$f: V \to W$ γραμμική

$\quad B \quad B'$

(f, B, B'). | Διαλέγω νέες βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ αντίστοιχα, και έχω $(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$

τι σχέση έχουν;

$$v = \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{1_V} \underset{B}{V} \xrightarrow{f} \underset{B'}{W} \xrightarrow{1_W} \underset{\mathcal{B}'}{W}$$

$1_W \circ f \circ 1_V = f$

$\dim V = n$
$\dim W = m$

$$\boxed{(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (1_W \circ f \circ 1_V, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \underbrace{(1_W, B', \mathcal{B}')}_{\substack{m \times m \\ Q \\ \text{αντιστρέψιμος}}} \cdot \underbrace{(f, B, B')}_{m \times n} \cdot \underbrace{(1_V, \mathcal{B}, B)}_{\substack{n \times n \\ P \\ \text{αντιστρέψιμος}}}}$$

$[\cdot]_{\mathcal{B}}\ \mathbb{R}^n \xrightarrow{(1_V, \mathcal{B}, B)} [\cdot]_B\ \mathbb{R}^n \xrightarrow{(f, B, B')} [\cdot]_{B'}\ \mathbb{R}^m \xrightarrow{(1_W, B', \mathcal{B}')} [\cdot]_{\mathcal{B}'}\ \mathbb{R}^m$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

A, A' m, n

αν υπάρχουν P $m \times m$ αντιστρέψιμος
Q $n \times n$ —‖—

Αν $PAQ = A'$, τότε οι A, A' θα λέγονται **ισοδύναμοι** (Σχέση ισοδυναμίας) ✓

$f: V \to W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Υπάρχει μια επιλογή βάσεων B στον V και B' στον W έτσι ώστε:

$$(f, B, B') = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Big\} \; m \text{ γραμμές}$$

n στήλες

$r = \dim \operatorname{Im} f$

r γραμμές, $n-r$ στήλες

$m-r$ γραμμές, r στήλες

$n-r$ γραμμές, $m-r$ στήλες

~ SOS θεώρημα!

Διαδικασία που πρέπει να ξέρω

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σελ 2.

$f: V \to W$ 28.4.2023

· Βήμα ① : υπολογισμός του Kerf (λύνω ομογενές σύστημα)

βάση Kerf : $\{v_1, \dots, v_{\boxed{n-r}}\}$ $(\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f)$, $\dim V = n$, $\dim \mathrm{Im} f = r$

· Βήμα ② : Συμπληρώνουμε τα $\{v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_r\}$ βάση του V.

· Βήμα ③ : Τα $\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_r)\}$: βάση του Imf

· Βήμα ④ : Συμπληρώνουμε τα $\{f(w_1), \dots, f(w_r), t_1, \dots, t_{m-r}\}$ σε βάση του W.

$$\rightsquigarrow \left(f, \overset{B}{\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}}, \overset{B'}{\{f(w_1), \dots, f(w_r), t_1, \dots, t_{m-r}\}}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ξεκινάμε με τα στοιχεία της βάσης της αφετηρίας:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 \longrightarrow f(w_1) = 1 \cdot f(w_1) + 0 f(w_2) + \dots + \\ w_2 \longrightarrow f(w_2) = 0 \cdot f(w_2) + 1 f(w_2) + \dots \\ \vdots \\ w_r \longrightarrow f(w_r) = \dots \end{array}\right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Δίνεται πίνακας $\underset{m\times n}{A}$. Να βρεθούν πίνακες $\underset{m\times m}{P}$, $\underset{n\times n}{Q}$ ώστε $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\underset{m\times n}{A} \,\longrightarrow\, \underset{m\times n}{A} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}} \mathbb{R}^n$$

. Γνωρίζω πως θα βρω βάσεις ώστε ο

$$(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f, e, E) = A$$

$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}^n$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

$E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}^m$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$

$$\rightsquigarrow \underbrace{(1_{\mathbb{R}^m}, E, B')}_{P} \cdot (f, e, E) \cdot \underbrace{(1_{\mathbb{R}^n}, B, e)}_{Q} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (f, B, B')$$

P ↳ δυσκολότερο να βρεθεί (δεν μπορώ να γράψω την E ως προς B')

Q ↳ εύκολο να βρεθεί (γράφω τη B ως προς την e)

Θα το υπολογίσουμε: $(1_{\mathbb{R}^m}, B', E) = P^{-1} \rightsquigarrow \boxed{(1_{\mathbb{R}^m}, B', E)^{-1} = P}$

→ παράδειγμα Σελ. ③

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28.4.23

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = A \quad \Bigg| \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\underset{3\times 4}{A} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Βήμα ①: Βρίσκω τον $\ker f_A$: $AX = 0$ (Με Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 - x_4 \\ x_2 &= 4x_3 - x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dim \ker = 2} \longrightarrow \text{γ.α.} \Rightarrow \text{βάση του Ker.}$$

βάση του Ker:

Βήμα ②:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{του } \mathbb{R}^4]{\text{την συμπληρώνω σε βάση}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \text{βάζω 0 κάτω από τη διαγώνιο.}$$

Λογαριάζω τα $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Η εικόνα είναι ο χώρος που παράγουν οι στήλες

και $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ βάση της εικόνας

αυτό τον χώρο θα τον συμπληρώσω σε βάση του $\mathbb{R}^3$

Τα κάνω γραμμές και → Gauss

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \sim \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}_{\text{παράγουν τον ίδιο χώρο!}} \xrightarrow[\mathbb{R}^3]{\text{βάση}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

βάση του $\mathbb{R}^3$

Συνέχεια σελ. ④

Άρα $\left(f, \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\4\\1\\0\end{pmatrix}\right\}}_{B}, \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{B'}\right) = \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{pmatrix}$, $r=2$

Ζητείται πίνακας P 3×3 και Q 4×4 ώστε $PAQ = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

↳ Αυτοί είναι οι πίνακες αλλαγής βάσης.

$$Q = \left(1_{\mathbb{R}^4}, B, e\right) = \begin{pmatrix}0&1&-1&-3\\1&0&-1&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$P = \left(1_{\mathbb{R}^3}, E, B'\right) = \left(1_{\mathbb{R}^3}, B', E\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

→ λογαριάζω τον αντίστροφο, κάτω:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&-1&1&-2&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)$$

✓ $= I_3$

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix}0&1&-1&-3\\1&0&-1&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$