Επανάληψη:

$f: V \to W$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$: βάση του V

$B' = \{w_1, \dots, w_m\}$: βάση του W

(f, B, B') = (a_{ij}) : $f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k$

$[f(v)]_{B'} = (f, B, B') \cdot [v]_B$

Υπάρχει μια συνάρτηση:

$V \to \mathbb{R}^n$

$v \to \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = [v]_B$ — οι συντεταγμένες του v ως προς B βάση $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$

$\boxed{[f(v)]_{B'}} = (f, B, B') \cdot \boxed{[v]_B}$ — Η στήλη των συντεταγμένων του v ως προς B

Η στήλη των συντεταγμένων του $f(v)$ ως προς B'.

Μια από τις παραλλαγές αυτού του τύπου είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης:

$V \xrightarrow{1_V} V$ $v \longrightarrow 1_V(v) = v$	$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ βάση του V.

$(1_V, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ γιατί: $1_V(v_1) = v_1 = \overbrace{1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n}^{\text{Η } 1^{η} \text{ στήλη}: (1\ 0 \dots 0)}$

$1_V(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \dots + 0v_n$ — $2^{η}$ στήλη $(0\ 1 \dots 0)$

$\vdots$

$V \xrightarrow{1_V} V$	$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$

$(1_V, B, B')$

$1_V(v_1) = v_1 = a_{11}v_1' + a_{21}v_2' + \dots + a_{n1}v_n'$

$1_V(v_2) = v_2 = a_{12}v_1' + a_{22}v_2' + \dots + a_{n2}v_n'$

$\vdots$

$[v]_{B'} = \boxed{(1_V, B, B')} \cdot [v]_B$

ο πίνακας αλλαγής βάσης

$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$

$B_1 \quad B_2 \quad B_3$

$(g \circ f, B_1, B_2, B_3) =$

$(g, B_2, B_3) \cdot (f, B_1, B_2)$

Δηλ., η σύνθεση αντιστοιχεί σε πολ/μό πινάκων

Σελ (2)

$$\underset{B}{V} \xrightarrow{1_V} \underset{B'}{V} \xrightarrow{1_V} \underset{B}{V}$$

$$(1_V \circ 1_V, B, B) = (1_V, B', B) \cdot (1_V, B, B')$$

$$(1_V, B, B) = \mathbb{I}_n \Rightarrow (1_V, B, B') = (1_V, B', B)^{-1}$$

$$[v]_{B'} = (1_V, B, B') \cdot [v]_B \xRightarrow{\cdot (1_V, B', B)^{-1}}$$

$$[v]_B = (1_V, B', B)^{-1} [v]_{B'}.$$

$\boxed{\text{Παράδειγμα:}}$

$\boxed{\mathbb{R}^n}$ $B = \{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ ↪ οι γραμμές του ταυτοτικού

$B' = \{e_1' = (1,1,\dots,1), e_2' = (0,1,\dots,1), \dots, e_n' = (0,0,\dots,0,1)\}$ ↪ οι γραμμές του $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_n' = e_n$

↪ γιατί το B' είναι βάση;
γιατί αποτελείται από n γραμμικά ανεξάρτητα διαν.
↪ γιατί αποτελούν γραμμές άνω τριγωνικού πίνακα.

- $(1_{\mathbb{R}^n}, B', B)$

$e_1' \overset{1_{\mathbb{R}^n}}{=} (1,1,\dots,1) = 1e_1 + 1e_2 + \dots + 1e_n$

$e_2' = (0,1,\dots,1) = 0e_1 + 1e_2 + \dots + 1e_n$

$e_3' = (0,0,1,\dots,1) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + \dots + 1e_n$

$\vdots$

$e_n' = (0,0,\dots,n) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

↓ ο πίνακας αλλαγής βάσης.

$\boxed{GL(n,\mathbb{R}) \rightarrow \text{σύνολο των αντιστρεψίμων } n\times n \text{ πινάκων (General Linear)}}$

- $(1_{\mathbb{R}^n}, B, B')$, $e_1 = ?e_1' + ?e_2' + \dots +$ ↪ μη προφανές και δύσκολο

$= (1_{\mathbb{R}^n}, B', B)^{-1}$ ⟶ αυτόν τον λογάριασα ήδη

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

⟶ (ξέρω να λογαριάζω αντίστροφο πίνακα)

• Δίνεται το διάνυσμα με συντεταγμένες (1,2,3) ως προς τη βάση $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς την $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 26.4.23

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$$

• Δίνεται το διάνυσμα (1,2,3) ως προς τη βάση $\{e_1,e_2,e_3\}$. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς $\{e_1',e_2',e_3'\}$.

