Διάλεξη 18

31.3.23

$A = \langle (1,2,0), (2,3,1) \rangle$
$B = \langle (0,0,1), (3,0,1) \rangle$ $\Big\} \Rightarrow$ $\dim(A+B) = ;$ $\dim A = ;$ $\dim B = ;$ $\dim(A \cap B) = ;$

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα $(1,2,0)$ και $(2,3,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(2,3,1) = (0,0,0) \Rightarrow$

- $\underline{\lambda_2 = 0}$ (από την τελευταία συντεταγμένη)
- $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0}$ ⇝ μοναδικές λύσεις!

από τον ορισμό.

+Παράγουν τον χώρο A εξ' ορισμού $\Rightarrow$ $\boxed{\dim A = 2}$
ομοίως $\boxed{\dim B = 2}$

Ξέρουμε ότι $\dim(A+B) = 2$ ή 3 $\big(\underset{2}{A, B} < A+B < \underset{3}{\mathbb{R}^3}\big)$

⇝ Για να βρούμε το $A \cap B$ πρέπει να υπολογίσουμε $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ ώστε
$\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(2,3,1) = \mu_1(0,0,1) + \mu_2(3,0,1)$ (*)

Αυτό δεν χρειάζεται αν το ζητούμενο είναι το $\dim(A \cap B)$, γιατί ο χώρος $A+B = \langle (1,2,0), (2,3,1), (0,0,1), (3,0,1) \rangle$.

↳ αυτά είναι γ.ε. γιατί είναι 4 διανύσματα σε χώρο διάστασης 2 ή 3!

Με απαλοιφή Gauss θα βρω τη σχέση της γ. εξάρτησης και μια βάση του A+B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

} ο χώρος A+B είναι ο χώρος γραμμών του πίνακα + Γνωρίζω ότι οι γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

Gauss (-2, -3)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

dim χώρου γραμμών είναι 3, έχω 3 γραμμές.

Άρα $\boxed{\dim(A+B) = 3}$ $\Rightarrow$ $\dim A + \dim B - \dim(A \cap B) = \dim(A+B)$

Άρα $\boxed{\dim(A \cap B) = 1}$

Για κάτι πιο δύσκολο, θα μπορούσαμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε το $A \cap B$: 31.3.23

$(*) \rightsquigarrow$
$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\mu_2 - 0\mu_1 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 0\mu_1 - 0\mu_2 &= 0 \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\mu_1 - 1\mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{+}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{-2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & +1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & +1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 + 9\mu_2 &= 0 \\ \lambda_2 - 6\mu_2 &= 0 \\ \mu_1 - 5\mu_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\dim(A \cap B) = 1}$$

Επίσης :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Άρα ο χώρος έχει

$$\underbrace{-9\mu_2}_{\lambda_1}(1,2,0) + 6\mu_2(2,3,1)$$

$$= \mu_2 \underbrace{(-7,-15,6)}_{\text{βάση της τομής}}$$

Άσκηση : γ.ανεξ/τα
$$\begin{cases} p(x) = 1 + x + x^2 \\ q(x) = x - x^3 \end{cases} \quad \mathbb{R}_{\leq 3}[x].$$

Να δειχθεί ότι είναι γ.α.
Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ με $p, q \in B$.

ΛΥΣΗ !

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \langle \overset{\text{βάση}}{(1, x, x^2, x^3)} \rangle$, $\dim \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = 4$

↳ γ.ανεξάρτητα

άλλος τρόπος: $f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0$

→ υπάρχουν 2 τρόποι να το δείξω,

$\rightsquigarrow \lambda p(x) + \mu q(x) = 0 \Rightarrow \lambda + (\lambda+\mu)x + \lambda x^2 - \mu x^3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

$\rightsquigarrow$ Αλλιώς "κρατάω τις συντεταγμένες":

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \longrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$V, \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{βάση}} \Rightarrow$ το τυχαίο διάνυσμα v:

