29/3/23

Ασκ. 3.14 Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο, $p \geq 1$, $f, f_n \in L^p(E)$: $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
Έστω $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με $g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} g$ σχεδόν παντού
Δείξτε ότι $\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
(g_n ομοιόμορφα φραγμένη αν $g_n \in L^\infty(E)$ $\forall n$ και $\exists M > 0 : \|g_n\|_\infty \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έτσι, $g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} g$ σ.π. $\Rightarrow \|g\|_\infty \leq M$)

Λύση: • Γράφουμε $\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_p = \|f_n \cdot g_n - f \cdot g_n + f \cdot g_n - f \cdot g\|_p$
$= \|(f_n - f) g_n + f(g_n - g)\|_p \leq \|(f_n - f)_p \cdot g_n\|_p + \|f \cdot (g_n - g)\|_p$
$\leq \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_\infty + \|f(g_n - g)\|_p$

• Ξέρουμε ότι $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ και $\|g\|_\infty \leq M$ (φραγμένη)
Άρα $\|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

• Μένει νδο $\|f(g_n - g)\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$
Έχουμε $|f|^p \cdot |g_n - g|^p \xrightarrow[\text{σ.π.}]{\text{κ.σ.}} |f|^p \cdot 0 = 0$
και $|f|^p |g_n - g|^p \leq |f|^p (|g_n| + |g|)^p \leq |f|^p \cdot (2M)^p \in L^1(E)$
διότι $|f|^p \in L^1$ ($f \in L^p$)

Άρα από Θ.Κ.Σ. έχω $\|f \cdot (g_n - g)\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Τελικά $\|f_n g_n - f \cdot g\| \leq \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_\infty + \|f \cdot (g_n - g)\|_p \to 0$

Ασκ. 3.22 Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες με $\|f_n\|_r \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ σχεδόν παντού
Νδο: αν $1 \leq p < r$ τότε $\|f_n - f\|_p \to 0$

Λύση: Θεώρημα Egorov: Αν $\lambda(E) < +\infty$ και $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ σ.π. στο E, τότε $\forall \delta > 0$ $\exists F \subseteq E$ μετρήσιμο με $\lambda(E \setminus F) < \delta$ τ.ω. $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο F.

Έστω $\delta > 0$. Από το Θ. Egorov, θα υπάρχει $F \subseteq (0,1)$ μετρήσιμο ώστε $\lambda((0,1) \setminus F) < \delta$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο F.

• Έχουμε, τότε, $\|f_n - f\|_p^p = \int_0^1 |f_n - f|^p d\lambda = \int_F |f_n - f|^p d\lambda + \int_{F^c} |f_n - f|^p d\lambda$

• Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq n_0$ και $\forall x \in F$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \int_F |f_n(x) - f(x)|^p d\lambda \leq \int_F \left(\frac{\varepsilon}{2^{1/p}}\right)^p d\lambda = \frac{\varepsilon^p}{2} \lambda(F)$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \int_F |f_n(x) - f(x)|^p d\lambda \leq \frac{\varepsilon^p}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon^p}{2} \quad (F \subseteq (0,1) \Rightarrow \lambda(F) \leq 1)$

• $\int_{F^c} |f_n - f|^p d\lambda = \int_{F^c} (|f_n - f|^r)^{p/r} d\lambda \leq \left(\int_{F^c} |f_n - f|^r\right)^{p/r} \left(\int_{F^c} 1\right)^{1-\frac{p}{r}}$

$\leq \|f_n - f\|_r^p \cdot (\underbrace{\lambda(F^c)}_{=\lambda(E \setminus F) < \delta})^{1-\frac{p}{r}}$

$< \|f_n - f\|_r^p \cdot (\delta)^{1-\frac{p}{r}} \leq (\|f_n\|_r + \|f\|_r)^p \cdot \delta^{1-\frac{p}{r}}$

Έχουμε $f_n \xrightarrow{\text{κ.δ.}} f \rightarrow \int |f|^r = \int \liminf |f_n|^r \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int |f_n|^r d\lambda$
$\leq M^r$

$\Rightarrow \|f\|_r = \left(\int |f|^r\right)^{1/r} \leq M.$

Άρα $\int_{F^c} |f_n - f|^p d\lambda \leq (\|f_n\|_r + \|f\|_r)^p \cdot \delta^{1-\frac{p}{r}}$
$\leq (2M)^p \cdot \delta^{1-\frac{p}{r}}$

Για $\delta \leq \left(\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^p \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{r-p}}$ έχουμε $\int_{F^c} |f_n - f|^p d\lambda < \frac{\varepsilon^p}{2}$

Τελικά $\|f_n - f\|_p^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \|f_n - f\|_p < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Θα θεωρούμε συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ή $f: [\alpha, b] \to \mathbb{C}$

Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$ και $v(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$

Θα λέμε ότι η $f: [\alpha, b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες, και τότε:

