A διανυσματικός χώρος $(A, +, \cdot)$

$A \times A \to A$
$(v, w) \to v+w$
$\mathbb{R} \times A \to A$
$(\lambda, v) \to \lambda v$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΔΙΑΛΕΞΗΣ 12

A, B διανυσματικοί χώροι, $A \cap B$ διαν. χώρος (και υπόχωρος) πάντα
$A \cup B$ εν γένει δεν είναι δ.χ.
(μόνο αν $A \subset B$ ή $B \subset A$)

Θέλουμε να φτιάξουμε κάτι που να μοιάζει με την ένωση των A, B δηλαδή ένα διανυσματικό χώρο που να περιέχει και το A κ' το B.
Ένας τέτοιος δ.χ. πρέπει να περιέχει όλα τα αθροίσματα $a+b$, $a \in A$, $b \in B$.

Παρατήρηση: Η ένωση $A \cup B$ έχει πρόβλημα στην πρόσθεση, ενώ:
$v \in A \cup B \Rightarrow v \in A$ ή $v \in B$
$\lambda v \in A$ ή $\lambda v \in B \Rightarrow \lambda v \in A \cup B$.
Άρα η ένωση είναι κλειστή ως προς τον πολ/μό.

ΟΡΙΣΜΟΣ A, B διαν. υπόχωροι του V.
Ορίζουμε A+B το άθροισμα των δ.χ.: $\boxed{A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\}} \subset V$.

πρέπει νδο:
↳ Ο A+B είναι υπόχωρος του V,
αρκεί νδο είναι κλειστός ως προς τις πράξεις:

Έστω $v \in A+B$.

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ v = a+b,\ a \in A \text{ και } b \in B \\ \bullet\ \lambda v = \underset{A}{\lambda a} + \underset{B}{\lambda b} \Rightarrow \lambda v \in A+B \end{array}\right.$$
$\lambda \in \mathbb{R}$

$v' = a' + b'$
$$v+v' = (a+b) + (a'+b') = \underset{A}{(a+a')} + \underset{B}{(b+b')}$$
$\Rightarrow v+v' \in A+B$

Παρατήρηση: A+B, ο μικρότερος δ.χ. που περιέχει το A και το B.

παράδειγμα Σελ. 2

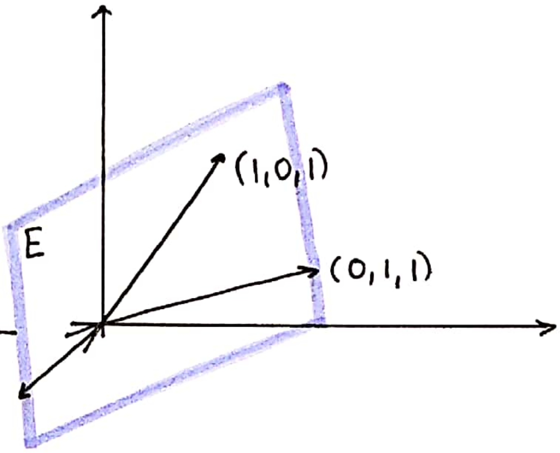
20.3.23

Παράδειγμα: $A = \{\lambda(1,0,1)\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$

$B = \{\mu(0,1,1)\}_{\mu\in\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$

$A+B = \{ v\in\mathbb{R}^3 : v = (\lambda,\mu,\lambda+\mu), \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$

↳ επίπεδο που ορίζεται από τα $(1,0,1)$ και $(0,1,1)$



Αν $A\cap B=\{0\}$, [$\{0\}$: ο μικρότερος υπόχωρος ενός δ.χ.]

↳ τότε το άθροισμα $A+B$ το ονομάζουμε **ευθύ** και το συμβολίζουμε με $A\oplus B$.

Όταν το άθροισμα είναι ευθύ τότε $v=a+b$, $\left.\begin{matrix} a\in A \\ b\in B\end{matrix}\right\}$ είναι μοναδικά.

[Γενικά: Το μονοσήμαντο της γραφής δεν ισχύει.

