Διανυσματικός Χώρος

V : σύνολο

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$V \times V \to V$ (συνάρτηση)

$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός

$\mathbb{R} \times V \to V$

$(\lambda, v) \to \lambda v$

- $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3 \quad \forall v_1, v_2, v_3$
- Να $\exists 0 \in V$: $0 + v = v + 0 = v \quad \forall v \in V$
- $\forall v \in V$ να υπάρχει $-v \in V$: $v + (-v) = (-v) + v = 0 \quad \forall v \in V$
- $v + w = w + v \quad \forall w, v \in V$

Αβελιανή ομάδα

- $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
- $1 \cdot v = v$

$\forall v, w \in V, \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

0_V ?

$\mathbb{R}$: 0

$\mathbb{R}^n$: $(0, \dots, 0)$

$\mathbb{R}^{n \times m}$: $0^{n \times m}$

Μηδενικό στοιχείο της ομάδας.

Από τις ιδιότητες του δ.χ. ζητήσαμε την ύπαρξη ενός στοιχείου $-v$ ώστε $v + (-v) = (-v) + v = 0$. Αυτό το στοιχείο είναι μοναδικό.

Πράγματι, αν $v' \in V$ και $v' + v = v + v' = 0_V$ ← απόδειξη!

Έχουμε $(v' + v) + (-v) = 0_V + (-v) = (-v)$

$v' + (v + (-v)) = (-v) \Rightarrow v' + 0_V = (-v) \Rightarrow v' = -v$.

Scanned with CamScanner

15.3.2023

$\mathbb{R}^n \underset{1-1}{\overset{\varepsilon\pi\iota}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} \text{συναρτήσεις} \\ \{1,\dots,n\} \to \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Ψ

$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto f: \begin{array}{l} f(1) = x_1 \\ f(2) = x_2 \\ \vdots \\ f(n) = x_n \end{array}$

(a_n) ακολουθίες : συναρτήσεις $f(n) = x_n$
$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Άρα οι διανυσματικοί χώροι είναι συναρτήσεις, και συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο.

↳ Σε αυτό το μάθημα θα κοιτάξουμε δ.χ. πεπερασμένης διάστασης!

$\boxed{\text{Διανυσματικοί Χώροι πεπερασμένης διάστασης}} \cong \mathbb{R}^N$

↳ ισοδυναμία που θα ορίσουμε.

Τι είναι διάσταση;

πχ) $\mathbb{R}^2$: 2 , $\mathbb{R}^3$: 3

<u>Υπόχωροι</u>

V διανυσματικός χώρος. , $W \subset V$

Κατά πόσο οι πράξεις του V περιορισμένες στο W, δίνουν στο W δομή διανυσματικού χώρου.

<u>Παράδειγμα</u> : $\mathbb{R}^N = \{(x_1,\dots,x_n)\}$

$W = \{(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\}$, $m<N$ ⇝ ικανοποιεί το να είναι δ.χ.;

$V \times V \longrightarrow V$
$(v,w) \longrightarrow v+w$

$W \times W \longrightarrow V$ ⟶ πρέπει να με στέλνει στο V για να είναι υπόχωρος.
(v,w).

$W \ni v = (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$
$W \ni w = (x_1',\dots,x_m',0,\dots,0)$

$\Big\}$ $\xrightarrow{\text{προσθέτω}}$ με τον κανόνα πρόσθεσης του V

$(x_1+x_1', x_2+x_2', \dots, x_m+x_m', 0+0, \dots, 0+0)$
$\parallel$
$v+w \in W$

Scanned with CamScanner

Έστω τώρα $W_1 = \{(x_1, \dots, x_m, 1, \dots, 1)\}$ 15.3.2023

$\left.\begin{array}{l} v = (x_1, \dots, x_m, 1, \dots, 1) \\ w = (x_1', \dots, x_m', 1, \dots, 1) \end{array}\right\}$ $v + w = (x_1' + x_1, \dots, x_m + x_m', 2, \dots, 2) \notin W_1$

$v, w \in W_1$

$\boxed{\text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ}}$ Αν για κάθε $w_1, w_2 \in W$, $W \neq \emptyset$

- $w_1 + w_2 \in W$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda w_1 \in W$

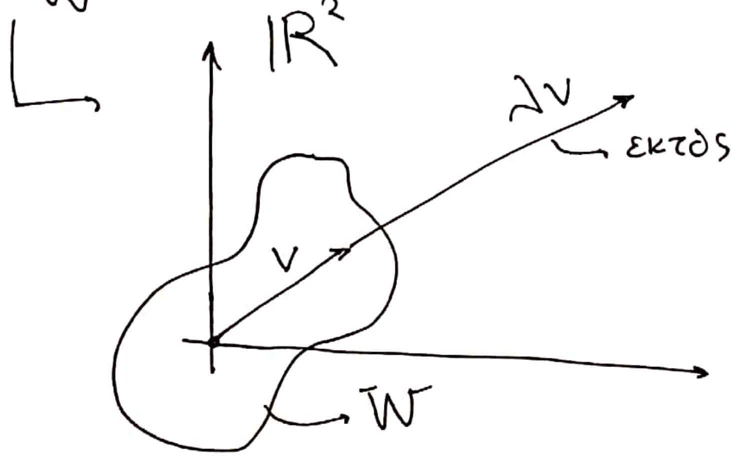
$\Rightarrow$ [W κλειστό ως προς τις πράξεις]

Τότε το W είναι υπόχωρος του V.