$\int_\alpha^b f(x)\, dx = \int_\alpha^b u(x)\, dx + i \int_\alpha^b v(x)\, dx$

1) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν $f, g : [\alpha, b] \to \mathbb{C}$ και $t, s \in \mathbb{C}$ τότε $\int_\alpha^b (t\cdot f + s\cdot g)(x)\,dx = t\cdot\int_\alpha^b f(x)\,dx + s\int_\alpha^b g(x)\,dx$

2) $\left|\int_\alpha^b f(x)\,dx\right| \leq \int_\alpha^b |f(x)|\,dx$

Θέτουμε $\lambda = \dfrac{\left|\int_\alpha^b f(x)dx\right|}{\int_\alpha^b f(x)dx}$ και έχουμε $\underbrace{\left|\int_\alpha^b f(x)dx\right|}_{\in\mathbb{R}} = \lambda\cdot\int_\alpha^b f(x)dx$

$\Longrightarrow \underbrace{\left|\int_\alpha^b f(x)dx\right|}_{\in\mathbb{R}} = \int_\alpha^b \mathrm{Re}(\lambda f(x))\,dx + i\underbrace{\int_\alpha^b \mathrm{Im}(\lambda f(x))\,dx}_{0}$

$= \int_\alpha^b \mathrm{Re}(\lambda f(x))\,dx \leq \int_\alpha^b |\lambda f(x)|\,dx \overset{|\lambda|=1}{=} \int_\alpha^b |f(x)|\,dx.$ ■

• Συμβολίζουμε με Π το μοναδιαίο κύκλο $\Pi = \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\}$
$= \{e^{ix} : x\in\mathbb{R}\}$

Παρατήρηση: Αν $F : \Pi \to \mathbb{C}$ ορίζουμε $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με $f(x) = F(e^{ix})$ $x\in\mathbb{R}$.
Μάλιστα, η f είναι 2π-περιοδική, διότι $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = F(e^{i(x+2\pi)}) = F(e^{ix}\cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{=1}) = F(e^{ix}) = f(x)$.

Αντίστροφα, αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-περιοδική, τότε η $F : \Pi\to\mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη.
Πράγματι, αν $z\in\Pi$ και $z = e^{ix_1} = e^{ix_2}$, τότε $x_1 - x_2 = 2k\pi$, για κάποιο $k\in\mathbb{Z} \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2 + 2k\pi) \overset{f\ 2\pi\text{-περιοδική}}{=\!=} f(x_2) \Rightarrow F(e^{ix_1}) = F(e^{ix_2})$

Ορισμός: Θα λέμε ότι η $F : \Pi\to\mathbb{C}$ είναι:
(i) συνεχής, αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με $f(x) = F(e^{ix})$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
(ii) παραγωγίσιμη, αν η $f(x) = F(e^{ix})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
(iii) ολοκληρώσιμη, αν η $f(x) = F(e^{ix})$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα $[\alpha, \alpha+2\pi]$ (για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$)
(διότι τότε η f είναι ολ/μη σε κάθε διάστημα μήκους 2π, και μάλιστα ισχύει $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_b^{b+2\pi} f(x)dx$, $\forall \alpha, b\in\mathbb{R}$, αφού f-2π περιοδική)

Παρατήρηση: Συμβολίζουμε $\int_\Pi F(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

Ο Χώρος $L^p(\Pi)$, $1 \le p < +\infty$

Αποτελείται από όλες τις $f : \Pi \to \mathbb{C}$ για τις οποίες
$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_\Pi |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$

Ορισμός: Η $f : \Pi \to \mathbb{C}$ λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν $\exists b \ge 0$ τ.ω.
$\lambda(\{x \in \Pi : |f(x)| > b\}) = 0$
Τότε, θέτουμε $\|f\|_\infty = \min\{b \ge 0 : \lambda(\{x \in \Pi : |f(x)| > b\}) = 0\}$

<u>Παρατήρηση:</u> 1) Η $\|\cdot\|_\infty$ στον $L^\infty(\Pi)$ είναι νόρμα
2) όλοι οι $L^p(\Pi)$, $1 \le p < +\infty$ είναι πλήρεις.

Ορισμός: (i)·Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε συνάρτηση
$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)), \text{ όπου } \alpha_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, n.$$

• $\deg(T)$ είναι ο μικρότερος $n \ge 0$ για τον οποίο η T έχει μια τέτοια αναπαράσταση.
• Με $\mathcal{T}_n$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των T με $\deg(T) \le n$.
Ο $\mathcal{T}_n$ είναι διανυσματικός χώρος.

(ii)·Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε συνάρτηση
$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik \cdot x}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο T είναι και μιγαδικό πολυώνυμο, διότι:
$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right) = \dots$$

Θεώρημα: (i) Τα πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $C(\Pi)$. Δηλαδή, αν $f : \Pi \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T$ τριγ. πολ. με $\|f - T\|_\infty < \varepsilon$.

