f^*(x) > m\}$ άρα

$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n | f^*(x) = +\infty\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n | f^*(x) > m\})$ $\forall m \in \mathbb{N}$

Άρα $\mu(\{x | f^*(x) > m\}) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\mu(\{x | f^*(x) > m\}) = 0$ □

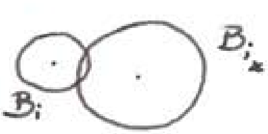
<u>Λήμμα</u> (Λήμμα Κάλυψης Vitali) Αν $B_1, \dots, B_N$ μπάλες τότε υπάρχουν ξένες ανά δυο μπάλες $B_{i_1}, \dots, B_{i_m}$ από αυτές τ.ω. $\bigcup_{j=1}^{N} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \tilde{B}_{i_j}$ όπου $\tilde{B}_{i_j}$ μπάλα με ίδιο κέντρο με την B_{i_j} αλλά τριπλάσια ακτίνα. Άρα $\lambda_n(\bigcup_{i=1}^{N} B_i) \leq 3^n \sum_{j=1}^{m} \lambda_n(B_{i_j})$

<u>Απόδειξη Λήμματος</u> Έστω $\mathcal{B}_1=\{B_1,\dots,B_N\}$. διαλέγουμε B_{i_1} ώστε η B_{i_1} έχει μέγιστη ακτίνα. $\mathcal{B}_2=\{B\in\mathcal{B}_1 \mid B\cap B_{i_1}=\emptyset\}$ ϗ διαλέγω B_{i_2} ώστε η ακτίνα της είναι μέγιστη στη $\mathcal{B}_2$.

Επαγωγικά ορίζουμε $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_k$ ϗ $B_{i_1},B_{i_2},\dots,B_{i_k}$ ϗ $\mathcal{B}_{k+1}=\{B\in\mathcal{B}_k : B\cap B_{i_k}=\emptyset\}$ ϗ $B_{i_{k+1}}$ μια στην $\mathcal{B}_{k+1}$ με μέγιστη ακτίνα. Υπάρχει $m\le N$ με $\mathcal{B}_{m+1}=\emptyset$. Έστω $\tilde{B}_{i_k}$ η μπάλα με το ίδιο κέντρο με την B_{i_k} ϗ τριπλάσια ακτίνα.

<u>Ισχυρισμός</u>: $\bigcup_{i=1}^{N} B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \tilde{B}_{i_j}$ ϗ $B_{i_j}\cap B_{i_{j'}}=\emptyset \ \forall j\neq j'$

<u>Απόδειξη</u>: απο κατασκευή καμία απο τις B_{i_j} δεν τέμνει τις προηγούμενες. Κάθε B_i περιέχεται στο $\mathcal{B}_1$ ϗ δεν περιέχεται στο $\mathcal{B}_{m+1}$. Άρα υπάρχει $k\in\{1,2,\dots,m\}$ τ.ω. $B_i\in\mathcal{B}_k$ ϗ $B_i\notin\mathcal{B}_{k+1}$. οπότε $B_i\cap B_{i_k}\neq\emptyset$. $B_i\in\mathcal{B}_{i_k}$ έπεται οτι ακτίνα$(B_i)\le$ ακτίνα(B_{i_k}) άρα $B_i\subseteq\tilde{B}_{i_k}$ απο τριγωνική ανισότητα.



Τέλος $\lambda_n(\bigcup_{i=1}^{N} B_i)\le\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{m}\tilde{B}_{i_j})\le\sum_{j=1}^{m}\lambda_n(\tilde{B}_{i_j})=$
$=3^n\sum_{j=1}^{m}\lambda_n(B_{i_j})$ (Λήμμα) □

<u>Απόδειξη Θεωρήματος</u> Έστω $t>0$ ϗ K συμπαγές υποσύνολο του $\{x\in\mathbb{R}^n \mid f^*(x)>t\}=:A_t$. $\forall x\in A_t\ \exists B_x$ ανοικτή μπάλα τ.ω. $x\in B_x$

$$\frac{1}{\lambda_n(B_x)}\int_{B_x}|f|\,d\lambda_n>t \Leftrightarrow \frac{1}{t}\int_{B_x}|f|\,d\lambda_n > \lambda_n(B_x).$$

Οι μπάλες B_x $x\in K$ αποτελούν κάλυψη του K απο συμπάγεια υπάρχουν $B_{x_1},\dots,B_{x_N}$ μπάλες που καλύπτουν το K. Απο Λήμμα υπάρχουν $i_1,\dots,i_m\in\{1,2,\dots,N\}$ τ.ω. οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$ να είναι ξένες μεταξύ τους ϗ $\bigcup_{i=1}^{N}B_{x_i}\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}\tilde{B}_{x_{i_j}}$. Επομένως $K\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}\tilde{B}_{x_{i_j}}$. $\lambda_n(K)\le\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{m}\tilde{B}_{i_j})\le\sum_{j=1}^{m}\lambda_n(\tilde{B}_{x_{i_j}})=$
$=3^n\sum_{j=1}^{m}\lambda_n(B_{x_{i_j}})\le\frac{3^n}{t}\sum_{j=1}^{m}\int_{\tilde{B}_{x_{i_j}}}|f|\,d\lambda_n=\frac{3^n}{t}\int_{\bigcup_{j=1}^{m}B_{x_{i_j}}}|f|\,d\lambda_n\le$
$\le\frac{3^n}{t}\|f\|_1$.

Απο εσωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue
$\lambda_n(A_t)=\sup\{\lambda_n(K): K\subseteq A_t \ K$ συμπαγές$\}\le\frac{3^n}{t}\|f\|_1$

Θεώρημα Παραγώγισης Lebesgue Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε

$$\circledast \lim_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda_n = f(x)$$ για λ_n-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}^n$.

B αν. μπάλα

Απόδειξη Έχουμε δει ότι για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ η $\circledast$ ισχύει για κάθε x σημείο συνέχειας της f. Θα δείξουμε ότι $\forall t>0$ $\lambda_n(E_t)=0$ όπου $E_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda_n - f(x) \right| > t \}$

Τότε συμπεραίνουμε ότι $\lambda_n(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{1/m})=0$ ξ για $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{1/m}$

$$\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda_n - f(x) \right| = 0.$$

Έστω $t>0$ ξ $\varepsilon>0$. Υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon t}{2(3^n+1)}$

$$\left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda_n - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B g \, d\lambda_n - g(x) \right| + |f(x)-g(x)| + \left| \int_B (f-g) d\lambda_n \right| \frac{1}{\lambda_n(B)}$$

Άρα $$\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int f \, d\lambda_n - f(x) \right| \leq 0 + |f(x)+g(x)| + (f-g)^*(x)$$

$$E_t \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)-g(x)| > \tfrac{t}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid (f-g)^*(x) > \tfrac{t}{2}\}$$

Άρα $\lambda_n(E_t) \leq \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)-g(x)| > t/2\}) + \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (f-g)^*(x) > \frac{t}{2}\}) \leq$

$\leq \frac{\|f-g\|_1}{t/2} + \frac{3^n}{t/2} \|f-g\|_1 < \varepsilon$. Αφού ε τυχόν, έπεται ότι $\lambda_n(E_t)=0$ □

(Markov) (1.1) ανισότητα για μεγιστική συνάρτηση.

Παρατήρηση Για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι $|f(x)| \leq |f^*(x)|$ για λ_n-σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη Από Θεώρημα Παραγώγισης Lebesgue για $|f|$

$$|f(x)| = \lim_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f| \, d\lambda_n \leq \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f| \, d\lambda_n = f^*(x)$$

για λ_n-σχ. κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ □.

Αρμονική Ανάλυση

30/10/17 8Α

$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$

<u>Ερώτημα</u> για $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,dy = f(x)$ για λ_n-σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}^n$

<u>Ορισμός</u> Μια μετρήσιμη συνάρτηση f του $\mathbb{R}^n$ λέγεται <u>τοπικά ολ/μη</u> αν $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\exists\, \delta_x>0$ τ.ω. $f\cdot\mathbb{1}_{B(x,\delta_x)}\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με $f\cdot\mathbb{1}_K\in L^1(\mathbb{R})$ για κάθε K συμπαγές $\subseteq\mathbb{R}^n$.

Οι τοπικά ολ/μες συναρτήσεις συμβολίζονται με $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Θεώρημα (Παραγώγισης του Lebesgue)</u>

Για $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,dy = f(x)$ για λ_n-σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}^n$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $m\in\mathbb{N}$ κ' θεωρούμε την $f\cdot\mathbb{1}_{B(0,m)}$ για δοσμένη $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. $B(0,m)$ περιέχεται σε συμπαγές του $\mathbb{R}^n$ άρα $f\cdot\mathbb{1}_{B(0,m)}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Εφαρμόζουμε θεώρημα παραγώγισης Lebesgue στην $f\cdot\mathbb{1}_{B(0,m)}$

$\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \int_B f\cdot\mathbb{1}_{B(0,m)}\,d\lambda = f\cdot\mathbb{1}_{B(0,m)}(x)$ σε ένα σύνολο E_m με

$\lambda(E_m^c)=0$. Για $x\in B(0,m)$ οι μέσοι όροι $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f\cdot\mathbb{1}_{B(0,m)}\,d\lambda =$
$= \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f\,d\lambda$ για B με $\lambda(B)$ αρκετά μικρό ώστε $B\subseteq B(0,m)$.

Έπεται ότι για $x\in B(0,m)\cap E_m$ $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}}\int_B f\,d\lambda = f(x)$ κ' $\lambda(B(0,m)\setminus E_m)=0$

για $x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}(B(0,m)\cap E_m)$ Ισχύει $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}}\int_B f\,d\lambda = f(x)$ ⊛ κ'

κ' $\lambda\left(\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}(B(0,m)\cap E_m)\right)\leq\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}B(0,m)\setminus E_m\right)=0$.

Άρα η ⊛ ισχύει σχ. παντού. □

<u>Ορισμός</u> Για $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ το <u>σύνολο Lebesgue</u> ($Leb(f)$) της f είναι τα $x\in\mathbb{R}^n$ για τα οποία $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y)\longrightarrow 0$.

<u>Θεώρημα</u> Για $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο Lebesgue της f ικανοποιεί $\lambda(\mathbb{R}^n\setminus Leb(f))=0$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για την $f-r\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ (r σταθερά) η οποία είναι $\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy = |f(x)-r|$ για x σε ένα σύνολο E_r με $\lambda(E_r^c)=0$.

Έστω $E = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} E_r$. Τότε $\lambda(E^c)=0$. Έστω $x\in E$ 5· ε>0. Επιλέγουμε ρητό τ.ω. $|f(x)-r|<\varepsilon/2$. $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy \le \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy + |f(x)-r|$. Για $\lambda(B)$ αρκούντως μικρό ώστε

$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy < |f(x)-r|+\varepsilon$, είναι $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy \le 2|f(x)-r|+\varepsilon < 3\varepsilon$ □

__Ορισμός__ Έστω $E\subseteq\mathbb{R}^n$ μετρήσιμο. Ένα $x\in\mathbb{R}^n$ λέγεται __σημείο πυκνότητας__ του E αν $\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 1$.

__Θεώρημα__ Αν $E\subseteq\mathbb{R}^n$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E)>0$ τότε σχεδόν κάθε σημείο του E είναι σημείο πυκνότητας του E 5· σχεδόν κάθε σημείο του E^c δεν είναι σημείο πυκνότητας του E. μάλιστα $\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 0$ για σχεδόν κάθε $x\in E^c$.

__Απόδειξη__ Θεώρημα παραγώγισης Lebesgue για $f=\mathbb{1}_E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B \mathbb{1}_E\,d\lambda = \mathbb{1}_E(x)$ για x σε ένα σύνολο A με $\lambda(A^c)=0$

Για $x\in E\cap A$ $\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B \mathbb{1}_E\,d\lambda = \lim_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = \mathbb{1}_E(x) = 1$

όμοια για $x\in E^c\cap A$ $\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 0$ □

__Θεώρημα 1__ Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ τότε η $F(x)=\int_{-\infty}^x f(y)\,dy$ είναι λ-σχ.π. διαφορίσιμη 5· $F'(x)=f(x)$ λ-σχ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

__Απόδειξη__ $\left|\frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)\big)-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right| =$

$= \left|\frac{1}{h}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy + \frac{1}{h}\int_x^{x-a} f(y)\,dy - f(x)\right| =$

(για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Lebesgue θέλουμε το x να βρίσκεται στο εσωτερικό της μπάλας $(x-a, x+h)$)

$= \left|\frac{h+a}{h}\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy + \frac{1}{h}\int_x^{x-a} f(y)\,dy - f(x)\right| \le$

$\le \left|\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right| + \frac{a}{h}\frac{1}{h+a}\left|\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy\right| + \frac{1}{h}\left|\int_{x-a}^{x} f(y)\,dy\right|$

$\frac{h+a}{h} = 1+\frac{a}{h}$

ε>0 Από θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue σχ. $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\delta_x>0$ τ.ω. αν $h,a>0$ 5· $h+a<\delta$ τότε $\left|\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right| < \varepsilon$

Αν πάρουμε $0<h<\delta_x$ και $0<a<\delta_x-h$ τότε $\left|\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]-f(x)\right| \leq \varepsilon + \frac{a}{h}\cdot\frac{1}{h+a}\|f\|_1 + \frac{1}{h}\int_{x-a}^{x}|f(y)|dy$. Παίρνοντας όριο καθώς $a \to 0$ έχουμε

$\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right| \leq \varepsilon+0+0=\varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι το όριο $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))=f(x)$. όμοια $\lim_{h\uparrow 0}(F(x+h)-F(x))=f(x)$ σχ. $\forall x$

άρα για κάθε τέτοιο x η $F'(x)$ ισούται με $f(x)$ $\square$

<u>Ορισμός</u> Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$, όπου $I=\mathbb{R}$ ή συμπαγές διάστημα του $\mathbb{R}$, λέγεται <u>απολύτως συνεχής</u> αν $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ τ.ω. αν $(a_1,b_1),\ldots,(a_N,b_N)$ πεπ. το πλήθος ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα με $\sum(b_i-a_i)<\delta$ τότε $\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$.

<u>Ορισμός</u> Μια $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται <u>φραγμένης κύμανσης</u> αν $\infty > V([a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{N}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ όπου το sup είναι ως προς όλες τις διαμερίσεις $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b\}$ του $[a,b]$.
Η ποσότητα $V([a,b])$ λέγεται <u>κύμανση</u> της f στο $[a,b]$.

<u>Παρατηρήσεις</u> (1) Κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και αν είναι ορισμένη σε συμπαγές διάστημα είναι φραγμένης κύμανσης.

(2) Αν $F,G: I\to\mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχείς και $c\in\mathbb{R}$, τότε οι cF και cG είναι απολύτως συνεχείς. Αν I συμπαγές τότε και η $F\cdot G$ είναι απολύτως συνεχής.

(3) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης η $x\mapsto V([a,x])$ με $x\in[a,b]$ είναι μη φθίνουσα

(4) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμμανσης και $a\leq x<y\leq b$, τότε $V([a,y]) \geq V([a,x]) + |f(y)-f(x)|$

(5) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε $f=f_1-f_2$ με τις f_1, f_2 μη φθίνουσες. Πράγματι $f_1(x)=V([a,x])$, $f_2(x)=f_1(x)-f(x)$
Η f_1 είναι μη φθίνουσα και η f_2 είναι επίσης μη φθίνουσα από το (4) $(x<y \Rightarrow f_2(y)=f_1(y)-f(y) \geq f_1(x)-f(x)=f_2(x))$
Επίσης $f_1(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ και $f_2(x)\geq f_2(a)=f(a)$.

(6) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης και συνεχής από δεξιά, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ τ.ω.

$$\mu((-\infty,x])=\begin{cases} f(x)-f(a), & \forall x\in[a,b] \\ 0 & , \text{αν } x\le a \\ 1 & , \text{αν } x\geq b \end{cases}$$

Απόδειξη Από το (5) μπορούμε να γράψουμε $f=f_1-f_2$ με f_1, f_2 μη φθίνουσες φραγμένες, συνεχείς από δεξιά και με $f_1(a)=0$ $f_2(a)=-f(a)$. Υπάρχουν μέτρα μ_1, μ_2 (θετικά) στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $\mu_1((-\infty,x])=f_1(x)$ και $\mu_2((-\infty,x])=f_2(x)+f(a)$ $\forall x\in[a,b]$ $\mu_i((-\infty,x])=0$ για $x<a$, $i=1,2$ $\mu_1((-\infty,x])=f_1(b)$ για $x\geq b$ $\mu_2((-\infty,x])=f_2(b)+f(a)$, $x\geq b$.

Τότε $\mu=\mu_1-\mu_2$ είναι μέτρο Borel και $f(x)-f(a)=\mu((-\infty,x])$ για $x\in[a,b]$

□

Θεώρημα 2 Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής, τότε η f είναι διαφορίσιμη λ-σχ.π. η $f'\in L^1([a,b])$ και

$$\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$$

Πόρισμα Αν $f,g\in L^1([a,b])$ και ορίσουμε $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$ $G(x)=\int_a^x g(y)\,dy$, $x\in[a,b]$ τότε

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b G(x)f(x)\,dx$$

Θεώρημα 1

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ κ' $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}$ τότε η F είναι λ-σχ.π. παραγωγίσιμη κ' $F'(x) = f(x)$ για λ-σχ. κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 2

Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής τότε η f' υπάρχει σ.π. κ' $f' \in L^1([a,b])$ κ' $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

Απόδειξη Αφού f είναι απολύτως συνεχής υπάρχει μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $\mu(-\infty,x] = f(x) - f(a)$ για $x \in [a,b]$, $\mu(-\infty,x] = 0$ για $x \leq a$ κ' $\mu(-\infty,x] = 1$ για $x \geq b$. Ισχυριζόμαστε ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Απο θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R})$ τ.ω. $\mu(B) = \int_B g\,d\lambda$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τοτε

$$\mu(-\infty,x] = \int_{-\infty}^{x} g(y)\,dy \Rightarrow f(x) - f(a) = \int_{-\infty}^{x} g(y)\,dy \quad \forall x \in [a,b]$$

Απο θεώρημα 1, η f είναι σχ.π. παραγωγίσιμη με $f'(x) = g(x)$ λ-σχ. για κάθε $x \in [a,b]$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)\,dy$. ∎

Απόδειξη Ισχυρισμού Έστω $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(B) = 0$. Απο κανονικότητα υπάρχει U_1 ανοικτό τ.ω. $\lambda(U_1) < \delta$ όπου το $\delta > 0$ αντιστοιχεί, απο τον ορισμό της απόλυτης συνέχειας, σε κάποιο $\varepsilon > 0$ δοθέν. Υπάρχουν κ' ανοικτά $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq B$ τ.ω. $\mu(U_n) \to \mu(B)$ απο κανονικότητα του μ. Κάθε U_n είναι ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων $U_n = \bigcup (a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ κ' $\sum (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) = \lambda(U_n) \leq \lambda(U_1) < \delta$.

$$|\mu(U_n)| = \left|\sum \mu(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})\right| = \left|\sum (f(b_i^{(n)}) - f(a_i^{(n)}))\right| \leq$$
$$\leq \sum |f(b_i^{(n)}) - f(a_i^{(n)})| \leq \varepsilon \text{ (απο απόλυτη συνέχεια της } f)$$

αρα $|\mu(B)| = \lim |\mu(U_n)| \leq \varepsilon$. Αφού το ε ήταν τυχόν έπεται ότι $\mu(B) = 0$ ∎

Πόρισμα (ολοκλήρωση κατά μέρη) Αν $f, g \in L^1([a,b])$ κ' $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ $G(x) = \int_a^x g(y)\,dy$. Τοτε

$$\int_a^b F(x) g(x)\,dx = (FG)'(b) - (FG)'(a) - \int_a^b f(x) G(x)\,dx.$$

Απόδειξη Οι F', G' υπάρχουν Lebesgue σχ. π. στο $[a,b]$ και άρα η $(F\cdot G)'$ υπάρχει Lebesgue σχ. π. στο $[a,b]$. και
$(F\cdot G)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$.
Οι F, G είναι συνεχείς συναρτήσεις άρα φραγμένες στο $[a,b]$ άρα $Fg, fG \in L^1([a,b])$ και άρα $(FG)' \in L^1([a,b])$

$$\int_a^b (FG)'(x)\,dx = \int_a^b F(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)G(x)\,dx$$

Αν δείξουμε ότι $F\cdot G$ είναι απολύτως συνεχής τότε θα έχουμε $\int_a^b (FG)'(x)\,dx = (FG)(b) - (FG)(a)$ και άρα θα έχουμε το ζητούμενο. Η FG είναι απολύτως συνεχής αν κάθε μία από τις F, G είναι απολύτως συνεχής.

Πρόταση Αν $h \in L^1([a,b])$ και $H(x) = \int_a^x h(y)\,dy$ για $x \in [a,b]$, τότε η H είναι απολύτως συνεχής

Απόδειξη Έστω μ το μέτρο που ορίζει η h, $\mu(B) = \int_B h(x)\,dx$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έστω ότι η H δεν είναι απολύτως συνεχής, θα δείξουμε ότι το μ δεν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, το οποίο είναι άτοπο (αν $\lambda(B)=0$, τότε $\int_B h\,d\lambda = 0$). Υπάρχει ε>0 τ.ω. για κάθε δ>0 υπάρχει ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων $\mathcal{U}$, τ.ω. $\lambda(\mathcal{U}) < \delta$ και $\sum |H(b_i) - H(a_i)| \geq \varepsilon$. όπου $\mathcal{U} = \bigcup (a_i, b_i)$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $h \geq 0$, οπότε η h είναι μη φθίνουσα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\sum |H(b_i) - H(a_i)| = \sum (H(b_i) - H(a_i)) = \sum \mu(a_i, b_i] \geq \varepsilon$$

$$\sum \mu(a_i, b_i] = \mu(\mathcal{U}) = \sum \mu(a_i, b_i).$$

Παίρνουμε $\delta = \frac{1}{n^2}$. Τότε υπάρχουν $\mathcal{U}_n$ το καθένα ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων τ.ω. $\lambda(\mathcal{U}_n) < \frac{1}{n^2}$, $\mu(\mathcal{U}_n) \geq \varepsilon$
$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$. $\mathcal{U} = \limsup \mathcal{U}_n$. $\sum \lambda(\mathcal{U}_n) < +\infty$ άρα από λήμμα Borel-Cantelli $\lambda(\mathcal{U}) = 0$.
$\mu(\mathcal{U}) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \mathcal{U}_n\right) \geq \limsup_n \mu(\mathcal{U}_n) \geq \varepsilon > 0$
Άρα μ δεν είναι απολύτως συνεχές ως προς λ, άτοπο □

Σειρές Fourier

$\mathbb{T} = \{e^{i\vartheta} : \vartheta \in [0,2\pi)\} = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Μετρική στο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $d_{\mathbb{T}}(x+\mathbb{Z}, y+\mathbb{Z}) = \min\{x-y+m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Μετρική στο $\mathbb{T}$ $d(e^{i\vartheta}, e^{i\vartheta'}) =$ γεωδαισιακή μετρική $= \min\{|\vartheta-\vartheta'|, |2\pi-(\vartheta-\vartheta')|\}$

εμείς θα ταυτίζουμε το $\mathbb{T}$ με ~~~~ $[0,2\pi)$ με την γεωδαισιακή μετρική μερικές φορές $\mathbb{T} \simeq [-\pi,\pi)$.

Με αυτή τη μετρική $\mathbb{T}$ είναι συμπαγής μ.χ. και η απεικόνιση $[0,2\pi) \ni \vartheta \longmapsto e^{i\vartheta}$ είναι ομοιομορφισμός.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ταυτίζεται με μια 2π περιοδική συνάρτηση στον $\mathbb{R}$: $f(x) = f[(x-\lfloor x \rfloor)2\pi]$. Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο f για μια $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και για ~~~~ την αντίστοιχη περιοδική $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Για $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη, το ολοκλήρωμα της f είναι

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Βασική ιδιότητα: $\forall s \in \mathbb{T}$ $\int_{\mathbb{T}} f(t-s)\,dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt$

Απόδειξη $\int_0^{2\pi} f(t-s)\,dt = \int_{-s}^{2\pi-s} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ (από 2π περιοδικότητα της f). □

Ορισμοί Μια τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

Το σύμβολο $\sim$ δεν υπονοεί τίποτα για την σύγκλιση της σειράς.

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο θα είναι κάθε συνάρτηση της μορφής

$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ $t \in \mathbb{T}$

Το P θα έχει βαθμό n αν n είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο $c_n \neq 0$ ή $c_{-n} \neq 0$. Βαθμός είναι μηδέν για το σταθερό πολυώνυμο.

Παρατήρηση $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ 1, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$

Αν P είναι ένα τριγ. πολυώνυμο βαθμού n. Τότε

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-n}^{n} c_j \int_0^{2\pi} e^{ijt}e^{-ikt}\,dt = c_k$. (αν $|k| \le n$)

Άρα οι αριθμοί $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}$ καθορίζουν το το τριγ. πολ.

Κίνητρο από τα τριγ. πολυώνυμα θα ορίσουμε τους αριθμούς $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\,dt$ για κάθε συνάρτηση.

Ορισμός Για μια $f\in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε $\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$, $n\in\mathbb{Z}$

τα $\hat{f}(n)$ είναι οι <u>συντελεστές Fourier</u> της f.