- $0_V \in W$; ναι γιατί $\underset{w \in W}{0_{\mathbb{R}} \cdot w} = 0_V$ ουδέτερο στοιχείο και του W και του V.
- $\exists -w \ \forall w \in W$? ναι είναι το $\underset{\in W}{(-1)w} = -w$
- $v + (w + z) = (v + w) + z$
  $(\lambda + \mu)w = \lambda w + \mu w$
  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

  ισχύει για κάθε $v, w, z \in V$ άρα και για κάθε $v, w, z \in W \subset V$.

↳ Το δύσκολο να δείξει κανείς και να αποτύχει το W να είναι υπόχωρος είναι κατά πόσο οι πράξεις παραμένουν μέσα στο W



↳ Αν το $0_V \notin W$, τότε ο $W \subset V$ δεν είναι υπόχωρος

Scanned with CamScanner

15.3.23

Εφαρμογή του Κριτηρίου:

Έστω $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ των συναρτήσεων

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων είναι υπόχωρος.

$$\bullet\ f, g \text{ συνεχείς} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ f+g \text{ συνεχής} \\ \bullet\ \lambda f \text{ συνεχής} \end{array}$$

Οι ακολουθίες (a_n) οι οποίες συγκλίνουν στο 0, είναι υπόχωρος του χώρου των ακολουθιών:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n + b_n \to 0 \\ \lambda a_n \to 0 \end{array}$$

Οι άνω τριγωνικοί πίνακες αποτελούν υπόχωρο των $n \times n$ πινάκων.

Αρκεί νδο το άθροισμα άνω τριγωνικών είναι άνω τριγωνικός και λ(άνω τριγωνικός) = άνω τριγωνικός.

$\boxed{\text{Βασικό παράδειγμα}}$: A $n \times n$ πίνακας, και $AX = 0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ομογενές γραμμικό σύστημα

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ n-άδα

Ο χώρος λύσεων ενός ομογενούς συστήματος είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

Πράγματι, αν
$$\left.\begin{array}{l} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \\ A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = 0.$$

και $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ επίσης λύση, γιατί $A\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$

Scanned with CamScanner

Αντιθέτως, το μη-ομογενές σύστημα $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, $(b_1,\dots,b_n)\neq(0,\dots,0)$ 15.3.23

έχει χώρο λύσεων $\subset \mathbb{R}^m$ που δεν είναι διανυσματικός χώρος.

$$\left.\begin{aligned} Ax&=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\\ Ay&=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\quad A(x+y)=2\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Έστω V ένας δ.χ. και W δ.χ.

- $\boxed{V\cap W}$: είναι δχ. υπόχωρος του V, W

<u>Πράγματι</u>: αν $v_1, v_2 \in W$ και $v_1, v_2 \in V$ τότε $v_1+v_2\in W$ και $v_1+v_2\in V$, $\lambda v_1+\lambda v_2\in W$ και $\lambda v_1+\lambda v_2\in V$

Άρα $v_1+v_2 \in W\cap V$

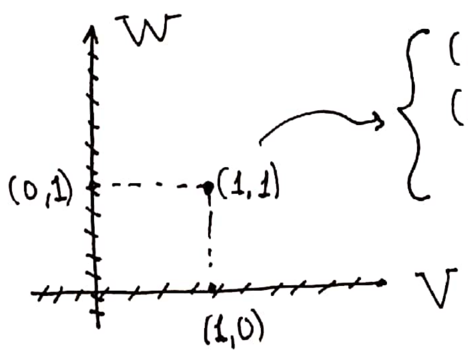
$v_1+v_2 \in W\cap V$

<u>Οι ενώσεις όμως δεν είναι:</u>

πχ) $\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2), x_i\in\mathbb{R}\}$

$V=\{(x_1,0), x_1\in\mathbb{R}\}$ $\Rightarrow$ λύση του γρ. συστήματος $\overset{A}{(0,1)}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ $m=2$ $n=1$

$W=\{(0,x_2), x_2\in\mathbb{R}\}$



$\left\{\begin{aligned}(1,0)&\in W\cup V\\ (0,1)&\in W\cup V\end{aligned}\right.$

$(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin W\cup V$

Scanned with CamScanner

Άσκηση: $V \cup W$ είναι διανυσματικός χώρος αν και μόνο αν $V \subset W$ ή $W \subset V$ 15.3.2023

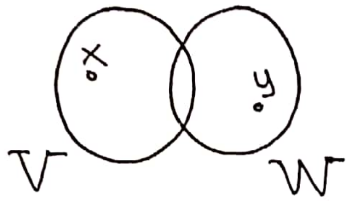
$\Rightarrow$

• Αν • $W \subset V \Rightarrow V \cup W = V \leadsto$ δ.χ.

• $V \subset W \Rightarrow V \cup W = W \leadsto$ δ.χ.

$\Leftarrow$

• Έστω $V \cup W$ δ.χ. και V όχι υποσύνολο W και W όχι υποσύνολο V



$\Downarrow$

• $\exists x \in V$ με $x \notin W$

• $\exists y \in W$ με $y \notin V$

Αφού $W \cup V$ δ.χ.

$x+y \in V \cup W \longrightarrow x+y \in V \Rightarrow x+y = v \Rightarrow y = \underset{V}{v} - \underset{V}{x} \in V$ άτοπο.

ή

$x+y \in W \Rightarrow x+y = w \Rightarrow x = \underset{W}{w} - \underset{W}{y} \in W$ άτοπο.

Scanned with CamScanner