(ii) Το ίδιο ισχύει και για τα μιγαδικά τριγ. πολυώνυμα στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Θεώρημα (Προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass) Έστω $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $\exists\ (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πολυωνύμων $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\|f - p_n\|_\infty = \max\{|f(x) - p_n(x)| : x \in [\alpha, b]\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• Για την απόδειξη θα υποθέσουμε ότι $[\alpha, b] = [0, 1]$, διότι $\exists\ T : (C([\alpha,b]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ γραμμική ισομετρία επί.

Έστω $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ με
$(Tf)(x) = f((1-x)\alpha + x\cdot b)$
(Επιπλέον, ο T στέλνει πολυώνυμα σε πολυώνυμα)

31/3/23

↳ Απόδειξη: Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι $[\alpha, b] = [0, 1]$
Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής
Ορίζουμε $B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Το $B_n f$ είναι πολυώνυμο βαθμού n ως προς x και λέγεται n-οστό πολυώνυμο Börnstein της f.

Ισχυρισμός: $\|f - B_n f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λήμμα 1: (i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k} = 1$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x$

Παρατήρηση: Για την • $f_0 \equiv 1$ έχω $B_n f_0 = f_0 \Rightarrow \|f_0 - B_n f_0\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$
• $f_1(x) = x$ έχω $B_n f_1 = f_1 \Rightarrow \|f_1 - B_n f_1\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$
• $f_2(x) = x^2$ έχω $B_n f_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1 \Rightarrow \|f_2 - B_n f_2\| = \frac{1}{n}\|f_1 - f_2\| = \frac{1}{4n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λήμμα 2: Έστω $\delta>0$. Για $x\in[0,1]$ ορίζουμε $F(\delta,x)=\{0\le k\le n : |\frac{k}{n}-x|\ge\delta\}$.

Τότε: $\sum_{k\in F(\delta,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^k\le\frac{1}{4\delta^2 n}$

↳ Απόδειξη: $\delta^2\sum_{k\in F(\delta,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\sum_{k\in F(\delta,x)}(\frac{k}{n}-x)^2\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le$

$$\le\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)^2\cdot x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le(B_nf_2)(x)-2x\cdot B_nf_1+x^2B_nf_0=(1-\frac{1}{n})x^2+\frac{1}{n}x-2x^2+x^2$$

$$=\cancel{x^2}-\frac{1}{n}x^2+\frac{1}{n}x-\cancel{x^2}=\frac{1}{n}x(1-x)\le\frac{1}{4n}$$

↳ Απόδειξη (Θ. Weierstrass): Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\varepsilon>0$. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε: αν $s,t\in[0,1]$ με $|s-t|<\delta$ να είναι $|f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Έστω $x\in[0,1]$. Γράφουμε $|f(x)-B_nf(x)|=|f(x)-\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}|$

$$=|f(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{=1\text{ από Λήμμα 1}}-\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}|$$

$$=|\sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}|$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$ + τριγωνική

$$=\sum_{k\notin F(\delta,x)}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in F(\delta,x)}|\overset{\le\|f\|_\infty}{f(x)}-\overset{\le\|f\|_\infty}{f(\frac{k}{n})}|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}\overbrace{\sum_{k\notin F(\delta,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}^{\le 1}+2\|f\|_\infty\underbrace{\sum_{k\in F(\delta,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\le\frac{1}{4\delta n^2}\text{ από Λήμμα 2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\frac{1}{4\delta^2 n}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}\underset{(*)}{<}\varepsilon$$

(*) για $\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}<\frac{\varepsilon}{2}\iff n\ge\frac{\|f\|_\infty}{\delta^2\cdot\varepsilon}$, δηλαδή για $n\ge n_0=\left[\frac{\|f\|_\infty}{\delta^2\varepsilon}\right]+1$

Για $n\ge n_0$ έχουμε $\|f-B_nf\|_\infty=\max\{|f-B_nf| : x\in[0,1]\}<\varepsilon$

Άρα $\|f-B_nf\|_\infty\xrightarrow{n\to\infty}0$

Παρατήρηση: Θα περάσουμε στην πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων χρησιμοποιώντας το Θ. Weierstrass !

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική, άρτια συνάρτηση. Ζητάμε τριγ. πολυώνυμο $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\|f-T\|_\infty = \max\{|f(x)-T(x)| : x \in [-\pi,\pi]\} \leq \varepsilon$ για δοθέν $\varepsilon > 0$.

Ορίζουμε $g: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(y) = f(\overbrace{\arccos y}^{\in[0,\pi]})$

Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$. Άρα, από Θ. Weierstrass $\exists$ πολυώνυμο p, τέτοιο, ώστε: $\max\{|g(y)-p(y)| : y \in [-1,1]\} \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow g(y) = g(\cos x) = f(\arccos(\cos x)) = f(x)$

Για $x = \arccos y \Rightarrow y = \cos x$ και ορίζουμε $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = p(\cos x)$ και τότε $\forall x \in [0,\pi]$: $|f(x)-T(x)| = |g(\cos x) - p(\cos x)|$ $\xrightarrow{\ } y = \cos x \in [-1,1]$

$$\leq \max\{|g(y)-p(y)| : y \in [-1,1]\}$$
$$\leq \varepsilon$$

Επιπλέον, η T είναι άρτια, διότι $T(-x) = p(\cos(-x)) = p(\cos x) = T(x)$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$,