Γράφουμε $S(f) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int}$. Ξανά το σύμβολο $\sim$ δεν υπονοεί <u>τίποτα</u> για την σύγκλιση της σειράς, πολύ περισσότερο για την σύγκλισή της στην f.

Θα γράφουμε επίσης $S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}$ το n-στό τριγωνομετρικό πολυώνυμο που είναι μερικό άθροισμα της σειράς Fourier.

Γενικά μια τριγ. σειρά θα λέγεται σειρά Fourier αν είναι η σειρά Fourier κάποιας $f\in L^1(\mathbb{T})$.

Για $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη $\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ $\quad 1\le p<+\infty$

ς· $\|f\|_\infty := \inf\{t>0 \mid \lambda(\{x\in\mathbb{T} : |f(x)|>t\})=0\}$.

Για $1\le p\le q\le\infty$ ισχύει $\|f\|_p \le \|f\|_q$ ς· $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ καθώς $p\to\infty$

Έπεται ότι $L^1(\mathbb{T}) \supseteq L^p(\mathbb{T}) \supseteq L^\infty(\mathbb{T})$ $\forall p$

ή καλύτερα $L^p(\mathbb{T}) \supseteq L^q(\mathbb{T})$ $\forall p\le q$.

<u>Πρόταση</u> $f,g\in L^1(\mathbb{T})$, $c\in\mathbb{C}$, τότε

(i) $\widehat{(f+g)}(n) = \hat{f}(n)+\hat{g}(n)$ $\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

(ii) $\widehat{(cf)}(n) = c\hat{f}(n)$ $\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

(iii) $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{\bar{f}}(n)}$ $\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

(iv) Αν για $s\in\mathbb{T}$ ορίσουμε $f_s(t)=f(t-s)$ τότε $\hat{f}_s(n) = e^{-ins}\hat{f}(n)$ $\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

(v) $|\hat{f}(n)| \le \|f\|_1$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ δηλ. $\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$

<u>Πόρισμα</u> Αν $f_k\in L^1(\mathbb{T})$, $k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $f_k \xrightarrow{L^1} f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\hat{f}_k(n) \xrightarrow[k\to\infty]{} \hat{f}(n)$ ομοιόμορφα ως προς n δηλ.

$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k(n)-\hat{f}(n)| \longrightarrow 0$.

<u>Απόδειξη</u> $|\hat{f}_k(n)-\hat{f}(n)| = |\widehat{(f_k-f)}(n)| \le \|f_k-f\|_{L^1(\mathbb{T})} \longrightarrow 0$

ς· $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k(n)-\hat{f}(n)| \le \|f_k-f\|_{L^1(\mathbb{T})} \longrightarrow 0$ $\quad\square$

Πόρισμα (από προηγούμενα)
Αν $s\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ είναι τριγ. σειρά τ.ω. τα μερικά αθροίσματα $s_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ικανοποιούν $s_n \xrightarrow[L^1]{} f$, τότε $c_k=\hat f(k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Απόδειξη $\hat s_n(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}e^{-ikt}\,dt=\sum_j \frac{c_j}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\,dt = c_j\delta_{kj}$

$|\hat s_n(k)-\hat f(k)|\le \|s_n-f\|_1\to 0$ άρα $\hat s_n(k)\xrightarrow[n\to\infty]{}\hat f(k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

όμως για $n\ge|k|$ είναι $\hat s_n(k)=c_k$ άρα $c_k=\hat f(k)$ □

Παρατήρηση Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\hat f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt$

Πρόταση $f\in L^1(\mathbb{T})$ με $\hat f(0)=0$. τότε η $F(t)=\int_0^t f(s)\,ds$, $t\in\mathbb{T}$. είναι 2π-περιοδική $F\in L^1(\mathbb{T})$ $\hat F(n)=\frac{1}{in}\hat f(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Απόδειξη $F\in C(\mathbb{T})$ άρα $F\in L^1(\mathbb{T})$ $F(2\pi)=\int_0^{2\pi}f(s)\,ds=2\pi\hat f(0)=0=F(0)$

Έστω $e_n(t)=e^{int}$ [redacted] $E_n(t)=\int_0^t e^{-ins}\,ds$, $t\in\mathbb{T}$, $E_n(t)=\frac{1}{in}(1-e^{-int})$

(αφού $e^{ins}=\left(\frac{1}{in}e^{ins}\right)'$) $\hat F(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)e_n(t)\,dt=$

$= $ [redacted] $\frac{1}{2\pi}\cancel{F(2\pi)}E_n(2\pi)-\frac{1}{2\pi}\cancel{F(0)}E_n(0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_n(t)f(t)\,dt=$

$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{in}(1-e^{-int})f(t)\,dt=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}\,dt=$

$=0+\frac{1}{in}\hat f(n)$ □.

Πόρισμα Αν f απολύτως συνεχής, τότε $f'\in L^1(\mathbb{T})$, $\widehat{(f')}(n)=in\hat f(n)$

Απόδειξη Το αόριστο ολοκλήρωμα της f' είναι f. Από την πρόταση $\hat f(n)=\frac{1}{in}\widehat{(f')}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Παρατηρούμε ότι $\int_0^{2\pi}f(s)\,ds=f(2\pi)-f(0)=0$ (Απολύτως συνεχής στο $\mathbb{T}$ σημαίνει απολύτως συνεχής [redacted] στο $[0,2\pi]$ ς' περιοδική) □

Συνέλιξη Έστω $f,g\in L^1(\mathbb{T})$. $f*g(t):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t-s)g(s)\,ds$, $t\in\mathbb{T}$
(οι συντελεστές $\frac{1}{2\pi}$ στα ολοκληρώματα είναι για να κάνουν το ds μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{T}=[0,2\pi]$).

Η $f*g$ είναι καλά ορισμένη: Η $s\mapsto t-s$ είναι μετρήσιμη ως συνεχής. Επομένως η $s\mapsto f(t-s)$ είναι μετρήσιμη ως σύνθεση μετρήσιμων. Άρα $s\mapsto g(s)\cdot f(t-s)$ μετρήσιμη ως γινόμενο. Έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|f(t-s)||g(s)|\,dt\,ds=\int_{\mathbb{T}}|g(s)|\int_{\mathbb{T}}|f(t-s)|\,dt\,ds=\int_{\mathbb{T}}|f(t)|\,dt\cdot\int_{\mathbb{T}}|g(s)|\,ds<+\infty.$$

Από θεώρημα Tonelli ς Fubini $s\mapsto f(t-s)g(s)\in L^1(\mathbb{T})$ για σχ. κάθε $t\in\mathbb{T}$

Πρόταση Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε
(i) $f*g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.
(ii) $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n)$. $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη (i) $\|f*g\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f*g(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s) g(s)\, ds \right| dt \leq$
$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\, ds\, dt = (\text{fubini}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{T}} |g(s)| \int_{\mathbb{T}} |f(t-s)|\, dt\, ds =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(s)| \cdot \|f\|_1\, ds = \|f\|_1 \|g\|_1$.

(ii) $\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f*g(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s) g(s)\, ds\ e^{-int}\, dt =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\, e^{-i(t-s)n}\, dt}\ g(s)\, e^{-ins}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(n)\, g(s)\, e^{-ins}\, ds =$
$= \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n)$ □

Πρόταση $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε
(i) $f*g = g*f$ (μεταθετική)
(ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (προσεταιριστική)
(iii) $f*(g+h) = f*g + f*h$ (επιμεριστική).

Απόδειξη (i) $f*g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s) g(s)\, ds = (u = t-s)\ \frac{-1}{2\pi}\int_t^{t-2\pi} f(u) g(t-u)\, du =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{t} f(u) g(t-u)\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u) g(t-u)\, du = g*f(t)$
στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την 2π-περιοδικότητα των f και g.

(ii) Έχουμε $f*(g*h)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\, g*h(s)\, ds =$
$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\, g(s-u)\, h(u)\, du\, ds = (\text{fubini})$
$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\, g(s-u)\, h(u)\, ds\, du = (v = s-u)$
$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_{-u}^{2\pi-u} f(t-u-v)\, g(v)\, h(u)\, dv\, du = (2\pi\text{-περιοδ.})$
$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t-u-v)\, g(v)\, dv}\ h(u)\, du =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f*g(t-u)\, h(u)\, du = (f*g)*h(t)$

(iii) $f*(g+h)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)\, (g+h)(s)\, ds =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s) g(s)\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s) h(s)\, ds = f*g(t) + f*h(t)$ □

Λήμμα $f\in L^1(\mathbb{T})$ $e_n(t)=e^{int}$, $n\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{T}$. Τότε $e_n*f(t)=e_n(t)\hat{f}(n)$

Απόδειξη $e_n*f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\, e_n(t-s)\,ds = e^{int}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\, e^{-ins}\,ds =$
$= e_n(t)\hat{f}(n)$ □

Πόρισμα Έστω $P(t)=\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ τριγ. πολυώνυμο, $c_j\in\mathbb{C}$, για $f\in L^1(\mathbb{T})$ $P*f(t)=\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(n)\, c_j e^{ijt}$

Απόδειξη $e_j(t)=e^{ijt}$ $P*f(t)=\left(\sum_{-n}^{n} c_j e_j\right)*f(t) =$
$=\sum_{-n}^{n} c_j\, e_j*f = \sum_{-n}^{n} c_j \hat{f}(j)\, e^{ijt}$ □

Πυρήνες Αθροισιμότητας

Ορισμός Ένας πυρήνας αθροισιμότητας στο $\mathbb{T}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{T}$, ή ισοδύναμα, συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$. τ.ω.

1) $\int_0^{2\pi} k_n(t)\,dt = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$
2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} |k_n|\,dt < \infty$
3) $\lim_{n\to\infty} \int_\delta^{2\pi} |k_n(t)| = 0 \quad \forall \delta>0$

Ένας πυρήνας αθροίσεων είναι θετικός αν $k_n(t)\geq 0$ $\forall n$ $\forall t$. Στην περίπτωση αυτή η (2) του ορισμού είναι άμεση συνέπεια του (1).

Πρόταση Δυο βασικές ιδιότητες του $L^1(\mathbb{T})$.
(i) Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ ς' $f_s(t)=f(t-s)$, $t,s\in\mathbb{T}$ τότε $f_s\in L^1(\mathbb{T})$ $\|f_s\|_1=\|f\|_1$
(ii) Για κάθε $f\in L^1(\mathbb{T})$, $\|f_s-f\|_1\longrightarrow 0$ καθώς $s\longrightarrow 0$ ς' επίσης $\|f_s-f_t\|_1\longrightarrow 0$ καθώς $s\longrightarrow t$.

Απόδειξη (ii) Έστω $f\in C(\mathbb{T})$. Έστω $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ τ.ω. $\min\{|s-t|, 2\pi-|s-t|\}<\delta$. Τότε $|f(t)-f(s)|<\varepsilon$. Αν $0<s<\delta$ ή $2\pi-\delta<s<2\pi$ $|f_s(t)-f(t)|<\varepsilon$ $\forall t\in\mathbb{T}$ $\|f_s-f\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_s(t)-f(t)|\,dt<\varepsilon$

Γενικά $\|f_t-f_s\|_1=\|f_{t-s}-f\|_1$: $\|f_s-f_t\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(u-t)-f(u-s)|\,dt =$ $(v=u-t)$
$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(v)-f(v+t-s)|\,dv = \|f-f_{s-t}\|_1$

Για γενικά $f\in L^1(\mathbb{T})$. Αν $\varepsilon>0$ βρίσκουμε $g\in C(\mathbb{T})$ με $\|f-g\|_1<\varepsilon$. Τότε
$\|f-f_s\|_1\leq \|g-f\|_1+\underbrace{\|f_s-g_s\|_1}_{\|f-g\|_1}+\|g_s-g\|_1<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$ □

Τύπος αλλαγής μεταβλητής

Αν U, V αν. $\subseteq \mathbb{R}^n$. $T: U \to V$ συνεχώς διαφορίσιμη, 1-1 με $\det(T'(x)) = 0$ $\forall x \in U$. Τότε $\int_U f(T(x)) \, |\det(T'(x))| \, dx = \int_V f(y) \, dy$ για κάθε f μετρήσιμη $\&$ $f \geq 0$

Πρόταση Δυο ιδιότητες του $L^1(\mathbb{T})$

(1) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $f_s \in L^1(\mathbb{T})$ $(f_s(t) = f(t-s))$ $\&$ $\|f_s\|_1 = \|f\|_1$

(2) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε $\|f_s - f\|_1 \to 0$ καθώς $s \to 0$.

(Παρατηρούμε ότι αυτά ισχύουν σε κάθε χώρο L^p.)

Ορισμός Πυρήνας αθροισιμότητας είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{T}$ $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες:

(i) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(s) \, ds = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(s)| \, ds < +\infty$

(iii) $\forall \delta > 0$ $\lim_{n \to \infty} \int_\delta^{2\pi} |k_n(s)| \, ds = 0$.

Θεώρημα Αν $(k_n)_{\mathbb{N}}$ πυρήνας αθροισιμότητας $\&$ $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $k_n * f \to f$ (στον $L^1(\mathbb{T})$).

Απόδειξη $f \in L^1(\mathbb{T})$ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(s) f(t-s) \, ds - f(t) = k_n * f(t) - f(t)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(s) f_s(t) \, ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(s) (f_s(t) - f(t)) \, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(s) (f_s - f)(t) \, ds.$$

$$\|k_n * f - f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n * f - f| \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(s) (f_s - f)(t) \, ds \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(s)| \, |f_s - f|(t) \, \underline{\underline{dt \, ds}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f_s - f\|_1 |k_n(s)| \, ds. =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_\delta^{2\pi - \delta} |k_n(s)| \cdot \|f_s - f\|_1 \, ds + \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(s)| \, \|f_s - f\|_1 \, ds \right)$$

Το πρώτο: παρατηρούμε ότι $\|f_s - f\|_1 \leq \|f_s\|_1 + \|f\| = 2\|f\|_1$

άρα $\leq \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_1 \int_\delta^{2\pi - \delta} |k_n(s)| \, ds$ Επειδή $\|f_s - f\|_1 \to 0$ καθώς $s \to 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. για $s \in [-\delta, \delta]$ έχουμε $\|f_s - f\|_1 < \varepsilon$. Τότε το (2ο) ολοκλήρωμα για αυτό το δ

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(s)| \, ds \leq \varepsilon \sup_{\mathbb{N}} \|k_n\|_1$$

Έπεται ότι $\limsup \|k_n * f - f\|_1 \le \varepsilon \left(\sup_{\mathbb{N}} \|k_n\|_1 \right)$
αφού το ε ήταν τυχόν έχουμε ότι $\lim_n \|k_n * f - f\|_1 = 0$ $\square$

Πυρήνας Dirichlet $D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}$ $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $e_j(t) = e^{ijt}$, $j \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$

$$D_n * f(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt} = S_n(f)(t)$$

Λήμμα $D_n(t) = \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(t/2)}$ $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$

Απόδειξη $D_n(t) = \sum_{j=0}^{n} e^{ijt} + \sum_{j=0}^{n} e^{-ijt} - 1 = \dfrac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + \dfrac{1-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{it}} - 1 =$

$$= \frac{e^{-it/2} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} - \frac{e^{it/2} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} - 1 =$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} - \frac{\cancel{2i} \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\cancel{2i} \sin(t/2)} \quad \square$$

Άσκηση $\|D_n\|_1 \sim C \ln(n)$. (Άρα $\|D_n\|_1$ όχι πυρήνας άθροισης όπως τον θέλαμε...) $(C = 4/\pi^2)$

Πυρήνας Fejer $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(D_0(t) + \dots + D_n(t)\right)$ (οι μέσοι όροι)

$$K_n * f(t) = \frac{1}{n+1}\left(D_0 * f(t) + \dots + D_n * f(t)\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(S_0 f(t) + \dots + S_n f(t)\right)$$ (μέσοι όροι μερικών αθροισμάτων)

Λήμμα ① $K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}$ $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$

→② $K_n(t) = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\sin^2\left((n+1)t/2\right)}{\sin^2(t/2)} \ge 0$ $n \in \mathbb{N}_0$ $t \in \mathbb{T}$.

Απόδειξη ① $1^{\text{ος}}$ τρόπος: Επαγωγή

$2^{\text{ος}}$ τρόπος: $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left[(1) + (1 + e^{it} + e^{-it}) + (1 + e^{it} + e^{2it} + e^{-it} + e^{-2it}) + \dots \right]$
$= \frac{1}{n+1}\left((n+1) + (n+1-1)(e^{it} + e^{-it}) + \dots + (n+1-n)(e^{nit} + e^{-nit})\right]$.

Άλλος τρόπος: $K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-n}^{k} e^{ijt} =$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (e^{ijt} + e^{-ijt}) - 1 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (e^{ijt} + e^{-ijt}) - 1 =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} (n-(j-1))(e^{ijt} + e^{-ijt}) - 1 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|) e^{ijt} \quad \square.$$

② <u>1ος τρόπος</u>: $\sin^2\frac{t}{2} = \left[\frac{1}{2i}(e^{it/2}-e^{-it/2})\right]^2$

$$\left(-\frac14 e^{it} - \frac14 e^{-it} + \frac12\right)\sum_{j=-n}^n \left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} = -\frac14 e^{-i(n+1)t} - \frac14 e^{i(n+1)t} + \frac12$$

<u>2ος τρόπος</u>: $K_n(t) = \sum_{j=-n}^n\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} = D_n(t) - \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^n je^{ijt} - \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^n je^{-ijt} = D_n(t) - \frac{1}{n+1}\frac1i\left(\sum_{j=0}^n e^{ijt} - \sum_{j=0}^n e^{-ijt}\right)' =$

$$= D_n(t) - \frac{1}{n+1}\frac1i\left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} - \frac{1-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}}\right)' =$$

$$= D_n(t) - \frac{1}{n+1}\frac1i\Bigg(-i(n+1)\frac{e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{i(1-e^{i(n+1)t})e^{it}}{(1-e^{it})^2} - i(n+1)\frac{e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}} + \frac{i(1-e^{-i(n+1)t})e^{-it}}{(1-e^{-it})^2}\Bigg) =$$

$$= D_n(t) - \left(-\frac{e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} - \frac{e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}}\right) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{(1-e^{i(n+1)t})e^{it}}{(1-e^{it})^2} + \frac{(1-e^{i(n+1)})e^{+it}}{(1-e^{-it})^2}\right)$$

$$= D_n(t) - \left(-\frac{e^{i(n+\frac12)t}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} - \frac{e^{-i(n+\frac12)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\right) + \frac{1-e^{-i(n+1)t}}{(1-e^{-it})^2}e^{-it}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{(e^{it/2}-e^{-it/2})^2} + \frac{1-e^{i(n+1)t}}{(e^{+it/2}-e^{-it/2})^2}\right) =$$

$$= \frac{-1}{n+1}\,\frac{2-2\cos((n+1)t)}{(2i)^2\sin^2(t/2)} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\cancel{2}\sin^2((n+1)t/2)}{\cancel{2}\sin^2(t/2)} \qquad \square$$

<u>Πόρισμα</u> Ο πυρήνας Fejer είναι πυρήνας αθροισης.

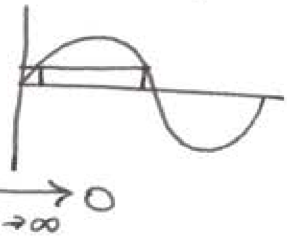
<u>Απόδειξη</u> (i) $\int_0^{2\pi}K_n(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sum_{j=-n}^n\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}\,dt = 2\pi$ ✓

(ii) $K_n(t)\geq 0 \xRightarrow{(i)} \|K_n\|_1 = 1<\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi-\delta}\frac{1}{n+1}\,\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)}\,dt$

για $\delta<t<2\pi-\delta \Leftrightarrow \frac\delta2<\frac t2<\pi-\frac\delta2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2(t/2) > \sin^2(\delta/2)>0.$



$$\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)}\,dt \leq \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Πόρισμα Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τοτε $K_n * f \longrightarrow f$ στον $L^1(\mathbb{T})$

Συμβολισμός: $\sigma_n(f) = K_n * f$ $\quad \sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n+1}\left(S_0 f(t) + \dots + S_n f(t)\right)$

Παρατήρηση $\sigma_n(f) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)\, e_j$ είναι τριγ. πολυώνυμο.

Πόρισμα Τα τριγ. πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$.

Θεώρημα (Μοναδικότητας $\hat{f}$) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{f}(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ τοτε $f = 0$ στο $L^1(\mathbb{T})$ δηλ. $f = 0$ σχ.π.

Απόδειξη $\sigma_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)\, e^{ijt} = 0$ $\forall t \in \mathbb{T}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

όμως $\sigma_n(f) \xrightarrow[L^1]{} f$. Άρα $f = 0$ στον $L^1(\mathbb{T})$ □

Πόρισμα Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ ς' $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, τοτε $f = g$ στον $L^1(\mathbb{T})$

Παρατήρηση Άλλη απόδειξη του $f * g = g * f$: Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τοτε $f * g,\ g * f \in L^1(\mathbb{T})$. $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n) = \widehat{g*f}(n)$ αρα $f * g = g * f$ σχ.π.

Επίσης αν $h \in L^1(\mathbb{T})$ τοτε $(f*g)*h,\ f*(g*h) \in L^1(\mathbb{T})$ ανάλογα έχουμε $\widehat{(f*g)*g}(n) = \dots = \widehat{f*(g*h)}(n)$ αρα $(f*g)*h = f*(g*h)$ □

Λήμμα (Riemann-Lebesgue) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τοτε $\hat{f}(n) \xrightarrow[|n| \to \infty]{} 0$

Απόδειξη Αν P τριγ. πολυώνυμο δηλ. $P(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(t)$ βαθμού n. τοτε $\hat{P}(k) = \begin{cases} c_k & \text{αν } |k| \le n \\ 0 & \text{αν } |k| > n \end{cases}$

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ βρίσκουμε τριγ. πολυώνυμο P τ.ω. $\|f - P\|_1 < \varepsilon$ για ετο δοθέν ς' τοτε

$|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \hat{P}(k)| = |\widehat{(f-P)}(k)| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon.$ $\forall |k| > \deg P$ □

Θεώρημα $f \in L^p$ με $1 \le p < +\infty$, τοτε $k_n * f \xrightarrow{L^p} f$ για κάθε $(k_n)_n$ πυρήνα αθροισης.

Θεώρημα f συνεχής ς' $(k_n)_n$ πυρήνας αθροισιμότητας τοτε $k_n * f \longrightarrow f$ στον $C(\mathbb{T})$ (δηλ. με την $\|\cdot\|_\infty$).

(τα τριγ. πολυώνυμα είναι ομοιόμορφα πυκνά στον $C(\mathbb{T})$).

Πυρήνας Dirichlet

$D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$ $\qquad S_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt} = D_n * f(t)$

Πυρήνας Fejer

$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(D_0(t) + \dots + D_n(t)\right) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} = \dfrac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)} \dfrac{1}{n+1}$

$\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(f)(t) + \dots + S_n(f)(t)\right) = K_n * f(t).$

Θεώρημα Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_1 \longrightarrow 0$

Θεώρημα (i) Έστω $1 \le p < \infty$. Τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \longrightarrow 0$ $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$

(ii) $\|\sigma_n(f) - f\|_{C(\mathbb{T})} \longrightarrow 0$ $\forall f \in C(\mathbb{T})$.

Νόρμα στον $C(\mathbb{T})$: $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$ για $f \in C(\mathbb{T})$

Απόδειξη (i) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$ $\sigma_n(f)(t) - f(t) =$

$= K_n * f(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\, ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \underbrace{ds}_{K_n(s)} =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n \left(f_s(t) - f(t)\right) ds.$

$\|\sigma_n(f) - f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n(f)(t) - f(t)|^p dt\right)^{1/p} =$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\, (f_s - f)(t)\, ds\right|^p dt\right)^{1/p} =$

$= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\, (f_s - f)\, ds\right\|_p \le$ (Minkowski)

$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) \|f_s - f\|_p\, ds$. Από εδώ η απόδειξη είναι ίδια για $L^1(\mathbb{T})$. Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\|f_s - f\|_p < \varepsilon$ για $s \in (0,\delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi)$. Τότε

$\|\sigma_n(f) - f\|_p \le \frac{1}{2\pi}\int_{(0,\delta)\cup(2\pi-\delta,2\pi)} K_n(s)\, ds \cdot \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(s) \|f_s - f\|_p\, ds \le$

$\le \varepsilon + \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_p \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(s)\, ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon + 0$

Επομένως $\limsup \|\sigma_n(f) - f\|_p \le \varepsilon$. Αφού ε τυχόν, έπεται ότι $\|\sigma_n(f) - f\|_p \longrightarrow 0$.

(ii) Για $f \in C(\mathbb{T})$ $\sigma_n(f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) (f_s(t) - f(t))\, ds$

$\sup_{t \in \mathbb{T}} |\sigma_n(f)(t) - f(t)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) \|f_s - f\|_{C(\mathbb{T})}\, ds$ (*)

Απόδειξη $|\sigma_n(f)(t) - f(t)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) |f_s - f|(t)\, ds \le$

$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) \sup_{t \in \mathbb{T}} |(f_s - f)(t)|\, ds$. Έπεται η (*) Από εδώ και πέρα η απόδειξη του (ii) είναι ίδια με την απόδειξη του (i)

Κατά σημείο σύγκλιση Cesaro μέσων

Αν $f\in C(\mathbb{T})$ τότε $\sigma_n(f)\longrightarrow f$ κατά σημείο

Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $t\in\mathbb{T}$ σημείο ασυνέχειας της f τότε η $(\sigma_n(f)(t))_n$ δεν είναι αναγκαίο να συγκλίνει και όταν συγκλίνει, το όριο δεν είναι κατ' ανάγκη $f(t)$.

