Διανυσματικός Χώρος V

B : βάση $\quad B \subset V$

- B : γραμμικά ανεξάρτητο
- B : παράγει το V : $\langle B \rangle = V$

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$

$\mathbb{R}^n$. Τα $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} e_1 = (1,0,\dots,0) \\ e_2 = (0,1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ e_n = (0,0,\dots,1) \end{cases}$

↳ $(x_1, \dots, x_n) = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1)$

1] Παράγουν τον χώρο

2] Είναι γ. ανεξάρτητα : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e = (0,\dots,0)$
$\quad\quad \overset{\shortparallel}{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$

- άλλος τρόπος. Τα $e_1, \dots, e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί ο πίνακας που σχηματίζουν ως γραμμές, είναι κλιμακωτός.

$\boxed{\text{Άσκηση}}$: Δίνονται τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ $\begin{Bmatrix} (1,2,3,4,5) = v_1 \\ (1,1,1,1,1) = v_2 \\ (2,3,4,5,6) = v_3 \end{Bmatrix}$

Να βρεθεί μια βάση του $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$:

ΛΥΣΗ (Γενική Μεθοδολογία)

1] Φτιάχνουμε ένα πίνακα με στοιχεία τα δοσμένα διανύσματα.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2] Με σ.μ.γ. φτιάχνω έναν ισοδύναμο άνω κλιμακωτό πίνακα:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \end{matrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γενικά: A, A' : γραμμοϊσοδύναμοι.
Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές του πρώτου είναι ο ίδιος που παράγουν οι γραμμές του δεύτερου.

Συνέχεια σελ 2

Άρα $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, (0,1,2,3,4) \rangle$ 27.3.2023

↳ γραμμικά ανεξάρτητα ως γραμμές άνω κλιμακωτού

Παράδειγμα: Έστω $\mathbb{R}^{2\times 3}$ ο δ. χώρος των 3×4 πινάκων.

Μια βάση $E_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$E_{21}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, E_{22}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, E_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Πράγματι,

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\end{pmatrix} = \sum_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 3}} x_{ij}E_{ij}$$

Άσκηση Να βρεθεί μια βάση του χώρου των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού $\le n$

$V = \{ f : f \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \}$

Το σύνολο $1, x, \dots, x^n$ είναι μια βάση:

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longrightarrow$ το τυχαίο πολυώνυμο είναι γραμμικός συνδιασμός των $1, x, \dots, x^n$

Για να δείξω ότι τα $1, x, x^2, \dots, x^n$ είναι γ.α. :

Έστω ότι $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ | $\underline{a_0} = f(0) = \underline{0}$

$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ | $f'(0) = \underline{a_1 = 0}$.

$f''(0) = 2a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_2 = 0} \xrightarrow{\text{Γενικά.}} f^{i}(0) = i!\,a_i = 0 \Downarrow \boxed{a_i = 0}$

$\mathbb{R}[x]$ τα πολυώνυμα χωρίς περιορισμό στον βαθμό.

↳ Αυτός ο χώρος δεν είναι πεπερασμένα παραγώμενος

$\mathbb{R}_n[x]$: τα πολυώνυμα βαθμού μέχρι n.

$\mathbb{R}_n[x] \subsetneq \mathbb{R}_{n+1}[x] \subsetneq \mathbb{R}_{n+2}[x]$

$V_1 = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A$ διαγώνιος $\}$

$V_2 = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A$ συμμετρικός $\}$

$V_3 = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times3},\ A = (a_{ij}) \mid a_{11} = a_{22} = a_{33} \}$

Να δείξεις ότι V_1, V_2, V_3 είναι υπόχωροι και να βρεις μια βάση για τον καθένα.

27.3.23

ΛΥΣΗ:

• Υπάρχουν $\boxed{2 \text{ τρόποι}}$ να δείξουμε ότι είναι υπόχωροι. Ο ένας είναι να δείξουμε ότι αυτά τα σύνολα είναι κλειστά μέσα στον χώρο των 3x3 πινάκων.