$\Longrightarrow \forall x \in [-\pi, 0]$: $|f(x)-T(x)| = |f(-x)-T(-x)| \leq \varepsilon$, διότι $-x \in [0,\pi]$

Ερώτημα: Είναι η $T(x) = p(\cos x)$ τριγ. πολυώνυμο;
Δηλαδή, αν $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n \cdot x^n$, τότε το $T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \dots + \alpha_n \cos^n x$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο;

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \text{τριγ. πολυώνυμο}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathrm{span}\{1, \cos x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cdot \cos x, \sin x \cos^2 x, \dots, \sin x \cdot \cos^{n-1} x\}$

$= \mathrm{span}\{1, \cos x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin(nx)\} = \mathcal{T}_n$

$\Rightarrow p(\cos x)$ τριγ. πολυώνυμο.

Θεώρημα: Αν $f \in C(\Pi)$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο τ.ω. $\|f-T\|_\infty < \varepsilon$.

$\hookrightarrow$ Απόδειξη: Έστω $\mathcal{T}_n$ τα τριγ. πολυώνυμα βαθμού $\leq n$.

Τότε $T_n = span(A_n)$, όπου $A_n = \{1, \overbrace{\cos x, \dots, \cos(nx)}^{n}, \overbrace{\sin x, \dots, \sin(nx)}^{n}\}$

και $|A_n| = 2n+1$

Το σύνολο A_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο:

Σχέσεις ορθογωνιότητας:

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cdot\cos(kx)\,dx = 0$, αν $m \neq k$, $1 \le m, k \le n$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\sin(kx)\,dx = 0$, αν $m \neq k$, $1 \le m, k \le n$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(kx)\,dx = 0$, αν $m \neq k$, $1 \le m, k \le n$.

Αν $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sin(kx) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\xRightarrow{\cdot\cos(mx)} \alpha_0 \cdot \cos(mx) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos(kx)\cdot\cos(mx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sin(kx)\cdot\cos(mx) = 0 \xRightarrow{\int_{-\pi}^{\pi} dx}$$

=0 για $k \neq m$ άρα μένει μόνο για $k=m$

$$\alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(mx)\,dx = 0$$

Για $1 \le m \le n$ έχω: $\alpha_m \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{n} 0 + \alpha_0 \cdot \frac{\cancel{\sin(mx)}}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_m \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,dx = 0 \xRightarrow{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx \neq 0} \alpha_m = 0$$

Ομοίως, πολλ/ζοντας με $\sin(mx)$, προκύπτει ότι $b_m = 0$, $\forall m = 1, \dots, n$

Άρα, έχω $\alpha_0 = 0$, συνεπώς $\dim T_n = 2n+1$

Λήμμα: (i) $\cos(nx) = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} \cdot \cos^j x$

και

(ii) $\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} = 2^n \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} b_{n,j} \cos^j x$

↳ Απόδειξη: Με επαγωγή στο n.

(*)
- $\cos(\alpha - b) = \cos\alpha \cdot \cos b + \sin\alpha \cdot \sin b$
- $\cos(\alpha + b) = \cos\alpha \cdot \cos b - \sin\alpha \sin b$
- $\sin(\alpha + b) = \sin\alpha \cdot \cos b + \cos\alpha \cdot \sin b$
- $\sin(\alpha - b) = \sin\alpha \cdot \cos b - \cos\alpha \cdot \sin b$

(i) Για $n = 2$: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ ✓

- Επαγωγικό βήμα: $\cos((n+1)x) \overset{(*)}{=} 2\cos(nx)\cdot\cos x - \cos((n-1)x)$

υποθ. ότι ισχύει για $k = 1, \dots, n-1$

$$= 2\left(2^{n-1} \cdot \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} \cos^j x\right)\cos x - \cos((n-1)x)$$

$$= 2^n \cos^{n+1}x + 2\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} \cos^{j+1}x - \left(2^{n-1}\cos((n-1)x) + \sum_{j=0}^{n-2} \gamma_{n-1,j}\cos^j x\right)$$

$$= 2^n \cos^{n+1}x + 2\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} \cos^{j+1}x - 2^{n-1}\cos((n-1)x) - \sum_{j=0}^{n-2} \gamma_{n-1,j}\cos^j x$$

$$= 2^n \cos^{n+1}x + \sum_{j=0}^{n} \delta_{j,n} \cdot \cos^j x$$

(ii) • Για $n=1$: $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2\cos x$ ✓

• Επαγωγικό βήμα: $\sin((n+1)x) = 2\cos(nx)\cdot \sin x + \sin((n-1)x)$

$$\overset{(i)}{=} 2^n \cos^n x + 2\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j}\cos^j x$$

$$+ 2^{n-2}\cos^{n-2}x \cdot \sin x + \sum_{j=0}^{n-3} b_{n-2,j}\cos^j x \sin x$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} = 2^n \cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{n,j} \cos^j x$$