πχ] $f(t)=\mathbb{1}_{[0,\pi)}(t)$ τότε $\sigma_n(f)(\pi)\longrightarrow\frac{1}{2}$ καθώς $n\to\infty$

$\sigma_n(f)(0)\longrightarrow\frac{1}{2}$

Θεώρημα (Fejer) Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ (**)

(i) Έστω $t\in\mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a\in\mathbb{C}$ τ.ω. $\lim_{s\to 0}[f(t+s)+f(t-s)-2a]=0$ τότε $\sigma_n(f)(t)\longrightarrow a$ για αυτό το t.

Επομένως αν f συνεχής στο t τότε $\sigma_n(f)(t)\longrightarrow a=f(t)$.

(ii) Αν I κλειστό διάστημα σημείων συνέχειας της f τότε η σύγκλιση $\sigma_n(f)\to f$ είναι ομοιόμορφη στο I. δηλ. $\sup_I|\sigma_n(f)(t)-f(t)|\longrightarrow 0$.

Απόδειξη (i) Έστω $t\in\mathbb{T}$ τ.ω. $\exists\, a\in\mathbb{C}$ ώστε να ισχύει η (**).

$$\sigma_n(f)(t)-a=K_n*f(t)-a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)f(t-s)\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}aK_n(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(s)(f(t-s)-a)\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}K_n(f(t-s)-a)\,ds=\quad(s'=s-\pi)$$

$$=\text{———}\ ''\ \text{———}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(s')(f(t-s')-a)\,ds'\quad(K_n, f\ 2\pi\text{-περιοδ.})$$

$$=(s''=-s)\ \text{———}\ ''\ \text{———}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(-s'')(f(t+s'')-a)\,ds''=\quad(K(s)=K(-s))$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(s)(f(t-s)+f(t+s)-2a)\,ds.$$ Έστω $\delta>0$ και γράφουμε

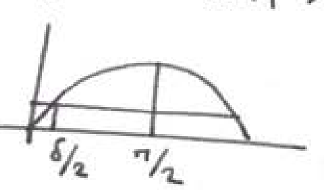
$$\sigma_n(f)(t)-a=\int_0^{\delta}K_n(s)(f(t-s)+f(t+s)-2a)\frac{ds}{2\pi}+\int_\delta^{\pi}-\ -\ -$$

Δοθέντος $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, όπου το δ εξαρτάται από το t και το ε τ.ω. $|f(t+s)+f(t-s)-2a|<\varepsilon/2\quad\forall s\in(-\delta,\delta)$

Τότε το πρώτο ολ/μα φράσσεται από $\left|\int_0^{\delta}K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}\right|\le$
$\le\varepsilon/2$.

1 Ισχυρισμός $K_n(s)=\frac{1}{n+1}\dfrac{\sin^2((n+1)s/2)}{\sin^2(s/2)}\le\frac{1}{n+1}\dfrac{1}{\sin^2(\delta/2)}$ για κάθε $\delta<s<\pi$.

Απόδειξη Για $\delta<s<\pi$ έχουμε ότι
$\delta/2<s/2<\pi/2\Rightarrow\sin(s/2)\geq\sin(\delta/2)$



2 Ισχυρισμός $\boxed{\sup_{\delta<s<2\pi-\delta}|K_n(s)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.}\ \forall\delta>0.$

το δευτερο ολ/μα:

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a \right) \frac{ds}{2\pi} \right|$$

$\sup\limits_{\delta \leq s \leq \pi} K_n(s) \| f_s - f \|_1 \leq \sup\limits_{\delta \leq s \leq \pi} K_n(s) \left(\|f\|_1 + |a| \right)$ αυτό τείνει στο 0 αρα $\exists n_0$

$\left| \int_{\delta}^{\pi} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a \right) \frac{ds}{2\pi} \right| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq n_0$. Το n_0 εξαρτάται απο το ε ς το δ το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται απο το t

Επεται οτι για $n \geq n_0$ $\quad |\sigma_n(f)(t) - a| \leq \varepsilon$.

Αν f συνεχής στο t, ισχύει $f(t+s) + f(t-s) - 2a \xrightarrow[s \to 0]{} 0$ για $a = f(t)$.

(ii) Μένει το ομοιόμορφο της σύγκλισης. Στην προηγούμενη απόδειξη το n_0 εξαρτάται απο το t μονο απο την εξάρτηση του απο το δ.

Για $a_t = f(t)$. Επειδή f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα I, είναι ς ομοιόμορφα συνεχής αρα δοθέντος ε>0 $\exists$ δ>0 τ.ω.

$|f(t+s) + f(t-s) - 2a_t| < \varepsilon \quad \forall t \in I \ \forall s \in (-\delta, \delta)$ αρα το δ δεν εξαρτάται απο τα $t \in I$ αρα η σύγκλιση

$\sigma_n(f) \longrightarrow f$ είναι ομοιόμορφη στο I.

$\square$

Θεώρημα (Lebesgue) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$

(i) Έστω $t \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\frac{1}{h} \int_0^h |f(t+s) + f(t-s) - 2a| \xrightarrow[s \to 0]{} 0$ (***)

Τοτε $\sigma_n(f)(t) \longrightarrow a$.

(ii) $\sigma_n(f)(t) \longrightarrow f(t) \quad \forall t \in Leb(f)$ (επομένως λ-σχ. π.)

Παρατήρηση Η απόδειξη του θεωρήματος του Fejer δουλεύει για τα $k_n * f$ με (k_n) πυρήνας αθροισιμότητας τ.ω.

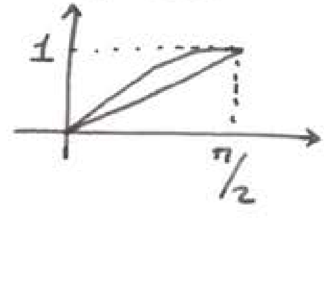
- $k_n(s) = k_n(-s) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall s \in \mathbb{T}$
- $\sup\limits_{\delta \leq s \leq \pi} |k_n(s)| \longrightarrow 0$ καθώς $n \to \infty$ $\forall \delta > 0$.

Δηλ. για τέτοιους πυρήνες, αν υπάρχει το όριο $(f(t+s) + f(t-s))$ καθώς $s \to 0$, τοτε $k_n * f(t) \longrightarrow \lim\limits_{s \to 0} (f(t+s) + f(t-s))$.

Απόδειξη (θεωρήματος) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(i) Έστω $t \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ τ.ω. ισχύει η (***)

Ισχυρισμός: $0 \leq K_n(s) \leq \min\left\{ n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)s^2} \right\}$. για $0 < s < \pi$.



Απόδειξη ισχυρισμού για $0 < s < \pi$ ισχύει οτι

$\sin(s) > \frac{2}{\pi} s$ αρα για $0 < s < \pi$ είναι $\sin(s/2) \geq \frac{2}{\pi} \frac{s}{2} = \frac{s}{\pi}$ Επομένως $K_n(s) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2((n+1)s/2)}{\sin^2(s/2)} \leq \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{s^2}$

Επίσης $K_n(s) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijs}$. $K_n(s) = |K_n(s)| \leq \sum_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) =$
$= 2n+1 - \frac{1}{n+1} 2 \frac{n(n+1)}{2} = n+1.$

$$\sigma_n(f) - a = \int_0^{\delta} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a\right) \frac{ds}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} \cdots$$

όπως στο θεώρημα Fejer.

Το δεύτερο ολ/μα $\left| \int_{\delta}^{\pi} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a\right) \frac{ds}{2\pi} \right| \leq$
$\leq \int_{\delta}^{\pi} \frac{\pi^2}{(n+1)s^2} \left| f(t+s) + f(t-s) - 2a \right| \frac{ds}{2\pi} \leq \frac{\pi^2}{(n+1)s^2} \| f - a \|_1$

Επιλέγουμε $\delta_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$. Τότε $\left| \int_{\delta_n}^{\pi} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a\right) \frac{ds}{2\pi} \right| \leq$
$\leq \frac{\pi^2}{\sqrt{n+1}} \left(\|f\|_1 + |a| \right) \longrightarrow 0$

$\left| \int_0^{\delta_n} \cdots \right| \leq \left(\int_0^{\frac{1}{n+1}} \cdots + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} \cdots \right)$. Ορίζουμε

$\Phi(h) := \int_0^h \left| f(t+s) + f(t-s) - 2a \right| ds \quad h \in [0, 2\pi)$ τοτε το $1^{ο}$ ολ/μα

$$\int_0^{\frac{1}{n+1}} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a\right) \frac{ds}{2\pi} \leq \frac{n+1}{2\pi} \Phi\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ απο } (*\!*\!*)$$

Το δεύτερο ολ/μα $\left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} K_n(s) \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a\right) \frac{ds}{2\pi} \right| \leq$
$\leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} \frac{\pi^2}{(n+1)s^2} \left| f(t+s) + f(t-s) - 2a \right| \frac{ds}{2\pi} = \frac{\pi}{2(n+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{G} \underbrace{\left| f(t+s) + f(t-s) - 2a \right|}_{\Phi'} ds$

ολοκληρώνουμε κατά μέρη:

$$\frac{\pi}{2(n+1)} \left(\frac{\Phi(\delta_n)}{\delta_n^2} - \frac{\Phi\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2} \right) - \frac{\pi}{2(n+1)} 2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} \frac{\Phi(s)}{s^3} ds \leq$$

$\leq \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{1}{\delta_n} \frac{\Phi(\delta_n)}{\delta_n} + \frac{\pi}{2(n+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} \frac{\Phi(s)}{s} \frac{ds}{s^2}$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$
υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $\frac{\Phi(s)}{s} < \varepsilon$. $\forall s \in (0, \delta)$ απο $(*\!*\!*)$
$\delta_n \to 0$ επομένως υπάρχει n_0 τ.ω. $\delta_n < \delta$ $\forall n \geq n_0$
Για $n \geq n_0$ $\left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta} K_n(s) (\cdots) \frac{ds}{2\pi} \right| \leq \varepsilon \frac{\pi}{(n+1)^{3/4}} + \frac{\pi}{n+1} \varepsilon \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} \frac{ds}{s^2} \leq$
$\leq \frac{\varepsilon\pi}{(n+1)^{3/4}} + \frac{\varepsilon\pi}{n+1} \left((n+1) - \frac{1}{\delta_n} \right) \leq \frac{\varepsilon\pi}{(n+1)^{3/4}} + \varepsilon\pi$

Άρα $\left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} K_n(s) (\cdots) \frac{ds}{2\pi} \right| \leq \varepsilon\pi$ 5· αφου ε τυχόν

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n} K_n(s) (\cdots) \frac{ds}{2\pi} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } n \longrightarrow \infty.$$

□

Θεώρημα (Lebesgue)

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{T}$. Αν υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\frac{1}{h}\int_0^h (f(t+s)+f(t-s)-2a)ds \longrightarrow 0$ τότε $\sigma_n(f)(t) \longrightarrow a$.

Συγκεκριμένα $\forall x \in Leb(f)$ $\sigma_n(f)(x) = f(x)$.

Απόδειξη Το πρώτο μέρος έγινε.

Έστω $t \in Leb(f)$. Τότε $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s)-f(t)|\,ds = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\int_{-h}^{h} |f(t+s)-f(t)|\,ds = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left(\int_0^h |f(t+s)-f(t)|\,ds + \int_{-h}^{0}|f(t+s)-f(t)|\,ds\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left(\int_0^h |f(t+s)-f(t)|\,ds + \int_0^h |f(t-s)-f(t)|\,ds\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_0^h |f(t+s)+f(t-s)-2f(t)|\,ds = 0$$

Άρα από το πρώτο μέρος του θεωρήματος έπεται $\sigma_n(f)(t) \to f(t)$ άρα $\sigma_n(f)(t) \to f(t)$ ισχύει $\forall t \in Leb(f)$ δηλ. για Lebesgue σχ. κάθε $t \in \mathbb{T}$ □

Τάξη μεγέθους συντελεστών Fourier

Από το θεώρημα Riemann Lebesgue, $|\hat{f}(n)| \to 0$ καθώς $n \to \infty$

Ερώτημα: Πόσο γρήγορα ή αργά συγκλείνει η $(\hat{f}(n))$ στο 0?

Αν (a_n), $n \in \mathbb{Z}$ είναι τ.ω. $a_n = a_{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int} =$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

Τέτοιες σειρές λέγονται <u>σειρές συνημιτόνων</u>. Αντιθέτως αν $a_n = -a_{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε <u>σειρά ημιτόνων</u> $\sum_{\mathbb{Z}} a_n e^{int} = a_0 + 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt)$

Θεώρημα (Kolmogorov)

Έστω (a_n) $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία τ.ω. $a_n \geq 0$, $a_n = a_{-n}$ για $n \in \mathbb{N}$. $a_n \to 0$ & $a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{f}(n) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη Η συνθήκη $a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι μια συνθήκη κυρτότητας. Ορίζουμε $\Delta_n = a_{n-1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$

Ορίζουμε επίσης $\Delta_n^{(2)} = \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_{n-1} - a_n - a_n + a_{n+1} \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Έπεται ότι $\Delta_n \geq \Delta_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \lim_{m} \sum_{n=1}^{m} (a_{n-1} - a_n) = \lim_{m} (a_0 - a_m) = a_0$

Επομένως απο θεώρημα Abel $n\Delta_n \longrightarrow 0$.

$\sum_{n=1}^{m} n\Delta_n^{(2)} = \sum_{n=1}^{m} n(\Delta_n - \Delta_{n-1}) = \sum_{n=1}^{m} n\Delta_n - \sum_{n=1}^{m} (n+1)\Delta_{n+1} +$

$+ \sum_{n=1}^{m} \Delta_{n+1} = (m+1)\Delta_{m+1} + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{m+1} =$

$= (m+1)\Delta_{m+1} + a_0 - a_{m+2} \longrightarrow a_0$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)}$ συγκλίνει.

Ορίζουμε $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} K_{n-1}(t)$, όπου (K_n) ο πυρήνας του Fejer. $\sum_{n=1}^{\infty} \| n\Delta_n^{(2)} K_{n-1} \|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} < +\infty$.

Έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} K_{n-1}$ συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{T})$. Επομένως $f \in L^1(\mathbb{T})$ (ς· άρα $|f(t)| < \infty$ για σχ. κάθε $t \in \mathbb{T}$).

$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} K_{n-1}(t)\, e^{-int}\,dt$

Επειδή $\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |n\Delta_n^{(2)} K_{n-1}(t) e^{-int}|\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} < \infty$

Έχουμε απο θεώρημα Fubini ότι $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} \int_0^{2\pi} K_{n-1}(t) e^{-ikt}\,dt$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} \widehat{K_{n-1}}(k)$. $K_{n-1}(t) = \sum_{j=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) e^{+ijt}$

$\widehat{K_{n-1}}(t) = \left(1 - \frac{|j|}{n}\right)$ για $-n+1 \le k \le n-1$. Επομένως.

$\hat{f}(t) = \sum_{n=|k|+1}^{\infty} n\Delta_n^{(2)} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right)$.

$\sum_{n=|k|+1}^{|k|+m} n\Delta_n^{(2)} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) = \sum_{n=|k|+1}^{|k|+m} \Delta_n^{(2)} (n - |k|) =$

$= \Delta_{|k|+1}^{(2)} + 2\Delta_{|k|+2}^{(2)} + \dots + m\Delta_{|k|+m}^{(2)} =$

$= \Delta_{|k|+1} - \Delta_{|k|+2} + 2(\Delta_{|k|+2} - \Delta_{|k|+3}) + \dots + m(\Delta_{|k|+m} - \Delta_{|k|+m+1}) =$

$= \Delta_{|k|+1} + \dots + \Delta_{|k|+m} - m\Delta_{|k|+m+1} =$

$= a_{|k|} - a_{|k|+m+1} - m\Delta_{|k|+m+1} \longrightarrow a_{|k|}$

□

Παρατηρήσεις (i) Το $a_n \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ δεν χρησιμοποιήθηκε.

(ii) Χρησιμοποιήθηκε ότι $\Delta_n \ge 0$. Αυτό ισχύει γιατί $\Delta_{n+1} \le \Delta_n$ ς· $\Delta_n \longrightarrow 0$. αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n = a_0$ συγκλίνει.

Θεώρημα Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-|n|) \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\hat{f}(n) < \infty$.

Cesaro Σύγκλιση

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{C}$. Η (a_n) συγκλίνει κατά Cesaro στο $a\in\mathbb{C}$ αν $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow a$.

Πρόταση Αν $a_k \to a$ τοτε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow a$.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. για $n\geq n(\varepsilon)$ έχουμε $|a_n-a|<\varepsilon$. Για $k\geq n(\varepsilon)$ $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k-a| +$
$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)-1}|a_k-a| + \frac{1}{n}\sum_{k=n(\varepsilon)}^{n}|a_k-a| \leq$
$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)}|a_k-a| + \varepsilon$. Αν αφήσουμε $n\to\infty$
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_k - a\right| \leq \varepsilon$. Αφού ε αυθαίρετο, έπεται οτι
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_k - a\right| = 0$. □

Αντιπαράδειγμα: $a_n=(-1)^n$ $\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_n \longrightarrow 0$ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_n \in \{0,1\}\right)$
όμως (a_n) δεν συγκλίνει.

Αν $\hat{f}(n)=-\hat{f}(-n)\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τοτε $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\hat{f}(n)<\infty$.

Απόδειξη Υποθέτουμε χ.β.γ. $\hat{f}(0)=0$. διαφορετικά θεωρούμε $\tilde{f}=f-\hat{f}(0)$
Τοτε $\tilde{f}\in L^1(\mathbb{T})$, $\hat{\tilde{f}}(n)=\hat{f}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
ς $\hat{\tilde{f}}(0)=0$.

Ορίζουμε $F(t)=\int_0^t f(s)\,ds$, $t\in\mathbb{T}$. $F\in C(\mathbb{T})$ αρα $F\in L^1(\mathbb{T})$
Επίσης $\hat{F}(n)=\frac{1}{in}\hat{f}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Απο θεώρημα Fejer
για $t=0$, $\sigma_n(F)(0)\longrightarrow F(0)=0$. $\quad \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\hat{F}(j)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\hat{F}(0)+\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\left(\frac{1}{ij}\hat{f}(j)-\frac{1}{ij}\hat{f}(-j)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
$\hat{F}(0)-2i\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\frac{\hat{f}(j)}{j}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\frac{\hat{f}(j)}{j}\longrightarrow 2i\hat{F}(0).$
$\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\frac{\hat{f}(j)}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{f}(j)}{j}-\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\hat{f}(j)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(j)}{j}=0$
Επειδή $\hat{f}(j)\longrightarrow 0$ αφου $f\in L^1(\mathbb{T})$.
$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(j)}{j}=2i\hat{F}(0)\in\mathbb{C}$
αρα η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(j)}{j}<\infty$ συγκλίνει. (αφού $\hat{f}(j)\geq 0$ $\forall j\in\mathbb{N}$)

Πόρισμα Αν $a_n \geq 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt)$ δεν μπορεί να είναι σειρά Fourier L^1-συνάρτησης.

Παράδειγμα ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{\ln(n)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq -1,1,0}} \frac{1}{\ln|n|} e^{int}$.

$a_n = -\frac{1}{\ln|n|}$, $|n| \geq 2$. Η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{\ln x}$ κυρτή $x \geq 2$.

$a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n = -\frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n-1)} + \frac{2}{\ln(n)} = f(n+1) + f(n-1) - 2f(n) \geq 0$

Επίσης $a_n \to 0$ και $a_n = a_{-n}$ για $n \in \mathbb{N}$. Απο θεώρημα Kolmogorov η $(a_n)_{\mathbb{N}}$ είναι συντελεστές fourier κάποιας $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αρα η $(-a_n)_{\mathbb{N}}$ είναι συντελεστές της $-f \in L^1(\mathbb{T})$

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\ln(n)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq -1,1,0}} -i\, \mathrm{sgn}(n) \frac{1}{\ln|n|} e^{int}$.

$a_n = \frac{1}{\ln|n|} \geq 0$ για $n \geq 2$ και $a_n = \frac{-1}{\ln|n|}$ για $n \leq -2$.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$ δεν μπορεί να είναι σειρά fourier κάποιας $f \in L^1$ η $\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{sgn}(n) \frac{1}{\ln|n|} e^{int}$ αρα ούτε η αρχική σειρά είναι σειρές fourier L^1-συνάρτησης.

Το τελευταίο παράδειγμα δείχνει οτι υπάρχουν ακολουθίες a_n με $a_n \to 0$ που δεν αποτελούν συντελεστές fourier L^1 συνάρτησης.

Πρόταση Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ απολύτως συνεχής, τοτε οι συντελεστές fourier της είναι $\hat{f}(n) = O(1/n)$ δηλ. $n\hat{f}(n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη $\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$ και $f' \in L^1(\mathbb{T})$ αρα $n|\hat{f}(n)| \to 0$ απο λήμμα Riemann Lebesgue □

Πόρισμα Αν $f \in C^{k-1}(\mathbb{T})$ και $f^{(k-1)}$ είναι απολύτως συνεχής, τοτε $n^k|\hat{f}(n)| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. δηλ. $\hat{f}(n) = O(n^{-k})$

Απόδειξη Επαγωγή με το προηγούμενο. □

Βελτίωση $|\hat{f}(n)| = \frac{1}{|n|^j} |\widehat{f^{(j)}}(n)|$ $j \in \{0,1,\dots,k\}$ $\leq |n|^{-j} \|f^{(j)}\|_1$

$|\hat{f}(n)| \leq \min\left\{ \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j} \mid j = 0,1,\dots,k \right\}$. ($f \in C^{k-1}$ με $f^{(k-1)}$ απολύτως συνεχής)

Αν $f \in C^{\infty}$ $\hat{f}(n) \leq \inf_{j\geq 0} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|n|^j}$

Αν $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ παραγωγίσιμη στο (a,b) & συνεχής στο $[a,b]$ &
f' φραγμένη στο (a,b) τότε f απολύτως συνεχής

Η συνάρτηση $f(x) = x^{-2} \sin(x^{-4})$, $x \in [-1,1) \setminus \{0\}$ $f(0)=0$
είναι παραγωγίσιμη αλλά όχι απολύτως συνεχής.

Παρατηρήσεις για το Θεώρημα Kolmogorov

Η συνθήκη $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ δεν χρειάζεται αλλά έπεται από την (*) $a_{n+1} + a_{n-1} \geq 2a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ & $a_n \to 0$.

Στην εφαρμογή $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{\ln n}$ είναι σειρά Fourier

$a_n = \frac{1}{\ln n}$ για $n \in \mathbb{Z}$. Η a_n ικανοποιεί $a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0$ γιατί η $x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$, $x \geq 2$ είναι κυρτή $(f''(x) \geq 0)$

Η $a_n = -\frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$ δεν ικανοποιεί την (*)

__Ορισμός__ Μια $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι __Hölder συνεχής__ τάξης $a > 0$ αν υπάρχει σταθερά $C < \infty$ τ.ω. $|f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^a$ $\forall s,t \in \mathbb{T}$.

__Δείκτης συνέχειας__ μιας $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. $\omega(f,h) := \sup\limits_{\substack{s,t \in \mathbb{T} \\ |s-t| \leq h}} |f(t) - f(s)|$, $h > 0$.

__L^1 δείκτης συνέχειας__ μιας $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{T})$

$\Omega(f,h) := \|f_h - f\|_1$.

Πάντα ισχύει ότι $\Omega(f,h) \leq \omega(f,h)$ $\forall h > 0$.

__Θεώρημα__ $f \in L^1(\mathbb{T})$, $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \Omega(f, \frac{\pi}{|n|})$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

__Πόρισμα__ Αν f είναι Hölder συνεχής με δείκτη $a > 0$ τότε $\hat{f}(n) = O(|n|^{-a})$ $(|n| \to \infty)$ δηλ. $\exists C < \infty$ με $|\hat{f}(n)| \leq C|n|^{-a}$ $\forall n \neq 0$

__Απόδειξη__ Αν f είναι Hölder με δείκτη a, τότε $\omega(f,h) \leq Ch^a$, $h > 0$ για κάποιο $C < \infty$. Άρα $\Omega(f,h) \leq \omega(f,h) \leq Ch^a$, $h > 0$.

Από Θεώρημα $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \Omega(f, \frac{\pi}{|n|}) \leq \frac{\pi^a}{2} C \frac{1}{|n|^a} = C' \frac{1}{|n|^a}$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ □

__Απόδειξη Θεωρήματος__ $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = -\int_0^{2\pi} f(t) e^{i\pi} e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$ $(e^{i\pi} = -1)$ $= -\int_0^{2\pi} f(t) e^{-in(t - \frac{\pi}{n})} \frac{dt}{2\pi} = -\int_0^{2\pi} f(s + \frac{\pi}{n}) e^{-ins} \frac{ds}{2\pi}$. Άρα

$$2|\hat{f}(n)| = \left| \int_0^{2\pi} \left(f(t) - f(t + \tfrac{\pi}{n})\right) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(t) - f(t + \tfrac{\pi}{n})| \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(s - \tfrac{\pi}{n}) - f(s)| \frac{ds}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f_{\frac{\pi}{n}} - f|(s) \frac{ds}{2\pi} = \|f_{\frac{\pi}{n}} - f\| =$$

$= \Omega(f, \frac{\pi}{n})$. Αυτό στην περίπτωση $n > 0$. Για $n < 0$

$$2|\hat{f}(n)| \leq \int_0^{2\pi} |f(t) - f(t - \tfrac{\pi}{|n|})| \frac{dt}{2\pi} = \|f - f_{\frac{\pi}{|n|}}\|_1 = \Omega(f, \tfrac{\pi}{|n|}) \qquad \square$$

Σειρές Fourier για L^2 συναρτήσεις

$L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$ άρα για $f \in L^2(\mathbb{T})$ έχω μετασχηματισμό Fourier δηλ τα $\hat{f}(n)$ είναι καλά ορισμένα. Ο L^2 έχει παραπάνω δομή. είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi} \qquad f, g \in L^2(\mathbb{T}).$$

συμβ. $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$.

