$AB \neq BA$

Άσκηση:

Θεώρημα: Αν ο πίνακας $A_{n\times n}$ ικανοποιεί $AB = BA$ για κάθε πίνακα $B_{n\times n}$ τότε $A = \lambda I_n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Είναι σαφές ότι αν $A = \lambda I_n$ τότε $AB = BA$ για κάθε πίνακα B.
Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι τέτοιοι πίνακες A.

$E_{i,j} = (\varepsilon_{ij})$, $\varepsilon_{ij} = \delta_{ii_0}\delta_{jj_0}$

$$\delta_{ii_0}\delta_{jj_0} = \begin{cases} 1 & i = i_0 \text{ και } j = j_0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$
j_0 στήλη
i_0 γραμμή

Έστω A ώστε $AB = BA$ για κάθε πίνακα B.

$$\underbrace{A E_{i_0, j_0}}_{(d_{ij})} = \underbrace{E_{i_0, j_0} A}_{(r_{ij})}$$

- $(d_{ij}) = \sum_{v=1}^{n} a_{iv}\varepsilon_{vj} = \sum_{v=1}^{n} a_{iv}\delta_{vi_0}\delta_{jj_0} = a_{ii_0}\delta_{jj_0}$

- $(r_{ij}) = \sum_{v=1}^{n} \varepsilon_{iv} a_{vj} = \sum_{v=1}^{n} \delta_{ii_0}\delta_{vj_0} a_{vj} = \delta_{ii_0} a_{j_0 j}$

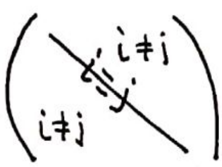
- $(d_{ij}) = (r_{ij}) \Rightarrow \boxed{a_{ii_0}\delta_{jj_0} = \delta_{ii_0} a_{j_0 j}}$ ισχύει για όλα τα i, i_0, j, j_0 από $1, \dots, n$.

$\xrightarrow{j = j_0}$ $\boxed{a_{ii_0} = \delta_{ii_0} a_{j_0 j}}$ ισχύει για όλα τα i, i_0, j, j_0

$\xrightarrow{i \neq i_0}$ $a_{ii_0} = 0$

$\xrightarrow{i = i_0}$ $a_{i_0 i_0} = a_{j_0 j_0}$

Εκτός της διαγωνίου έχω μηδενικά:
και πάνω στην διαγώνιο
το $a_{i_0 i_0} = a_{j_0 j_0} = \lambda$



Άρα συνολικά: $\boxed{A = \lambda I_n}$

■

1.3.2023

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$ Να λογαριάσουμε τις δυνάμεις του πίνακα για τις διάφορες τιμές του n.

$\|$

$(\lambda I_3 + N)^n$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Γενικά: $x, y \in \mathbb{R}$

- $(x+y)^n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^v y^{n-v}$

↳ διωνυμικό θεώρημα

- $(A+B)^n = ?$
όταν A, B πίνακες.

⇝ Θα έγραφα
$(A+B)^n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} A^v B^{n-v}$

↳ Μόνο αν $AB = BA$!

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + \boxed{AB + BA}$

$$(\lambda I_3 + N)^n \underset{\lambda I_3 N = N \lambda I_3}{=}$$

$$(\lambda I_3)^n + \binom{n}{1}(\lambda I_3)^{n-1} \cdot N + \binom{n}{2}(\lambda I_3)^{n-2} N^2 + \dots$$

αυτά βγαίνουν 0, διότι N^3 και πάνω είναι 0!

- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Άρα:

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & & 0 \\ & \lambda^n & \\ 0 & & \lambda^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 &= \lambda \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) -\frac{1}{\lambda} \rightsquigarrow$$ πρέπει λ: αναστρέψιμο
$\lambda \neq 0$, $\lambda = 0$ (περιπτώσεις).

θα κάνω αλλαγή γραμμών για να αποφύγω τις περιπτώσεις:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) (-\lambda) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$\lambda \neq \pm 1$, τότε αφού πολ/σω με $1-\lambda^2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) (-\lambda) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ίδιες λύσεις ανεξάρτητες του λ.

$\lambda = \pm 1$: άπειρες λύσεις:

$x_1 \pm x_2 = \pm 1 \Rightarrow$

$x_1 = \mp x_2 \pm 1$, $x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}\right\}$$ τους αλλάζω σειρά γιατί δεν θέλω να ξεκινάω με λ!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \begin{matrix} (-\lambda) \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{array}\right)$$

Αν $\boxed{\lambda=1}$ $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow$$
$x_1 = 1 - x_2 - x_3$
$x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
άπειρες λύσεις.

Αν $\lambda \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \end{array}\right)$$

Αν $\lambda = -1$: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots$$ λύσεις συστήματος

$\boxed{\lambda \neq -1}$: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda-2}{1+\lambda} & \lambda-1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\lambda=-2}$: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$ αδύνατο σύστημα!

$\boxed{\lambda \neq -2}$ την λύνω μέχρι τέλους σπίτι...

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ $D: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ [Οι ορίζουσες ορίζονται για τετραγωνικούς πίνακες!]

1.3.2023

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ a_1: η πρώτη γραμμή
$\vdots$
$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$

Είναι μια απεικόνιση όπου ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1] $D\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_i' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ "γραμμικότητα ως προς τις γραμμές".

$\hookrightarrow D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}' & a_{22}+a_{22}' & a_{23}+a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

2] $D\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow D\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

3] $D\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$ } δυο ίδιες γραμμές $\Rightarrow$ ορίζουσα 0!

4] $D(I_n) = 1$

Για $n=1$: $D(A) = a_{11}$

Για $n=2$: $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Αναδρομικός Ορισμός ορίζουσας

· Έστω ότι έχουμε ορίσει ορίσει ορίζουσα στους $(n-1)\times(n-1)$ πίνακες.
Θα ορίσουμε $n\times n$ ορίζουσα

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ελάσσονα Ορίζουσα:

$A_{i,j}$: n^2 τέτοιες

$\hookrightarrow$ Πάει στον πίνακα και διαγράφει την i-γραμμή και την j-στήλη.

$D = (A_{ij})$
$\hookrightarrow (n-1)\times(n-1)$ διάσταση

Παράδειγμα

1.3.2023

① $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

- $A_{11} = (a_{22})$
- $A_{12} = (a_{21})$
- $A_{21} = (a_{12})$
- $A_{22} = (a_{11})$

② $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
- $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
- $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$
- $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

$1 \leq j \leq n \rightsquigarrow \boxed{f_j(A) = \sum_{v=1}^{n} (-1)^{j+v} a_{vj} D(A_{vj})}$