Ορίζουμε $B_n = \{1, \cos x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cos x, \sin x \cos^2 x, \dots, \sin x \cdot \cos^{n-1} x\}$ και έχουμε ότι $|B_n| = 2n+1$ και $A_n \subseteq span(B_n)$ (από Λήμμα)

Τότε $T_n = span(A_n) \subseteq span(B_n)$ και $\dim T_n = 2n+1$, $\dim span(B_n) \leq 2n+1$

Άρα: $T_n = span(B_n)$ και B_n γραμμικά ανεξάρτητο

Αυτό αποδεικνύει την εξής πρόταση

Πρόταση: $T_n = span(A_n) = span(B_n)$, B_n γραμμικά ανεξάρτητο

$\Longrightarrow$ Η $T(x) = p(\cos x) \in span(B_n) = T_n \Longrightarrow T$ τριγ. πολυώνυμο.

5/11/23

4 Απόδειξη (τριγ. θεωρήματος Weierstrass):

Έχουμε δείξει το εξής: αν $f \in C(\Pi)$ άρτια και $\varepsilon>0$, βρήκαμε πολυώνυμο $p(x)$, ώστε $|f(x)-p(\cos x)| \le \varepsilon$, $\forall x$ και $p(\cos x) = T(x)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο

Έστω $f \in C(\Pi)$. Η f γράφεται ως $f = f_e + f_o$, όπου $f_e, f_o \in C(\Pi)$, f_e = άρτια, f_o = περιττή $\left(f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \right)$ και είναι σαφές ότι $f_e, f_o \in C(\Pi)$)

Έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε T_1 τριγωνομετρικό πολυώνυμο με:
$\| f_e - T_1 \|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$
Η $f_o(x)\cdot \sin x$ είναι άρτια (ως γινόμενο περιττών), άρα $\exists T_2$ τριγ. πολυώνυμο με: $\| f_o \sin x - T_2 \|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Θεωρούμε την $f(x)\cdot \sin^2 x = f_e(x)\cdot \sin^2 x + (f_o(x)\sin x)\cdot \sin x$
Ορίζουμε $T_3(x) = T_1(x)\cdot \sin^2 x + T_2(x)\sin x$.
Τότε, $\forall x \in \Pi$ είναι:

$$|f(x)\cdot \sin^2 x - T_3(x)| \le |f_e(x) - T_1(x)| \sin^2 x + |f_o(x)\sin x - T_2(x)|\cdot|\sin x|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Η T_3 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Πράγματι:
- $T_1(x)\cdot \sin^2 x = T_1(x)\cdot(1-\cos^2 x)$ = γραμ. συνδυασμός δυνάμεων του $\cos x$.
  $\Rightarrow T_1(x)\cdot \sin^2 x$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο
- $T_2(x)\cdot \sin x$ = γραμ. συνδυασμός του $\cos x$ επί $\sin x$
  $\Rightarrow T_2(x)\cdot \sin x$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$\boxed{\text{Αν } Q(x,y) \text{ πολυώνυμο} \Rightarrow Q(\cos x, \sin y) \text{ είναι τριγ. πολυώνυμο.}}$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την $f(x)\cos^2 x$ με τριγωνομετρικό πολυώνυμο:
Πράγματι, θεωρούμε $g(x) = f(x-\frac{\pi}{2}) \in C(\Pi)$. Άρα $\exists T_4$ τριγ. πολυώνυμο ώστε $\forall y \in \Pi$: $|g(y)\sin^2 y - T_4(y)| \le \varepsilon$

Ορίζουμε $T_5(x) = T_4(x+\frac{\pi}{2})$ = τριγ. πολυώνυμο και $\forall x \in \Pi$ είναι:

$$|f(x)\cdot\cos^2 x - T_5(x)| = |f(x)\cdot \cos^2 x - T_4(x+\tfrac{\pi}{2})| \overset{y=x+\frac{\pi}{2}}{=} |f(y-\tfrac{\pi}{2})\cos^2(y-\tfrac{\pi}{2}) - T_4(y)|$$
$$= |g(y)\sin^2 y - T_4(y)| \le \varepsilon$$

Γράφοντας $f(x) = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x$ και θέτοντας $T(x) = T_3(x) + T_5(x)$ έχουμε ότι: $|f(x) - T(x)| < 2\varepsilon$, $\forall x \in \Pi$.

Θεώρημα: (Μιγαδική Περίπτωση) Αν $f \in C(\Pi)$ με μιγαδικές τιμές, τότε: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ T μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με $\|f - T\|_\infty \leq \varepsilon$

↳ Απόδειξη: Γράφουμε $f = u + iv \Longrightarrow u, v \in C(\Pi)$ με πραγματικές τιμές ($u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$)

Οπότε, $\exists T_1, T_2$ τριγ. πολυώνυμα ώστε: $\|u - T_1\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $\forall x \in \Pi$
πραγματικά
$\|v - T_2\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

Τότε $\forall x \in \Pi$:
$$
\begin{aligned}
|f(x) - (T_1 + iT_2)(x)|^2 &= |u(x) + iv(x) - T_1(x) - iT_2(x)|^2 \\
&= |u(x) - T_1(x) + i(v(x) - T_2(x))|^2 \\
&= |u(x) - T_1(x)|^2 + |v(x) - T_2(x)|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \|f - (T_1 + iT_2)\|_\infty \leq \varepsilon$ και η $T_1 + iT_2$ είναι μιγαδικό τριγ. πολ.