<u>Πρόταση</u> $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ο/κ βάση του $L^2(\mathbb{T})$.

<u>Απόδειξη</u> $\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\frac{dt}{2\pi} = \delta_{n,m}$

άρα τα $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελούν ο/κ σύστημα (ή ακολουθία)

Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle f, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$ (στον L^2)

Έστω για μια $f \in L^2(\mathbb{T})$ $\langle f, e_n \rangle = 0$. Εδώ έχουμε

$\langle f, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\frac{dt}{2\pi} = \hat{f}(n)$ άρα $\hat{f}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ άρα από μονοσήμαντο των συντελεστών Fourier $f = 0$ (στον L^2) □

<u>Θεώρημα</u> Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$

(1) $\sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$ (Parceval)

(2) $f \underset{L^2}{=} \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ $\left(S_n(f) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} f \right)$

(3) Ο μετασχηματισμός $L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός & ισομετρία (Θεώρημα Plancerel)

(4) $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2}$ δηλ. $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi} =$

$= \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ (Parceval II)

<u>Απόδειξη</u> (1) Από χαρακτηρισμό του πότε ένα ο/κ σύστημα είναι βάση σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert έχουμε άμεσα ότι

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|_2^2 \quad \text{δηλ.} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2.$$

(2) Από τον ίδιο χαρακτηρισμό $S_n(f) = \sum_{-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \xrightarrow{L^2} f$

$$\sum_{-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \xrightarrow{L^2} f \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e_k \overset{L^2}{=} f \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \overset{L^2}{=} f$$

③ Γραμμικότητα έχει γίνει. Το 1-1 έχει γίνει (μοναδικότητα μετασχηματισμού Fourier). Δείχνουμε ότι ο μετασχηματισμός είναι επί. Έστω $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ δηλ. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$. Θέλουμε $f \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{f}(n) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε $f_n := \sum_{-n}^{n} a_k e_k \in C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$. Δείχνουμε ότι $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον L^2.
Έστω $m > n$. $\|f_m - f_n\|_2^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} a_k e_k + \sum_{k=-m}^{-n-1} a_k e_k \|_2^2 =$ (Πυθαγόρειο)
$= \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 + \sum_{k=-m}^{-n-1} |a_k|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ αφού $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.
Άρα η (f_n) συγκλίνει σε μια $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για αυτήν της f έχουμε
$\hat{f}(j) = \langle f, e_j \rangle = \langle \sum_{\mathbb{Z}} a_n e_n , e_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{-n}^{n} a_k e_k , e_j \rangle = a_j$
Άρα η f είναι η αντίστροφη εικόνα της (a_n) μέσω του μετασχηματισμού Fourier.
Ο μετασχηματισμός είναι ισομετρία από την Parceval.

④ <u>1ος τρόπος</u> Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n , g \rangle =$
$= \lim_n \langle \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k) e_n , g \rangle = \lim_n \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k) \langle e_k, g \rangle =$
$= \lim_n \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k) \overline{\langle g, e_k \rangle} = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2}$

<u>2ος τρόπος</u> Polarization Identity:
για $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ $\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{4} \left(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2 \right)$
$\overset{(1)}{=} \frac{1}{4} \left(\|\hat{f}+\hat{g}\|_{\ell^2} - \|\hat{f}-\hat{g}\|_{\ell^2} + i\|\hat{f}+i\hat{g}\|_{\ell^2} - i\|\hat{f}-i\hat{g}\|_{\ell^2} \right) =$
$= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. □

Αθροίσιμες Σειρές Fourier

$A(\mathbb{T}) := \{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty \}$
είναι γραμμικός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{T})$. Ονομάζεται <u>Fourier άλγεβρα του $L^1(\mathbb{T})$</u>. Η απεικόνιση $L^1(\mathbb{T}) \ni f \longmapsto \hat{f} \in C_0(\mathbb{Z})$ είναι γραμμική 1-1 & συνεχής. Αυτή αν περιορίσετε στο $A(\mathbb{T})$ είναι $A(\mathbb{T}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$. Ο μετασχηματισμός Fourier από το $L^1(\mathbb{T})$ στο $C_0(\mathbb{Z})$ δεν είναι επί (πχ $a_n = \operatorname{sgn}(n)/\ln(n)$)

Ο μετασχηματισμός fourier $A(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι επί.

Πράγματι, έστω $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ δηλ. $\sum_{\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Τότε η σειρά $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$ συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{T})$ $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n e_n\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty\right)$

Η $f = \sum_{\mathbb{Z}} a_n e_n$ συγκλίνει & ομοιόμορφα για τον ίδιο λόγο: $C(\mathbb{T})$ είναι πλήρης (με sup-νόρμα) & $\sum_{\mathbb{Z}} \|a_n e_n\| = \sum_{\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Άρα $\sum a_n e_n$ συγκλίνει στο $C(\mathbb{T})$.

Για τους συντελεστές fourier της f: $\hat{f}(j) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ijt} \frac{dt}{2\pi} =$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{\mathbb{Z}} a_k e^{ikt} e^{-ijt} \frac{dt}{2\pi} = (\text{fubini}) \sum_{\mathbb{Z}} a_n \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)t} \frac{dt}{2\pi} = a_j$$

Άρα αυτή η f είναι η αντίστροφη εικόνα της $(a_n)_{\mathbb{Z}}$ μέσω του μετασχηματισμού fourier.

Αποδείξαμε τον τύπο της αντιστροφής

$$f \overset{L^1}{\underset{C(\mathbb{T})}{=}} \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n, \quad f \in A(\mathbb{T})$$

Αυτό δείχνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τον $A(\mathbb{T})$ σαν υπόχωρο του $C(\mathbb{T})$ ή ότι για κάθε $f \in A(\mathbb{T})$, αν το δούμε σαν υπόχωρο του $L^1(\mathbb{T})$, είναι ίση σχ. παντού με συνεχή

<u>Ορίζουμε</u> $\|f\|_{A(\mathbb{T})} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$. Αυτό είναι νόρμα στο $A(\mathbb{T})$

Με αυτή τη νόρμα $A(\mathbb{T})$ & $\ell^1(\mathbb{Z})$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι

$A(\mathbb{T})$ είναι άλγεβρα: $f, g \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow f \cdot g \in A(\mathbb{T})$.

$A(\mathbb{T}) = \{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty \} = \{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \}$

Fourier άλγεβρα του κύκλου. Για $f \in A(\mathbb{T})$ η σειρά $\sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ είναι σχ. παντού ίση με συνεχή - συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή

Ορισμός Αν $(a_n), (b_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ορίζουμε $a * b(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$

Είναι καλά ορισμένη: $\sum_n \sum_k |a_k b_{n-k}| = \sum_k |a_k| \sum_n |b_{n-k}| =$
$= \sum_k |a_k| \sum_n |b_n| = \|a\|_{\ell^1} \|b\|_{\ell^1} < \infty.$

Άρα η σειρά $\sum_k a_k b_{n-k}$ συγκλίνει & $\|a * b\|_{\ell^1} \leq \|a\|_{\ell^1} \|b\|_{\ell^1}$

Πρόταση αν $f, g \in A(\mathbb{T})$ τότε $f \cdot g \in A(\mathbb{T})$ & $\widehat{f \cdot g}(n) = (\hat{f} * \hat{g})(n)$
& $\|f \cdot g\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_A \|g\|_A \qquad (\|f\|_A := \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|)$

Απόδειξη $f, g \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow f \overset{L^1}{=} \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n \, , \; g \overset{L^1}{=} \sum_{\mathbb{Z}} \hat{g}(n) e_n$

η $f \cdot g$ είναι σχ. παντού ίση με συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{T}$ άρα $\in A(\mathbb{T})$

$\widehat{(f \cdot g)}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(t) g(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{T}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{imt} g(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} =$
$= (\text{fubini}) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-i(n-m)t} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \hat{g}(n-m) =$
$= (\hat{f} * \hat{g})(n).$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f \cdot g}(n)| = \sum_n \left| \sum_m \hat{f}(m) \hat{g}(n-m) \right| \leq \sum_n \sum_m |\hat{f}(m)| |\hat{g}(n-m)| =$
$= \sum_m |\hat{f}(m)| \sum_n |\hat{g}(n-m)| = \|\hat{f}\|_{\ell^1} \cdot \|\hat{g}\|_{\ell^1} \qquad \square$

Πρόταση Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ απολύτως συνεχής & $f' \in L^2(\mathbb{T})$ τότε $f \in A(\mathbb{T})$

Απόδειξη Ισχυρισμός: $\|f\|_A \leq \|f\|_1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \|f'\|_2$

$\sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|$. Απολύτως συνεχής $|\widehat{f'}(n)| = |n| |\hat{f}(n)|$

$\sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |\widehat{f'}(n)| \overset{(CS)}{\leq} |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |\widehat{f'}(n)|^2 \right)^{1/2} =$
$= |\hat{f}(0)| + \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \|f'\|_2 = \|f\|_1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f'\|_2.$

Για f απολύτως συνεχής με $f' \in L^2$ είναι $\|f\|_1 < \infty$ & $\|f'\|_2 < \infty$
άρα $\|f\|_A < \infty \qquad \square$

Συντελεστές Fourier Μέτρων Αν $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι μέτρο αν

• $\mu(\emptyset) = 0$ & • για $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο $\Rightarrow \mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$

(η $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ πρέπει να συγκλίνει απολύτως, ώστε να μην εξαρτάται απο αλλαγή της αναδιάταξης)

Κάθε μιγαδικό μέτρο γράφεται σαν $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$ όπου τα μ_i είναι θετικά πεπερασμένα μέτρα.

$M(X)$: ο χώρος όλων των μιγαδικών κανονικών μέτρων Borel ενός συμπαγή χώρου X.
Αν X συμπαγής μ.χ. τοτε $M(X)$ ο χώρος των μιγαδικών μέτρων Borel
πχ) $X = \mathbb{T}$ $M(\mathbb{T})$ ο χώρος των μιγαδικών μέτρων Borel.

<u>Θεώρημα</u> (Riesz) X συμπαγής μ.χ. Τοτε κάθε $\mu \in M(X)$ ορίζει φραγμένο γρ. συναρτησοειδές στον χώρο $C(X) = \{ f: X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty \}$ μέσω του τύπου $f \longmapsto \langle f, \mu \rangle = \int f \, d\bar{\mu} \; \left(= \overline{\int \bar{f} \, d\mu} \right)$ όπου αν $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ τοτε $\bar{\mu} = \mu_1 - i\mu_2$. Έστω $\varphi_\mu(f) = \langle f, \mu \rangle$
Η απεικόνιση $\mu \longmapsto \varphi_\mu$ είναι ισομορφισμός. Δηλ. για κάθε φρ. γρ. συναρτησοειδές $\varphi \in C(X)^*$ υπάρχει μοναδικό $\mu \in M(X)$ τ.ω. $\varphi(f) = \int f \, d\bar{\mu}$ $\forall f \in C(X)$. $\|\mu\| =$ η νόρμα του μ σαν φρ. γρ. συναρτησοειδές στο $C(X)$. (δηλ νόρμα τελεστή) ειδικά αν μ είναι θετικό τοτε $\|\mu\| = \mu(X)$.

<u>Πόρισμα</u> Αν $\mu, \nu \in M(X)$ τ.ω. $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$ $\forall f \in C(X) \Rightarrow \mu = \nu$.

<u>Ορισμός</u> Για $\mu \in M(\mathbb{T})$ ορίζουμε τους συντελεστές Fourier του μ ως $\hat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} e^{-int} \, d\mu = \overline{\langle e_n, \mu \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Πρόταση</u> ① Αν $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$ τοτε $\widehat{\mu + \nu}(n) = \hat{\mu}(n) + \hat{\nu}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
ξ αν $c \in \mathbb{C}$ τοτε $\widehat{c \cdot \mu}(n) = c \cdot \hat{\mu}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
② $\|\hat{\mu}(n)\| \leq \|\mu\|$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. αρα $\hat{\mu} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$
③ Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τοτε το μέτρο $\mu(B) := \int_B f \, dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ ανοίκει στο $M(\mathbb{T})$ ξ $\hat{\mu}(n) = \hat{f}(n)$.

<u>Πρόταση</u> ("Parceval") αν $\mu \in M(\mathbb{T})$ τοτε $\langle f, \mu \rangle = \int f \, d\bar{\mu} = \overline{\int \bar{f} \, d\mu} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}$ (Cesaro σύγκλιση)
Ειδικότερα όταν η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)}$ συγκλίνει τοτε $\langle f, \mu \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}$

<u>Απόδειξη</u> $\sigma_n(f) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N (S_k(f)) = K_N * f = \sum_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) e_n$
Γνωρίζουμε οτι $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα για $f \in C(\mathbb{T})$. Για $f \in C(\mathbb{T})$ $\langle f, \mu \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_n(f), \mu \rangle$

$|\langle \sigma_N(f) - f, \mu\rangle| \le \int |\sigma_N(f)-f|\, d\bar{\mu} \le \|\sigma_N(f)-f\|_\infty \|\bar{\mu}\| = \|\sigma_N(f)-f\|_\infty \|\mu\|$

άρα $\langle f,\mu\rangle = \lim_N \langle \sigma_N(f),\mu\rangle = \lim_N \sum_{-N}^{N} \left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)\langle e_k,\mu\rangle =$
$= \lim_N \sum_{-N}^{N} \left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}.$

Παρατηρούμε ότι αν $S_n = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}$, $n\in\mathbb{N}_0$

$\frac{1}{N+1}(S_0+S_1+\dots+S_N) = \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}$

$\lim_N S_n = \sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\hat{\mu}(n)$. $\lim \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)} = \langle f,\mu\rangle$

και άρα οι μέσοι όροι συγκλίνουν στο ίδιο όριο. □

Συνέλιξη Δυο Μέτρων

Έστω $\mu,\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Για μια $f\in C(\mathbb{T})$ ορίζουμε $\varphi_{\mu,\nu}(f) =$
$= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(t+s)\,d\mu(t)\,d\nu(s)$. Το $\varphi_{\mu,\nu}$ είναι γρ. συναρτησοειδές στο $C(\mathbb{T})$ και είναι φραγμένο. $|\varphi_{\mu,\nu}(f)| \le \|f\|_\infty\|\mu\|\|\nu\| < \infty$.

Άρα υπάρχει ένα μέτρο $\mu*\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ με $\varphi_{\mu,\nu}(f) = \int f\,d\mu*\nu$ από το θεώρημα του Riesz. Αυτό το μέτρο το ονομάζουμε συνέλιξη των μ και ν

Για κάθε Borel $B\in\mathcal{B}(\mathbb{T})$ ισχύει $\mu*\nu(B) = \int_{\mathbb{T}}\mu(B-t)\,d\nu(t) =$
$= \int_{\mathbb{T}}\nu(B-t)\,d\mu(t)$.

Πρόταση Αν $\mu,\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ τότε $\widehat{\mu*\nu}(n) = \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

Απόδειξη $\widehat{\mu*\nu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\,d\mu*\nu(t) = \iint e^{-in(t+s)}\,d\mu(t)\,d\nu(s) =$
$= \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\,d\mu(t)\int_{\mathbb{T}} e^{-ins}\,d\nu(s) = \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n)$ □

Πόρισμα του Parceval

(1) Αν $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{\mu}(n)=0$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ τότε $\mu=0$

(2) Αν $\mu,\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{\mu}(n)=\hat{\nu}(n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $\mu=\nu$.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε το (1).

Από τον τύπο του Parceval $\langle f,\mu\rangle = \lim \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)\hat{f}(n)\cancelto{0}{\overline{\hat{\mu}(n)}} = 0$

άρα $\langle f,\mu\rangle = 0$ $\forall f\in C(\mathbb{T})$ άρα $\mu=0$. □

$\mathcal{M}(\mathbb{T})$ χώρος μιγαδικών μέτρων Borel στον $\mathbb{T}$.

Συμβολισμοί: $\varphi_\mu(f) = \langle f, \mu\rangle = \int f\, d\bar{\mu} \quad \forall f \in C(\mathbb{T})$

$\hat{\mu}(n) = \int e^{-int} d\mu(t) = \langle e_n, \mu\rangle. \ \forall n \in \mathbb{Z}.$

συνέλιξη μέτρων $\int_{\mathbb{T}} f\, d\mu*\nu = \iint f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \quad \forall f \in C(\mathbb{T})$

$\left|\int f\, d\mu*\nu\right| \leq \int_{\mathbb{T}} \Big| \underbrace{\int_{\mathbb{T}} f(x+y)\, d\mu(x)}_{F(y)} \Big|\, d\nu(y) \leq$

$\leq \|F\|_{C(\mathbb{T})} \|\nu\|$; $\|F\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_y \left|\int_{\mathbb{T}} f(x+y) d\mu(x)\right| \leq$

$\leq \sup_{y\in\mathbb{T}} \|f_{-y}\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \|\mu\| = \sup_{y\in\mathbb{T}} \|f\|_{C(\mathbb{T})} \|\mu\| = \|f\|_{C(\mathbb{T})} \|\mu\|$

Άρα $\left|\int_{\mathbb{T}} f\, d\mu*\nu\right| \leq \|f\|_{C(\mathbb{T})} \|\mu\|\cdot\|\nu\| \quad \forall f \in C(\mathbb{T})$

άρα $\underline{\|\mu*\nu\| \leq \|\mu\|\cdot\|\nu\|}.$ (1)

Αν $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue δηλ. $d\mu(x) = f(x)\,dx$ για $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\hat{\mu}(n) = \hat{f}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$ (2)

Απόδειξη $\hat{\mu}(n) = \int e^{-int} d\mu(t) = \int f(t)\, e^{-int} dt = \hat{f}(n)$

(3) αν $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ είναι απολύτως συνεχές ως προς Lebesgue με παράγωγο Radon-Nikodym $d\mu(x) = f(x)\,dx$, $d\nu(y) = g(y)\,dy$ τότε το μέτρο $\mu*\nu$ είναι απολύτως συνεχές ως προς Lebesgue με παράγωγο R-N $\underline{d(\mu*\nu)(t) = (f*g)(t)\,dt}.$

Θεώρημα Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε $\mu(\{t\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} e^{itk} \hat{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

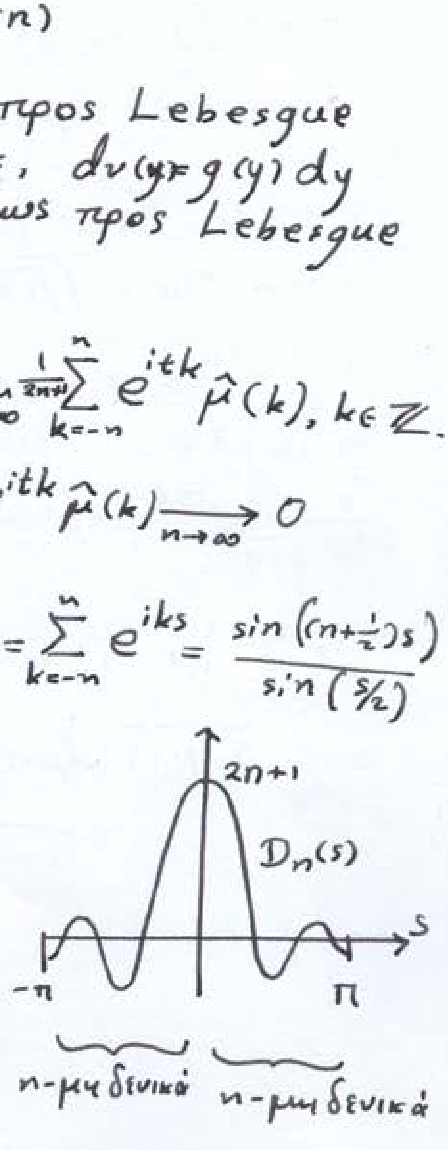
πχ) $\mu = \delta_0$ (dirac μέτρο στο μηδέν) για $t \neq 0$ $\frac{1}{2n+1} \sum_{-n}^{n} e^{itk} \hat{\mu}(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

για $t = 0$ είναι $\frac{1}{2n+1} \sum_{-n}^{n} \hat{\delta}_0(k) \longrightarrow 1.$

Απόδειξη θεωρήματος Πυρήνας Dirichlet $D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})s)}{\sin(s/2)}$

$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s)\, d\mu(s) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{-n}^{n} e^{-ik(t-s)} d\mu(s) =$

$= \sum_{-n}^{n} e^{-ikt} \hat{\mu}(k).$



$\frac{1}{2n+1} |D_n(t-s)| = \frac{1}{2n+1} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-s))}{\sin(\frac{t-s}{2})} \right| \leq$

$\leq \frac{1}{2n+1} \frac{1}{|\sin(\frac{t-s}{2})|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad s \neq t$

Για $s=t$ $\quad \frac{1}{2n+1} D_n(t-s) = 1$. Άρα $\frac{1}{2n+1} D_n(t-s) \longrightarrow \mathbb{1}_{\{t\}}(s) \quad \forall s\in\mathbb{T}$

Επίσης $\frac{1}{2n+1}\left|D_n(t-s)\right| = \frac{1}{2n+1}\left|\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(t-s)}\right| \le \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{n}\left|e^{-ik(t-s)}\right| = 1$

Από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\frac{1}{2n+1}\int_{\mathbb{T}} D_n(t-s)\,d\mu(s) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{t\}}(s)\,d\mu(s)$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\hat{\mu}(k) \longrightarrow \mu(\{t\}).$$

□

<u>Θεώρημα</u> (Wiener) Έστω $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ τότε

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|\hat{\mu}(k)|^2 \longrightarrow \sum_{t\in\mathbb{T}}|\mu(\{t\})|^2.$$

(ένα πεπερασμένο μέτρο έχει αριθμήσιμο πλήθος σημειακών μαζών. Άρα το άθροισμα στο δεξί μέρος είναι αριθμήσιμο άθροισμα).

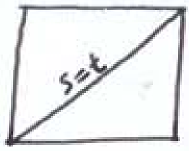
<u>Πόρισμα</u> Αν $\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|\hat{\mu}(k)|^2 \to 0$ τότε το μ δεν έχει σημειακές μάζες.

<u>Απόδειξη</u> <u>1ος τρόπος</u>: $\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|\hat{\mu}(k)|^2 = \frac{1}{2n+1}\sum \hat{\mu}(k)\overline{\hat{\mu}(k)} =$

$= \frac{1}{2n+1}\sum \int e^{-ikt}d\mu(t)\,\overline{\int e^{-iks}d\mu(s)} = \iint \frac{1}{2n+1}\sum e^{ik(s-t)}\,d\mu(t)\,d\bar{\mu}(s)$

$\longrightarrow \iint \mathbb{1}_{\{s=t\}}\,d\mu(t)\,d\bar{\mu}(s) =$

$= \int_{\mathbb{T}}\mu(\{s\})\,d\bar{\mu}(s) = \sum_{s\in\mathbb{T}}\mu(\{s\})\bar{\mu}(\{s\}) = \sum_{s\in\mathbb{T}}|\mu\{s\}|^2$



<u>2ος τρόπος</u> Έστω $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Ορίζουμε $\mu^*(B) = \overline{\mu(-B)}$.

$\int f(t)\,d\mu^*(t) = \overline{\int \overline{f(-t)}\,d\mu(t)}$. $\quad \widehat{\mu^*}(n) = \int e^{-int}d\mu^*(t) = \overline{\int \overline{e^{int}}\,d\mu(t)} =$

$= \overline{\int e^{-int}d\mu(t)} = \overline{\hat{\mu}(n)}$. Άρα $|\hat{\mu}(n)|^2 = \hat{\mu}(n)\cdot\overline{\hat{\mu}(n)} = \hat{\mu}(n)\,\widehat{\mu^*}(n) =$

$= \widehat{\mu*\mu^*}(n)$. Από το προηγούμενο θεώρημα

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} e^{i0k}\,\widehat{\mu*\mu^*}(k) \longrightarrow \mu*\mu^*(\{0\}).$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|\hat{\mu}(n)|^2 \longrightarrow \mu*\mu^*(\{0\}).$$

$\mu*\mu^*(\{0\}) = \int_{\mathbb{T}}\mu^*(\{0\}-t)\,d\mu(t) =$

$= \int_{\mathbb{T}}\overline{\mu(\{t\})}\,d\mu(t) = \sum_{t\in\mathbb{T}}\overline{\mu(\{t\})}\,\mu(\{t\}).$

□

Θεώρημα Herglotz

Ορισμός Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ λέγεται θετικά ορισμένη αν $\forall n\in\mathbb{N}$ & κάθε $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\bar{z}_j a_{i-j} \geq 0 \Leftrightarrow (z_1,\dots z_n)\, A^{(n)} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$A^{(n)}_{ij} = (a_{i-j})_{i,j} \qquad A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_n & \cdots & & a_0 \end{bmatrix}$$ θετικά ορισμένος πίνακας.

