V δ.χ. $A < V$ υπόχωρος

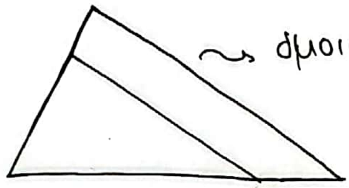
V/A δ.χ. Σύνολο Πηλίκο

Αν ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος $\dim V/A = \dim V - \dim A$

↳ Πως κατασκευάστηκε αυτός ο χώρος;

Περιέχει ως στοιχεία κλάσεις $v + A = \{$ σύνολο όλων των $w \in V$ που $w \sim v \}$

Έχουμε ορίσει μια σχέση ισοδυναμίας όπου: $v \sim v' \iff v' - v \in A$

[ ⤳ όμοια τρίγωνα ως σχέση ισοδυναμίας. αν δουλεύω σε ένα, δουλεύω σε όλα γιατί είναι ισοδύναμα]

- $(v+A)+(v'+A) = v+v'+A$
- $\lambda(v+A) = \lambda v + A$

$\boxed{\pi : V \longrightarrow V/A \quad \text{γραμμική}, \quad v \longrightarrow v+A}$

$\pi(v+v') = (v+v') + A$
$= \pi(v) + \pi(v')$
$= (v+A)+(v'+A)$

ίσα εξ' ορισμού

$\pi(\lambda v) = \lambda v + A$
$= \lambda \pi(v) = \lambda(v+A)$

⤳ $\boxed{\text{Η } \pi \text{ είναι επιμορφισμός}}$

↳ προφανές, η τυχαία κλάση $v + A = \pi(v)$

⤳ $\boxed{\operatorname{Ker}\pi = \{v \in V : \pi(v) = 0\} = A}$

↳ $\pi(v) = 0 \Rightarrow v + A = 0 + A \Rightarrow v - 0 \in A \Rightarrow v \in A$

[Ο π ονομάζεται φυσικός επιμορφισμός]

$f : V \to W$ γραμμική, εν γένει δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί.

Στόχος: Να τροποποιήσουμε την f ώστε να γίνει 1-1 και επί

Συνέχεια → Σελ. 2

Θα φτιάξουμε μια νέα που θα της μοιάζει 7.4.2023

Για το επι: $f': V \to \operatorname{Im} f \subset W$ είναι επι

Για το 1-1: Η f είναι 1-1 αν $\ker f = \{0\}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im} f \\ V/\ker f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{ορίζουμε την } \bar{f}: V/\ker f \to \operatorname{Im} f \text{ όπου } v+\ker f \to f(v)}$

• Ένα από τα προβλήματα: Η $\bar{f}$ πρέπει να είναι καλά ορισμένη.

$v+\ker f \xrightarrow{\bar{f}} f(v)$

$v'+\ker f \xrightarrow{\bar{f}} f(v')$

$\overset{?}{=}$ → πράγματι, αφού $v+\ker f = v'+\ker f \Rightarrow v' = v+a$, $a \in \ker f$

$\bar{f}(v'+\ker f) = f(v') = f(v+A) = f(v)+f(a) = f(v)$

$f: V/A \to W$, $A \neq \ker f$ } Δεν θα ήταν μια καλά ορισμένη συνάρτηση.

Παράδειγμα: Έστω f ($V \to W$) 1-1 και γραμμική, και έστω ότι έχουμε τον χώρο V/A. Αν προσπαθήσω να ορίσω $\bar{f}: V/A \to W$, $v+A \to f(v)$

Αν $A \neq \{0\}$ δεν είναι καλά ορισμένη!

→ γιατί; Γιατί το $\bar{f}(v+A) = f(v)$

$0 \neq a \in A$, $v' = v+a$ $\Rightarrow \bar{f}(v'+A) = f(v')$

Άρα η $\bar{f}$ (πάνω) είναι καλά ορισμένη και μένει να δείξω ότι είναι γραμμική:

• $\bar{f}((v+A)+(v'+A)) = \bar{f}((v+v')+A) = f(v+v')$

$= \bar{f}(v+A)+\bar{f}(v'+A)$

$= f(v)+f(v')$ ✓

ίσα, αφού η f είναι γραμμική

ομοίως,

• $\bar{f}(\lambda(v+A)) = \bar{f}(\lambda v+A) = f(\lambda v)$

$= \lambda f(v) = \lambda \bar{f}(v+A)$ ✓

Άρα $\bar{f}$ γραμμική ✓

7.4.2023

Η $\bar{f}$ είναι επί: Πράγματι, Αν $w \in \mathrm{Im}f \Rightarrow w = f(v) \Rightarrow$