Σειρές Fourier

Ορισμός: (i) Πραγματική τριγωνομετρική σειρά είναι κάθε σειρά της μορφής: $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$, $\alpha_k, b_k \in \mathbb{R}$

με μερικά αθροίσματα $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$

(ii) Μιγαδική τριγωνομετρική σειρά είναι κάθε σειρά της μορφής: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$, $c_k \in \mathbb{C}$

με μερικά αθροίσματα $\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$

• Παρατήρηση: Αν $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ μιγαδικό τριγ. πολυώνυμο και $|s| \leq 1$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-is\cdot x} dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i(k-s)x} dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-s)x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq s}}^{n} c_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{i(k-s)x}}{i(k-s)}\right)' dx + \frac{1}{2\pi} c_s \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq s}}^{n} c_k \frac{e^{i(k-s)x}}{i(k-s)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot c_s \cdot \cancel{2\pi}
\end{aligned}
$$

⟶

$e^{im\pi} = \cos(m\pi) + i\cancel{\sin(m\pi)}^{0}$
$= (-1)^m$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq s}}^{n} c_k \cdot \frac{e^{i(k-s)\pi} - e^{-i(k-s)\pi}}{i(k-s)} + c_s$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq s}}^{n} c_k \cdot \frac{(-1)^{k-s} - (-1)^{k-s}}{i(k-s)} + c_s$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq s}}^{n} 0 + c_s = c_s$$

Έτσι: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-s)x}\,dx = \begin{cases} 1, & k=s \\ 0, & k\neq s \end{cases}$

Οπότε, οι συντελεστές c_k του $p(x)$ δίνονται ως εξής:

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx}\,dx$, για $|k| \leq n$

Αν $|s| > n$, τότε $\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-isx}\,dx = 0$

Ορισμός: Έστω $f \in L^1(\Pi)$. Ορίζουμε $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\boxed{\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx}$
= ο κ-οστός συντελεστής Fourier της f

$\left(|f(x)\cdot e^{-ikx}| = |f(x)|\cdot \underbrace{|e^{-ikx}|}_{=1} = |f(x)| \in L^1(\Pi) \Rightarrow f(x)e^{-ikx} \in L_1(\Pi) \right)$

Λήμμα: Για $k \in \mathbb{Z}$ $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$. Δηλαδή η $(\hat{f}(k))_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη

↳ Απόδειξη: $|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\cdot|e^{-ikx}|\,dx$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$

Παρακάτω, θδο $\lim_{|k|\to\infty} |\hat{f}(k)| = 0$ (Λήμμα Riemann-Lebesgue)

Ορισμός: Η σειρά Fourier της $f \in L^1(\Pi)$ είναι η τριγ. σειρά:
$\boxed{S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}}$ και τα μερικά αθροίσματα αυτής είναι:

$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$

• Παρατήρηση: Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ μιγαδικό τριγ. πολυώνυμο
Έχουμε, τότε, ότι $\hat{p}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\cdot e^{-ikx}\,dx$
$= \begin{cases} c_k, & |k| \leq n \end{cases}$

$\left(\text{Γενικά: } \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{imt}}{mt}\right)' dt = \frac{e^{im\pi}-e^{-im\pi}}{im} = 0 \text{ για } m\neq 0\right)$

Άρα, αν $N \geq n$ τότε $S_N(p,x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{p}(k)\cdot e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx} = p(x)$

Ειδικότερα $S_N(p,x) \xrightarrow[N\to\infty]{} p(x)$ ομοιόμορφα, δηλ. $p(x) \overset{ομ.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{p}(k)e^{ikx}$

• Πρόβλημα: Είναι σωστό ότι $S_n(f,\cdot) \longrightarrow f$, $f\in L^1(\Pi)$

(όπου η σύγκλιση μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους, π.χ. L^1, L^p, L^∞, κ.σ.-σύγκλιση)

Επίσης, μπορούμε να περιοριστούμε σε μικρότερες κλάσεις συναρτ.

Πρόταση: Έστω $f\in C(\Pi)$, ώστε $\hat{f}(k)=0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$. Τότε $f\equiv 0$

↳ Απόδειξη: Από την υπόθεση $\forall k\in\mathbb{Z}$ έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = 0$$

Άρα, αν $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$\text{τότε: } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx}_{=0} = 0$$

Από το Θ. προσέγγισης του Weierstrass, υπάρχει $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μιγαδικών τριγ. πολυωνύμων, τ.ω.: $\|f-p_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\text{Τότε: } \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\overline{(f-p_n)} + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\overline{p_n}} \overset{p_n \text{ τριγ. πολ.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\overline{(f-p_n)} \leq$$

$$\leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\overline{(f-p_n)}\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f|\cdot|\overline{f-p_n}| = \int_{-\pi}^{\pi}|f|\cdot\underbrace{|f-p_n|}_{\leq\|f-p_n\|_\infty}$$

$$\leq \|f-p_n\|_\infty \cdot \int_{-\pi}^{\pi}|f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx = 0$ και $|f|^2$ συνεχής πραγματική συνάρτηση $\Longrightarrow |f|\equiv 0 \Longrightarrow f\equiv 0$.