Θεώρημα (Herglotz) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μια ακολουθία στο $\mathbb{Z}$ τότε $a_n=\hat{\mu}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ για κάποιο θετικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ ανν η (a_n) είναι θετικά ορισμένη.

Απόδειξη $(\Rightarrow)$ $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j\hat{\mu}(k-j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j\int e^{-i(k-j)t}d\mu(t) =$

$= \int\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k e^{-ikt}\cdot\overline{z_j e^{-ijt}}\,d\mu(t) = \int\left|\sum_{k=1}^{n} z_k e^{-ikt}\right|^2 d\mu(t) \geq 0$

άρα η $(\hat{\mu}(k))$ είναι θετικά ορισμένη

□

$S_n(f)=D_n*f=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e_k$, $\quad \sigma_n(f)=K_n*f=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)$

Μέχρι τώρα έχουμε δει:

1) $\sigma_n(f)\longrightarrow f$ σε κάθε $L^p(\mathbb{T})$, $1\leq p<\infty$ & $C(\mathbb{T})$
2) $\sigma_n(f)(t)\longrightarrow f(t)$ σε σημεία συνέχειας της f (Fejer)
3) $\sigma_n(f)(t)\longrightarrow f(t)$ σχ. παντού στο $\mathbb{T}$ (Lebesgue)

} Cesaro σύγκλιση.

Σύγκλιση Σειρών Fourier

Ορολογία λέμε ότι έχουμε σύγκλιση ως προς την νόρμα σε κάποιον από τους χώρους $L^p(\mathbb{T})$, $1\leq p<+\infty$, $C(\mathbb{T})$ αν

$\|S_n(f)-f\|_p\longrightarrow 0$, $\quad \|S_n(f)-f\|_{C(\mathbb{T})}\longrightarrow 0$ αντίστοιχα.

Ορισμός Ορίζουμε τον τελεστή $S_n: L^p(\mathbb{T})\longrightarrow L^p(\mathbb{T})$ ή

$S_n: C(\mathbb{T})\longrightarrow C(\mathbb{T}) : f\longmapsto S_n(f)$.

Παρατήρηση Για $f\in L^1(\mathbb{T})$ $S_n(f)$ είναι τριγ. πολυώνυμο, άρα θα έχουμε $S_n(f)\in C(\mathbb{T})$ ειδικότερα $S_n(f)\in L^p(\mathbb{T})$ $1\leq p<+\infty$.

Ορισμός $\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})}$ την νόρμα του τελεστή $S_n: L^p(\mathbb{T})\longrightarrow L^p(\mathbb{T})$ για $1\leq p<\infty$. δηλ.

$\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} := \inf\{C>0 : \|S_n(f)\|_p\leq C\|f\|_p \ \ \forall f\in L^p(\mathbb{T})\}$

Ανάλογα η νόρμα $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})}$ η νόρμα του S_n ως τελεστής $C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$.

Θεώρημα Έχουμε σύγκλιση στον $L^p(\mathbb{T})$ $1 \le p < \infty$ δηλ. $\|S_n(f) - f\|_p \to 0$ $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$ ανν. $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$.

Όμοια έχουμε σύγκλιση στον $C(\mathbb{T})$ ανν. $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|S_n\|^{C(\mathbb{T})} < +\infty$.

$$\sup_n \sup_{f \neq 0} \frac{\|S_n(f)\|_{C(\mathbb{T})}}{\|f\|_{C(\mathbb{T})}} = \sup_n \sup_{f \neq 0} \frac{\sup_t |S_n(f)(t)|}{\sup_t |f(t)|}.$$

Απόδειξη Έστω $1 \le p < \infty$ & έστω ότι $\|S_n(f) - f\|_p \to 0$. $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$ Έπεται ότι $\|S_n(f)\|_p \le C_f < \infty$. $\forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό ισχύει για τυχούσα f. Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι $\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} \le C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ για κάποιο $C < \infty$ σταθερό.

Αντίστροφα. Αν $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{itk}$ τότε $S_m(p) = p$ $\forall m \ge n$. Για $f \in L^p(\mathbb{T})$ $\|S_m(f) - f\|_p \le \|S_m(f) - S_m(p)\|_p + \|S_m(p) - f\|_p \le$

$\le \|S_m(f) - S_m(p)\|_p + \|p - f\|_p + \|S_m(p) - p\|_p \le$

$\le \|S_m(f-p)\|_p + \|f-p\|_p + \|S_m(p) - p\|_p \le$

$\le \left(\sup_{m \in \mathbb{N}_0} \|S_m\|^{L^p(\mathbb{T})} + 1\right) \|f-p\|_p + \|S_m(p) - p\|_p$. Άρα

από πυκνότητα των τριγ. πολυωνύμων στον $L^p(\mathbb{T})$, δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει p τριγ. πολυώνυμο τ.ω. $\|f-p\|_p < \varepsilon$. Τότε για $m \ge \deg(p)$ είναι $\|S_m(f) - f\|_p \le \left(\sup_{m \in \mathbb{N}_0} \|S_m\|^{L^p(\mathbb{T})} + 1\right) \cdot \varepsilon$

Άρα δείξαμε $\|S_m(f) - f\|_p \to 0$ καθώς $m \to \infty$

η απόδειξη για το $C(\mathbb{T})$ είναι ίδια □

Σύγκλιση Σειρών Fourier

$e_j(t) = e^{ijt}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $S_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e_j$, $f \in L^1(\mathbb{T}), n \in \mathbb{N}_0$

$S_n(f) \in C(\mathbb{T})$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$

$S_n : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ για $p \geq 1$. $S_n : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ γρ. τελεστής.

$\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} = \inf\{C > 0 : \|S_n(f)\|_p \leq C\|f\|_p \ \forall f \in L^p(\mathbb{T})\}$

$\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} = \inf\{C > 0 : \|S_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq C\|f\|_{C(\mathbb{T})} \ \forall f \in C(\mathbb{T})\}$

Θεώρημα Τα μερικά αθροίσματα $S_n(f)$ της σειράς Fourier της f συγκλίνουν ως προς την νόρμα του $L^p(\mathbb{T})$ ανν $\sup_n \|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} < \infty$ & όμοια τα $S_n(f)$ συγκλίνουν ως προς την νόρμα του $C(\mathbb{T})$ ανν $\sup_n \|S_n\|^{C(\mathbb{T})} < \infty$.

Πρόταση Ο $L^1(\mathbb{T})$ δεν επιδέχεται σύγκλιση ως προς την νόρμα.

Απόδειξη Ισχυρισμός: $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1 \sim c\log(n)$.

Απόδειξη ισχυρισμού: $\|S_n(f)\|_1 = \|D_n * f\|_1 \leq \|D_n\|_1 \cdot \|f\|_1$ $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$

άρα $\|S_n\|^{L^1} \leq \|D_n\|_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$S_n(K_N) = D_n * K_N = \sigma_N(D_n) \xrightarrow[L^1(\mathbb{T})]{N\to\infty} D_n$

$\|S_n(K_n)\|_1 = \|\sigma_N(D_n)\|_1 \longrightarrow \|D_n\|_1$. Άρα έχουμε

$\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|S_n(K_N)\|_1 \xrightarrow[N\to\infty]{} \|D_n\|_1$ $(\|K_N\|_1 = 1)$

Επομένως $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_1$ Άρα $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$.

$S_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e_j = D_n * f$

$D_n = \sum_{j=-n}^{n} e_j$

$K_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + \cdots + D_n)$

Η πρόταση λέει ότι υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\|S_n(f) - f\|_1 \not\to 0$. Ένα παράδειγμα είναι η $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} K_{n_j}(t)$, όπου $n_1 < n_2 < \cdots$ μεγαλώνουν αρκετά γρήγορα. □

Πρόταση Ο $C(\mathbb{T})$ δεν επιδέχεται σύγκλιση ως προς την νόρμα.

Απόδειξη Ισχυρισμός: $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1 \sim c \cdot \ln(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη ισχυρισμού: $\|S_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} = \|D_n * f\|_{C(\mathbb{T})} =$

$= \sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(s) D_n(t-s) \frac{ds}{2\pi} \right| \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(s)| \cdot |D_n(s-t)| \frac{ds}{2\pi} \leq$

$\leq \|f\|_{C(\mathbb{T})} \sup_{t\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |D_n(s-t)| \frac{ds}{2\pi} = \|f\|_{C(\mathbb{T})} \|D_n\|_1.$

Για την αντίστροφη ανισότητα ορίζουμε συναρτήσεις $\varphi_n \in C(\mathbb{T})$ με $\|\varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο πυρήνας Dirichlet D_n έχει $2n$ ρίζες στα σημεία $t = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ $\left(D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \right)$

Ορίζουμε $\varphi_n(t) = sgn(D_n(t))$ για $t \in (-\pi,\pi) \setminus \bigcup_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \left(\frac{2k\pi}{2n+1} - \delta_n, \frac{2k\pi}{2n+1} + \delta_n\right)$ για $\delta_n > 0$ με $\delta_n < \frac{\pi}{2n+1}$.

Στα διαστήματα $\left(\frac{2k\pi}{2n+1} - \delta_n, \frac{2k\pi}{2n+1} + \delta_n\right)$, $k \in \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ την ορίζουμε να είναι ευθεία ώστε $\varphi_n \in C(\mathbb{T})$.

$$\|S_n \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} \geq |S_n \varphi_n(0)| = |D_n * \varphi_n(0)| = \left| \int_{(-\pi,\pi]} D_n(t)\varphi_n(t) \frac{dt}{2\pi} \right| =$$

$$= \left| \int_{(-\pi,\pi]} |D_n(t)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{(-\pi,\pi]} D_n(t)\left(\varphi_n(t) - sgn(D_n)(t)\right) \frac{dt}{2\pi} \right| =$$

$$= \left| \int_{(-\pi,\pi]} |D_n(t)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\bigcup_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \left(\frac{2k\pi}{2n+1} - \delta_n, \frac{2k\pi}{2n+1} + \delta_n\right)} D_n(t)\left(\varphi_n(t) - sgn(D_n)(t)\right) \frac{dt}{2\pi} \right| \geq$$

$$\geq \int_{(-\pi,\pi]} |D_n(t)| \frac{dt}{2\pi} - \int_{\bigcup_k} |D_n(t)| \cdot |\varphi_n(t) - sgn(D_n)(t)| \frac{dt}{2\pi} =$$

$= \|D_n\|_1 - 2(2n+1)2\delta_n \cdot 2n$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta_n = \frac{\varepsilon}{8n(2n+1)}$ οπότε $\|S_n \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_1 - \varepsilon$. Έπεται ότι $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} \geq \|S_n \varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_1 - \varepsilon$. Αφού $\varepsilon > 0$ τυχόν έχουμε $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_1$ ' άρα $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$ □

<u>Παρατήρηση</u> 1 Στην απόδειξη δείξαμε ότι υπάρχουν $\varphi_n \in C(\mathbb{T})$ με $\|\varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} = 1$ τ.ω. $|S_n \varphi_n(0)| \geq \frac{1}{2}\|D_n\|_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 Κάθε άλλος $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ επιδέχεται σύγκλιση ως προς την νόρμα δηλ. $\|S_n f - f\|_p \to 0$ $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$. Για $p=2$ το έχουμε αποδείξει.

3 Για $f \in A(\mathbb{T})$ $S_n f \to f$ ομοιόμορφα δηλ. στον $C(\mathbb{T})$ ' άρα ως προς την $L^1(\mathbb{T})$ νόρμα.

<u>Κατά Σημείο Σύγκλιση Σειρών Fourier</u>

<u>Πρόταση</u> Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τ.ω. $S_n(f)(0) \not\to f(0)$

<u>Απόδειξη 1</u> Ορίζουμε ένα συναρτησοειδές $\varphi_n(f) = S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)$, $f \in C(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$. Είναι γραμμικό ' φραγμένο.

$|\varphi_n(f)| \leq \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)| \leq (2n+1)\|f\|_{C(\mathbb{T})}$ άρα $\|\varphi_n\| \leq 2n+1 \ \forall n$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $\psi_n \in C(\mathbb{T})$ με $\|\psi_n\|_{C(\mathbb{T})} = 1$ τ.ω. $|\varphi_n(\psi_n)| = |S_n(\psi_n)(0)| \geq \frac{1}{2}\|D_n\|_1$ και άρα $\|\varphi_n\| \geq \frac{1}{2}\|D_n\|_1 \ \forall n$

Επομένως $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| = +\infty$. Αν είχαμε $S_n(f)(0) \longrightarrow f(0) \ \forall f \in C(\mathbb{T})$ θα είχαμε ότι $\varphi_n(f) \longrightarrow f(0) \ \forall f\in C(\mathbb{T})$ δηλ. $\sup_n |\varphi_n(f)| < +\infty$ για κάθε $f\in C(\mathbb{T})$. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος θα έπρεπε οι νόρμες $\|\varphi_n\|$ των τελεστών να είναι φραγμένες που δεν είναι: $\sup_n \|\varphi_n\| = +\infty$.

Έχουμε άτοπο, άρα $\exists f\in C(\mathbb{T})$ τ.ω. $S_n(f)(0) \not\longrightarrow f(0)$

<u>Απόδειξη 2</u> (Κατασκευαστική) Ξεκινάμε με τις $\psi_n \in C(\mathbb{T})$ τ.ω. $\|\psi_n\|_{C(\mathbb{T})} = 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$ και $|S_n\psi_n(0)| \geq \frac{1}{2}\|D_n\|_1 \geq c\ln(n) \ \forall n\in\mathbb{N}$ και για κάποιο $c>0$. Ορίζουμε $\varphi_n = \sigma_{n^2}(\psi_n)$ για $n\in\mathbb{N}$. Το φ_n είναι τριγ. πολυώνυμο βαθμού το πολύ n^2.

$$|\sigma_{n^2}(\psi_n)(t)| = |(K_{n^2} * \psi_n)(t)| \leq \|\psi_n\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \|K_{n^2}\|_1 = \|\psi_n\|_{C(\mathbb{T})}$$

Άρα $\|\varphi_n\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|\psi_n\|_{C(\mathbb{T})} = 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

$$|S_n(\varphi_n)(t) - S_n(\psi_n)(t)| = |S_n(\varphi_n - \psi_n)(t)| =$$

$$= \left|\sum_{k=-n}^{n} (\hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n)(k)\, e^{ikt}\right| \leq \sum_{k=-n}^{n} |K_{n^2}(k) - 1| \cdot |\hat{\psi}_n(k)| =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left|\left(1 - \frac{|k|}{n^2+1}\right) - 1\right| \cdot |\hat{\psi}_n(k)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n^2+1} \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{n^2+1} < 2.$$

<u>Συμπέρασμα</u> $|S_n(\varphi_n)(0)| \geq c\ln(n) - 2 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Επιλέγουμε $m_1 < m_2 < \cdots \quad m_j = 2^{3^j}$, $j\in\mathbb{N}$. Ορίζουμε $\tilde{\varphi}_{m_j}(t) = \varphi_{m_j}(m_j t)$. $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_{m_j}(t)$. Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (κριτήριο Weierstrass) και άρα $f\in C(\mathbb{T})$.

Παρατηρούμε ότι: $\tilde{\varphi}_{m_j}(t) = \varphi_{m_j}(m_j t) = \sum_{k=-m_j}^{m_j} \hat{\varphi}_{m_j}(k) e^{ikt m_j}$

άρα
$$\hat{\tilde{\varphi}}_{m_j}(k) = \begin{cases} \hat{\varphi}_{m_j}(k/m_j), & \text{για } k \text{ τ.ω. } m_j | k \text{ και } |k| \leq m_j^3 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$S_m \tilde{\varphi}_{m_j}(0) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{\tilde{\varphi}}_{m_j}(k) = \sum_{l=-\lfloor \frac{m}{m_j} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{m_j} \rfloor} \hat{\tilde{\varphi}}_{m_j}(l m_j) =$$

$$= \sum_{l=-\lfloor \frac{m}{m_j} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{m_j} \rfloor} \hat{\varphi}_{m_j}(l).$$

Αν $m < m_j$ $\quad S_m \tilde{\varphi}_{m_j}(0) = \hat{\varphi}_{m_j}(0)$.

Αν $m \geq m_j{}^3$ $\quad S_m \tilde{\varphi}_{m_j}(0) = \varphi_{m_j}(0)$

$S_m \tilde{\varphi}_{m_j}(0) = \sum_{\ell=-m_j^2}^{m_j^2} \hat{\varphi}_{m_j}(\ell) = \varphi_{m_j}(0)$.

Επειδή φ_{m_j} είναι τριγ. πολυώνυμο το πολύ βαθμού m_j^2

$S_{m_n^2}(f)(0) = \sum_{j=1}^{n-1} j^{-2} S_{m_n^2}(\tilde{\varphi}_{m_j})(0) + \frac{1}{n^2} S_{m_n^2}(\tilde{\varphi}_{m_n})(0) +$
$\quad + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-2} S_{m_n^2}(\tilde{\varphi}_{m_j})(0)$.

Για $j<n$ τοτε $m_j = 2^{3^j} \leq 2^{3^{n-1}}$, αρα $m_j^3 \leq 2^{3^n} = m_n \leq m_n^2$.

αρα $S_{m_n^2}(\tilde{\varphi}_{m_j})(0) = \varphi_{m_j}(0)$.

Για $j>n$ $\quad m_j = 2^{3^j} \geq 2^{3^{n+1}} = m_n^3$ $\qquad S_{m_n^2}(\tilde{\varphi}_{m_n})(0) = \sum_{\ell=-m_n}^{m_n} \hat{\varphi}_{m_n}(\ell) =$
$\quad = S_{m_n}(\varphi_{m_n})(0)$.

Αρα $|S_{m_n^2}(f)(0)| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^2} \varphi_{m_j}(0) + \frac{1}{n^2} S_{m_n}(\varphi_{m_n})(0) + \right.$
$\quad \left. + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \varphi_{m_j}(0) \right| \geq$

$\geq \frac{1}{n^2} |S_{m_n}(\varphi_{m_n})(0)| - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^2} |\varphi_{m_j}(0)| - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\hat{\varphi}_{m_j}(0)| \geq$

$\geq \frac{1}{n^2}\left(c \ln (m_n - 2)\right) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{n^2} =$

$= \frac{1}{n^2} c\, 3^n \ln 2 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{n^2} \longrightarrow \infty$.

Αρα τα $S_m(f)$ είναι μη φραγμένα ⇒ αρα $S_m(f)(0) \not\to f(0)$

□

Κατά Σημείο Σύγκλιση Σειρών Fourier

Θεώρημα (Hardy) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(n) = O(1/n)$ καθώς $|n| \to \infty$ τότε οι ακολουθίες $\sigma_n(f)(t)$ και $S_n(f)(t)$ συγκλίνουν για τα ίδια $t \in \mathbb{T}$ και στο ίδιο όριο. Επιπλέον αν τα $\sigma_n(f)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποιο $A \subseteq \mathbb{T}$ τότε και τα $S_n(f)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο A.

Παρατήρηση Αν f απολύτως συνεχής τότε $\hat{f'}(n) = o(1/n)$ άρα $\hat{f}(n) = O(1/n)$ καθώς $|n| \to \infty$. Επίσης f είναι Lipschitz συνεχής, τότε $\hat{f}(n) = O(1/n)$ καθώς $|n| \to \infty$. Επίσης αν f είναι Hölder με δείκτη $a > 1$ τότε $\hat{f}(n) = O(1/n^a)$ άρα $\hat{f}(n) = O(1/n)$ καθώς $|n| \to \infty$.

Γενικότερα αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε $\hat{f}(n) = O(1/n)$ καθώς $|n| \to \infty$.

Απόδειξη Θεωρήματος Η συνθήκη $\hat{f}(n) = O(1/n)$ καθώς $|n| \to \infty$ συνεπάγεται την (H) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda > 1$ τ.ω. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{n < |j| \leq \lambda n} |\hat{f}(j)| < \varepsilon$.

Πράγματι, αν $\hat{f}(n) \leq \frac{C}{|n|}$ για κάποιο $C < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\sum_{n<|j|\leq\lambda n} |\hat{f}(j)| \leq \sum \frac{C}{|j|} \leq \frac{C}{n}(\lambda - 1)n$$ και αν πάρουμε $0 < \lambda - 1 < \frac{\varepsilon}{C}$ τότε έχουμε την (H).

Έστω $\lambda > 1$. $(\lfloor \lambda n \rfloor + 1)\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) - (n+1)\sigma_{n+1}(f)(t) =$

$$= \sum_{k=-\lfloor \lambda n \rfloor}^{\lfloor \lambda n \rfloor} (\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k|)\hat{f}(k) e_k(t) - \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)\hat{f}(k) e_k(t)$$

$$= (\lfloor \lambda n \rfloor + 1) S_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) - (n+1) S_n(f)(t) - \sum_{n<|k|\leq\lfloor \lambda n \rfloor} |k| \hat{f}(k) e_k(t) =$$

$$= (\lfloor \lambda n \rfloor + 1)\left[S_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) - S_n(f)(t)\right] + (\lfloor \lambda n \rfloor + 1) S_n(f)(t) - \sum_{n<k\leq\lfloor \lambda n \rfloor} |k|\hat{f}(k) e_k(t)$$

$$= \sum_{n<k\leq\lfloor \lambda n \rfloor} (\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k|)\hat{f}(k) e_k(t) + (\lfloor \lambda n \rfloor - n) S_n(f)(t)$$

Άρα $$S_n(f)(t) = \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\sigma_n(f)(t) - \sum_{n<|k|\leq\lfloor \lambda n \rfloor} \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k|}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\hat{f}(k) e_k(t).$$

Έστω ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ είναι $\sigma_n(f)(t) \to \sigma$. Τότε

$$|S_n(f)(t) - \sigma| \leq \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}|\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) - \sigma| + \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}|\sigma_n(f)(t) - \sigma| + \sum_{n<|k|\leq\lfloor \lambda n \rfloor} \frac{\lfloor \lambda n \rfloor - 1 - k}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}|\hat{f}(k)|.$$ Ο τελευταίος όρος φράσσεται από $\sum_{n<|k|\leq\lfloor \lambda n \rfloor} |\hat{f}(k)|$ διότι για $|k| > n$ δηλ. $|k| \geq n+1$ έχουμε

$\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k| \leq \lfloor \lambda n \rfloor - n$

Έστω ε>0. Επιλέγουμε $\lambda>1$ τ.ω. να ισχύει η (H) και κατόπιν $n_1(\varepsilon)$ τ.ω. $\sum_{n<|k|\le[\lambda n]} |\hat{f}(k)| < \varepsilon/2$. Αφού $\sigma_n(f)(t)\to\sigma$, υπάρχει $n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $|\sigma_n(f)(t)-\sigma| < \varepsilon(\lambda-1)/8\lambda$ $\forall n\ge n_2(\varepsilon)$ γιατί $\lambda>1 \Rightarrow [\lambda n]\ge n$. Τέλος υπάρχει $n_3(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} \le \frac{2\lambda}{\lambda-1}$ και $\frac{n+1}{[\lambda n]-n} \le \frac{2}{\lambda-1} \le \frac{2\lambda}{\lambda-1}$. Επειδή $\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} \longrightarrow \frac{\lambda}{\lambda-1}$ και $\frac{n+1}{[\lambda n]-n} \longrightarrow \frac{1}{\lambda-1}$.

Έπεται ότι $|S_n(f)(t)-\sigma| < \frac{2\lambda}{\lambda-1}\,\frac{\varepsilon(\lambda-1)}{8\lambda} + \frac{2\lambda}{\lambda-1}\,\frac{\varepsilon(\lambda-1)}{8\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\forall n\ge \max\{n_1, n_2, n_3\}$ Άρα αποδείξαμε $\sigma_n(f)(t)\to\sigma \Rightarrow S_n(f)(t)\to\sigma$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή ισχύει πάντα.

Η απόδειξη δείχνει ότι η εξάρτηση της διαφοράς $|S_n(f)(t)-\sigma(t)|$ εξαρτάται από το t μόνο μέσω των $|\sigma_{[\lambda n]}(f)(t)-\sigma(t)|$ και $|\sigma_n(f)(t)-\sigma(t)|$. Επομένως αν $\sigma_n(f)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποιο $A\subseteq\mathbb{T}$, τότε αυτές οι διαφορές συγκλίνουν ομοιόμορφα στο μηδέν για $t\in A$ και άρα η αρχική διαφορά ικανοποιεί $\sup_{t\in A}|S_n(f)(t)-\sigma(t)|<\varepsilon$ $\forall n\ge n(\varepsilon)$ για κατάλληλο $n(\varepsilon)$ ανεξάρτητα του ε>0 □

<u>Πόρισμα</u> Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και έστω ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης. Τότε τα $S_n(f)(t) \longrightarrow \frac{1}{2}[f(t+)+f(t-)]$ $\forall t\in\mathbb{T}$ και $S_n(f)(t)\to f(t)$ για κάθε $t\in\mathbb{T}$ που είναι σημείο συνέχειας της f. Δηλ. $\forall t\in\mathbb{T}$ εκτός πιθανώς από ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων.