πχ. $A=\{(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$, $B=\{(0,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\}$, υπόχωροι

$A+B=\mathbb{R}^3$: $(x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$

$= \underbrace{(x_1,x_2,0)}_{\in A}+\underbrace{(0,0,x_3)}_{\in B} = \underbrace{(x_1,0,0)}_{\in A}+\underbrace{(0,x_2,x_3)}_{\in B}$

Το τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γράφεται με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα των A,B

↳ γιατί; $A\cap B = \{(0,x,0) : x\in\mathbb{R}\} \neq \{0\}$]

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι το v γράφεται με 2 διαφορετικούς τρόπους:

$$v = \boxed{a+b = a'+b'} \xRightarrow{+(-a')+(-b)} \underbrace{a-a'}_{\in A} = \underbrace{b'-b}_{\in B}$$

Άρα $a-a' = b'-b \in A\cap B = \{0\}$

Άρα αφού $A\cap B=\{0\}$ και $a-a'=b'-b \Rightarrow$

$a=a'$ και $b'=b$ ⇝ μοναδικότητα ∎

V, A: υπόχωρος $\qquad V/A \to$ διανυσματικός χώρος πηλίκο. $\qquad$ 20.3.2023

"Ότι είναι στο πηλίκο είναι 0"

Αν τώρα είναι 12:00, σε 30 ώρες πόσο θα είναι;

$$12+30=42=3\cdot 12=36+6 \to \text{Άρα } \boxed{6:00}$$

↳ θεωρούμε 2 ακέραιους ισοδύναμους mod 12 αν και μόνο αν $x-y=12\cdot k$ } Αριθμητική όπου το 12 είναι 0.

Στον δ.χ. V θα βάλω μια σχέση ισοδυναμίας: $x\sim y \Leftrightarrow y-x\in A$

1] Θα δ.ο. είναι σχέση ισοδυναμίας

2] Στον χώρο κλάσεων ισοδυναμίας θα ορίσω δομή δ.χ.

1] • $x\sim x$. Πράγματι: $x-x=0\in A$

• $x\sim y \Rightarrow y-x\in A \Rightarrow x-y=-1(x-y)\in A \Rightarrow y\sim x$

• $x\sim y \Rightarrow y-x\in A$

$y\sim z \Rightarrow z-y\in A$

$\oplus \quad z-x\in A \Rightarrow x\sim z$

} Άρα έχω μια <u>σχέση ισοδυναμίας</u>

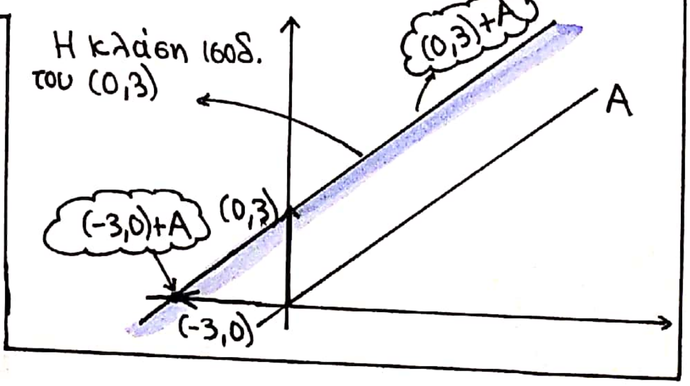
2] Το σύνολο V/A είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας:

$$\underset{v\in V}{[v]}=\{w\in V: w\sim v\}=\{w\in W: w-v\in A\}=\{w\in V: w=v+a, a\in A\}.$$

↳ $\boxed{\text{Παράδειγμα}}$: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x-y=0\}$ → διανυσματικός υπόχωρος

$$[v]=v+A=w+A \Leftrightarrow w\sim \boxed{v}$$

αντιπρόσωπος της κλάσης



$v+A=\{x\in V: x\sim v\}$

$w+A=\{y\in V: y\sim w\}$

$v\sim w$

Στο σύνολο πηλίκο, θα ορίσω πράξεις : 20.3.2023

- $V/A \times V/A \to V/A$, $(v+A, w+A) \to v+w+A$ } Αν θέλω να προσθέσω τις κλάσεις ισοδυναμίας προσθέτω τους αντιπροσώπους

- $\mathbb{R} \times V/A \to V/A$, $(\lambda, v+A) \to \lambda v + A$ } πολ/ζω τον αντιπρόσωπο.

