Διάλεξη ㉕ 3.5.2023

- $A_{n\times m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, L_A
  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Υπάρχουν πίνακες $\underset{n\times n}{P}, \underset{m\times m}{Q}$ αντιστρέψιμοι ώστε $PAQ = \underset{n\times m}{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}$ ~ $r = \dim \mathrm{Im} L_A$

- $\underset{n\times m}{A}, \underset{n\times m}{B}$ ισοδύναμοι αν και μόνο αν $\exists$ αντιστρέψιμοι $\underset{n\times n}{P}, \underset{m\times m}{Q}$ έτσι ώστε:

$$APQ = B$$

$\dim(\mathrm{Im} L_A) = r(A)$: rank του πίνακα.

- $A \sim B$ σχέση ισοδυναμίας (προηγούμενο μάθημα)
- $A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Βασικό Θεώρημα Γραμμικής Άλγεβρας : $\boxed{r(A) = r(A^t)}$

$$\underset{n\times m}{PAQ} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{m-r} \end{array}\right)}_{m} \begin{matrix} \}n \\ \}n-r \end{matrix}$$

$$(PAQ)^t = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{n-r} \end{array}\right)}_{n} \}m$$

Δεν είναι ίδιοι!

$$\| $$

$\underset{m\times m}{Q^t}\,\underset{m\times n}{A^t}\,\underset{n\times n}{P^t}$ και P^t, Q^t αντιστρέψιμοι

θυμάμαι...

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
$(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n$
$(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I_n \Rightarrow$
$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

<u>Τι συνέπεια έχει αυτό το θεώρημα;</u> Γνωρίζουμε: $\mathrm{Im} L_A = \left\{\begin{array}{l}\text{χώροι που παρά-} \\ \text{γεται από τις} \\ \text{στήλες}\end{array}\right\}$

και επίσης ο $\left\{\begin{array}{l}\text{χώρος που παράγεται} \\ \text{από τις γραμμές}\end{array}\right\} = \mathrm{Im} R_A$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{R_A} \mathbb{R}^m$
$(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n) \cdot A$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ή}} A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t$

έχουν ίδια διάσταση!
$\dim(\mathrm{Im} L_A) = r(A)$ ⟩⟩→ ίσα από το θεώρημα!
$\dim(\mathrm{Im} R_A) = r(A^t)$

~ Ένας πίνακας <u>nxn</u> έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές; (ΝΑΙ!)

$r(A) = r$
$\quad \|$
$r(A^t) = r$

SOS!

προσοχή: → τετραγωνικός!

πχ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

έχει γ.α. στήλες αλλά όχι γραμμές!

$r(AB)$ → τι σχέση έχει με $r(A)$, $r(B)$; 3.5.2023

$$\boxed{\begin{aligned} r(AB) &\leq r(A) \\ &\leq r(B) \end{aligned}}$$

πχ) $r(I_2)=2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{I_2 O_2} \Rightarrow r(I_2 O_2)=0<2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_B"'] \arrow[rr, bend left, "L_{AB}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "L_A"'] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Το rank μετράει πόσες γραμ. ανεξ. στήλες ή γραμμές έχεις!

$$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \to \underbrace{\underset{m\times n}{B}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{n\times 1}}_{m\times 1}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix} \to \overbrace{\underset{k\times m}{A}\overset{m\times 1}{\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}}}^{k\times 1}$$

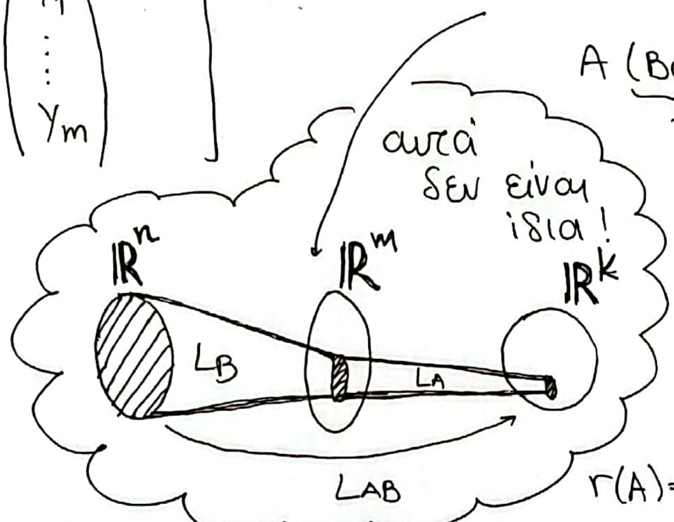
A $k\times m$
B $m\times n$
AB

$\mathrm{Im}L_A \supseteq \mathrm{Im}L_{AB}$

$x \in \mathrm{Im}L_{AB}$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}^4$

$$AB\,a = \underset{\mathrm{Im}L_A}{\underset{\shortparallel}{x}}$$

$$A\underbrace{(Ba)}_{\beta} = x$$



⇓

$r(A) \geq r(AB)$

γιατί:

$r(A) = \dim \mathrm{Im}L_A \geq$
$\dim \mathrm{Im}L_B = r(B)$

Πως θα δείξω το ίδιο για το B; ⇝ ότι $r(B) \geq r(AB)$

- <u>1ος τρόπος</u>: $r(AB) = r((AB)^t) = r(B^tA^t) \leq r(B^t) = r(B)$
- <u>2ος τρόπος</u>: $L_A\big|_{\mathrm{Im}L_B}$

περιορισμός της L_A στον υπόχωρο $\mathrm{Im}L_B$

<u>Βήμα ①</u>: $\mathrm{Im}L_A\big|_{\mathrm{Im}L_B} = \mathrm{Im}L_{AB}$ (σχήμα)

∘∘∘

(Δεν προλαβαίνω να το αντιγράψω, πρέπει να υπάρχει στο βιβλίο, αλλιώς 43:20 λεπτά από το 1ο μέρος στο Δήλος ♥)

3.5.23

$\boxed{\begin{matrix} A\ n\times m \\ B\ m\times k \end{matrix}}$

→ i) $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

→ ii) Αν $\exists B'$: $BB' = I_m$, τότε $r(AB) = r(A)$

→ iii) Αν $\exists A'$ ώστε $A'A = I_m$, τότε $r(AB) = r(B)$

Το (i) το δείξαμε.

