Διάλεξη 26

5/5/23

τελευταία διάλεξη ύλης, οι άλλες είναι ασκήσεις ☺

$$\begin{tikzcd}
V \ni v \arrow[r, "1_V"] \arrow[d] & v \in \underset{B}{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \underset{B}{V} \ni f(v) \arrow[r, "1_V"] \arrow[d] & V \ni f(v) \arrow[d] \\
\mathbb{R}^n \ni [v]_{B'} \arrow[r, "{(1_V,B',B)}"] \arrow[rrr, bend right, "{(f,B',B)}"'] & [v]_B \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "{(f,B,B)}"'] & \mathbb{R}^n \ni [f(v)]_B \arrow[r, "{(1_V,B,B')}"] & \mathbb{R}^n \ni [f(v)]_{B'}
\end{tikzcd}$$

- $[f(v)]_B = \underset{n\times n}{(f,B,B)} \cdot [v]_B$

$[f(v)]_B$: διάνυσμα στήλη των συντετ. του $f(v)$

$[v]_B$: διάνυσμα στήλη των συντ. του v.

$$(f,B',B') = \overset{Q^{-1}}{\underset{n\times n}{(1_V,B,B')}}\ \underset{n\times n}{(f,B,B)}\ \overset{Q}{\underset{n\times n}{(1_V,B',B)}}$$

$\Downarrow$

Αλλαγή βάσης σε γραμμική συνάρτηση $f: V \to V$, αντιστοιχεί σε όμοιους πίνακες.

↳ Αφού $A \sim B \Leftrightarrow \exists \underset{n\times n}{Q}$ αντιστρέψιμος ώστε: $A = Q^{-1}BQ$.

όμως

$$\det(f) = \det(f,B,B)$$
$$\| $$
$$\det(Q(f,B',B')Q^{-1})$$

$\boxed{\text{όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα}}$

$(\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) \Rightarrow$

$\det(Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1})\det(A)\det(Q)\ )$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

⇝ Δείξτε: $\det(QAQ^{-1}) = \det(A)$

↳ Το να γράψω $QAQ^{-1} = \underbrace{QQ^{-1}}_{I_n}A = A$

Λάθος!

↳ Δεν ισχύει πάντα ότι $AB = BA$!

Εδώ όμως έχουμε πολλ/μό στο $\mathbb{R}$!

Άρα $\det Q \cdot \det A \cdot \det Q^{-1} =$

$\det Q \cdot \det Q^{-1} \det A =$

$\det(Q\cdot Q^{-1}) \det A = \cancel{\det(I_n)}^{\,1} \det(A)$ ✓.

⇝ $\underset{n\times n}{tr(f)} = tr\underset{(a_{ij})}{(A)}$ Θυμάμαι: $tr(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\boxed{tr(AB) = t(BA)}$

↳ $tr(QAQ^{-1}) = tr(AQ^{-1}Q) = tr(A)$

Αν A, B όμοιοι τότε $\exists$ γρ. f: $(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A$, $(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = B$. 5.5.23

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{Q} \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Όμοιοι πίνακες αντιστοιχούν σε πίνακες γραμ. απεικονίσεων οι οποίες εκφράζονται ως προς διαφορετικές βάσεις.

- $\mathcal{B}$: κανονική βάση $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{B}'$ η βάση $\underbrace{\{Qe_1, Qe_2, \dots, Qe_n\}}_{\text{στήλες του } Q}$

Q αντιστρέψιμος
$r(Q) = \dim Im(Q) = n$
άρα οι στήλες του είναι γρ. ανεξάρτητες
Άρα βάση του $\mathbb{R}^n$

Τώρα θα δείξουμε ότι η ομοιότητα πινάκων είναι σχέση ισοδυναμίας:

Πράγματι: • $\underline{A \sim A}$: $A = QAQ^{-1}$: $Q = I_n$

• $\underline{A \sim B \Rightarrow B \sim A}$: $A = Q^{-1}BQ \Rightarrow B = QAQ^{-1}$

• $\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim \Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim \Gamma$: $A \sim B \Rightarrow A = Q^{-1}BQ$, $B \sim \Gamma \Rightarrow B = P^{-1}\Gamma P$ $\Rightarrow A = Q^{-1}P^{-1}\Gamma PQ = (PQ)^{-1}\Gamma(PQ)$ ✓

το γινόμενο 2 αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος.