! $\boxed{\text{ΠΡΟΒΛΗΜΑ}}$: $v+A = v'+A \iff v = v'+a_1$

$w+A = w'+A \iff w = w'+a_2$, $a_1, a_2 \in A$

$v+w+A$ = ? $v'+w'+A$

διαφορετικά στοιχεία δίνουν διαφορετικούς αντιπροσώπους (βλέπε σχήμα Σελ. 3 τα (-3,0) και (0,3) δίνουν την A)

θέλω το αποτέλεσμα της πράξης να είναι ανεξάρτητο των αντιπροσώπων.

πως θα γίνει αυτό: Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν: $v+w-v'-w' \in A$.

Όμως $v+w-v'-w' = \underbrace{v-v'}_{-a_1} + \underbrace{w-w'}_{a_2} \in A$.

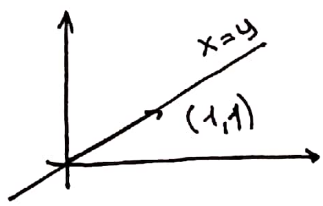
Το ίδιο με πολ/μο με λ: $v+A \to \lambda v + A$, $v'+A \to \lambda v' + A$ } είναι αυτές οι 2 ίσες;

$\lambda v' - \lambda v = \lambda(v'-v) \in A$.

Ποιό είναι το μηδενικό στοιχείο του χώρου πηλίκο;

$$0_{V/A} = 0_V + A = A$$

γιατί; $v+A+a+A \overset{a\in A}{=} \underbrace{v+a+A}_{\text{γιατί } v+a \text{ ισοδύναμο } v} = v+A$



Scanned with CamScanner

20.3.2023

$AX=b$ γραμμικό σύστημα

$AX=0$ — οι λύσεις του είναι υπόχωρος άρα το σύστημα έχει πάντα μια λύση την μηδενική

χώρος λύσεων: W δ.χ.

Αν το σύστημα $AX=b$ έχει μια λύση έστω X_0, τότε κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής X_0+W όπου W ο διαν. χώρος των λύσεων του ομογενούς

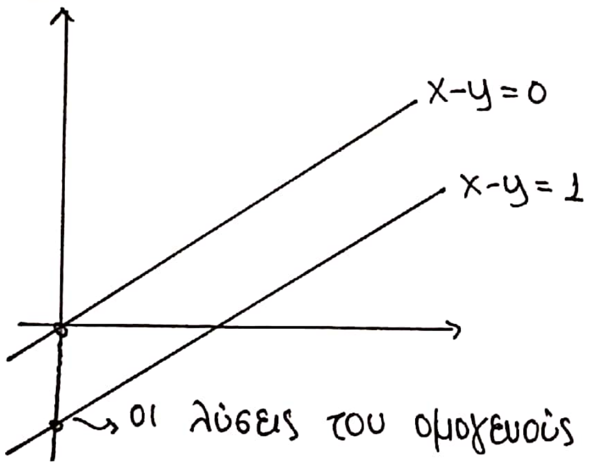
Πράγματι, κάθε X_0+X_1, $X_1\in W$

$$A(X_0+X_1)=AX_0+AX_1=b+0$$

και αν X_0 και X_0' δύο λύσεις του $AX=b$, δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} AX_0=b \\ AX_0'=b \end{array}\right\} \Rightarrow A(X_0-X_0')=b-b=0 \Rightarrow X_0-X_0'\in W$$

<u>Γεωμετρικά</u>: $x-y=1$ και $x-y=0$



οι λύσεις του ομογενούς μετατοπισμένες.