Πόρισμα: (Μοναδικότητα συντελεστών Fourier) Αν $f,g\in C(\Pi)$ και $\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$, τότε $f\equiv g$.

↳ Απόδειξη: $(f-g)\in C(\Pi)$ και $\widehat{(f-g)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)(x)e^{-ikx}dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \hat{f}(k)-\hat{g}(k) = 0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Από προηγούμενη Πρόταση $(f-g)(x)\equiv 0 \Rightarrow f\equiv g$.

7/4/23

Θεώρημα (Λήμμα Riemann-Lebesgue) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε $\lim_{|k|\to\infty} |\hat{f}(k)| = 0$

↳ Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists g \in C(\mathbb{T})$ τ.ω.: $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$

Μπορούμε, επίσης, να βρούμε τριγ. πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ με $\|g-p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε: $\|g-p\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-p(x)|\,dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|g-p\|_\infty\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\|g-p\|_\infty$
$= \|g-p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα: $\|f-p\|_1 = \|f-g+g-p\|_1 \le \|f-g\|_1 + \|g-p\|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Έστω $k \in \mathbb{Z}$. $|k| > n =$ βαθμός του p. Τότε:
$\hat{p}(k) = 0 \Longrightarrow |\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \hat{p}(k) + \hat{p}(k)| \le |\widehat{(f-p)}(k)| + |\hat{p}(k)|$
$= |\widehat{(f-p)}(k)| \le \|f-p\|_1 < \varepsilon$

Έτσι, για k τ.ω. $|k| > n$ είναι $|\hat{f}(k)| < \varepsilon \Rightarrow \hat{f}(k) \xrightarrow{|k|\to\infty} 0$

Ορισμός: (i) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για $k \ge 1$ ορίζουμε $\alpha_k = \alpha_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$

Παρατήρηση: Για $k=0$ είναι $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos 0\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$
↳ $\alpha_0 = 2\hat{f}(0)$

(ii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για $k \ge 1$ ορίζουμε $b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

Παρατήρηση: $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos(-kx) + i\sin(-kx)\right)dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\left(\cos(kx) - i\sin(kx)\right)dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\alpha_k - \frac{i}{2}b_k = \frac{\alpha_k(f) - i b_k(f)}{2}$

Ομοίως: $\hat{f}(-k) = \dots = \frac{\alpha_k(f) + i b_k(f)}{2}$

$\alpha_0 = 2\hat{f}(0)$

Άρα: $\boxed{\alpha_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)}$, $\boxed{ib_k = \hat{f}(-k) - \hat{f}(k)}$

Παρατηρούμε ότι $S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(-k) e^{-ikx}$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)\left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right) + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(-k)\left(\cos(kx) - i\sin(kx)\right)$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\hat{f}(k) + \hat{f}(-k)\right)\cos(kx) - i\underbrace{\left(-\hat{f}(k) + \hat{f}(k)\right)}_{=-i\, b_k}\sin(kx)$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)$$

Πρόταση: (Βασικές Ιδιότητες συντελεστών Fourier)

(i) <u>Γραμμικότητα</u>: Αν $f, g \in L^1(\Pi)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε:

$$(\widehat{\lambda f + \mu \cdot g})(k) = \lambda \cdot \hat{f}(k) + \mu \cdot \hat{g}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Πράγματι: $(\widehat{\lambda f + \mu g})(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f(x) + \mu g(x)) e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu \cdot g(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \lambda \cdot \hat{f}(k) + \mu \cdot \hat{g}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(ii) Αν $g \in L^1(\Pi)$, τότε $\hat{\bar{g}}(k) = \overline{\hat{g}(-k)}$

Πράγματι: $\hat{\bar{g}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(x) e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(x) \cdot \overline{e^{ikx}} dx$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot e^{ikx} dx}$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-i(-k)\cdot x} dx} = \overline{\hat{g}(-k)}$$

(iii) Αν $f_\alpha(x) = f(x+\alpha)$, τότε $\hat{f}_\alpha(k) = e^{ik\alpha}\hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Πράγματι. $\hat{f}_\alpha(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(x) e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{e^{ik\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{e^{-ikx}}{e^{ik\alpha}} dx$$

$$= \frac{e^{ik\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \cdot e^{-ik(x+\alpha)} dx$$

$$\overset{\substack{y:=x+\alpha \\ x=\pi \Rightarrow y=\pi+\alpha \\ x=-\pi \Rightarrow y=-\pi+\alpha}}{=} \frac{e^{ik\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(y) \cdot e^{-iky} dy$$