SOS

Η ομοιότητα είναι διαφορετική από την ισοδυναμία πινάκων! SOS

Η ισοδυναμία ορίζεται για $n \times m$ πίνακες

$$A = PBQ$$

Η ομοιότητα ορίζεται μόνο για $n \times n$ πίνακες : $A = P^{-1}BP$

Για τους $\underline{n \times n}$ πίνακες : όμοιοι πίνακες είναι ισοδύναμοι
αλλά
ισοδύναμοι δεν είναι κατ' ανάγκη όμοιοι.

⤳ **Γενικό γραμμικό σύστημα**: $\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b}$ ⊛

↳ $\boxed{b = 0}$: ομογενές σύστημα, Λύσεις: $\ker A$

↳ $\boxed{b \neq 0}$. το σύστημα μπορεί να μην έχει λύση

$\xrightarrow{\text{πίσω}}$ η συνέχεια ...

Το σύστημα έχει λύση αν $b \in \mathrm{Im}A$. 5.5.23

↳ $\mathrm{Im}A$: ο χώρος στηλών (που παράγεται από αυτές)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\underbrace{x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Μπορεί δηλαδή να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών το $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$;

↳ δλδ $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}$ $\Big\} \Rightarrow$ Αυτό μας δίνει ένα

κριτήριο ύπαρξης λύσεων με βάση το rank

Το σύστημα (*) έχει λύση
$$\iff$$
$$\underline{r(A)} = r(A|b)$$

διάσταση του χώρου στηλών

Έχω τον χώρο στηλών του A. Αν $b \in$ (χώρο στηλών) : $r(A) = r(A|b)$

Αν $b \notin$ —"— : $1 + r(A) = r(A|b)$

Με απαλοιφή Gauss:

$r(A) =$ # μη-μηδενικών γραμμών

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & & & & & & b_1 \\ \vdots & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{array}\right)$$

⇓

$r(A) = r(A^t) \Rightarrow$ # μη-μηδενικών στηλών

αν $b_n = 0$: το rank του επαυξ. ίδιο

αν $b_n \neq 0$ αδύνατο ⇒ το rank του επαυξημένου αυξήθηκε

5.5.2023

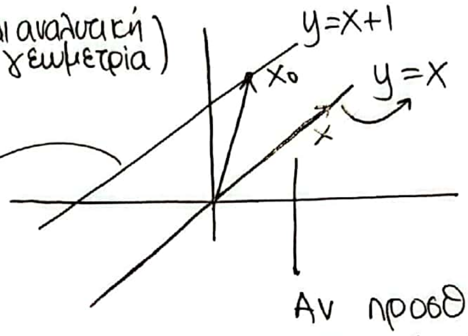
→ Αν το σύστημα έχει λύση, μπορούμε να μετρήσουμε πόσες:

Αν X_0 είναι μια λύση του $AX=b$, όλες οι λύσεις είναι $X_0+\operatorname{Ker}A$

Δηλαδή όλα τα δυνατά αθροίσματα X_0+X, $X\in \operatorname{Ker}A$.

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ • $y = x+1$ ⤳ (θυμάμαι αναλυτική γεωμετρία)

$$\underbrace{(1\ \ -1)}_{A}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 1$$



οι λύσεις του ομογενούς. $(1\ -1)\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=0$

δεν είναι υπόχωρος ($0\notin$)

Αν προσθέσω στην X_0 λύση την X, θα βρω μια που θα ανήκει!

• $m = \dim \operatorname{Ker}A + \underset{(r(A))}{\dim \operatorname{Im}A}$

$0 \leq r(A) \leq n$

⤳ $r(A)=0 \Rightarrow A$ μηδενικός $\Rightarrow$ $Ax=b$ δεν έχει λύση, εκτός αν $b=0$.

⤳ $r(A)=n \Rightarrow \underline{\underline{\text{επί}}} \Rightarrow Ax=b$ έχει λύσεις $\forall b\in \mathbb{R}^n$

$\dim \operatorname{Ker}(A) = m - r(A)$

$m-n \leq \dim \operatorname{Ker}(A) \leq m$

Σύστημα <u>n εξισώσεων</u> με <u>m αγνώστους</u>

Αν $\boxed{m>n}$ δεν μπορεί να έχει μηδενική λύση

Μπορεί να είναι αδύνατο, αλλά αν έχει λύση δεν θα είναι μοναδική.

Αν $\boxed{n=m}$: Το σύστημα έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow r(A)=n$

$\boxed{n>m}$: Πολύ πιθανό να είναι αδύνατο, γιατί $\operatorname{Im}A = r(A) \leq m < n$ και η γραμμική συνάρτηση πιθανό να μην είναι επί

ΤΕΛΟΣ ΥΛΗΣ