

Επανάληψη:

$$f: V \rightarrow W$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} : \text{βάση του } V$$

$$B' = \{w_1, \dots, w_m\} : \text{βάση του } W$$

$$(f, B, B')$$

$$(a_{ij}) : f(v_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} w_k$$

$$[f(v)]_{B'} = (f, B, B') \cdot [v]_B$$

Υπάρχει μια συνάρτηση:

$$V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = [v]_B$$

οι συντεταγμένες του v ως προς B βάση

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$$

$$[f(v)]_{B'} = (f, B, B') \cdot [v]_B$$

Η στήλη των συντεταγμένων του v ως προς B

Η στήλη των συντεταγμένων του $f(v)$ ως προς B' .

Μια από τις παραλλαγές αυτού του τύπου είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης:

$$V \xrightarrow{1_V} V$$

$$v \rightarrow 1_V(v) = v$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

βάση του V .

Η 1^η στήλη: $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$

$$(1_V, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

γιατί: $1_V(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

$1_V(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \dots + 0v_n \rightarrow$ 2^η στήλη $(0 \ 1 \ \dots \ 0)$

$$V \xrightarrow{1_V} V$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$$

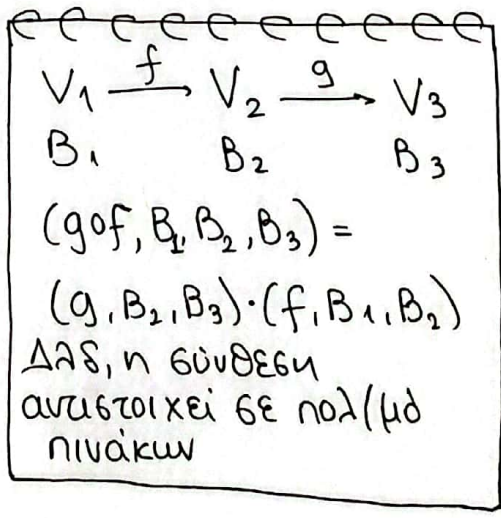
$$(1_V, B, B')$$

$$1_V(v_1) = v_1 = a_{11}v_1' + a_{21}v_2' + \dots + a_{n1}v_n'$$

$$1_V(v_2) = v_2 = a_{12}v_1' + a_{22}v_2' + \dots + a_{n2}v_n'$$

$$[v]_{B'} = (1_V, B, B') \cdot [v]_B$$

ο πίνακας αλλαγής βάσης



Σελ (2)

$$V \xrightarrow{1_V} V \xrightarrow{1_V} V$$

$$B \quad B' \quad B$$

$$(1_V \circ 1_V, B, B) = (1_V, B', B) \cdot (1_V, B, B')$$

$$(1_V, B, B) = \mathbb{I}_n \Rightarrow (1_V, B, B') = (1_V, B', B)^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$[V]_{B'} = (1_V, B, B') \cdot [V]_B \Rightarrow (1_V, B', B)^{-1}$$

$$[V]_B = (1_V, B', B)^{-1} [V]_{B'}$$

Παράδειγμα:

\mathbb{R}^n

$$B = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

$$B' = \{e'_1 = (1, 1, \dots, 1), e'_2 = (0, 1, \dots, 1), \dots, e'_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

οι γραμμές του ταυτοτικού

e_n οι γραμμές του

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

γιατί το B' είναι βάση;

γιατί αποτελείται από n γραμμικά ανεξάρτητα διαν.

γιατί αποτελούν γραμμές άνω τριγωνικού πίνακα.

• $(1_{\mathbb{R}^n}, B', B)$

$$e'_1 = (1, 1, \dots, 1) = 1e_1 + 1e_2 + \dots + 1e_n$$

$$e'_2 = (0, 1, \dots, 1) = 0e_1 + 1e_2 + \dots + 1e_n$$

$$e'_3 = (0, 0, 1, \dots, 1) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + \dots + 1e_n$$

$$\vdots$$

$$e'_n = (0, 0, \dots, 1) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_n$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

ο πίνακας αλλαγής βάσης.

$GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow$ σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων (General Linear)

• $(1_{\mathbb{R}^n}, B, B')$, $e_1 = ?e'_1 + ?e'_2 + \dots +$

μη προφανές και δύσκολο

$(1_{\mathbb{R}^n}, B', B)^{-1}$ αντών τον λογαριασμό ή δη

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right)^{-1}$$

(Ξέρω να λογαριάσω αντιστράφο πίνακα)

• Δίνεται το διάνυσμα με συντεταγμένες $(1, 2, 3)$ ως προς τη βάση $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς την $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 26.4.23

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

• Δίνεται το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ως προς τη βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

~ Έστω (x, y, z) οι ζητούμενες συντεταγμένες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

~ Διαφορετικά,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

είναι πιο χρονόβρο! Το κάνω έτσι μόνο αν τον έχω υπολογίσει από πριν.

Παρατήρηση: V, W , B : βάση του V , B' : βάση του W

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$, A $m \times n$ πίνακας.

• Τότε $\exists!$ $f: V \rightarrow W$ γραμμική με $(f, B, B') = A = (a_{ij})$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ορίζουμε f με $f(v_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} w_k$ • •

Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια βάση και ορίσουμε $f(v_i)$ για κάθε στοιχείο της βάσης ορίζεται γραμμική $V \xrightarrow{f} W$

• Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1] $f: V \rightarrow W$ αντιστρέψιμη

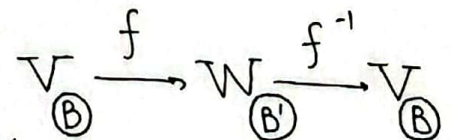
2] \forall βάσεις B, B' των V, W αντίστοιχα, ο πίνακας (f, B, B') είναι αντιστρέψιμος.

3] \exists βάσεις B, B' των V, W αντίστοιχα, ώστε ο πίνακας (f, B, B') να είναι αντιστρέψιμος

• 1] \Rightarrow 2]: Έστω $f: V \rightarrow W$ αντιστρέψιμη. \Rightarrow

$$\exists f^{-1}: W \rightarrow V \quad f \circ f^{-1} = 1_W$$

$$f^{-1} \circ f = 1_V$$



B, B' οποιαδήποτε βάσεις των V, W

$\#B = \#B' = n$

$$(1_V, B, B) = (f^{-1} \circ f, B, B) = (f^{-1}, B', B) \cdot (f, B, B')$$

\parallel
 \mathbb{I}_n

$n \times n$ $n \times n$
 \downarrow \downarrow
 A^{-1} A

(αντίστοιχα και για $(f \circ f^{-1}, B', B')$)

• 2] => 3]: Προφανές

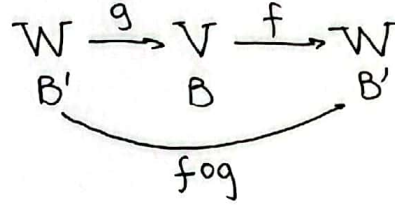
• 3] => 1]: $f: V \rightarrow W$

$(f, B, B') = A \rightsquigarrow$ αναγκαστικά ο A είναι $n \times n$

A^{-1} αντιστοιχεί μια $g: W \rightarrow V$ ώστε $(g, B', B) = A^{-1}$.

και τώρα πρέπει να τσεκάρω ότι $g = f^{-1}$:

$(f \circ g, B', B) = (f, B, B') \cdot (g, B', B) = I_n$



↓ Άρα:

$$\left. \begin{array}{l} (f \circ g)(v_1) = v_1 \\ (f \circ g)(v_2) = v_2 \\ \vdots \\ (f \circ g)(v_n) = v_n \end{array} \right\} \Rightarrow (f \circ g) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f \circ g) v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \square$$

° ° ° Άρα ότι θέλω να απαντήσω για τη γραμμική απεικόνιση τα φέρει ο πίνακας της!

• $f: V \rightarrow W$
 $B \quad B'$ Να βρεθεί ο πίνακας της f .

→ Υπολογίζουμε $(f, B, B') = A$

→ $\text{Ker } f = \left\{ \sum_{i=1}^{\dim V = n} \lambda_i v_i : A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Λύνω ομογενές σύστημα

• Ομοίως για την εικόνα: $\text{Im } f = \left\{ \sum_{i=1}^{\dim W = m} \lambda_i w_i : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \text{Im } A \right\}$

Χώρος στηλών του A

Υπάρχουν τόσες βάσεις του \mathbb{R}^n όσοι και οι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες.

↳ γιατί; B βάση του \mathbb{R}^n

$(1_{\mathbb{R}^n}, B, \{e_1, \dots, e_n\})$: αντιστρέψιμος

• Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα αποτελούν βάση του \mathbb{R}^n , και το $(1_{\mathbb{R}^n}, B, \{e_1, \dots, e_n\}) = A$