Από Τετάρτη μάθημα στην Γ32!

Εύρεση Αντιστρόφου Πίνακα

A nxn πίνακας

$A\ A'$ ώστε $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$

θα βρούμε A' ώστε $\boxed{AA' = I_n}$ *

$a'^{1} \dots a'^{n}$ οι στήλες του πίνακα A'

$$A' = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a'^{1} & a'^{2} & \dots & a'^{n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Η σχέση * είναι ισοδύναμη με την επίλυση n το πλήθος γραμμικών συστημάτων

$$A \cdot a'^{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 1 στην i-γραμμή

$$\left(A \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right) \xrightarrow{Gauss} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| A^{-1}\right)$$

ο αντίστροφος που ζητάμε

(Στην περίπτωση που η απαλοιφή μπορεί να ολοκληρωθεί).

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$ Να βρεθεί ο A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

μηδενική γραμμή ⟹ αδύνατο σύστημα:

$0x_{11} + 0x_{21} + 0x_{31} = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim_{(-1/3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & +1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

I_3 | A^{-1}

Ερώτημα: Βρίκαμε A' ώστε $AA' = I_n$ Γιατί $A'A = I_n$? } Φυσιολογική Ερώτηση γιατί $AB \neq BA$ γενικά.

24.2.2023

↳ Από την στιγμή που η μέθοδος απαλοιφής του Gauss ολοκληρώθηκε υπάρχουν πίνακες $E_1, \dots, E_t$ που αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$E_1 \cdots E_t A = I_n$$

Κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών οδηγεί σε πολλαπλασιασμό από αριστερά με πίνακα E.

Άρα $E_1 \cdots E_t A = I_n \Rightarrow A = E_t^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$ → άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων μετασχηματισμών γραμμών

$$\Downarrow$$
$$E_2 \cdots E_t A = E_1^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$E_3 \cdots E_t A = E_2^{-1} E_1^{-1}$$

$AA' = I_n \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

υπάρχει A^{-1} : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$AA' = I_n \Rightarrow A^{-1}(AA') = A^{-1} I_n \Rightarrow (A^{-1}A)A' = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1}.$$

Παράδειγμα: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} = A$. Ερώτημα: Για διαφορετικές τιμές του λ να υπολογιστεί ο A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) 2-\lambda$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-3\lambda & 1-\lambda & \lambda-2 & 1 \end{array}\right)$$

Διερεύνηση: A) $4-3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 4/3$ το σύστημα είναι αδύνατο.

B) $\lambda \neq 4/3$

Συνεχίζουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{4-3\lambda} & \frac{\lambda-2}{4-3\lambda} & \frac{1}{4-3\lambda} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1-3\frac{1-\lambda}{4-3\lambda} & -3\frac{\lambda-2}{4-3\lambda} & -\frac{3}{4-3\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 1-3\frac{1-\lambda}{4-3\lambda} & -1-3\frac{\lambda-2}{4-3\lambda} & -\frac{3}{4-3\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{4-3\lambda} & \frac{\lambda-2}{4-3\lambda} & \frac{1}{4-3\lambda} \end{array}\right) \sim$$

άσκηση

Να υπολογιστεί ο πίνακας $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^n$. $n\in\mathbb{N}$ 24.2.23

Πρώτα θα δω για $n=2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}}$$

Για $n=3$: $\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}}$

Παρατηρώ: $A^1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&1&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}$

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}}$$

Επαγωγή:

$$A^n\cdot A=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22^{n-1}&0&22^{n-1}\\0&1&0\\22^{n-1}&0&22^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}$$ ▨

A,B,P πίνακες $n\times n$

- Αν P αντιστρέψιμος κ' $A\cdot P=0 \Rightarrow A=0$
- Αν P αντιστρέψιμος κ' $P\cdot B=0 \to B=0$

- $AB=BA$
- $A^2=B^2$
- $A+B$ αντιστρέψιμος

$\Big\}\overset{\text{νδο}}{\Rightarrow} A=B$

Θυμάμαι: $\mathbb{R}$: $ab=0 \Rightarrow a=0$ ή $b=0$

$a\cdot b=0 \xrightarrow{\text{a αντιστρέψ.}}$ $(\Leftrightarrow a\neq 0)$

$a\cdot b=0 \Rightarrow$
$a^{-1}a\cdot b=0\cdot a^{-1}\Rightarrow$
$b=0$

- $\mathbb{R}^{n\times n}$: $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}=0_{2\times 2}$

παρόλο που δεν είναι μηδεν.

↳ ο $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος:

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&0&-1&1\end{array}\right)$

αδύνατο σύστημα

Λύση

$(A\cdot P)P^{-1}=0P^{-1}\Rightarrow A=0$ (αντίστοιχα για B).

- $A^2-B^2\overset{?}{=}(A+B)(A-B)\Rightarrow A-B=0\Rightarrow A=B$

↳ αντιστρέψιμος

$(A+B)(A-B)=(A+B)A+(A+B)(-B)$

$=A^2+BA+A(-B)-B^2=A^2+\boxed{BA-AB}+B^2$ → ίσα από υπόθεση!

Άρα δεν ισχύει πάντα ότι $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$, μόνο αν $AB=BA$!

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 24.2.43

$tr(A)$ το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του ("ίχνος")

$A=(a_{ij})$, $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ πχ) $tr\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1+5+9$

$$tr(\lambda a) = \lambda\, tr(A)$$
$$tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$$
$$tr(AB) = tr(BA)$$

$\rightarrow$ $\boxed{A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ \lambda A=(\lambda a_{ij}),\ AB=(\gamma_{ij})}$

i) $tr(\lambda a)=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_{ii} = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda\cdot tr(A)$

ii) $tr(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A)+tr(B)$

iii) $AB=(\gamma_{ij})$

$\gamma_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}$ $\qquad tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu i}$

$\boxed{\|}$

$BA=(\gamma'_{ij})$ $\qquad tr(BA)=\sum_{i=1}^{n}\gamma'_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} a_{\nu i}$

$\gamma'_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} a_{\nu j}$

γιατί;

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} a_{\nu i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu i} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu i} =$$

ίσα γιατί αθροίζω πάνω στις ίδιες ποσότητες με διαφορετικά ονόματα.

αλλάζω την σειρά που αθροίζω.

Να υπολογιστεί το

$tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} a_{\nu i}$

Αν ο A είναι συμμετρικός : $A^t=A$ ή $a_{ij}=a_{ji}$ τότε $tr(A^2)=0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για τον μηδενικό πίνακα.

$tr(A^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}^2 \geqslant 0$

Αν $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}^2 = 0 \Rightarrow a_{i\nu}=0 \ \forall i,\nu$