<u>Απόδειξη</u> Κάθε φραγμένης κύμανσης έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος που είναι φραγμένης κύμανσης και κάθε πραγματική φραγμένης κύμανσης είναι διαφορά δύο αύξουσών, έπεται ότι ~~...~~ για κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(t+)$ και $f(t-)$ σε κάθε $t\in\mathbb{T}$ και είναι ίσα (δηλ. f συνεχής) εκτός ίσως από το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων $t\in\mathbb{T}$. Από Θεώρημα Fejer έχουμε $\sigma_n(f)(t) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(t+)+f(t-))$ το οποίο για t σημείο συνέχειας είναι f(t). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Hardy και παίρνουμε ότι τα $S_n(f)$ έχουν την ίδια σύγκλιση. Εδώ χρησιμοποιούμε ότι για $f\in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένης κύμανσης έχουμε ότι $\hat{f}(n)=O(1/n)$, $|n|\to\infty$. □

<u>Πρόταση</u> $f\in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένης κύμανσης. Τότε $\hat{f}(n)=O(1/n)$ καθώς $|n|\to\infty$

Απόδειξη

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένης κύμανσης. $2\pi \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt =$

$$= \frac{-1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, de^{-int} = -\frac{1}{in}\left(f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}\right) + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, df(t)$$

$$2\pi\,|\hat{f}(n)| = \frac{1}{|n|}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, df(t)\right| \le \frac{1}{|n|}\int |e^{-int}|\, df(t)$$ ← μέτρο ολ. κύμανσης

$= \frac{1}{|n|}$ (ολική κύμανση) ← ή η νόρμα του φρ. συναρτ. που ορίζει το μέτρο df

Αν g φραγμένης κύμανσης δεξιά συνεχής (αλλάζουμε αριθμήσιμο πλήθος τιμών αν χρειάζεται...) τότε υπάρχει μέτρο πεπερασμένο Borel μ_g με $\mu_g((-\pi, t]) = g(t)$. Τότε

$$\int h(t)\, dg(t) := \int h(t)\, d\mu_g(t).$$

Ολοκλήρωση κατά μέρη: Αν f, g συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης δεξιά συνεχείς τότε

$$\int_{(a,b]} f\, dg = -\int_{(a,b]} g\, df + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$ όταν f, g δεν έχουν κοινά σημεία ασυνέχειας.

Παρατήρηση Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ φρ. κύμανσης $S_n(f)(t) \longrightarrow f(t)$ ομοιόμορφα σε κλειστά διαστήματα συνέχειας της f. Αυτό είναι συνέπεια των θεωρημάτων Fejer και Hardy.

Λήμμα Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < +\infty$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Τότε $S_n(f)(0) \longrightarrow 0$.

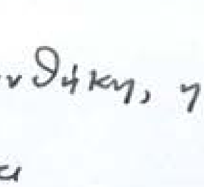
Απόδειξη $S_n(f)(0) = D_n * f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} f(t) \frac{dt}{2\pi}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) \frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \frac{f(t)}{\tan(t/2)} \frac{dt}{2\pi}$$ (ημίτονο αθροίσματος)

Έχουμε $f \in L^1(\mathbb{T})$. Απο Riemann-Lebesgue

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) \frac{dt}{2\pi} = \mathrm{Re}\, \hat{f}(n) \longrightarrow 0$. Απο την συνθήκη, η συνάρτηση $g(t) = \frac{f(t)}{\tan(t/2)}$ είναι επίσης στον $L^1(\mathbb{T})$ διότι

$|g(t)| = \frac{|f(t)|}{|\sin(t/2)|} |\cos(t/2)| \le \frac{|f(t)|}{|t|} \pi$. Έπεται απο το Riemann-Lebesgue οτι $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \frac{f(t)}{\tan(t/2)}\, dt = \mathrm{Im}\, \hat{g}(n) \longrightarrow 0$



Πόρισμα (Θεώρημα Dini) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάποιο $t_0 \in \mathbb{T}$ έχουμε $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f(t+t_0)-f(t_0)}{t} \right| dt < +\infty$. Τότε $S_n(f)(t_0) \longrightarrow f(t_0)$

Απόδειξη Εφαρμόζουμε το Λήμμα για την $g(t) = f(t+t_0) - f(t_0)$

$$\hat{g}(n) = e^{int_0} \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad \hat{g}(0) = \hat{f}(0) - f(t_0)$$

$$S_n(g)(0) = S_n(f)(t_0) - f(t_0) \longrightarrow 0.$$

Παρατήρηση Αν f είναι Lipschitz τότε ικανοποιεί την συνθήκη Dini

Πόρισμα (Αρχή Τοπικότητας) Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $f = g$ σε ένα ανοικτό διάστημα, τότε είτε $S_n(f)(t)$ και $S_n(g)(t)$ συγκλίνουν και τα δύο ή αποκλίνουν και τα δύο για κάθε t στο διάστημα αυτό.

Απόδειξη Εφαρμογή Λήμματος για την $(f-g)(t_0+t)$ για το στο ανοικτό διάστημα.

$\square$

Μετασχηματισμός Fourier στον $\mathbb{R}$

$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ $1 \le p < +\infty$, $e_\xi(x) = e^{i\xi x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \hat{\mathbb{R}}$.
$(\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R})$

Παρατήρηση $e_\xi \notin L^1(\mathbb{R})$.

Ορισμός Για $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε μετασχηματισμό Fourier
$\hat{f} : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{C} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$. είναι καλά ορισμένο $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$

Παρατήρηση $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ για $p > 1$.

Πρόταση (Στοιχειώδεις Ιδιότητες) Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{C}$

i) $\widehat{(f+g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi)$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$

ii) $\widehat{(cf)}(\xi) = c\hat{f}(\xi)$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$.

iii) Αν $f_y(x) = f(x-y)$ για $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $\hat{f_y}(\xi) = e^{-i\xi y}\hat{f}(\xi)$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$

iv) Αν $g(x) = e^{+i\zeta x} f(x)$, $\zeta \in \hat{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \zeta)$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$.

v) $\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$.

vi) $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$ δηλ. $\sup_{\xi \in \hat{\mathbb{R}}} |\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$.

vii) Αν $\lambda > 0$ $f_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$. τότε $\hat{f_\lambda}(\xi) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$.

Απόδειξη (i), (ii), (iii) προφανή.

(iii) $\hat{f_y}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f_y(x) e^{-i\xi x} dx = e^{-i\xi y} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-i\xi(x-y)} dx = e^{-i\xi y} \hat{f}(\xi)$.

(iv) $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{+i\zeta x} e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(\xi - \zeta)x} dx = \hat{f}(\xi - \zeta)$.

(v) $\hat{\bar{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x) e^{i\xi x}} dx = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

(vi) $\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1$.

(vii) $\hat{f_\lambda}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda f(\lambda x) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi \frac{y}{\lambda}} dy = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$

A

Πρόταση Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$ $\xi, \zeta \in \hat{\mathbb{R}}$. $|\hat f(\xi+\zeta)-\hat f(\xi)| =$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(e^{-i(\xi+\zeta)x} - e^{-i\xi x}\right)dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-i\xi x}||e^{-i\zeta x}-1|\,dx$$

Έστω $g_\zeta(x) = |f(x)|\cdot|e^{-i\zeta x}-1|$. Όταν $\zeta\to 0$ τότε $g_\zeta(x)\to 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.
Επίσης $|g_\zeta(x)|\le 2|f(x)|$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $2|f|\in L^1(\mathbb{R})$ άρα από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης είναι $\int_{\mathbb{R}} g_\zeta(x)\,dx \xrightarrow[\zeta\to 0]{} 0$
δηλ. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \zeta_0>0$ $\forall\, 0<|\zeta|<\zeta_0$ $\int_{\mathbb{R}}|f(x)||e^{-i\zeta x}-1|\,dx<\varepsilon$.
Άρα $\forall$ τέτοιο ζ είναι $|\hat f(\xi+\zeta)-\hat f(\xi)|<\varepsilon$. δηλ.
$\forall\varepsilon>0$ $\exists \zeta_0>0$ $0<|\zeta|<\zeta_0$ $|\hat f(\xi+\zeta)-\hat f(\xi)|<\varepsilon$ $\forall \xi$ άρα $\hat f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παρατήρηση Ο τελεστής $L^1(\mathbb{R})\ni f \xmapsto{\mathcal{F}} \hat f$ είναι $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R}$
και θα δούμε ότι $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R})\to C_0(\hat{\mathbb{R}})$ (Λήμμα Riemann-Lebesgue
και είναι φραγμένος: $\|\mathcal{F}\|\le 1$ Επειδή $\|\hat f\|_{C(\hat{\mathbb{R}})} =$
$= \sup_{\xi\in\hat{\mathbb{R}}}|\hat f(\xi)|\le\|f\|_1$ $\forall f\in L^1(\mathbb{R})$.

Δηλαδή ο τελεστής $\mathcal{F}$ (μετασχηματισμός fourier) είναι συστολή από τον $L^1(\mathbb{R})$ στον $C(\hat{\mathbb{R}})$.

Πρόταση Αν $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση $y\mapsto f(y)g(x-y)$ είναι ολ/μη για Lebesgue σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε
$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$. για σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
$\|f*g\|_1\le\|f\|_1\cdot\|g\|_1$. Τέλος $\widehat{f*g}(\xi)=\hat f(\xi)\cdot\hat g(\xi)$.

Απόδειξη Η συνάρτηση $y\mapsto f(y)g(x-y)$ είναι μετρήσιμη και η $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ επίσης είναι μετρήσιμη. και έχουμε

$$\iint |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx = \int |f(y)|\int|g(x-y)|\,dx\,dy =$$
$$= \|g\|_1\int|f(y)|\,dy = \|f\|_1\cdot\|g\|_1<\infty.$$

Άρα $\left(\begin{matrix}\text{Tonelli}\\ \text{Fubini}\end{matrix}\right)$ η συνάρτηση $y\mapsto f(y)g(x-y)$ είναι ολ/μη για σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}$

$F(x)=\int|f(y)||g(x-y)|\,dy$. • Η F είναι ολοκληρώσιμη
$\left(\int|F(x)|\,dx \le \iint|f(y)g(x-y)|\,dx\,dy<\infty\right)$

Αυτό δείχνει ότι $y \longmapsto f(y)g(x-y)$ είναι ολ/μη σχ. για κάθε x.
(συγκεκριμένα αυτά για τα οποία είναι $F(x)<+\infty$). Επιπλέον

$$\int\left|\int f(y)g(x-y)\,dy\right|dx \le \iint |f(y)||g(x-y)|\,dy\,dx = \int F(x)\,dx = \|f\|_1\|g\|_1$$

Δηλ. $\int|f*g(x)|\,dx \le \|g\|_1\|f\|_1$ δηλ

$$\boxed{\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1}$$

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f*g(x)\,e^{-i\xi x}\,dx = \iint f(y)g(x-y)\,dy\,e^{-i\xi x}\,dx = (\text{Fubini})$$

$$= \int f(y)\int g(x-y)\,e^{-i\xi(x-y)}\,dx\,e^{-i\xi y}\,dy = \int f(y)\,\hat{g}(\xi)\,e^{-i\xi y}\,dy =$$

$$= \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

□

Πρόταση: Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$ και $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Αν $F\in L^1(\mathbb{R})$ τότε $\hat{F}(\xi)=\frac{1}{i\xi}\hat{f}(\xi)$ $\forall \xi\in\hat{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$.

Απόδειξη: Σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$,

$$\circledast\ \int_a^b F(x)\,e^{-i\xi x}\,dx = -\frac{1}{i\xi}\left(F(b)e^{-i\xi b}-F(a)e^{-i\xi a}\right) + \frac{1}{i\xi}\int_a^b e^{-i\xi x}f(x)\,dx.$$

(ολοκλήρωση κατά μέρη).

Η F είναι απολύτως συνεχής σε κάθε διάστημα $[a,b]$ άρα $\int_a^x f(y)\,dy = F(x)-F(a)$ $\forall x\in[a,b]$. καθώς $a\to-\infty$, $\int_a^x f(y)\,dy \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ από θεώρημα κυρ. συγκλ. Άρα $F(a)\longrightarrow 0$, $a\to-\infty$.
Επίσης $F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy$ επειδή $f\in L^1(\mathbb{R})$. Αφού $F\in L^1(\mathbb{R})$ πρέπει $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$ (Αν $F(\infty)\in\mathbb{C} \Rightarrow |F(x)|\to|F(\infty)|$ άρα αν $F(\infty)\neq 0$ $\exists x_0$ τ.ω. $|F(x)|\geq\frac{1}{2}|F(\infty)|$ $\forall x>x_0$ και άρα $\int|F(x)|\,dx=+\infty$). Από Κυριαρχημένη Σύγκλιση επειδή $|F|\cdot\mathbb{1}_{(a,b)}|e_{-\xi}|\le|F|$ και $|f|\,\mathbb{1}_{(a,b)}|e_{-\xi}|\le|f|$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ και $f,F\in L^1(\mathbb{R})$, έπεται ότι

$$\int_a^b e^{-ix\xi}F(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}F(x)\,dx=\hat{F}(\xi) \text{ καθώς } a\to-\infty,\ b\to+\infty$$

και

$$\int_a^b e^{-ix\xi}f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}f(x)\,dx=\hat{f}(\xi) \text{ καθώς } a\to-\infty,\ b\to+\infty.$$

Από την $\circledast$ και τη $F(b)\longrightarrow 0$ καθώς $b\to+\infty$ και $F(a)\longrightarrow 0$, καθώς $a\to-\infty$ έπεται ότι $\hat{F}(\xi)=\frac{1}{i\xi}\hat{f}(\xi)$ □

[redacted]

<u>Πρόταση</u> Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$ απολύτως συνεχής & έστω $f'\in L^1(\mathbb{R})$. Τότε $\widehat{f'}(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)$ $\forall \xi\in\hat{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$.

<u>Απόδειξη</u> f απολύτως συνεχής συνεπάγεται ότι $\int_a^x f'(y)\,dy=f(x)-f(a)$ $\forall x,a$. Από κυρ. σύγκλ. $\int_a^x f'(y)\,dy\longrightarrow\int_{-\infty}^x f'(y)\,dy$. Άρα πρέπει να υπάρχει το $\lim_{a\to-\infty}f(a)$. αφού f ολ/μη πρέπει $\lim_{a\to-\infty}f(a)=0$. Άρα $\int_{-\infty}^x f'(y)\,dy=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Έπεται ότι

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{i\xi}\widehat{f'}(\xi)$$ □

<u>Παρατήρηση</u> Το θεώρημα δεν ισχύει χωρίς την απόλυτη συνέχεια

π.χ.) $f(x)=\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. $f'(x)=0$ για σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}$.
$f'\in L^1(\mathbb{R})$ $\widehat{f'}(\xi)=0$ $\forall\xi\in\hat{\mathbb{R}}$. Επίσης $f\in L^1(\mathbb{R})$ $\hat{f}(\xi)=-\frac{1}{i\xi}\left(e^{-i\xi}-1\right)$
όμως $\widehat{f'}(\xi)\neq i\xi\hat{f}(\xi)$.

<u>Πρόταση</u> Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$ τ.ω. η $g(x)=x f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι $\in L^1(\mathbb{R})$. Τότε $\hat{f}$ παραγωγίσιμη με $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)=-i\,g(\xi)$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\xi\in\hat{\mathbb{R}}$, $\zeta\in\hat{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$. $\frac{1}{\zeta}\left(\hat{f}(\xi+\zeta)-\hat{f}(\xi)\right)=$

$=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}\frac{e^{-i\zeta x}-1}{\zeta}\,dx$. Έστω $g_\zeta(x)=f(x)e^{-i\xi x}\frac{e^{-i\zeta x}-1}{\zeta}$

Τότε $g_\zeta(x)\longrightarrow f(x)e^{-i\xi x}(-ix)$ καθώς $\zeta\to0$.

$|e^{-i\zeta x}-1|^2=(\cos(\zeta x)-1)^2+\sin^2(\zeta x)=2(1-\cos(\zeta x))=$
$=2\cdot2\sin^2\left(\frac{\zeta x}{2}\right)\le4\cdot\left(\frac{\zeta x}{2}\right)^2=(\zeta x)^2$. Άρα από κυρ. σύγκλ.

$$\frac{1}{\zeta}\left(\hat{f}(\xi+\zeta)-\hat{f}(\xi)\right)=\int_{\mathbb{R}}g_\zeta(x)\,dx\longrightarrow\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\xi x}(-i)x\,dx=$$
$$=-i\,\hat{g}(\xi)$$ □

Μετασχηματισμός Fourier στον $\mathbb{R}$.

$f\in L^1(\mathbb{R})$ $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$ $\xi\in\hat{\mathbb{R}}\ (=\mathbb{R})$

Ο μετασχηματισμός Fourier $L^1(\mathbb{R})\ni f\longmapsto\hat{f}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής $L^1(\mathbb{R})\to C(\hat{\mathbb{R}})$.

Θεώρημα (Λήμμα Riemann - Lebesgue)

Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$, τοτε $\hat{f}(\xi)\to 0$ καθώς $|\xi|\to\infty$.

Πόρισμα $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R})\to C_0(\hat{\mathbb{R}})$ $\left(C_0(\mathbb{R}):=\{f\in C(\mathbb{R}): \underset{|x|\to\infty}{f(x)\to 0}\}\right)$

Απόδειξη Λήμματος Έστω f διαφορίσιμη C^∞ με συμπαγή φορέα. Τοτε f είναι απολύτως συνεχής (φραγμένη παράγωγος). Η παράγωγος είναι συνεχής με συμπαγή φορέα, αρα $f'\in L^1(\mathbb{R})$. Τοτε

$$\hat{f}(\xi)=\left|\frac{\widehat{f'}(\xi)}{i\xi}\right| \quad \forall\xi\in\hat{\mathbb{R}}\setminus\{0\} \qquad \left|\frac{\widehat{f'}(\xi)}{i\xi}\right|\le\frac{\|f'\|_1}{|\xi|}\to 0,\ |\xi|\to\infty.$$

Οι συναρτήσεις αυτές (συνεχώς διαφορίσιμη με συμπαγή φορέα) είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{R})$ (Άσκηση). Δοθέντος ε>0, αν $f\in L^1(\mathbb{R})$, βρίσκουμε g συν. διαφ. με συμπ. φορέα τ.ω. $\|f-g\|_1<\varepsilon$. Τοτε $|\hat{f}(\xi)|\le|\hat{f}(\xi)-\hat{g}(\xi)|+|\hat{g}(\xi)|\le$ $\le\|f-g\|_1+|\hat{g}(\xi)|$. Υπάρχει $\xi_0>0$ τ.ω. $\forall|\xi|>\xi_0$ $|\hat{g}(\xi)|<\varepsilon$ οπότε για $|\xi|>\xi_0$ έχουμε $|\hat{f}(\xi)|\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$.

2ος τρόπος $f=\mathbb{1}_{[a,b]}$. $|\hat{f}(\xi)|=\left|\int_{[a,b]}e^{-i\xi x}dx\right|=\left|\frac{e^{-i\xi a}-e^{-i\xi b}}{i\xi}\right|\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{}0$

Άρα το Λήμμα ισχύει για συναρτήσεις της μορφής $\mathbb{1}_{(a,b]}$. Απο γραμμικότητα ισχύει για γραμμικούς συνδυασμούς τέτοιων, δηλ. για $\sum_{i=1}^n c_i\mathbb{1}_{(a_i,b_i]}$. Αυτές είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{R})$ ①

Πράγματι, οι συνεχής με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{R})$ κάθε συνεχής με συμπαγή φορέα προσεγγίζεται στον $L^1(\mathbb{R})$ απο απο γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων διαστημάτων. Πράγματι, δοθέντος ε>0, επιλέγουμε δ>0 απο ομοιόμορφη συνέχεια της g ∮ διαμέριση ενός διαστήματος που περιέχει το φορέα της g $x_0<x_1\le\dots\le x_n$ με $x_i-x_{i-1}<\delta$ ∮ ορίζουμε συνάρτηση $h=\sum_{i=1}^n \min_{(x_{i-1},x_i]}(g)\cdot\mathbb{1}_{(x_{i-1},x_i]}$

$\|h-g\|_1\le\varepsilon\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(x_n-x_0)$

Όπως πριν έπεται ότι $|\hat{f}(\xi)| \longrightarrow 0$ καθώς $|\xi| \longrightarrow \infty$. $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$.

<u>3ος τρόπος</u> Έστω $\xi \in \hat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, θέτω $\zeta = \pi/\xi$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\zeta)\, e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\xi y} dy \, e^{-i\xi\zeta} = \hat{f}(\xi)\, e^{-i\pi} = -\hat{f}(\xi)$$ άρα

$$2|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x-\zeta) - f(x)\big) e^{-i\xi x} dx \right| = \left| \widehat{(f_\zeta - f)}(\xi) \right| \leq$$

$$\leq \|f_\zeta - f\|_1 = \|f_{\pi/\xi} - f\|_1 \longrightarrow 0 \text{ καθώς } |\xi| \longrightarrow \infty. \qquad \square$$

Πυρήνες Αθροισιμότητας

Μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων k_λ, $\lambda > 0$ λέγεται <u>πυρήνας αθροισιμότητας</u> αν:

1) $\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)\, dx = 1 \quad \forall \lambda > 0$
2) $\|k_\lambda\|_1 = O(1)$ (δηλ. $\exists \lambda_0 > 0$: $\sup_{\lambda > \lambda_0} \|k_\lambda\|_1 < +\infty$)
3) $\int_{|x|>\delta} |k_\lambda(x)|\, dx \longrightarrow 0$ καθώς $\lambda \to \infty$ $\forall \delta > 0$.

<u>Θεώρημα</u> Αν $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας, τότε $\|k_\lambda * f - f\|_1 \longrightarrow 0$ $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$.

<u>Απόδειξη</u> $(k_\lambda * f - f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k_\lambda(y) f(x-y)\, dy - f(x) \overbrace{\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(y)\, dy}^{=1 \text{ (από ορισμό)}} =$

$= \int_{\mathbb{R}} k_\lambda(y) \big(f(x-y) - f(x)\big) dy = \int_{\mathbb{R}} k_\lambda(y) \big(f_y(x) - f(x)\big) dy$. Άρα

$$\|k_\lambda * f - f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |k_\lambda(y)| \cdot |f_y(x) - f(x)|\, dy\, dx = (\text{Tonelli-Fubini})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \|f_y - f\|_1 \cdot |k_\lambda(y)|\, dy = \int_{|y|<\delta} \|f_y - f\|_1 \cdot |k_\lambda(y)|\, dy + \int_{|y|\geq\delta} \|f_y - f\|_1 \cdot |k_\lambda(y)|\, dy.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι $\|f_y - f\|_1 \longrightarrow 0$ καθώς $y \to 0$. Επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $\forall |y| < \delta$ $\|f_y - f\|_1 < \varepsilon$. Για αυτό το δ έχουμε

- $\int_{|y|<\delta} \|f_y - f\|_1 |k_\lambda(y)|\, dy \leq \varepsilon \int_{|y|<\delta} |k_\lambda(y)|\, dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |k_\lambda(y)|\, dy = \varepsilon \cdot \|k_\lambda\|_1$.
- $\int_{|y|\geq\delta} \|f_y - f\|_1 \cdot |k_\lambda(y)|\, dy \leq \int_{|y|\geq\delta} \big(\|f_y\|_1 + \|f\|_1\big) |k_\lambda(y)|\, dy = 2\|f\|_1 \int_{|y|\geq\delta} |k_\lambda(y)|\, dy$

Από ορισμό του πυρήνα υπάρχει $M < +\infty$ και $\lambda_0 > 0$ τ.ω. $\forall \lambda \geq \lambda_0$

$\|k_\lambda\|_1 \leq M$ <u>και</u> $\int_{|y|\geq\delta} |k_\lambda(y)|\, dy < \varepsilon$ (το $\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ από τις ιδιότητες 2 και 3)

Άρα $\forall \lambda \geq \lambda_0$ έχουμε $\|k_\lambda * f - f\|_1 \leq \varepsilon \cdot M + 2\|f\|_1 \varepsilon =$
$= (M + 2\|f\|_1) \cdot \varepsilon$. Άρα πράγματι $\|k_\lambda * f - f\|_1 \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$ ∎

Γενικός Τρόπος Παραγωγής Πυρήνων Αθροισιμότητας

Ξεκινάμε με $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ τ.ω. $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$.
ορίζουμε $k_\lambda(x) = \lambda \varphi(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Τότε η οικογένεια (k_λ), $\lambda > 0$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας.

- $\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda \varphi(\lambda x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$
- $\|k_\lambda\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda \varphi(\lambda x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx = \|\varphi\|_1 < +\infty$
- $\int_{|x|>\delta} |k_\lambda(x)|\,dx = \int_{|x|>\delta} \lambda |\varphi(\lambda x)|\,dx = \int_{|y|>\lambda\delta} |\varphi(y)|\,dy \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$ (Θ.Κ.Σ.

Ορισμός (Πυρήνας Fejer)

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\xi|)\,e^{i\xi x}\,d\xi.$$

$K_\lambda(x) = \lambda K(\lambda x)$ για $x \in \mathbb{R}$ $\lambda > 0$. Συγκεκριμένα

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Πρόταση Ο πυρήνας fejer είναι πυρήνας αθροισιμότητας

Απόδειξη Αρκεί νδο $K \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ με $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1$.
5' επειδή $|K(x)| \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ αρκεί νδο $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1$.
Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)}\,dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ ⊛ ← αυτό το έχουμε για κάθε $\delta > 0$

επειδή ο πυρήνας fejer στον κύκλο: $\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)}$, $t \in (-\pi, \pi]$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας στο $\mathbb{T}$.

$\lambda_n = n+1$, $K_{\lambda_n}(x) = \lambda_n K(\lambda_n x) = \frac{1}{2\pi}(n+1)\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)^2 (x/2)^2}$.