$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

31.3.2023

$$\left.\begin{array}{l} p(x) \longrightarrow (1,1,1,0) \\ q(x) \longrightarrow (0,1,0,-1) \end{array}\right\} \text{γ.α.}$$

$$\begin{array}{l} x^2 \to \\ x^3 \to \end{array}\boxed{\begin{array}{l}(0,0,1,0)\\(0,0,0,1)\end{array}}$$

Συμπληρώνω αυτά στα πάνω για να βρω 4 γ.α. διανύσματα στον $\mathbb{R}^4$

__βάση__: $\{p, q, x^2, x^3\}$

$\boxed{\text{Μεθοδολογία}}$: Δίνεται υπόχωρος ενός π.π. χώρου V

Ο V είναι ουσιαστικά ο $\mathbb{R}^4$. Μας ζητάνε να τον συμπληρώσουμε σε βάση

__Εύκολο__: $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$

$\vdots$

$v_s = (a_{s1}, \dots, a_{sn})$

Έχω $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$: (Gauss) λογαριάζουμε ένα κλιμακωτό πίνακα με γραμμές τα $v_1, \dots, v_s$:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ τον συμπληρώνουμε σε κλιμακωτό με n-διανύσματα

πχ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{βάση του } \mathbb{R}^4]{\text{συμπληρώστε σε}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0 \ 1 \ 0 \ 0} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \boxed{0 \ 0 \ 0 \ 1} \end{pmatrix}$

__Άσκηση__: V, $B = \{w_1, \dots, w_\mu\}$, $\langle B \rangle = V$, $A = \{v_1, \dots, v_p\}$ ένα γ.α. σύνολο του V.

Τότε $B_0 = \{v_1, \dots, v_p\} \cup \{\text{υποσύνολο του } B \text{ με } (\mu - p) \text{ στοιχεία}\}$.

Αν το B είναι βάση και το B_0 είναι βάση.

__ΑΠΟΔΕΙΞΗ__

Επαγωγή στο p:

Αν $p = 1$ $A = \{v_1\}$ γ.α. $v_1 \neq 0$

$\langle B \rangle = V$

$0 \neq v_1 = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_\mu w_\mu$

↳ τουλάχιστον ένα, το $\lambda_{i_0} \neq 0 \Rightarrow w_{i_0} = \vec{v}_1 - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i_0}}^{\mu} \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{i_0}} w_\nu$

Άρα $\langle \underset{w}{\overset{\shortparallel}{v_1}}, w_1, \dots, w_{i_0-1}, w_{i_0+1}, \dots, w_\mu \rangle = \langle w_1, \dots, w_\mu \rangle = V$.

Συνέχεια Σελ. 4 →

31.3.2023

$W \subset V$, $v \in V = \sum \mu_i w_i =$

$$\sum_{i \neq i_0} \mu_i w_i + \underbrace{\mu_{i_0} w_{i_0}}_{(v_1 - \sum_{i \neq i_0} * \, w_v)}$$

τέλος για $p=1$.

Για $p>1$:

$v_1, \dots, v_p$ γ.α. υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $p-1$

$v_1, \dots, v_{p-1}$ γ.α.

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: $\langle v_1, \dots, v_{p-1}, v_1, \dots, w_{\mu-(p-1)} \rangle = V$

$$V \ni v_p = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + a w_1 + \dots + a_{\mu-(p-1)} w_{\mu-(p-1)}$$

ένα τουλάχιστον $a_i \neq 0$

γιατί αν όλα ήταν 0, τα $v_1, \dots, v_p$ θα ήταν γ.ε.

$a_1 \neq 0$

$$w_1 = \frac{1}{a_1} v_p - \left(\frac{\lambda_1}{a_1} v_1 + \dots + \frac{\lambda_{p-1}}{a_1} v_{v-1} \right) - \sum_{v \geq 2} \frac{a_v}{a_1} w_v$$

$\left(\langle v_1, \dots, v_{p-1}, w_1, \dots, w_{\mu-(p-1)} \rangle = \langle v_1, \dots, v_p, w_2, \dots, w_{\mu-(p-1)} \rangle . \right)$ ∎