↳ παρατηρούμε ότι τα V_1, V_2, V_3 είναι κλειστά ως προς τις πράξεις υποσύνολα ~~του~~ διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{3\times3}$ πινάκων.

Για το V_2: $A^t = A$ (συμμετρικός), $a_{ij} = a_{ji}$

$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$

$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$

πράξεις κλειστές ✓.

Για το V_3: $A = (a_{ij}),\ a_{11} = a_{22} = a_{33}$

$B = (b_{ij}),\ b_{11} = b_{22} = b_{33}$

$A + B = \Gamma = (\gamma_{ij})$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{11} = a_{11} + b_{11} \\ \gamma_{22} = a_{22} + b_{22} \\ \gamma_{33} = a_{33} + b_{33} \end{array}\right\} \overset{\dots}{\Rightarrow} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33}$$

Το ίδιο για το λ.

↳ Ο δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι οι πίνακες αυτοί ορίζονται ως οι λύσεις κάποιου γραμμικού ομογενούς συστήματος.

• Για τις βάσεις: $V_1 = \left\{ \underset{E_{11}}{\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}, \underset{E_{22}}{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}, \underset{E_{33}}{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \lambda_3 E_{33}$$

και, τα E_{11}, E_{22}, E_{33} είναι γ.α.

→ ορισμός

→ υποσύνολο της κανονικής βάσης E_{ij} του χώρου των 3x3 πινάκων.

$V_2 = \{ E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32} \}$

$$\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21} \qquad \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}$$

Παράγουν τον χώρο των συμμετρικών πινάκων

→

27.3.2023

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}(E_{12}+E_{21}) + a_{13}(E_{13}+E_{31}) + a_{22}E_{22} + a_{33}E_{33} + a_{23}(E_{23}+E_{32}).$$

→ συμ/κος πίνακας

↳ παράγουν όντως τον χώρο.

↳ Για να δείξω ότι είναι γ.α. υποθέτω ότι ένας τέτοιος γραμμ/κός συνδιασμός είναι 0, καταλήγω στον μηδενικό και αυτός μου λέει ότι όλα είναι 0.

Για τον V_3: $V_3 = \{E_{ij} : i \neq j\} \cup \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{11}+E_{22}+E_{33}} \right\}$

Μου εξασφαλίζει ότι τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω V ένας δ. χώρος που παράγεται από $u_1, \dots, u_\mu$, και έστω $v_1, \dots, v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V. Τότε $n \leq \mu$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (με επαγωγή στο n)

Έστω $n=1$, άρα στο V υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα v_1.

[Ένα διάνυσμα v_1 από μόνο του είναι γ.α. $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$] $\Rightarrow V \neq \{0\} \Rightarrow \mu \geq 1$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n-1$.

(Δηλαδή κάθε χώρος που παράγεται από μ διανύσματα και έχει $n-1$ γ.α. διανύσματα σε αυτόν τότε $n-1 \leq \mu$)

Έστω ότι έχουμε n γ.α. σε χώρο που παράγεται από μ: τα $\langle u_1, \dots, u_\mu \rangle = V$ και $v_1, \dots, v_n$ γ.α.

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1,\mu-1}u_{\mu-1} + a_{1,\mu}u_\mu \\ v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2,\mu-1}u_{\mu-1} + a_{2,\mu}u_\mu \\ &\vdots \\ v_n &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{n,\mu-1}u_{\mu-1} + a_{n,\mu}u_\mu \end{aligned}$$

① $a_{1\mu} = a_{2\mu} = \dots = a_{n,\mu} = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \in \langle u_1, \dots, u_{\mu-1} \rangle \Leftrightarrow v_1, \dots, v_{n-1}$ γ.α. $\overset{\text{επαγωγή}}{\Longleftrightarrow} n-1 \leq \mu-1 \Rightarrow n \leq \mu$.

② Υπάρχει ένα $a_{1,\mu}, \dots, a_{1\mu} \neq 0$, Χ.Β.Τ.Γ. $a_{n,\mu} \neq 0$.