Για $|x| < \delta$ $\quad \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \leq \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} \leq 1$. ⊛⊛

$\frac{\sin(x)}{x}$ είναι φθίνουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $\sin(x) \leq x$ για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Έστω $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ έχουμε $\int_{-\delta}^{\delta} K_{\lambda_n}(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(x/2)^2}\frac{dx}{2\pi} =$

$= \frac{1}{n+1}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin^2(x/2)}\,\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\,\frac{dx}{2\pi}$. Άρα από ⊛⊛ είναι

$$\frac{1}{n+1}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin^2(x/2)}\frac{dx}{2\pi}\,\frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_{\lambda_n}(x)\,dx \leq \frac{1}{n+1}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(x/2)^2}\frac{dx}{2\pi}$$

Έχουμε $\int_{-\delta}^{\delta} K_{\lambda_n}(x)\,dx = \int_{-\delta}^{\delta}\lambda_n K(\lambda_n x)\,dx = \int_{-\lambda_n\delta}^{\lambda_n\delta} K(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx$

Άρα από τα δυο παραπάνω και την ⊛ είναι

$\frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \leq \int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx \leq 1$. αυτό για τυχόν $\delta>0$. Όμως

έχουμε $\frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \longrightarrow 1$ καθώς $\delta\to 0$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1$. □

<u>Λήμμα</u> Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ και $H\in L^1(\mathbb{R})$, τ.ω. $h(x)=\int_{\mathbb{R}} H(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$ να είναι $h\in L^1(\mathbb{R})$, τότε $f*h(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$.

<u>Απόδειξη</u> $\iint |H(\xi)||f(x)|\,d\xi\,dx = \|H\|_1\|f\|_1 < +\infty$.

$f*h(x) = \int f(x-y)\int H(\xi)e^{i\xi y}\,d\xi\,dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i\xi(x-y)}\,dy\,e^{i\xi x}H(\xi)\,d\xi$

$= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}H(\xi)\,d\xi$. □

<u>Πόρισμα</u> $f\in L^1(\mathbb{R})$. $K_\lambda * f(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi \xrightarrow[\lambda\to\infty]{L^1(\mathbb{R})} f(x)$.

<u>Απόδειξη</u> $K_\lambda * f \xrightarrow{L^1} f$ από θεώρημα και πρόταση. Το ότι $K_\lambda * f(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$ βγαίνει από το λήμμα επειδή $K_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)e^{i\xi x}\,d\xi$ (Λήμμα με $h=K_\lambda$, $H(\xi)=\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)$) □

<u>Θεώρημα Μοναδικότητας Μετασχηματισμού Fourier</u>

Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{f}(\xi)=0$ $\forall \xi\in\hat{\mathbb{R}} \Rightarrow f=0$ (στον $L^1(\mathbb{R})$)

<u>Απόδειξη</u> Από την προηγούμενη: $K_\lambda * f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $K_\lambda * f \xrightarrow{L^1} f$ □

<u>Πόρισμα</u> Αν $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)$ $\forall\xi\in\hat{\mathbb{R}} \Rightarrow f=g$ σχ. π.

<u>Θεώρημα</u> Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ τότε $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,dx$ για σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ $k_\lambda * f(x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi) e^{+i\xi x} d\xi \xrightarrow[\lambda \to \infty]{\Theta.K.\Sigma.}$
$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}$

όμως $k_\lambda * f \longrightarrow f$ στον $L^1(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\lambda_n \longrightarrow \infty$ με $k_{\lambda_n} * f \longrightarrow f$ σχ. π. 5' έπεται ότι $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ σχ. π.
Το ότι ο $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ είναι συνεχής αποδεικνύεται όπως το ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ομοιόμορφα συνεχής □

Ασκήσεις

1º Φυλλάδιο

(2) $\varphi(p)=\|f\|_p^p \quad E=\{p\in(0,+\infty):\varphi(p)<+\infty\}$.

(α) Αν $r<p<q$ $r,q\in E$ τοτε $p\in E$.

$$\int|f|^p d\lambda=\int_{|f|>1}|f|^p d\lambda+\int_{|f|\leq 1}|f|^p d\lambda \leq \int_{|f|\leq 1}|f|^q d\lambda+\int_{|f|>1}|f|^r d\lambda \leq$$
$$\leq \int|f|^q d\lambda+\int|f|^r d\lambda<+\infty.$$

(β) Έστω $p,q\in E$, $\lambda\in(0,1)$ $\ln\varphi(\lambda p+(1-\lambda)q)\leq\lambda\ln\varphi(p)+$
$+(1-\lambda)\ln\varphi(q).\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\int|f|^{\lambda p+(1-\lambda)q}d\lambda\leq\lambda\ln\int|f|^p d\lambda+(1-\lambda)\ln\int|f|^q d\lambda\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln\int|f|^{\lambda p}|f|^{(1-\lambda)q}d\lambda\leq\ln\left(\int|f|^p d\lambda\right)^{\lambda}\left(\int|f|^q d\lambda\right)^{1-\lambda}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int|f|^{\lambda p}|f|^{(1-\lambda)q}d\lambda\leq\left(\int|f|^p d\lambda\right)^{\lambda}\left(\int|f|^q d\lambda\right)^{1-\lambda}.$$

Αυτό ισχύει $\forall\lambda\in(0,1)$ & κάθε p & q απο την ανισότητα Hölder με συζυγείς εκθέτες- [redacted] $\frac{1}{\lambda},\frac{1}{1-\lambda}$ $\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda}}+\frac{1}{\frac{1}{1-\lambda}}=1\right)$

[redacted] Παραδείγματα • $X=[1,+\infty)$ $f(x)=\frac{1}{x}$ τοτε $\|f\|_1=+\infty$ όμως $\|f\|_p<\infty$ $\forall p>1$
Εδώ έχουμε $E=$ [redacted] $(1,+\infty)$.

• $X=[2,+\infty)$ $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. Εδώ $E=[1,+\infty)$.

• $X=$ [redacted] $(0,\frac{1}{2})\cup[2,+\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. Εδώ $E=\{1\}$.

[redacted] για την συνέχεια της φ. Στο εσωτερικό του διαστήματος E, η φ είναι συνεχής ως κυρτή. Έστω $\inf E\in E$ $p=\inf E$ θέλουμε $\ln\int|f|^r dx\xrightarrow[r\downarrow p]{}\int|f|^p dx$. Προφανώς σημειακά έχουμε ($|f|^r\to|f|^p$) σύγκλιση διότι $x\longmapsto a^x$ είναι συνεχής.

$$|f|^r=|f|^r\mathbb{1}_{\{|f|>1\}}+|f|^r\mathbb{1}_{\{|f|\leq 1\}}\leq|f|^{p+\varepsilon}\mathbb{1}_{\{|f|>1\}}+|f|^p\mathbb{1}_{\{|f|\leq 1\}}$$
(όπου ε>0 είναι τ.ω. $(p+\varepsilon)\in E$.) $\leq|f|^{p+\varepsilon}+|f|^p\in L^1(X)$

Άρα από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $\int|f|^r d\lambda\longrightarrow\int|f|^p d\lambda$.
& άρα αφού ln συνεχής $\ln\int|f|^r d\lambda\xrightarrow[r\downarrow p]{}\ln\int|f|^p d\lambda$.

Όμοια στην περίπτωση $q=\sup E\in E$.

(γ) $1<p<q$ κ' f μετρήσιμη $f: X \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) τότε
$\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_q, \|f\|_r\}$.

Υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ τ.ω. $p = \lambda r + (1-\lambda)q$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Απο (β) η $\ln\varphi$ είναι κυρτή αρα έχουμε

$\ln\varphi(p) \leq \lambda \ln\varphi(r) + (1-\lambda)\ln\varphi(q)$

$$\int |f|^p \leq \left(\int |f|^r\right)^\lambda \left(\int |f|^q\right)^{(1-\lambda)} = \left(\|f\|_r\right)^{r\lambda}\left(\|f\|_q\right)^{q(1-\lambda)}$$

$$\leq A^{r\lambda} A^{q(1-\lambda)} = A^p$$

αρα $\|f\|_p \leq A$.

$\|f\|_p \longrightarrow \|f\|_\infty$ $\quad \|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(\{x : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\})$

κ' $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$. Αρα

$\|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}) \longrightarrow \|f\|_\infty - \varepsilon$

Αρα $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Επειδή υπάρχει $q>0$ τ.ω. $f \in L^q(\mu)$ έπεται οτι

$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) < \infty \quad \forall \alpha > 0 \quad \leq$ (Markov) $\dfrac{\|f\|_q^q}{\alpha^q} < +\infty$

Επι πλεον (*) $\int_{\{|f|>\alpha\}} |f|^q d\mu \longrightarrow \int |f|^q d\mu$ απο θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

$$\int |f|^p d\mu = \int_{|f|>\alpha} |f|^p d\mu + \int_{|f|\leq\alpha} |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} + \varepsilon$$

$$\|f\|_p \leq \left(\|f\|_\infty^p \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} + \varepsilon\right)^{1/p}$$

Μπορούσαμε να υποθέσουμε οτι $\|f\|_\infty = 1$ χ.β.γ. (στην ανάγκη παίρνουμε $g = \frac{f}{\|f\|_\infty}$ κ' δείχνουμε $\|g\|_p \longrightarrow 1$. Οπότε μετά έχουμε $\|f\|_p = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_p \longrightarrow \|f\|_\infty \cdot 1 = \|f\|_\infty$.)

οπότε είναι $\int |f|^p d\mu \leq 1 \cdot \mu\{x\in X : |f(x)|>\alpha\} + \int_{|f|\geq \alpha} |f|^q d\mu$ για $p\geq q$

Απο ⊛ για $p=q$ είναι

$$\|f\|_p \leq \left(\mu\{x\in X: |f(x)|>\alpha\} + \varepsilon\right)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1.$$

Εφαρμογή $a_n\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$ $\exists$ $\max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ υπάρχει.

Έστω οτι $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$. Τοτε $\lim_m \left(\sum_n |a_n|^m\right)^{1/m} = \max_n |a_n|$

Απόδειξη $X=\mathbb{N}$ μ το αριθμητικό μέτρο ($\mu\{n\}=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$)

$f(n)=a_n$ $\quad \|f\|_m \longrightarrow \|f\|_\infty$.

---

(3) $\mu(X)<+\infty$ $\quad \|f\|_p \longrightarrow \exp\left(\int \ln|f| d\mu\right)$ ($p\downarrow 0$)

$\|f\|_p \leq \|f\|_q$ όταν $p<q$. Αρα $\lim_{p\to 0}\|f\|_p$ υπάρχει $\exists$ ισούτε με $\inf_{p\to 0}\|f\|_p$. Η $x\longmapsto \ln x$ είναι κοίλη.

$p\int \ln|f| d\mu \leq \ln\int |f|^p d\mu$ (ανισότητα Jensen)

$\exp\left(p\int \ln|f| d\mu\right) \leq \int |f|^p d\mu$ δηλ.

$\exp\left(\int \ln|f| d\mu\right) \leq \|f\|_p$. Επομένως $\liminf \|f\|_p \geq$ $\geq \exp\left(\int \ln|f| d\mu\right)$. Για το αντίστροφο αρκεί να δείξουμε

$\ln\|f\|_p \longrightarrow \int \ln|f| d\mu$ καθώς $p\downarrow 0$.

$\frac{1}{p}\ln\int |f|^p d\mu \longrightarrow \int \ln|f| d\mu$. (De L'Hospital)

$$\lim_{p\to 0}\frac{\ln\int|f|^p d\mu}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{\int \ln|f|\cdot|f|^p d\mu}{\int |f|^p d\mu} = \frac{\int \ln|f| d\mu}{1}$$

Πόρισμα (του τύπου αντιστροφής) $\widehat{K}(\xi)=(1-|\xi|)^+$, $\xi\in\widehat{\mathbb{R}}$
όπου K ο πυρήνας του Fejer

Απόδειξη Ορίζουμε $h(\xi)=(1-|\xi|)^+$, $\xi\in\widehat{\mathbb{R}}$. Τότε $h\in L^1(\widehat{\mathbb{R}})$ και
$\widehat{h}(x)=\int_{\mathbb{R}}(1-|\xi|)^+e^{-i\xi x}d\xi=K(-x)$ και $K\in L^1(\mathbb{R})$. Από τον τύπο αντιστροφής $h(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{h}(x)e^{i\xi x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}K(-x)e^{-i\xi x}dx=\widehat{K}(\xi)$. □

Πυρήνες Αθροισιμότητας

(1) Πυρήνας Fejer K

(2) Πυρήνας Gauss $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$ $\quad G_\lambda(x)=\lambda G(\lambda x)$, $\lambda>0$.
$(G_\lambda)_{\lambda>0}$ πυρήνας αθροισιμότητας $\widehat{G_\lambda}(\xi)=\widehat{G}(\xi/\lambda)$.

(3) Πυρήνας Poisson, ορίζουμε $P(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in\mathbb{R}$.
Η οικογένεια $(P_\lambda)_{\lambda>0}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας $\widehat{P_\lambda}(\xi)=e^{-|\xi|}$

Ισχύει $G_\lambda*f\xrightarrow{L^1}f$ και $P_\lambda*f\xrightarrow{L^1}f$.

Πρόταση Αν $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<+\infty$, $g\in L^1(\mathbb{R})$. Τότε $f*g$ είναι καλά ορισμένη, $f*g\in L^p(\mathbb{R})$, $\|f*g\|_p\le\|f\|_p\cdot\|g\|_1$

Απόδειξη $\left[\int\left(\int|f(x-y)g(y)|\,dy\right)^p dx\right]^{1/p}=\left[\int\left(\int|f_y||g(y)|\,dy\right)^p\right]^{1/p}=$
$=\left\|\int|f_y||g(y)|\,dy\right\|_p\le\int\|f_y\|_p\cdot|g(y)|\,dy=\|f\|_p\,\|g\|_1<+\infty$

Στην ανισότητα χρησιμοποιούμε την γενικευμένη αν. Minkowski.
Άρα το $\int|f(x-y)g(y)|\,dy<+\infty$ για Lebesgue σχ. κάθε $x\in\mathbb{R}$.
επομένως $f*g(x)=\int(f(x-y)g(y))\,dy$ καλά ορισμένο σχ. για κάθε x
$\|f*g\|_p=\left(\int\left|\int f(x-y)g(y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}\le\left(\int\left(\int|f(x-y)g(y)|\,dy\right)^p dx\right)^{1/p}\le$
$\le\|f\|_p\cdot\|g\|_1$. □

Θεώρημα $f\in L^p(\mathbb{R})$ $\;K_\lambda*f\xrightarrow[\lambda\to\infty]{L^p}f$ $\;\forall\,1\le p<+\infty$ για ~~f φραγμένη~~.
και για f ομοιόμορφα συνεχή, τότε $k_\lambda*f\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}f$ ομοιόμορφα
(για κάθε $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ πυρήνα αθροισιμότητας.)

Απόδειξη $k_\lambda*f(x)-f(x)=\int k_\lambda(y)(f(x-y)-f(x))\,dy=\int k_\lambda(y)(f_y(x)-f(x))\,dy$

Άρα $\|k_\lambda*f-f\|_p\le\int|k_\lambda(y)|\cdot\|f_y-f\|_p\,dy$ (γεν. Minkowski)

Για $\delta>0$ $\|k_\lambda * f - f\|_p \le \int_{[-\delta,\delta]} |k_\lambda(y)|\cdot\|f_y - f\|_p \, dy + \int_{|y|>\delta} |k_\lambda(y)|\,\|f_y-f\|_p \, dy.$

Για $\varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ τ.ω. $\|f_y - f\| < \frac{\varepsilon}{2C}$ $\forall y$ $|y|<\delta$

όπου $C=\sup_{\lambda\ge\lambda_0}\|k_\lambda\|_1 < +\infty$.

Για αυτό το $\delta>0$ $\int_{|y|<\delta} |k_\lambda(y)|\,\|f_y-f\|_p \, dy \le 2\|f\|_p \int_{|y|<\delta}|k_\lambda(y)|\,dy$

άρα $\exists \lambda_1>0$ τ.ω. το ολοκλήρωμα αυτό να είναι $<\varepsilon/2$ $\forall \lambda\ge\lambda_1$

Για $\lambda \ge \max\{\lambda_0,\lambda_1\}$ έχουμε $\|k_\lambda * f - f\|_p<\varepsilon$. Άρα δείξαμε ότι $k_\lambda * f \longrightarrow f$ στον L^p. □

Τύπος Poisson

Λήμμα Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$, τότε η σειρά $\sum_{\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)$ συγκλίνει απολύτως για Lebesgue σχ. κάθε t και σαν συνάρτηση είναι 2π-περιοδική και ανήκει στον $L^1(\mathbb{T})$. Επιπλέον αν $\varphi(t) = 2\pi\sum_{\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)$, τότε $\hat{\varphi}(n)=\hat{f}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Απόδειξη $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}|f(x)|\,dx \overset{(x=t+2k\pi)}{=}$

$= \sum_{\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi}|f(t+2k\pi)|\,dt = \int_0^{2\pi}\sum_{\mathbb{Z}}|f(t+2k\pi)|\,dt.$

Αφού $f\in L^1(\mathbb{R})$ είναι $\sum_{\mathbb{Z}}|f(t+2k\pi)|<+\infty$ λ-σχ. για κάθε $t\in[0,2\pi)$

Επίσης $\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)\right|dt \le \int_0^{2\pi}\sum_{\mathbb{Z}}|f(t+2k\pi)|\,dt = \|f\|_1<\infty$

άρα η $\sum_{\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)\in L^1(\mathbb{T})$. Έστω $\varphi(t) = 2\pi\sum_{\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)$.

$\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)e^{-int}\,dt = \int_0^{2\pi}\sum_{\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)e^{-int}\,dt = (\text{Fubini})$

$= \sum_{\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(t+2k\pi)e^{-in(t+2k\pi)}\,dt \, \cancel{e^{-i2nk\pi}}^{\,1} =$

$= \sum_{\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2\pi(k+1)} f(x)e^{-inx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-inx}\,dx = \hat{f}(n)$

Άρα για $f\in L^1(\mathbb{R})$, η $\varphi(t) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2k\pi)\in L^1(\mathbb{T})$

και έχει σειρά Fourier $2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2k\pi) = \varphi(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e_n(t)$.

Θεώρημα (Τύπος Poisson)

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τ.ω. f είναι συνεχής & $|f(x)| \leq \frac{c}{(2\pi+|x|)^{1+\varepsilon}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ για κάποιο $\varepsilon > 0$ & $c < \infty$ & επιπλέον $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. Τότε

$$2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikt} \quad \forall t$$

Απόδειξη Με τις υποθέσεις που έχουμε, η σειρά

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+2k\pi)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c}{(2\pi+|t+2k\pi|)^{1+\varepsilon}} =$$

$$= \frac{c}{(2\pi+t)^{1+\varepsilon}} + \sum_{k\neq 0} \frac{c}{(2\pi+|t+2k\pi|)^{1+\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{c}{(2\pi)^{1+\varepsilon}} + \sum_{k\neq 0} \frac{c}{(2\pi+|2k\pi|-t)^{1+\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{c}{(2\pi)^{1+\varepsilon}} + \sum_{k\neq 0} \frac{c}{(2\pi+2(|k|-1)\pi)}$$

Από κριτήριο Weierstrass, η σειρά συγκλίνει απολύτως & ομοιόμορφα. Άρα $t \longmapsto 2\pi \sum f(t+2k\pi)$ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα στον $L^1(\mathbb{T})$. Οι συντελεστές Fourier αυτής είναι αθροίσιμη συνάρτηση:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{f}(n)| < +\infty.$$

Από τον τύπο αντιστροφής για τον κύκλο

$$2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2k\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$ & η ισότητα ισχύει σχεδόν παντού από συνέχεια

$\square$

Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$

Λήμμα 1 Αν $p,q>1$ συζυγείς εκθέτες και $f\in L^p(\mathbb{R})$ και $g\in L^q(\mathbb{R})$, τότε $f*g$ είναι καλά ορισμένη για κάθε x, είναι ομοιόμορφα συνεχής και επίσης $f*g\in C_0(\mathbb{R})$.

Απόδειξη $\int |f(y)g(x-y)|dy \le \left(\int |f(y)|^p dy\right)^{1/p}\left(\int |g(x-y)|^q dy\right)^{1/q}$ (Hölder) $=$
$= \|f\|_p \|g\|_q < +\infty$ για $f\in L^p(\mathbb{R})$ και $g\in L^q(\mathbb{R})$. Επομένως ορίζεται $f*g(x) = \int f(y)g(x-y)dy$. $\forall x\in\mathbb{R}$ και είναι φραγμένη $|f*g(x)| \le \|f\|_p \|g\|_q$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Για την ομοιόμορφη συνέχεια, έστω $x,y\in\mathbb{R}$.
$|f*g(x)-f*g(y)| = \left|\int f(z)(g(x-z)-g(y-z))\,dz\right| \le \|f\|_p\left(\int |g(x-z)-g(y-z)|^q dz\right)^{1/q} =$
$= \|f\|_p \|g_{y-x}-g\|_q$. $\|g_u - g\|_q \to 0$ καθώς $u\to 0$ για $g\in L^q(\mathbb{R})$.
Δοθέντος $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ τ.ω. αν $|u|<\delta \Rightarrow \|g_u-g\|_q < \varepsilon/\|f\|_p$
Τότε για $|y-x|<\delta$ έχουμε $|f*g(x)-f*g(y)|<\varepsilon$

Λήμμα 2 Για $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ τότε $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat f(n)\|_{L^2(\mathbb{R})}$
όπου για $g:\hat{\mathbb{R}}\to\mathbb{C}$ $\|g\|_{L^2(\pi)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int |g(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$

Απόδειξη ορίζουμε $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $\|f^*\| = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ και $\|f^*\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ Επίσης $\widehat{f^*}(n) = \int \overline{f(-x)}\, e^{-i\xi x}dx =$
$= \overline{\int f(y) e^{-i\xi x} dx} = \overline{\hat f(\xi)}$.

Έστω $g = f*f^*$ καλά ορισμένη διότι $f, f^*\in L^1(\pi)$
$\hat g(\xi) = \hat f(\xi)\cdot \hat{f^*}(\xi) = \hat f(\xi)\overline{\hat f(\xi)} = |\hat f(\xi)|^2$
$g(0) = f*f^*(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y) f^*(0-y)\,dy = \int f(y)\overline{f(y)}\,dy =$
$\int |f(y)|^2 dy = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, από το προηγούμενο λήμμα με F την f, g την f ~~[illegible]~~ τ.ω. $\forall f^*$ και $p=q=2$ έπεται ότι $K_\lambda * g \to g$ ομοιόμορφα.

Άρα συγκεκριμένα $K_\lambda * g(0) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} g(0) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$
όμως $K_\lambda * g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat g(\xi) e^{i\xi 0} d\xi =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ |\hat f(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(\xi)|^2 d\xi$
από θεώρημα μονότονης σύγκλισης και επειδή η ολ/μη ποσότητα είναι ≥ 0.

Λήμμα 3 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. $p\in[1,+\infty)$ και στον $C_0(\mathbb{R})$

Για την απόδειξη του λήμματος 3 θα χρειαστούμε το Λήμμα 4

<u>Λήμμα 4</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Έστω $f \in X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ τ.ω. $x \longmapsto f(x,t)$ είναι μ-ολ/μη για κάθε t. ϗ η $t \longmapsto f(x,t)$ είναι διαφορίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ϗ $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \delta(x)$ $\forall x,t$, $\delta > 0$ όπου $g \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε η $F(t) = \int f(x,t)\, d\mu(x)$, $t \in [a,b]$ είναι διαφορίσιμη ϗ $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(t)$

<u>Απόδειξη</u> Έστω (t_n) ακ. στο $[0,1]$ τ.ω. $t_n \to t$

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\, d\mu(x)$$

$$\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,t).$$ Επίσης

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\right| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$$ για κάποιο

s_n μεταξύ t ϗ t_n από θεώρημα μέσης τιμής.

Από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \longrightarrow \int \lim_{n \to \infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\, d\mu(x) =$$
$$= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x).$$

<u>Πόρισμα</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ϗ $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$, τότε $f * \varphi \in C^k(\mathbb{R})$ εφόσον όλες οι $\varphi^{(j)}$ για $j = 0, 1, \dots, k$ είναι φραγμένες.

<u>Απόδειξη</u> $$\frac{d}{dx} f * g(x) = \frac{d}{dx}\left(\int f(y) \varphi(x-y)\, dy\right) = \int f(y) \varphi'(x-y)\, dy$$

Επειδή $|f(y)\varphi'(x-y)| \leq f(y) \sup|\varphi'|$ ϗ η $\sup|\varphi'| \cdot f \in L^1(\mu)$

Με επαγωγή ισχύει $\frac{d^j}{dx^j} f * \varphi(x) = \int f(y) \varphi^{(j)}(x-y)\, dy$ $\forall j = 0, 1, \dots, k$

□

<u>Απόδειξη Λήμματος 3</u> Ορίζουμε $\psi(x) = \exp(-\frac{1}{x})$, $x > 0$ ϗ $\psi(x) = 0$, $x \leq 0$. Τότε $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\tilde{\psi}(x) = \psi(1+x)\psi(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι επίσης $C^\infty(\mathbb{R})$ ϗ έχει φορέα το $[-1,1]$. Άρα $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $\varphi(x) = \frac{\tilde{\psi}(x)}{\int_{-1}^{1} \tilde{\psi}(x)\, dx}$, $x \in \mathbb{R}$

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ϗ $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$.