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ r(AB) \le r(A) \\ \cdot\ r(AB) \overset{(i)}{\geq} r(ABB') = r(A) \end{array}\right\} \Rightarrow r(AB) = r(A)$$

(iii)
$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ r(AB) \le r(B) \\ \cdot\ r(AB) \overset{(i)}{\geq} r(A'AB) = r(B) \end{array}\right\} \Rightarrow r(AB) = r(B)$$

• A : nxn πίνακας ·

↳ $\boxed{\text{Ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος ανν } r(A) = n}$

$$\left.\right\} A \text{ αντιστρέψιμος} \Leftrightarrow L_A \text{ αντιστρέψιμη} \Leftrightarrow \underbrace{\dim \mathrm{Im} L_A = n}_{L_A \text{ επί.}}$$

$\overset{\shortparallel}{r(A)}$

↳ $V \xrightarrow{f} V$: γραμμική

$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$ ⊛

• f 1-1 $\Leftrightarrow$ f επί (dimV πεπερασμένη) :

f 1-1 $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker} f = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im} f = \dim V \\ \mathrm{Im} f \subset V \end{array}\right\} \mathrm{Im} f = V \Rightarrow f \text{ επί}$$

f επί $\Rightarrow \mathrm{Im} f = V \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim V \overset{⊛}{\Rightarrow} \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\} \Rightarrow$ f 1-1.

$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$ (**) ⇝ προφανώς A, B : nxn

·Έστω E ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών.

$\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$

Το E·A είναι ο πίνακας ↳A στον οποίο εφαρμόζουμε τον Σ.μ.Γ.

$\boxed{\text{Αν } A \text{ αντιστρέψιμος, τότε } A = E_1 \cdots E_n}$

↳ γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

προφανώς, αφού θυμόμαστε: ↗ $(A|I_n) \overset{\Sigma\mu\Gamma}{\cdots} (I_n|A^{-1})$

→ του (**) πίσω απόδειξη.

3.5.2023

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_n B) =$$
$$= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_n)\det(B)$$
$$= \det(E_1 \cdots, E_n)\cdot\det(B)$$
$$= \det(A).\det(B) \quad ▨$$

⤳ Έστω A όχι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det(A)=0$

$$\downarrow$$
$$r(A)<n$$

$r(AB)<r(A)<n$, άρα AB όχι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det(AB)=0$

Άρα $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\det(A)}}\cdot\det(B)=\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\det(AB)}}$

Μια πιο αναλυτική απόδειξη:

Έστω A ένας μη-αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε υπάρχει ακολουθία αντιστρέψιμων πινάκων $m\times m$ όπου:

$$A_n \to A \quad \overset{\text{ορισμός}}{=} \quad A_n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)$$ ⤳ το οποίο σημαίνει

$$a_{ij}^{(n)} \to a_{ij}$$

οι m^2 ακολουθίες συγκλίνουν στο a_{ij}

$\downarrow$

Δεν φαινόταν καλά στο delos ελπίζω να είναι σωστό ☺

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1+\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a+\frac{1}{n} & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος ανν $\alpha\delta-\beta\gamma=0$.

το πρόσθεσα $\Rightarrow$ $\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\delta-\beta\gamma = \underbrace{\alpha\delta-\beta\gamma}_{0} + \frac{1}{n}\delta$

$$\det(AB)=\det(\lim A_n B) = \lim\det(A_n B) = \lim\det(A_n)\det(B)$$
$$= \det(\lim A_n)\det(B) = \det(A)\cdot\det(B).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι πίνακες A,B $n\times n$ θα λέγονται <u>όμοιοι</u> αν υπάρχει αντιστρ/μος Q $n\times n$: $QAQ^{-1}=B$.

Με αυτόν τον ορισμό τελειώνει σχεδόν η ύλη της Γρ.① και πάει στην <u>Γρ.②</u>.

1) Η ομοιότητα είναι σχέση ισοδυναμίας 3.5.2023

2) Πολλές φορές ο πίνακας B είναι απλούστερος του A.

↳ Πολύ συχνά $\exists Q: QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

("διαγωνοποιησιμός" γρ. ②) ←

↓ Άρα μπορώ να υπολογίσω ευκολότερα δυνάμεις.

↳ γιατί: $(QAQ^{-1})^k = QA\cancel{Q^{-1}}\cancel{Q}A\cancel{Q^{-1}}\ldots\cancel{Q}AQ^{-1} = QA^kQ^{-1}$

↳ κομμάτι της γρ. ②

3) Η ορίζουσα όμοιων πινάκων είναι ίδια:

$$\det(QAQ^{-1}) = \det(Q)\cdot\det A\cdot\det(Q^{-1}) = \det A.$$

$$1 = \det I_n = \det(QQ^{-1}) = \det(Q)\cdot\det(Q^{-1})$$

$$\det(Q^{-1}) = \frac{1}{\det(Q)}$$