Αρμονική Ανάλυση (2022–23)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

1. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την

$$\int |f(tx)|d\lambda(x) = \frac{1}{t}\int |f(x)|d\lambda(x), \qquad t>0.$$

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A)<\infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το σύνολο $D(x)=\{n\in\mathbb{N}: n^2x\in A\}$ είναι πεπερασμένο.

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη: Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.

3. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες, τέτοιες ώστε $f_n\to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 |f_n|^2\,d\lambda \leqslant 1$$

για κάθε $n\geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n|\,d\lambda \to 0.$$

4. Έστω $1\leqslant p\leqslant\infty$ και $f\in L^p[0,\infty)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε τις περιπτώσεις $p=1$ και $1<p<\infty$ χωριστά.

5. Έστω $1<p<\infty$ και $f,g\in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g>\alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\{g>\alpha\}} f\,d\lambda$$

για κάθε $\alpha>0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\,\|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$g_n(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\,dy.$$

(α) Αποδείξτε ότι $g_n(x)\to f(x)$ λ-σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}}|g_n|\,d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}}|f|\,d\lambda$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}}|g_n|\,d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}}|f|\,d\lambda$.

7. Έστω $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση με $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} = \|f\|_\infty.$$

8. Έστω $1 < p < \infty$ και $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\, dy\right)^p dx\right]^{1/p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)^p dx\right)^{1/p} dy.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ (όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p) με $\|g\|_q = 1$, και φράξτε κατάλληλα το

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dy\right) |g(x)|\, dx.$$

9. (α) Έστω $1 < p_j < \infty$ με $\sum_{j=1}^n 1/p_j = 1$. Αν $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, αποδείξτε ότι

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

(β) Έστω $1 < p, q, r < \infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, αποδείξτε την *ανισότητα του Young*:

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να υποθέσετε ότι $f, g \geq 0$. Θα βοηθήσει να γράψετε

$$f(y)g(x - y) = f(y)^a g(x - y)^b \big[(f(y)^{1-a} g(x - y)^{1-b}\big]$$

για κατάλληλους a και b, και να χρησιμοποιήσετε το (α).

10. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|} \quad \text{για κάθε } |x| \geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.
(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\ln 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \leqslant 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|(\ln 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

11. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \mathrm{dist}(x, E) = \inf\{|x - t| : t \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to y} \frac{g(x)}{|x - y|} = 0$$

σχεδόν για κάθε $y \in E$.

12. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx)\chi_A(x)\,d\lambda(x)$$

είναι συνεχής στο $t = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: αν $|t-1| < \varepsilon$ τότε η ευθεία $y = tx$ τέμνει το $A \times A$ στο $\mathbb{R}^2$.

13. (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

(β) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

14. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη*. Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.]

16. (α) Έστω $p(t) = \sum_{s=-n}^{n} a_s e^{-ist}$ και $q(t) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{-ikt}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αποδείξτε ότι

$$\|p\|_2^2 = \sum_{s=-n}^{n} |a_s|^2 \qquad \text{και} \qquad \|q\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |b_k|^2$$

και ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)q(t)f(t)e^{-it}dt = \sum_{s,k=-n}^{n} a_s b_k \widehat{f}(s+k+1).$$

(β) Αν $f_0(t) = t - \pi$ στο $[0, 2\pi)$, αποδείξτε ότι $\widehat{f_0}(0) = 0$ και $\widehat{f_0}(n) = \frac{i}{n}$ για κάθε $n \neq 0$.

(γ) Αν για τα πολυώνυμα p και q του (α) ισχύει ότι $a_s = b_k = 0$ για κάθε $-n \leqslant s, k < 0$, χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα του (α) για τη συνάρτηση f_0 του (β) αποδείξτε ότι

$$\left|\sum_{s,k=0}^{n} \frac{a_s b_k}{s+k+1}\right| \leqslant \pi \left(\sum_{s=0}^{n} |a_s|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}.$$