$\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε οι (φ_n) αποτελούν πυρήνα αθροισιμότητας. Άρα $\varphi_n * f \xrightarrow{L^p} f$ $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$. Όμως $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n * f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Για $\varepsilon > 0$ ϗ $f \in L^p(\mathbb{R})$ βρίσκουμε $g \in C_c(\mathbb{R})$ τ.ω. $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$ ϗ βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$\|g*\varphi_n - g\|_p < \varepsilon/2$. Τότε $\|g*\varphi_n - f\|_p < \varepsilon$. Επίσης $g*\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ και $g*\varphi_n$ έχει συμπαγή φορέα γιατί κάθε μία από τις g, φ_n έχει συμπαγή φορέα. □

<u>Λήμμα 5</u> Κάθε $h:\hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ που έχει δυο συνεχής παραγώγους και συμπαγή φορέα, είναι $h=\hat{f}$ για κάποια $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap BC(\mathbb{R})$. $L^1(\mathbb{R}) \cap BC(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ όπου $BC(\mathbb{R})$ φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις.

<u>Απόδειξη</u> $h'' \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ (εφόσον φορέας $h'' \subseteq$ φορέας h). Επομένως $|\widehat{h''}(x)| = |x|^2 |\hat{h}(x)|$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και άρα $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $f(x) = 2\pi \hat{h}(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Από τύπο αντιστροφής για την h
$$h(\xi) = \frac{2\pi}{2\pi} \int \hat{h}(x) e^{i\xi x}\,dx = \int f(-x) e^{i\xi x}\,dx = \hat{f}(\xi).$$
Επειδή $f(x) = \hat{h}(-x)$, πρέπει $f \in C_0(\mathbb{R})$ άρα συνεχής, φραγμένη.

<u>Θεώρημα</u> (Plancerel) Υπάρχει μοναδικός γραμμικός τελεστής $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι ισομετρία, έτσι και "επεκτείνει" τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ για $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

<u>Απόδειξη</u> ο χώρος $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$. Πράγματι αν $f \in L^2(\mathbb{R})$, θεωρούμε την $f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
$$\int |f_n|^2 d\lambda \le \int |f|^2 d\lambda < +\infty$$ και
$$\int |f_n|\, d\lambda = \int |f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}|\, d\lambda \le \left(\int |f|^2 d\lambda\right)^{1/2} \left(\int \mathbb{1}^2_{[-n,n]}\, d\lambda\right)^{1/2} < +\infty$$
Άρα $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. $\int |f_n - f|^2 d\lambda =$
$$= \int \mathbb{1}_{(-\infty,-n] \cup [n,+\infty)} \cdot |f|^2 d\lambda \longrightarrow 0$$ από κυριαρχημένη σύγκλιση.

Ορίζουμε $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ για $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Η $\mathcal{F}$ είναι ισομετρία στον $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ από Λήμμα 2. Αφού $\mathcal{F}$ είναι ισομετρία ορισμένη στο πυκνό $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε ισομετρία στον $L^2(\mathbb{R})$.

<u>Μοναδικότητα</u>: $\mathcal{F}_1(f) = \mathcal{F}_2(f) = \hat{f}$ $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ και $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ ισομετρίες άρα $\mathcal{F}_1(f) = \mathcal{F}_2(f)$ $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$.

Για το επί: οι συναρτήσεις στον $C_c^2(\hat{\mathbb{R}})$ (h με συμπαγή φορέα & 2 συνεχείς παραγώγους) είναι στον $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ από Λήμμα 5.

Επίσης $C_c^2(\mathbb{R}) \supseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\hat{\mathbb{R}})$. Πράγματι: Αν $h \in L^2(\mathbb{R})$. Υπάρχει ακολουθία $h_n \in C_c^2(\mathbb{R})$ τ.ω. $h_n \to h$ (στον $L^2(\hat{\mathbb{R}})$) οι h_n αποτελούν βασική ακολουθία στον $L^2(\hat{\mathbb{R}})$. Οι $f_n = \mathcal{F}^{-1}(h_n)$ αποτελούν επίσης βασική ακολουθία στον $L^2(\mathbb{R})$ γιατί $\mathcal{F}$ ισομετρία & επομένως $f_n \xrightarrow{L^2} f \in L^2(\mathbb{R})$

Επειδή $\mathcal{F}$ ισομετρία πρέπει $\underset{\underset{h_n \longrightarrow h}{\parallel}}{\mathcal{F}(f_n)} \longrightarrow \mathcal{F}(f)$ επομένως $\mathcal{F}(f) = h$

Παρατήρηση: Για $f \in L^2(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}(f) = L_2\text{-}\lim_n \hat{f_n}$ όπου $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}(f)(\xi) = L^2\text{-}\lim_n \int_{-n}^{n} f(x) e^{-i\xi x} dx$

Τύπος Parseval $\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$.

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\hat{\mathbb{R}})$ $\mathcal{F}$ ισομετρία επί. $\left(\begin{array}{l}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ \|\hat{f}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \left(\int_{\hat{\mathbb{R}}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\end{array}\right)$

Για $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ όπου $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$

Παρατηρήσεις Για $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-i\xi x} dx$ $\left(f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}\right)$

$\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(f) = \hat{f}$

Parseval: $\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi$

Επέκταση του Μετασχηματισμού Fourier στους $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$.

Αν $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, $f = f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} + f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \le 1\}}$

• $f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} \in L^1(\mathbb{R})$ $\left(|f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|<1\}}| \le |f|^p\right)$

• $f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \le 1\}} \in L^2(\mathbb{R})$ $\left(|f|^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \le 1\}} \le |f|^p\right)$

Μπορώ να ορίσω $\hat{f}$ ως $\widehat{f \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>1\}}} + \widehat{f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \le 1\}}}$.

Στον $\mathbb{T}$ ο τελεστής T που στέλνει το $f \in L^p(\mathbb{T})$ στο $\hat{f}$ είναι ορισμένος σε κάθε $L^p(\mathbb{T})$. Για $p=1$:

$\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \le \|f\|_1$.

Για $p=2$ $\|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$. Ο τελεστής Fourier $Tf = \hat{f}$ που ορίζεται σε $L^p(\mathbb{T})$ για $p \ge 1$, είναι φραγμένος για τιμές του p

Θεώρημα Παρεμβολής Riesz-Thorin: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ & $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι μέτρου. $L^p(\mu) + L^q(\mu) = \{f+g : f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)\}$

Αν $T: L^p(\mu) + L^q(\mu) \to L^p(\nu) + L^q(\nu)$ γραμμικός τελεστής & αν $T: L^p(\mu) \to L^p(\nu)$ φραγμένος & $T: L^q(\mu) \to L^q(\nu)$ φραγμένος. Ισχύει τότε ότι σαν τελεστής $L^r(\mu) \to L^r(\nu)$ είναι φραγμένος ? όπου r μεταξύ p & q. $L^p \cap L^q \subseteq L^r \subseteq L^p + L^q$.

Θεώρημα (Riesz-Thorin) Έστω $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$. Έστω $T: L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ γραμμικός τελεστής τ.ω.

$\|T(f)\|_{L^{q_0}(\nu)} \le M_0 \|f\|_{L^{p_0}(\mu)}$ & $\|T(f)\|_{L^{q_1}(\nu)} \le M_1 \|f\|_{L^{p_1}(\mu)}$

Τοτε για κάθε $t\in(0,1)$ αν $\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}$ ϗ $\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}$ έχουμε $\|T(f)\|_{L^{q_t}(\nu)} \le M_0^{1-t} M_1^{t} \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}$.

Εφαρμογή:

<u>Θεώρημα</u> (Ανισότητα Hausdorff-Young)

Αν $f\in L^p(\mathbb{T})$ για $p\in[1,2]$, τοτε $\hat{f}\in L^q(\mathbb{Z})$ όπου $q=\frac{p}{p-1}$ ο συζυγής εκθέτης του p. Συγκεκριμένα:

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)|^q\right)^{1/q}\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

<u>Απόδειξη</u> Θέτω $X=\mathbb{T}$, $\mu=\lambda_{\mathbb{T}}$ (Lebesgue), $Y=\mathbb{Z}$, $\nu=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n$ (το αριθμητικό μέτρο) Ο μετασχηματισμός Fourier ικανοποιεί

$\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ $\quad\|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ Άρα

$p_0=1$, $p_1=2$, $q_0=1$, $q_1=2$. $M_0=M_1=1$. Για κάθε $t\in(0,1)$ ο μετασχηματισμός Fourier $L^{p_t}\longrightarrow\ell^{q_t}$ είναι φραγμένος.

Αν $1\le p\le 2$ ϗ $\frac{1}{p}=\frac{1-t}{1}+\frac{t}{2}\iff t=2\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{q_1}$ Τοτε

$1/q_t=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_0}=0+\frac{2/q}{2}=1/q$ Άρα $\|\hat{f}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}\le 1^{1-t}1^{t}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ □

<u>Θεώρημα</u> (Ανισότητα Hausdorff-Young στον $\mathbb{R}$)

Για $1\le p\le 2$ αν $f\in L^p(\mathbb{R})$ τοτε $\hat{f}\in L^q(\hat{\mathbb{R}})$ όπου $q=\frac{p}{p-1}$ ϗ $\|\hat{f}\|_{L^q(\hat{\mathbb{R}})}\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int|\hat{f}|^2\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{2\pi}\int|f|^2\right)^{1/2}$$

$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\hat{\mathbb{R}})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ $\quad\|\hat{f}\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$

<u>Απόδειξη Θεωρήματος Riesz-Thorin</u>

<u>Λήμμα</u> (3ων γραμμών) Έστω φ μια συνάρτηση ορισμένη συνεχής ϗ φραγμένη στη λωρίδα $0\le Re(z)\le 1$ ϗ ολόμορφη στο εσωτερικό της. Υποθέτουμε οτι $|\varphi(z)|\le M_0$ για $Re(z)=0$ ϗ $|\varphi(z)|\le M_1$ για $Re(z)=1$. Τοτε

$$|\varphi(z)|\le M_0^{1-t}M_0^{t} \text{ για } Re(z)=t \quad \forall t\in(0,1).$$

<u>Απόδειξη</u> ⊛ Ορίζουμε για $\varepsilon>0$ $\varphi_\varepsilon(z)=\varphi(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}\exp(\varepsilon z(z-1))$

Η φ_ε είναι συνεχής στην $0\le Re(z)\le 1$ ϗ ολόμορφη στο $0<Re(z)<1$

$z=x+iy$, $\varepsilon z(z-1)=\varepsilon(x^2-y^2+2ixy)-\varepsilon x-\varepsilon iy=\varepsilon(x^2-y^2-x)+i\varepsilon y(2x-1)$

$M_0^{z-1} M_1^{-z} = \exp\left(\ln M_0 \left[(x-1)+iy\right] - \ln M_1 \left[x+iy\right]\right)$.

Επίσης $|\varphi(z)| \longrightarrow 0$ καθώς $|\mathrm{Im}(z)| \longrightarrow \infty$.

Η φ_ε είναι φραγμένη από το 1 στο σύνορο του ορθογωνίου $\{z\in\mathbb{C} : 0\le \mathrm{Re}(z)\le 1,\ |\mathrm{Im}(z)|\le A\}$ για όλα τα αρκούντως μεγάλα A.

Από αρχή μεγίστου πρέπει φ_ε να είναι φραγμένη από 1 σε κάθε τέτοιο ορθογώνιο (μεγάλο A) άρα $|\varphi_\varepsilon(z)|\le 1$ $\forall z\in\mathbb{C}$ με $0\le \mathrm{Re}(z)\le 1$.

$|\varphi(z)|\, M_0^{t-1} M_1^{-t} = \lim_{\varepsilon\to 0} |\varphi_\varepsilon(z)| \le 1$ για $\mathrm{Re}(z)=t$ με $0<t<1$

$|\varphi_\varepsilon(z)| = |\varphi(z)|\,|M_0^{z-1}|\,|M_1^{-z}|\,|\exp(\varepsilon z(z-1))|$ □

Απόδειξη Θεωρήματος. Έστω $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1,+\infty]$ ϗ $t\in(0,1)$ ϗ έστω $1/p = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ (δηλ. $p = p_t$) ϗ έστω $q = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$

Θέλουμε νδο $\|Tf\|_q \le M_0^{1-t} M_1^{t} \|f\|_p$. Θεωρούμε πρώτα $f\in L^p(\mu)$ απλή συνάρτηση. Θεωρούμε επίσης ότι $\forall p$ $\|f\|_p = 1$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|\int (Tf) g \, d\nu\right| \le M_0^{1-t} M_1^{t} \cancel{\|f\|_p}^{1} \|g\|_{q^*}$ (1) $g \in L^{q^*}(\nu)$

όπου $q^* = \frac{q}{1-q}$ ο συζυγής εκθέτης του q.

(από δυϊσμό αφού $L^{q^*}(\nu)$ είναι ο δυϊκός του $L^q(\nu)$

Το ολ/μα (1) είναι καλά ορισμένο γιατί $f\in L^{p_0}\cap L^{p_1}$ (επειδή απλή ϗ ανήκει σε κάποιον L^p) άρα $Tf \in L^{q_0}\cap L^{q_1}$. Επειδή T φραγμένος στον L^{p_0} ϗ στον L^{p_1} αρκεί να δείξουμε την (1) για g επίσης απλή (γιατί οι απλές στον L^{q^*} είναι πυκνές) ϗ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\|g\|_{q^*} = 1$. Ορίζουμε

$\gamma(z) = p\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)$, $\delta(z) = q^*\left(\frac{1-z}{q_0^*} + \frac{z}{q_1^*}\right)$ όπου

$q_0^* = \frac{q_0}{q_0-1}$ ϗ $q_1^* = \frac{q_1}{q_1-1}$ οι συζυγείς εκθέτες των q_0, q_1.

Επίσης ορίζουμε $f_z = |f|^{\gamma(z)} \frac{f}{|f|}$ ϗ $g_z = |g|^{\delta(z)} \frac{g}{|g|}$

(αν $f=0$, τότε $f_z = 0$, όμοια στην g_z).

$f_t = f$, $g_t = g$ εξ' ορισμού. $\|f_z\|_{p_0} = 1$ $\mathrm{Re}(z)=0$

$|f_z|^{p_0} = \left| |f|^{p_0 \gamma(z)} \right| \frac{|f|^{p_0}}{|f|^{p_0}} = |f|^p$ για $\mathrm{Re}(z) = 0$.

$\|f_z\|_{p_1} = 1$, $Re(z) = 1$

ζ' όμοια $\|g_z\|_{q_0^*} = 1$ για $Re(z) = 0$. $\|g_z\|_{q_1^*} = 1$ για $Re(z) = 1$.

Ορίζουμε $\phi(z) = \int_Y (Tf_z)\, g_z \, d\nu \leq M_0^{1-t} M_1^t$

f απλή $\Rightarrow f = \sum_k c_k \mathbb{1}_{E_k}$ ζ' g απλή $\Rightarrow g = \sum_j d_j \mathbb{1}_{F_j}$. Τότε

$f_z = \sum_k |c_k|^{\gamma(z)-1} c_k \mathbb{1}_{E_k}$, $g_z = \sum_j |d_j|^{\delta(z)-1} d_j \mathbb{1}_{F_j}$

$$\phi(z) = \sum_j \sum_k |c_k|^{\gamma(z)-1} |d_j|^{\delta(z)-1} c_k d_j \underbrace{\int (T\mathbb{1}_{E_k})\, \mathbb{1}_{F_j} \, d\nu}_{a_{kj}}$$

Η ϕ είναι αναλυτική στο εσωτερικό της λωρίδας $0 \leq Re(z) \leq 1$ ζ' συνεχής ζ' φραγμένη στην κλειστή λωρίδα.

$|\phi(z)| \leq \|Tf\|_{q_0} \|g\|_{q^*} \leq M_0 \|f_z\|_{p_0} \|g\|_{q^*} = 1$ για $Re(z) = 0$

$|\phi(z)| \leq M_1$ για $Re(z) = 1$.

$f_t = f$, $g_t = g$. Από Λήμμα $|\phi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t$ για $Re(z) = t$

ζ' ειδικότερα για $z = t$: $\left| \int (Tf)\, g \, d\nu \right| \leq M_0^{1-t} M_1^t$

Η γενική περίπτωση έπεται προσεγγίζοντας μια τυχούσα $f \in L^p$ από απλές στον L^p.

$\hat{f}$. $f \in L^p(\mathbb{R})$ $1 \le p \le 2$.

$\{k_\lambda : \lambda > 0\}$ πυρήνας αθροισιμότητας, τότε $k_\lambda * f \xrightarrow{L^p} f$ $\forall f \in L^p$, $1 \le p < +\infty$

Για $f \in L^1(\mathbb{R})$ αν k_λ πυρήνας Fejer, τότε

$$k_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{+i\xi x} \, d\xi$$ και άρα για $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi \xrightarrow{L^1} f(x).$$

Για $f \in L^p(\mathbb{R})$ $1 \le p \le 2$ έχουμε $f = f_1 + f_2$ με $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$

πχ) $f_2 = f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} |f|$, $f_1 = f \cdot \mathbb{1}_{(1,+\infty)} |f|$

Ορίζουμε $\hat{f} = \hat{f_1} + \hat{f_2}$ και τότε $f \longrightarrow \hat{f}$ είναι γραμμικός

Ο $\hat{f}$ είναι καλά ορισμένος γιατί: αν $f = f_1' + f_2'$, $f_1' \in L^1(\mathbb{R})$ και $f_2' \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f_1' + f_2' = f_1 + f_2 \Leftrightarrow f_1' - f_1 = f_2 - f_2'$

$f_1' - f \in L^1(\mathbb{R})$, $f_2 - f_2' \in L^2(\mathbb{R})$ άρα $f_1' - f_1 = f_2 - f_2' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Επομένως $\widehat{f_1' - f} = \widehat{f_2 - f_2'}$ και άρα $\hat{f_1'} + \hat{f_2'} = \hat{f_1} + \hat{f_2}$.

Επίσης από την ανισότητα Hausdorff-Young: $\hat{f_n} \xrightarrow{L^q} \hat{f}$

όπου $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ και επομένως $\hat{f_n}(\xi) = \int_{[-n,n]} f(x) e^{-ix\xi} dx$

<u>Απόδειξη</u> $\|\hat{f_n} - \hat{f}\|_q = \|\widehat{f_n - f}\|_q \le \|f_n - f\|_p$ και $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$ από Θ.Κ.Σ. ∎

$$k_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi \text{ για } f \in L^p(\mathbb{R}).$$

<u>Λήμμα</u> Για $f \in L^2(\mathbb{R})$ $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ έχουμε $f_n \xrightarrow{L^2} f$.

<u>Απόδειξη</u> Ορίζουμε για $f \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ $\psi(f)(x) = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi$.

Θέλουμε $\psi(\hat{f}) = f$, Για $f \in L^2(\mathbb{R})$. Για $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ και $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}}) \cap L^2(\hat{\mathbb{R}})$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \longrightarrow f(x)$ κατά σημείο.

Επίσης $\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \xrightarrow{L^2} \psi(\hat{f})$.

Άρα $\psi(\hat{f}) = f$ για $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ τότε $k_\lambda * f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ άρα $\psi(\widehat{k_\lambda * f}) = k_\lambda * f$.

Όμως $K_\lambda * f \xrightarrow{L^2} f$. ψ είναι ισομετρία στον L^2 από Θεώρημα Plancherel και επομένως $\psi(\widehat{K_\lambda * f}) \longrightarrow \psi(\hat{f})$ επειδή $\widehat{K_\lambda * f} \xrightarrow{L^2} \hat{f}$ (Fourier ισομετρία). Άρα $\psi(\hat{f}) = f$ για $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Τώρα επειδή $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$ έπεται ότι $\psi(\hat{f}) = f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$ □

Λήμμα Για $g \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$

Απόδειξη $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Άρα $\widehat{f_n * g}(\xi) = \hat{f_n}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$ τότε $\|\hat{f_n} - \hat{f}\|_2 \longrightarrow 0$. $\|f_n * g - f * g\|_2 = \|(f_n - f) * g\|_2 \leq$

$\leq \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_1 \longrightarrow 0$. Άρα και [redacted]

$\|\widehat{f_n * g} - \widehat{f * g}\|_2 = \|f_n * g - f * g\|_2$. $\quad \|\hat{f_n}\hat{g} - \hat{f}\hat{g}\|_2 =$

$= \|\hat{g}(\hat{f_n} - \hat{f})\|_2 \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)| \cdot \|\hat{f_n} - \hat{f}\|_2 \leq \|g\|_1 \cdot \|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$.

Έπεται ότι $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. □

Πόρισμα Για $g \in L^1(\mathbb{R})$ και $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, τότε $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Απόδειξη Έστω ότι $f = f_1 + f_2$ με $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ και $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$. Τότε $f*g = f_1 * g + f_2 * g$. $\widehat{f*g} = \widehat{f_1 * g} + \widehat{f_2 * g} = \hat{f_1}\hat{g_1} + \hat{f_2}\hat{g} = (\hat{f_1} + \hat{f_2})\hat{g} =$

$= \hat{f}\hat{g}$ □

Παρένθεση $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ $\quad \frac{1}{2\pi}\hat{(\hat{f})}(-x) = f(x)$

[redacted]

Η σχέση $\psi(\hat{f}) = f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$ ισχύει και στον $L^2(\hat{\mathbb{R}})$

$$\underset{f(x)}{\psi(\hat{f})(x)} = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi(-x)} \, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x)$$

Πρόταση Για $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$. και $\{K_\lambda : \lambda > 0\}$ ο πυρήνας του Fejer

$K_\lambda * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi$.

Πόρισμα Για $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$: $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \xrightarrow{L^p} f$

Απόδειξη [redacted] Πρόταση + $K_\lambda * f \xrightarrow{L^p} f$ $\forall$ πυρήνα αθροισιμότητας □

Αρμονική Ανάλυση 10/1/2018 25Β

<u>Απόδειξη Πρότασης</u> Έστω $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$. $\widehat{K_\lambda * f}(\xi) =$
$= K_\lambda(\xi)\hat{f}(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi)$.
Έχουμε ότι $K_\lambda * f \in L^2(\mathbb{R})$ επειδή $K_\lambda * f \in L^p(\mathbb{R})$ και επιπλέον $K_\lambda * f \in C_0(\mathbb{R})$ επειδή $f \in L^p(\mathbb{R})$ και $K_\lambda \in L^q(\mathbb{R})$ όπου $q = \frac{p}{p-1}$ ο συζυγής εκθέτης του p. Έπεται ότι $K_\lambda * f \in L^p(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ και άρα $K_\lambda * f \in L^2(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $K_\lambda * f \overset{\oplus}{=} L_2\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (K_\lambda * f(\xi)) e^{i\xi x} d\xi$
$= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$.
Επειδή $\int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ για $n \ge \lambda$. □

<u>Πόρισμα</u> Οι συναρτήσεις με μετασχηματισμό Fourier που έχει συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$.
<u>Απόδειξη</u> $\widehat{K_\lambda * f} = \hat{K_\lambda} \cdot \hat{f}$ έχει συμπαγή φορέα για $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le 2)$
και $K_\lambda * f \xrightarrow{L^p} f$. □

Αυτά που θα πούμε τώρα είναι περιγραφικά για να έχουμε μια εικόνα.

<u>Κλάση Schwarz</u>

$C_c^\infty = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ άπειρες το πλήθος παραγώγους και συμπαγή φορέα$\}$

• <u>Κλάση Schwarz</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < +\infty \}$.

$\|f\|_{j,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(j)}(x)|$, $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$d(f,g) = \sum_{j,m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+m}} \frac{\|f-g\|_{j,m}}{1 + \|f-g\|_{j,m}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

και ο χώρος είναι πλήρης (χώρος Frechet).

<u>Ιδιότητες</u>

1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$

2) $\widehat{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \subseteq \mathcal{S}(\hat{\mathbb{R}})$ όπου $\widehat{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \{ \hat{f} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \}$.

3) $\widehat{S(\mathbb{R})} = S(\hat{\mathbb{R}})$ διότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 & επί του $S(\hat{\mathbb{R}})$ (από τον $S(\mathbb{R})$).

4) $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \quad \forall f \in S(\mathbb{R})$.

5) $S(\mathbb{R})$ πυκνός σε κάθε $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$ & στον $C_0(\mathbb{R})$

(Απόδ. $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ πυκνός & $C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$).

<u>Παρατήρηση</u> Για $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x)\,dx$ (Fubini)

Αυτό ισχύει ειδικότερα για $f \in L^1(\mathbb{R})$ & $g \in S(\mathbb{R})$.

<u>Ορισμός</u> Χώρος των <u>tempered κατανομών</u>.

$S(\mathbb{R})^* = \{u \mid u$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $S(\mathbb{R})\}$

(το αλγεβρικό δυϊκό του $S(\mathbb{R})$).

Για $u \in S(\mathbb{R})^*$ ορίζουμε το $\hat{u}$ από την σχέση

$\hat{u}(f) = u(\hat{f})$ για $f \in S(\mathbb{R})$ (δράση)

πχ) (tempered κατανομών)

1) $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$

2) $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \{\mu \mid \mu$ μιγαδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}\}$

$\left[\mu(f) = \int f\, d\mu,\ f \in S(\mathbb{R}),\ \hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\, d\mu(x)\right]$

$\hat{\mu}$ ορίζεται & απευθείας. Οι δυο ορισμοί συμπίπτουν.

---

2 κόλλες χαρτί με ότι σημειώσεις θέλουμε

ή 1 (θα βγει ανακοίνωση).