V διανυσματικός χώρος.

$v_1, \dots, v_\nu \in V$

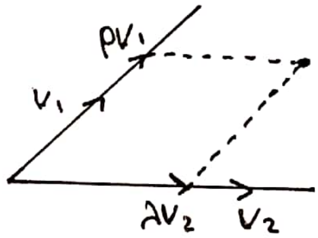
Ο χώρος των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, \dots, v_n$:

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu v_\nu \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ο χώρος που παράγουν τα $v_1, \dots, v_n$. Το $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ είναι υπόχωρος του V :

- $\left.\begin{array}{l} x = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu v_\nu \\ y = \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu v_\nu \end{array}\right\} \Rightarrow x+y = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu + \mu_\nu) v_\nu \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

- $\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\lambda x} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda \cdot \lambda_\nu v_\nu \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$



- Θεωρούμε κάθε διανυσματικό υπόχωρο $A \subset V$ που περιέχει τα $v_1, \dots v_n$. Το σύνολο S των διανυσματικών υπόχωρων που περιέχει τα $v_1, \dots, v_n$ είναι μη-κενό, $V \in S$

$\bigcap_{A \in S} A \rightarrow$ Είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, περιέχει τα $v_1, \dots, v_n$. Είναι ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει τα $v_1, \dots, v_n$ $\bigcap_{A \in S} A \subset A$

Ο στόχος μας είναι νδο:

$\boxed{\bigcap_{A \in S} A = \langle v_1, \dots, v_n \rangle} \rightsquigarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle \in S$

- $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
- $v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \dots + 0v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$\bigcap_{A \in S} A \subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Από την άλλη, $v_1, \dots, v_n \in \bigcap_{A \in S} A$ εξ ορισμού.

$\left.\begin{array}{l} \lambda v_1, \dots, \lambda v_n \in \bigcap_{A \in S} A \\ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu v_\nu \in \bigcap_{A \in S} A \end{array}\right\}$ Άρα $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset \bigcap_{A \in S} A$

- Άρα $\bigcap_{A \in S} A = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Scanned with CamScanner

K ένα υποσύνολο του V

$\langle K \rangle = \sum_{k \in I} \lambda_k \cdot k$, I: πεπερασμένο υποσύνολο του K.

$\langle \emptyset \rangle = \{0\} \longrightarrow$ ο μηδενικός υπόχωρος

Δεν έχει νόημα να ορίσω γραμμικούς συνδιασμούς με στοιχεία από το κενό σύνολο.
Όμως έχει νόημα να θεωρήσω:

$$S = \{A \text{ δ.χ. } \emptyset \subset A \subset V\} \supset \{0\}$$

$$\bigcap_{A \in S} A = \{0\}$$

Παρατήρηση: Το μονοσύνολο $\{0\}$ είναι υπόχωρος του V, είναι κλειστό ως προς τις πράξεις:
$x, y \in \{0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ \lambda x = \lambda \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \checkmark$

! $\emptyset \subset A$: γιατί αν δεν ήταν θα υπήρχε $x \in \emptyset$ τ' $x \notin A$!

$$\left.\begin{array}{l} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = b_1 \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = b_n \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

↳ Το σύστημα $Ax=b$ έχει λύση ανν το $b \in$ < χώρο που παράγουν οι στήλες του πίνακα >

Παράδειγμα

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι αδύνατο!

$A_{n \times m}$. Αυτός ο πίνακας ορίζει μια συνάρτηση $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$F_A: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im} F_A$ = < χώρος που παράγουν οι στήλες του A >.

- Ένας χώρος θα λέγεται **πεπερασμένα παραγόμενος**:

$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $v_1, \dots v_n \in V$

$$\mathbb{R}^n = \langle \underbrace{(1, \dots, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, \dots, 0)}_{e_2}, \dots, \underbrace{(0, \dots, 1)}_{e_n} \rangle$$

$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Scanned with CamScanner

22.3.23

$\mathbb{R}[x]$ = {τα πολυώνυμα με συντελεστές από το $\mathbb{R}$}.

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

↳ deg f = n, αν $a_n \neq 0$ | $f+g$ ✓

↳ βαθμός | λf

$\mathbb{R}[x]$ είναι υπόχωρος του χώρου των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ο δ.χ. $\mathbb{R}[x]$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}[x]$

$\deg(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \leq \max\{\deg v_i\}$

$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

- $\langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle = V$, $\lambda \neq 0$ ⊛
- $\langle v_1, \dots, \lambda v_i + v_j, \dots, v_n \rangle = V$ ⊛⊛
- $\langle v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle = V$ προφανές, η πρόσθεση διαν. είναι αντιμεταθετική

↳ **Πόρισμα**: A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B, τότε ο χώρος που παράγουν οι γραμμές του A, είναι ίδιος με τον χώρο που παράγουν των B.

⊛ Το $\lambda \neq 0$ είναι σημαντικό: $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

$\{e_1, 0e_2, e_3\}$

$\langle e_1, 0e_2, e_3 \rangle = \{(\lambda, 0, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Θέλω νδο $\langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Θα δείξω ότι $\langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle$:

Έστω $v = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} \lambda_\nu v_\nu + \lambda_i \lambda v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow v = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} \lambda_\nu v_n + \frac{\lambda_i}{\lambda} \lambda v_i \in \langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle$

⊛⊛ $v \in \langle v_1, \dots, \lambda v_i + v_j, \dots, v_n \rangle$

$v = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j,i}}^{n} \lambda_\nu v_\nu + \lambda_j(\lambda v_i + v_j) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j,i}} \lambda_\nu v_\nu + (\lambda\lambda_i + \lambda_i) v_i + \lambda_j v_j$

↓ $\subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Σελ. ④ →

Scanned with CamScanner

Αντιστρόφως, 22.3.23

$$\sum_{\mu=1}^{n} \lambda_\mu v_\mu = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq i,j}}^{n} \lambda_\mu v_\mu + (\lambda_i - \lambda\lambda_j)v_i + \lambda_j v_j + \lambda\lambda_j v_i$$

$$= \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq i,j}}^{n} \lambda_\mu v_\mu + \lambda_j (v_j + \lambda v_i) \in \langle v_1, \dots, \lambda v_i + v_j, \dots v_n \rangle$$

Έστω: $v_1 = \langle 1,1,1,1 \rangle$

$v_2 = \langle 0,1,0,1 \rangle$

$v_3 = (0,0,0,1) \in \langle v_1, v_2 \rangle$?

Υπάρχουν x,y ώστε $xv_1 + yv_2 = v_3$?

$(x,x,x,x) + (0,y,0,y) = (0,0,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+y=0 \\ x=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \boxed{\text{αδύνατο}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ανήκει το v_3 στον $(v_1 \dots v_n)$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}$$

έχει το σύστημα λύση;

Να γραφεί το v_3 ως γραμμικός συνδιασμός των $v_1, \dots, v_n$.

Θα λύσω το σύστημα.

Παράδειγμα Σελ. 5 →

Scanned with CamScanner

Να γραφεί το $v=(2,2,3,5)$ ως γραμμικός συνδυασμός των: 22.3.23

$v_1=(1,2,3,4)$

$v_2=(1,0,-1,0)$

$v_3=(0,0,1,1)$

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{GAUSS}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{GAUSS}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right) \overset{GAUSS}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=1$
$y=1$
$z=1$

Scanned with CamScanner