⇝ Έστω (x,y,z) οι ζητούμενες συντεταγμένες

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

⇝ Διαφορετικά, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

είναι πιο χρονοβόρο! Το κάνω έτσι μόνο αν τον έχω υπολογίσει από πριν.

Παρατήρηση: V, W, B: βάση του V, B': βάση του W

$B=\{v_1,\dots,v_n\}$, $B'=\{w_1,\dots,w_m\}$, A $m\times n$ πίνακας.

• Τότε $\exists!\, f: V\to W$ γραμμική με $(f,B,B')=A=(a_{ij})$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ορίζουμε f με $f(v_i)=\sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k$ ∘ Ο

Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια βάση και ορίσουμε $f(v_i)$ για κάθε στοιχείο της βάσης ορίζεται γραμμική $V \xrightarrow[f]{} W$

● Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1] $f: V\to W$ αντιστρέψιμη

2] $\forall$ βάσεις B, B' των V, W αντίστοιχα, ο πίνακας (f,B,B') είναι αντιστρέψιμος.

3] $\exists$ βάσεις B, B' των V, W αντίστοιχα, ώστε ο πίνακας (f,B,B') να είναι αντιστρέψιμος

• 1] ⇒ 2]: Έστω $f: V\to W$ αντιστρέψιμη. ⇒

$\exists f^{-1}: W\to V$ $\quad f\circ f^{-1}=1_W$

$f^{-1}\circ f=1_V$

$$\underset{(B)}{V}\xrightarrow{f}\underset{(B')}{W}\xrightarrow{f^{-1}}\underset{(B)}{V}$$

B, B' οποιεσδήποτε βάσεις των V, W

$\#B=\#B'=n$

$$\underset{\mathbb{I}_n}{\overset{\|}{(1_V,B,B)}}=(f^{-1}\circ f,B,B)=\underset{A^{-1}}{\underset{\downarrow}{\overset{n\times n}{(f^{-1},B',B)}}}\cdot\underset{A}{\underset{\downarrow}{\overset{n\times n}{(f,B,B')}}}$$

(αντίστοιχα και για $(f\circ f^{-1},B',B')$)

- $2] \Rightarrow 3]$: Προφανές

- $3] \Rightarrow 1]$: $f: V \to W$

$(f, B, B') = A$ ⇝ αναγκαστικά ο A είναι $n \times n$

A^{-1} → αντιστοιχεί μια $g: W \to V$ ώστε $(g, B', B) = A^{-1}$.

και τώρα πρέπει να τσεκάρω ότι $g = f^{-1}$:

$$(f \circ g, B', B) = \underset{A}{(f, B, B')} \cdot \underset{A^{-1}}{(g, B', B)} = I_n$$

$$\begin{tikzcd} \underset{B'}{W} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \underset{B}{V} \arrow[r, "f"] & \underset{B'}{W} \end{tikzcd}$$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} (f \circ g)(v_1) = v_1 \\ (f \circ g)(v_2) = v_2 \\ \vdots \\ (f \circ g)(v_n) = v_n \end{array}\right\} \Rightarrow (f \circ g)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f \circ g) v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad ▨$$

Άρα ότι θέλω να απαντήσω για τη γραμμική απεικόνιση τα φέρει ο πίνακας της!

- $\underset{B}{f: V} \to \underset{B'}{W}$. Να βρεθεί ο πυρήνας της f.

→ Υπολογίζουμε $(f, B, B') = A$

→ $\operatorname{Ker} f = \left\{ \sum_{i=1}^{\dim V = n} \lambda_i v_i : A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ⟶ Λύνω ομογενές σύστημα

- Ομοίως για την εικόνα: $\operatorname{Im} f = \left\{ \sum_{i=1}^{\dim W = m} \lambda_i w_i : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \underbrace{\operatorname{Im} A}_{\text{χώρος στηλών του } A} \right\}$

Υπάρχουν τόσες βάσεις του $\mathbb{R}^n$ όσοι και οι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες.

↳ γιατί; B βάση του $\mathbb{R}^n$

$(1_{\mathbb{R}^n}, B, \{e_1, \dots, e_n\})$: αντιστρέψιμος

- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, και το $(1_{\mathbb{R}^n}, B, \{e_1, \dots, e_n\}) = A$