Διάλεξη 11 — 13.3.2023

Συμπέρασμα από το προηγούμενο μάθημα:

Ένας πίνακας με δύο στήλες ίσες έχει ορίζουσα 0.

$\det(A) = \det(A^t)$ $\rightsquigarrow$ Αν έχει 2 στήλες ίσες, τότε ο $\det(A^t)$ έχει δύο γραμμές ίσες:

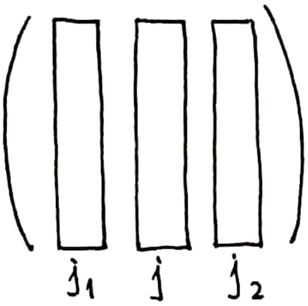
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} \underset{\sigma(1)=1 \;\; \sigma(2)=2}{a_{11}a_{22}} - \underset{\sigma(1)=2 \;\; \sigma(2)=1}{a_{12}a_{21}}$$

, αν $a_{12} = a_{11}$ και $a_{22} = a_{21}$, τότε $\det = 0$.

Έστω ότι κάθε ορίζουσα $(n-1)\times(n-1)$ με δύο στήλες ίσες έχει $\det = 0$, $n \geq 3$.
Θδο κάθε $n\times n$ ορίζουσα με δύο στήλες ίσες έχει ορίζουσα 0:

Έστω j_1, j_2 οι στήλες και έστω $C_{j_1} = C_{j_2}$.
Αφού $n \geq 3$, υπάρχει και άλλη στήλη $j \neq j_1, j_2$.

$$f_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})\, a_{ij}$$



A_{1j}: έχω διαγράψει την j-στήλη και πρώτη γραμμή

$\det(A_{1j}) = 0$ έχει 2 στήλες ίσες

$\det(A_{2j}) = 0$ — " —

$\det(A_{nj}) = 0$ — " —

$$\begin{pmatrix} a & x & a \\ \beta & y & \beta \\ \gamma & z & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{12} = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \\[2ex] A_{22} = \begin{pmatrix} a & a \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \\[2ex] A_{32} = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \end{array}\right\} = 0$$

ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΑΝΩ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ (ΚΑΙ ΚΑΤΩ) ΠΙΝΑΚΑ

13.3.23

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \ a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \rightsquigarrow \text{Η διαγώνιος!}$$

$$f_1(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i1} \det(A_{i1}) = a_{11} \underbrace{\det(A_{11})}_{\text{άνω τριγωνικός}}$$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} (-1) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

β' τρόπος : (τύπος) $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$

$$1\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 10 - 3 + 5 + 2 - 6 - 8 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & \dots & \det(A_{1n}) \\ \vdots & & \\ (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) & \dots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix}^t$$

Ισχύει ότι: $A \cdot \operatorname{adj} A = \det(A) \cdot I_n$

Συμπεράσματα:

Αν $\det(A) \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$

Αν $\det(A) = 0$: ο πίνακας δεν αντιστρέφεται

- $AB = 0$, $B \neq 0$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος

$$A^{-1}AB = A^{-1}\cdot 0 \overset{B\neq 0}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ όχι τόσο σωστός, χρειάζεται κάποιες συνθήκες.

13.3.23

- $adj(A) = (-1)^{i+j} \cdot det(A_{ji}) = b_{ij}$

$$(\gamma_{ij}) = adj A \cdot A = \sum_{v=1}^{n} b_{iv} a_{vi} = \sum_{v=1}^{n} a_{vi} (-1)^{v+i} det(A_{vi})$$

- Όταν $i=j$ $\quad f_i(A) = det(A)$
- Όταν $i \neq j$ τότε $det(A^{ij}) = 0$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots \\ \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} \end{pmatrix} = A^{i,j}$$

στην στήλη j πήγαμε και βάλαμε το περιεχόμενο της στήλης i.

$$adj(A) \cdot A = det A \cdot I_n$$

$$A \cdot adj(A) \Big|_{C_{ij}} \qquad (C_{ij}) = \sum_{v=1}^{v} a_{iv} (-1)^{j+v} det(A_{jv}) \longrightarrow$$ ανάπτυγμα ως προς την γραμμή

- αν $i=j$ τότε $det(A)$
- αν $i \neq j$, τότε ορίζουσα ενός πίνακα με 2 ίδιες γραμμές $\longrightarrow 0$.

Παράδειγμα : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +det A_{11} & -det A_{12} \\ -det A_{21} & det A_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = det A$$

αν $det A \neq 0 \Rightarrow \boxed{A^{-1}} = \frac{1}{det A} \cdot adj(A) = \boxed{\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$

13.3.23

A $n \times n$ πίνακας

$\det(A) \neq 0 \rightsquigarrow$ A αντιστρέψιμος.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ έχει μοναδική λύση :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \overbrace{\operatorname{adj}(A)}^{(\gamma_{ij})} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- $$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{v=1}^{n} \gamma_{iv} b_v = \frac{1}{\det(A)} \underbrace{\sum_{v=1}^{n} b_v (-1)^{v+j} \det(A_{vi})}_{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \boxed{b_n} & a_{nn} \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

i-στήλη έχει αντικατασταθεί από την στήλη των σταθερών όρων.

$$\Rightarrow \boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}}$$

Άσκηση : Να λυθεί η εξίσωση $\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = 0$

Λύση:

$\Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot(x-4)\cdot(x-2) = 0 \quad , \quad x \in \{1, 4, 2\}.$

το γινόμενο των όρων της διαγωνίου (άνω τριγωνικός)

$\boxed{\text{Άσκηση}}$: Να λυθεί η εξίσωση → SOS

$$\det\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix} = 0$$

Λύση

$$\det\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & 1-x^2 & x-x^2\\ 0 & x-x^2 & 1-x^2\end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & (1-x)(1+x) & x(1-x)\\ 0 & x(1-x) & (1-x)(1+x)\end{pmatrix} = (1-x)^2 \det\begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & 1+x & x\\ 0 & x & 1+x\end{pmatrix}$$

$$= (1-x)^2\left((1+x)^2 - x^2\right) = (1-x^2)(1+2x) \Rightarrow (1-x^2)(1+2x) = 0$$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot\ \cdot & 1\end{pmatrix} \qquad \det A = 2^{v-1}$$

$v=1$: $\det(1) = 1 = 2^0 = 2^{v-1}$, $v=1$

$v=2$ $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = 2 = 2^{v-1}$, $v=2$

$$a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21}$$

$$\det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2}) = 2\cdot 2^{(n-1)-1} = 2^{n-1}$$

Ευχαριστώ την Χρύσα για τις σημειώσεις ♥