2π-περιοδική

$$= \frac{e^{ik\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy = e^{ik\alpha} \cdot \hat{f}(k)$$

(iv) Αν $g_n(x) = g(x)e^{inx}$, τότε: $\hat{g}_n(k) = \hat{g}(k-n)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Πράγματι: $\hat{g}_n(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{inx} \cdot e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot e^{-i(k-n)x} dx = \hat{g}(k-n)$$

(v) <u>Συνέλιξη:</u> $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy$

Τότε: $\widehat{(f*g)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f*g)(x) e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy \right) \cdot e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-ikx} dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iky} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \cdot e^{-ikx} \cdot e^{iky} dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iky} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-ik(x-y)} dx \right) dy$$

$$\overset{\substack{z=x-y \\ x=\pi \Rightarrow z=\pi-y \\ x=-\pi \Rightarrow z=-\pi-y}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iky}\Big(\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z)e^{-ikz}dz\Big)dy$$

$\to$ περιοδικότητα...

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iky}\cdot 2\pi\cdot\hat{f}(k)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iky}\hat{f}(k)dy$$

$$= \hat{f}(k)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iky}dy = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k)$$

Δηλαδή αν $f,g\in L^1(\mathbb{T})$, τότε $\widehat{(f*g)}(k)=\hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Πρόταση: Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $p(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{ikx}$ μιγαδικό τριγ. πολυώνυμο, τότε η $f*p$ είναι τριγ. πολυώνυμο βαθμού $\leq n$.

↳ <u>Απόδειξη:</u> $(f*p)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cdot p(y)dy$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{iky}dy$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{iky}dy$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,e^{-ik(x-y)}dy$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{ikx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-ik(x-y)}dy$$

$$\overset{z=x-y}{=} \sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{ikx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(z)\cdot e^{-ikz}dz$$

$\to$ 2π περιοδική

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\cdot\hat{f}(k) = \sum_{k=-n}^{n}(c_k\cdot\hat{f}(k))\,e^{ikx}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $S_n(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy\Big)e^{ikx}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{k=-n}^{n} e^{-iky}\cdot e^{ikx}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\underbrace{\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}\Big)}_{D_n}dy$$

Έτσι, αν ορίσουμε $D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ έχουμε ότι

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cdot D_n(x-y)\,dy = (D_n * f)(x)$$

Ο D_n λέγεται n-οστός πυρήνας Dirichlet

Θετικά αποτελέσματα για τη σημειακή σύγκλιση της $S(f)$ στην f.

Θεώρημα: Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$, τότε $S_n(f,x) \xrightarrow[\text{ομ.}]{n\to+\infty} f(x)$ (ομοιόμορφα)

Ειδικότερα $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \lim_{n\to+\infty} S_n(f,x)$

Λήμμα: Αν $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ τριγ. σειρά, $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$, τ.ω: $\|f - S_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Τότε $\forall k \in \mathbb{Z}$ $c_k = \hat{f}(k)$ (δηλαδή $S_n(x) = S_n(f,x)$)

↳ Απόδειξη: Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Αν $n \geq |k|$, το $\hat{S}_n(k) = c_k$

Γράφουμε $\hat{f}(k) = (f-\hat{S}_n)(k) + \hat{S}_n(k) = (f-\hat{S}_n)(x) + c_k$, $\forall n \geq |k|$

Επίσης: $|(f-\hat{S}_n)(k)| \leq \|f - S_n\|_1 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, δηλαδή $(f-\hat{S}_n)(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Όμως $\hat{f}(k) = (f-\hat{S}_n)(k) + c_k \xrightarrow{n\to\infty} 0 + c_k = c_k \Longrightarrow \hat{f}(k) = c_k$

↳ Απόδειξη Θεωρήματος: Θεωρούμε την τριγ. σειρά Fourier της f: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$

Ορίζουμε $g_k(x) = \hat{f}(k) e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε $|g_k(x)| = |\hat{f}(k)| \cdot \underbrace{|e^{ikx}|}_{=1}$
$= |\hat{f}(k)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow M_k := \|g_k\|_\infty = \sup\{|g_k(x)| : x \in \mathbb{T}\} = |\hat{f}(k)|$$

Άρα, από υπόθεση, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$

και από Κριτήριο Weierstrass η $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g \in C(\mathbb{T})$ (αφού g_k συνεχείς, $\forall k \in \mathbb{Z}$)

Άρα: $\|g - S_n(f)\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ άρα $\|g - S_n(f)\|_1 < \|g - S_n(f)\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Longrightarrow \|g - S_n(f)\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$S_n(f)$$

Άρα, από προηγούμενο Λήμμα: $\hat{g}(k) = \underset{\uparrow}{\hat{f}(k)}$ $(S_n(f) = S_n(g))$

Όμως $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\xRightarrow{\text{προηγούμενο μάθημα}}$ $f \equiv g$

Οπότε: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \xrightarrow[\text{ομ.}]{n \to +\infty} f$