Σελ ⑤

Με απαλοιφή Gauss πολ/με την τελευταία στήλη με $-\frac{a_{1,\mu}}{a_{n,\mu}}v_n$ και θα την προσθέσω στην πρώτη 27.3.2023

και ορίζω $w_1 = v_1 - \frac{a_{1,\mu}}{a_{n\mu}} v_n = a_{11}' u_1 + a_{12}' u_2 + \dots + a_{1,\mu}' u_{\mu-1} + 0 u_\mu$

$w_2 = v_2 - \frac{a_{2,\mu}}{a_{n\mu}} v_n$

$\vdots$

$w_{n-1} = v_{n-1} \frac{a_{n-1,\mu}}{a_{n\mu}} v_u = a_{n-1,1}' u_1 + a_{n-1,2}' u_2 + \dots + a_{n-1,\mu-1}' u_{\mu-1}$

Τα διανύσματα $w_1, \dots, w_{n-1}$ είναι γ.α.

$$0 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1}$$
$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} - \underbrace{\left(\lambda_1 \frac{a_{1\mu}}{a_{n\mu}} + \lambda_2 \frac{a_{2\mu}}{a_{n\mu}} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{a_{n-1\mu}}{a_{n\mu}}\right)}_{\lambda'} v_\mu$$

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ γ.α.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda-1 = \lambda' = 0$

Τα $w_1, \dots, w_{n-1}$ είναι γ.α. και ανήκουν στον χώρο $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$

Άρα, από επαγωγή $n-1 \leq \mu-1 \Rightarrow v \leq \mu$. ▨

$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$: Έστω χώρος που παράγεται από μ διανύσματα. Τότε μ+1 το πλήθος οποιαδήποτε διανύσματα είναι γ.ε.

Αν ήταν γ.α. θα έπρεπε $\mu+1 \leq \mu$.

Όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Έστω $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ γ.α. και παράγουν τον χώρο

$B_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$ —— " ——

$$\left.\begin{array}{l} u_1, \dots, u_n \text{ παράγουν τον χώρο}, u_1, \dots, u_m \text{ γ.α.} \Rightarrow m \leq n \\ u_1, \dots, u_m \text{ —— " ——}, u_1, \dots, u_n \text{ γ.α.} \Rightarrow n \leq m \end{array}\right\} \boxed{n=m}$$

27.3.2023

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$ **Διάσταση** είναι το πλήθος μιας βάσης.

$\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}_{\leq n}[x] = n+1$, $\dim \mathbb{R}^{n\times m} = n\cdot m$

$\downarrow$ $B = e_1, \dots, e_n$, $\downarrow$ $\{1, x, \dots, x^n\}$, $\downarrow$ $\{E_{ij}\}$

$\boxed{\dim \mathbb{R}[x] = \infty}$ $\rightsquigarrow$ Σε αυτό το μάθημα με ενδιαφέρουν χώροι πεπερασμένης διάστασης.

Κάθε διανυσματικός χώρος έχει διάσταση.

(Η πλήρης απόδειξη χρησιμοποιεί το λήμμα του Zorn)

Κάθε πεπερασμένα παραγόμενος μη-μηδενικός διανυσματικός χώρος έχει βάση

$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Είναι τα $v_1, \dots, v_n$ γ.α.?

→ <u>ΝΑΙ</u> : τα $v_1, \dots, v_n$ <u>είναι βάση</u>

→ <u>ΟΧΙ</u> : τότε <u>ένα από αυτά</u> (v_{i_0}) γράφεται ως γρ. συνδυασμός των υπολοίπων.

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \overset{?}{=} \langle v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, v_n \rangle$

$w \in$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} (\lambda_i + \lambda_{i_0}\mu_i) v_i \Leftarrow \begin{cases} w = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i v_n + \lambda_{i_0} v_{i_0} \\ v_{i_0} = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \mu_i v_i \end{cases}$$

$\Downarrow$

$w \in \langle v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_n \rangle$

$V = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle \longrightarrow$ Είναι γ.α.

→ <u>Ναι</u> : βάση

→ <u>Όχι</u> : κάνω την ίδια διαδικασία και κάποια στιγμή θα τελειώσει, γιατί θα βρω (αφαιρώντας) γ.α. διανύσματα