V: διανυσματικός χώρος πεπερασμένα παραγόμενος.

$B_0 = \{v_1, \dots, v_s\}$ γ.α.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια βάση του V η οποία περιέχει το B_0.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{S \supseteq B_0, S \subset V, S \text{ γ.α.}\}$

Αν το V παράγεται από

μ το πλήθος διανύσματα, τότε $\# S \leq \mu$

Άρα οι πληθάριθμοι των στοιχείων του A είναι φραγμένοι, οπότε θεωρώ ένα S_1 με $\# S_1 \geqslant S$ $\forall S \in A$. (υπάρχουν περισσότερα από ένα).

Έστω $v \in V$. Θα δείξω ότι το $v \in \langle S_1 \rangle$, $S_1 = \{\underbrace{v_1, \dots, v_s}_{B_0}, \underbrace{v_{s+1}, \dots, v_{s+r}}\}$

$A \not\ni \{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+r}, v\}$ $\boxed{\text{γ.ε}}$ → γιατί το S_1 έχει μέγιστο πλήθος στοιχείων στο A

Πράγματι $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s+r} v_{s+r} + \lambda v = 0$ → αν $\lambda \neq 0 \Rightarrow v = \sum -\lambda_i/\lambda_1 \, v_i$, $v \in \langle S_1 \rangle$

γενικά για αυτά: $(\lambda_1, \dots, \lambda_{s+r}, \lambda) \neq (0, \dots, 0)$

αν $\lambda = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_{s+r}$ γ.ε

Άρα το τυχαίο $v \in V$ τότε $v \in \langle S_1 \rangle$, άρα $\left.\begin{matrix} S_1 \text{ γ.α.} \\ \langle S_1 \rangle = V \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ S_1 βάση.

Συμπέρασμα: Όταν έχω γ.α. διανύσματα μπορώ να τα συμπληρώσω σε μια βάση του χώρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν ισχύουν δύο από τα παρακάτω ισχύει και το τρίτο:

1. $\dim V = n$
2. $v_1, \dots, v_n$ γ.α.
3. $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$

↳ Αν ισχύουν τα 2, 3, τότε $\{v_1, \dots, v_s\}$ είναι βάση του V συνεπώς η διάσταση του V είναι ο πληθάριθμος της βάσης.

↳ Αν ισχύουν τα 1 και 2, τότε $v_1, \dots, v_n$ γ.α. και υπάρχει βάση B του V με $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq B$, όμως $\# B = \dim V = n$ άρα $B = \{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ άρα $1, 2 \Rightarrow 3$

29.3.2023

↳ Αν ισχύουν τα ① και ③, τότε:

Αν $v_1, \dots, v_n$ δεν είναι γ.α. τότε ένα από αυτά ανήκει στον χώρο που παράγουν τα υπόλοιπα. Έστω ότι $v_n \in \underbrace{\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle}_{\# = n-1} = V$. άτοπο

διότι θα έπρεπε $\# B = n \leq n-1$

↳ Αναλυτικότερα:

Έστω B βάση, αυτή έχει n το πλήθος ⟶ $(\# B = \dim V = n)$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Αν μπορώ να παράγω τον χώρο με $n-1$ $\Rightarrow$ $n \leq n-1$ άτοπο!

Παράδειγμα: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Τα διανύσματα $(1,1,2), (0,5,6), (0,0,7)$ αποτελούν βάση.

Παρατηρώ ότι είναι γ.α. (αποτελούν γραμμές κλιμακωτού πίνακα)
Είναι 3 το πλήθος όσο και η διάσταση, άρα είναι βάση του χώρου.

$W < V$ (υπόχωρος) $\qquad$ (V πεπερασμένα παραγόμενος)

Τότε: 1) $\dim W \leq \dim V$

2) $\dim W = \dim V$ αν και μόνο αν $W = V$

→ V πεπερασμένα παραγόμενος, άρα και ο W είναι πεπερασμένα παραγόμ/νος.
Έστω B_W μια βάση του W. αυτή αποτελείται από διανύσματα του W τα οποία είναι και διανύσματα του V, άρα την επεκτείνω σε βάση του V

$B_W = \{w_1, \dots, w_s\}$ γ.α. διανύσματα ⇝ παραμένουν γ.α. του V

↓ προσθέτω

$$\dim W = s \leq s + r = \dim V \Longleftarrow \underbrace{\{w_1, \dots, w_s, w_r\}}_{\text{βάση του } V}$$

→ Αν $W = V$ τότε $\dim W = \dim V$.

Αν $W < V$ και $\dim V = \dim W \Rightarrow r = 0$, δηλαδή τα $\{w_1, \dots, w_s\}$ αποτελούν βάση του V

$W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle = V \Rightarrow W = V$.

τα $w_1, \dots, w_s$ παράγουν τον W αφού είναι βάση του, ομοίως και τον V

29.3.2023

Γενικά: αν $\dim V = \dim W$ (χωρίς να έχω $V<W$ ή $W<V$)

τότε ο V και ο W δεν είναι ίσοι γενικά!

πχ) $\mathbb{R}^2$ $\left.\begin{array}{l} \langle(1,0)\rangle \xrightarrow{\dim} 1 \\ \langle(0,1)\rangle \xrightarrow{\dim} 1 \end{array}\right\}$ Αλλά $\langle(1,0)\rangle \neq \langle(0,1)\rangle$!

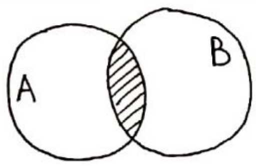
V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένα παραγόμενοι με πεπερασμένες διαστάσεις.