$f(v) = \bar{f}(v + \ker f) = w$ ✓

- $\boxed{\bar{f} \circ \pi = f}$ [το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό] (το κρατάω για αργότερα)

πράγματι, $v \in V \Rightarrow f(v) = \bar{f}(v + \ker f) = \bar{f}(\pi(v)) = \bar{f} \circ \pi(v)$.

$\left(\begin{array}{l} \pi : V \to V/\ker f \\ \quad v \mapsto v + \ker f \end{array} \right)$

- $\bar{f}$ 1-1 (ανν $\ker \bar{f} = \{0\}$)

$\ker \bar{f} = \{v + \ker f : \bar{f}(v + \ker f) = f(v) = 0\}$

$= \{v + \ker f : v \in \ker f\} = 0 + \ker f = 0_{V/\ker f}$.

- $\boxed{\bar{f} \text{ είναι ισομορφισμός}}$

$V/\ker f \overset{\bar{f}}{\cong} \mathrm{Im}f \implies \dim \mathrm{Im}f = \dim V/\ker f = \dim V - \dim \ker f$

ισόμορφος

Άρα $\boxed{\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im}f}$! ⊛

!Σημαντικό!

Συνέπειες του τύπου

∘ A, B πεπερασμένα σύνολα, $\#A = \#B$ (όχι για άπειρα σύνολα!)

$f : A \to B$ είναι 1-1 ανν είναι επί.

ανάλογα

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim V = \dim W < \infty \\ f : V \to W \text{ γραμμική} \\ f \text{ 1-1} \Leftrightarrow f \text{ επί} \end{array}}$$

γιατί;

"⇒" • f 1-1 $\Rightarrow \ker f = 0 \Rightarrow \dim \ker f = 0$

Από ⊛ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \dim V = \dim \mathrm{Im}f \\ \mathrm{Im}f \subset V \end{array}\right\}$ $\mathrm{Im}f = V$ $\Downarrow$ f επί.

"⇐" • f επί $\Rightarrow \mathrm{Im}f = \dim W = \dim V \overset{⊛}{\Rightarrow}$

$\dim \ker f = 0 \Rightarrow$

$\ker f = \{0\} \Rightarrow f$ 1-1

7.4.2023

Αν όμως $\dim V = \dim W = \infty$ το παραπάνω δεν ισχύει.

πχ) $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$ $\quad 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ γ.α.

~ $I : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$$x^n \longrightarrow \int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ 1-1 αλλά όχι επί

~ $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$f \longrightarrow f'$ $\quad$ επί, όχι 1-1

$\ker D = \{c \in \mathbb{R}\}$.

Δεν μας απασχολούν εδώ οι άπειρες διαστάσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

!

1] $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \longrightarrow (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4+x_1)^t$

Ν.δ.ο. είναι γραμμική και βρες μια βάση για $\mathrm{Im} f$ και $\ker f$.

ΛΥΣΗ

Ένας τρόπος να δείχνουμε τέτοιου είδους προβλήματα είναι να δείχνουμε ότι αυτή η συνάρτηση εκφράζεται μέσω ενός πίνακα

Πράγματι, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_4 \\ x_4+x_1 \end{pmatrix}$

Αν το έκανα με τον ορισμό θα έκανα περισσότερη δουλειά.

Άρα η συνάρτηση είναι γραμμική $\quad$ $A(x+y) = Ax + Ay$, $\lambda A x = A \lambda x$

από θεωρία:

- $\mathrm{Im} f$: ο χώρος στηλών

χώρος στηλών A = χώρος γραμμών A^t

πως τον βρίσκω: Απαλοιφή Gauss! ως προς τις στήλες (του A^t)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \left[\dim \mathrm{Im} f = 3 \Rightarrow \dim \ker f = 1\right]$$

βάση

Kerf Σελ (5)

$Kerf$: Λύσε τον $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ 7.4.23

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$x_4 \in \mathbb{R}$

$\dim Kerf = 1 \Leftarrow$ μια βάση του πυρήνα