- $V \cap W$ δ.χ.
- $V \cup W$ όχι δ.χ. (εκτός αν $V \subset W$ ή $W \subset V$)

$\downarrow$

$V + W = \{ w \in W, v \in V, v+w \}$

$$\boxed{\dim(W+V) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)}$$



$\sim$ $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

$\boxed{\dim(V \oplus W) = \dim W + \dim V}$ γιατί στο ευθύ άθροισμα $V \cap W = \{0\}$ + $\dim\{0\} = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$\{w_1, \ldots, w_k\}$: βάση του $V \cap W$ $\begin{smallmatrix} \subset V \\ \subset W \end{smallmatrix}$

$\{w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_s\}$ βάση του V $\quad \dim V = k+s$

$\{w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_r\}$ βάση του W $\quad \dim W = k+r$

θα δείξω ότι $\{w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_r\}$ βάση του $V+W$

Τότε $\underset{\dim V}{\underset{\shortparallel}{(k+s)}} + \underset{\dim W}{\underset{\shortparallel}{(k+v)}} - \underset{\dim(V \cap W)}{\underset{\shortparallel}{k}} = r+s+k = \dim(V+W)$

$\downarrow$

θα δείξω ότι παράγουν τον χώρο $V+W$.

Έστω $v+w \in V+W$

$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s$

$w = \lambda_1' w_1 + \ldots + \lambda_k' w_k + \omega_1 u_1 + \ldots + \omega_r u_r$

$v+w = (\lambda_1 + \lambda_1')w_1 + \ldots + (\lambda_k + \lambda_k')w_k + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s + \omega_1 u_1 + \ldots + \omega_r u_r$

$v+w \in \langle w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_r \rangle$ $\longrightarrow$

Μένει να δείξω ότι είναι γ.α.: 29.3.23

Έστω $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_s v_s + \omega_1 u_1 + \dots + \omega_r u_r = 0$ ⊛

$$\underbrace{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_s v_2}_{V} = -(\underbrace{\omega_1 v_1 + \dots + \omega_r u_r}_{W})$$

Συμπέρασμα: $-(\omega_1 u_1 + \dots + \omega_r u_r) \in V \cap W = \lambda_1' w_1 + \dots + \lambda_k' w_k$

Άρα $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_s v_2 = \lambda_1' w_1 + \dots + \lambda_k' w_k \Rightarrow$

$(\lambda_1 - \lambda_1') w_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k') w_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_s v_s = 0$

Όμως $\{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots v_s\}$ είναι βάση του V άρα γ.α.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_1' = \dots = \lambda_k - \lambda_k' = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ ⊛ $\Rightarrow \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \omega_1 u_1 + \dots + \omega_r u_r = 0$

βάση W άρα γ.α.

$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = v_1 = \dots = v_r = 0.$

$$W < V \Rightarrow \boxed{\dim(V/W) = \dim V - \dim W}$$

V, V/W έχει ως στοιχεία τα $v + W = \{v + w : w \in W\}$

κλάσεις ισοδυναμίας $v \sim v' \Leftrightarrow v = v' + w$

Αν V πεπερασμένα παραγόμενος $(V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle)$ τότε και ο V/W είναι:

$v + W \in \langle v_1 + W, \dots, v_s + W \rangle$

Άρα έχει μια βάση $\xi_1, \dots, \xi_m$ $\quad \xi_i = v_i + W$

Θεωρούμε μια βάση $w_1, \dots, w_n$ του W. Θα δείξουμε ότι $v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_n$ είναι μια βάση του V.

$$\dim V = \underset{\dim V/W}{\overset{\parallel}{s}} + \underset{\dim W}{\overset{\parallel}{n}}$$

πρέπει ν.δ.ο. :   29.3.23

1] Παράγουν τον χώρο

$v \in V$ το $v + W \in V/W$

$v + W = \lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_s \xi_s$ γιατί $\xi_1, \ldots, \xi_s$ είναι βάση του V/W

$v + W = \lambda_1(v_1 + W) + \ldots + \lambda_s(v_s + W)$

$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s + w$, $w \in W$

$w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n$

Άρα $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n$

2] Είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s + \underbrace{\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n}_{\in W} = 0$ (*)

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s + W = 0 + W$

$\lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_s \xi_s = 0_{V/W} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_s = \ldots = 0$, γιατί $\xi_1, \ldots, \xi_s$ γ.α. (στοιχεία της βάσης)

(*) $\Rightarrow \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n = 0$

$w_1, \ldots, w_n$ γ.α. $\Rightarrow \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$.

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$: $V = \langle (1,1,1,1), (0,1,-1,0) \rangle$

$W = \langle (0,0,1,1), (0,0,0,3) \rangle$

$\dim V \cap W = ?$ ⟶ Ο Δύσκολος τρόπος είναι ο υπολογισμός $V \cap W$: ψάχνουμε $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ώστε

$\lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(0,1,-1,0) = \mu_1(0,0,1,1) + \mu_2(0,0,0,3)$.

Λύνουμε το σύστημα, καταγράφουμε τις λύσεις

$\lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(0,1,-1,0)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ λύση του.

Αλλιώς:

$\dim(V+W) = 4$ είναι $4 = \dim \mathbb{R}^4$ διανύσματα γ.α. (ως γραμμές κλιμακωτού πίνακα)

$\dim V = 2$

$\dim W = 2$

Άρα $\dim V \cap W = 0$