ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η έννοια του πίνακα

1.1 Ένα σύστημα δυο εξισώσεων α΄ βαθμού με δυο αγνώστους, π.χ. το

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{cases}$$

χαρακτηρίζεται από τους έξι αριθμούς 2, 3, 1, 3, -1, 7 που καθένας τους έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή συντελεστής του x ή συντελεστής του y ή σταθερός όρος και
- ανήκει ή στην πρώτη ή στη δεύτερη εξίσωση.

Το σύστημα λοιπόν θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

$$\begin{array}{cccl} \boxed{\textit{συν/τής } x} & \boxed{\textit{συν/τής } y} & \boxed{\textit{σταθ. όρος}} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 & \longleftarrow \textit{της α΄ εξίσωσης} \\ 3 & -1 & 7 & \longleftarrow \textit{της β΄ εξίσωσης} \end{array}$$

Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται **πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών** ή απλά **πίνακας 2×3** και γράφεται συντομότερα

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{Vmatrix}$$

Γενικά κάθε ορθογώνια διάταξη $\nu \cdot \mu$ αριθμών ($\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$) σε **ν γραμμές** και **μ στήλες λέγεται πίνακας** $\nu \times \mu$.

Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του. Το στοιχείο που ανήκει στην *i-γραμμή* ($1 \leqslant i \leqslant \nu$) και *j-στήλη* ($1 \leqslant j \leqslant \mu$) συμβολίζεται συνήθως α_{ij}. Έτσι ο πίνακας $\nu \times \mu$ γράφεται:

$$A = \begin{array}{c} \text{j-στήλη} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu j} & \dots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}$$

Σημείωση

Με την ορθογώνια διάταξη των στοιχείων του ένας πίνακας παρουσιάζεται ως πεπερασμένη «διπλή ακολουθία». Ακριβέστερα, αν $T_\nu = \{1, 2, \dots, \nu\}$ και $T_\mu = \{1, 2, \dots, \mu\}$, ένας πίνακας $\nu \times \mu$ είναι απεικόνιση του $T_\nu \times T_\mu$ στο $\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι δυο πίνακες $\nu \times \mu$ $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ είναι **ίσοι** (ταυτιζόμενοι), αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \forall\, (i, j),\ \alpha_{ij} = \beta_{ij}}$$

Χρήση πινάκων

1.2 Γενικά ένας πίνακας με τα αριθμητικά στοιχεία που είναι «διατεταγμένα» στις γραμμές και τις στήλες του, παρέχει ένα σύνολο πληροφοριών. Θα αναφέρουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις χρήσης πινάκων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα 2×3, π.χ. τον πίνακα

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} A' & B' & \Gamma' \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Αγόρια} \\ \text{Κορίτσια} \end{array} \end{array}$$

που δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α΄ τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ΄ τάξης είναι 57 κτλ.

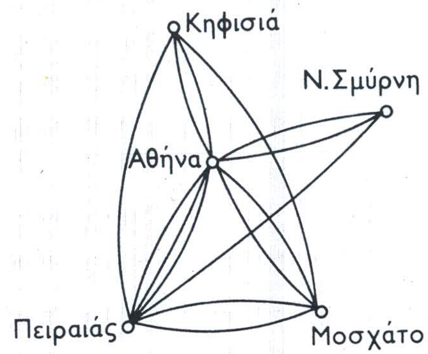
2. Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ. τον πίνακα 3×5.

$$\begin{bmatrix} 128 & 205 & 316 & 107 & 156 \\ 250 & 318 & 354 & 285 & 204 \\ 400 & 389 & 425 & 376 & 158 \end{bmatrix}$$

που μας πληροφορεί ότι στο 4ο τμήμα της 2ης κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες, στο 3ο τμήμα της 3ης κατηγορίας 425 εργάτες κτλ.

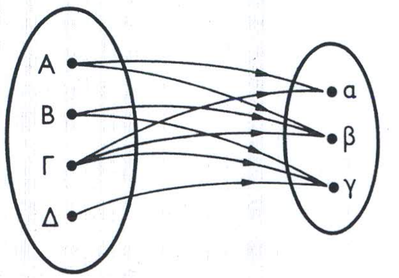
3. Στο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας που μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 5×5.

$$\begin{array}{cc} & \text{Προς} \rightarrow \begin{array}{ccccc} A & \Pi & M & N\Sigma & K \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Από} \\ \downarrow \\ A \\ \Pi \\ M \\ N\Sigma \\ K \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$



Τα στοιχεία του πίνακα δείχνουν το πλήθος των συγκοινωνιακών μέσων που εξυπηρετούν τους Δήμους ανά δύο.

4. Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δυο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0 για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.
Π.χ. Η διμελής σχέση που δίνεται με το διπλανό βελοδιάγραμμα μπορεί να παρασταθεί με τον επόμενο πίνακα 4×3.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Είδη πινάκων

1.3 Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένα είδη πινάκων τα οποία περιγράφουμε αμέσως. Ένας πίνακας ν×μ λέγεται

- **πίνακας-γραμμή,** όταν **ν = 1.** Π.χ. οι

$$[3\ \ {-6}\ \ 7],\quad [-8\ \ 0\ \ 5\ \ {-1}],\quad [0\ \ 1]$$

είναι πίνακες-γραμμή.

- **πίνακας-στήλη,** όταν $\mu = 1$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}$$

είναι πίνακες-στήλη.

- **πίνακας-στοιχείο,** όταν $\mu = \nu = 1$. Π.χ. οι

$$[-5],\ [7],\ [0]$$

είναι πίνακες-στοιχείο.

- **κλιμακωτός κάτω,** όταν $\alpha_{ij} = 0$ **για κάθε** $i > j$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 5 & 0 & -7\\0 & 1 & 0 & 3 & 6\\0 & 0 & 2 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\0 & 0 & 6\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

είναι πίνακες κλιμακωτοί κάτω.

- **κλιμακωτός άνω,** όταν $\alpha_{ij} = 0$ **για κάθε** $i < j$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\-8 & 6 & 0 & 0\\0 & -3 & 7 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\-7 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & -2 & 0 & 0\\2 & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

είναι πίνακες κλιμακωτοί άνω.

- **τετραγωνικός,** όταν $\nu = \mu$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7 & -6 & 5\\3 & 2 & -1\\-4 & 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί πίνακες.

Ειδικότερα, ένας **τετραγωνικός πίνακας** λέγεται:
τριγωνικός άνω ή κάτω, όταν είναι κλιμακωτός άνω ή κάτω αντιστοίχως.
διαγώνιος, όταν $\alpha_{ij} = 0$ **για κάθε** $i \neq j$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\0 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι πίνακες.

Ασκήσεις: 1, 2, 3

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

Πρόσθεση πινάκων

1.4 Ας υποθέσουμε ότι μια βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διέθεσε σ' ένα μήνα:

ψυγεία	*κουζίνες*	*πλυντήρια*	
18	35	21	*στην Αθήνα*
13	29	22	*στη Θεσσαλονίκη*

και τον επόμενο μήνα:

22	19	12	*στην Αθήνα*
25	18	31	*στη Θεσσαλονίκη*

Τότε τους δυο αυτούς μήνες η βιομηχανία αυτή διέθεσε συνολικά:

ψυγεία	*κουζίνες*	*πλυντήρια*	
(18+22)	(35+19)	(21+12)	*στην Αθήνα*
(13+25)	(29+18)	(22+31)	*στη Θεσσαλονίκη*

Η κίνηση της παραπάνω βιομηχανίας κάθε μήνα και συνολικά περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες 2×3:

$$A = \begin{bmatrix}18 & 35 & 21\\13 & 29 & 22\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}22 & 19 & 12\\25 & 18 & 31\end{bmatrix},\quad \Gamma = \begin{bmatrix}18+22 & 35+19 & 21+12\\13+25 & 29+18 & 22+31\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40 & 54 & 33\\38 & 47 & 53\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ λέγεται *άθροισμα* των πινάκων Α και Β. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ *Άθροισμα* **των πινάκων ν×μ** $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ **λέγεται ο πίνακας ν×μ** $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ **του οποίου κάθε στοιχείο** γ_{ij} **είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των Α και Β. Δηλαδή:**

$$\forall\ (i,j),\quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

Το παραπάνω άθροισμα πινάκων, που για κάθε ζεύγος (Α, Β) είναι **μοναδικό**, συμβολίζεται **Α+Β**. Π.χ. είναι

$$\begin{bmatrix}-5 & 7\\3 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -2\\3 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5+4 & 7-2\\3+3 & 0-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5\\6 & -5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-6\\2\\-7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6+5\\2+4\\-7-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\6\\-13\end{bmatrix}$$

Έτσι στο σύνολο $\Pi_{\nu\times\mu}$ των πινάκων ν×μ ορίζεται η **«πρόσθεση πινάκων»**.

Ιδιότητες πρόσθεσης

1.5 Είδαμε ότι η πρόσθεση πινάκων ν×μ ανάγεται σε πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων τους, που είναι πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ είναι πίνακες $\nu \times \mu$, θα ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- **Προσεταιριστική**

$$\boxed{(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)} \qquad (1)$$

Πράγματι, τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων που είναι μέλη της ισότητας (1) ταυτίζονται, αφού για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $j = 1, 2, \ldots, \mu$ έχουμε

$$(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + (\beta_{ij} + \gamma_{ij})$$

Το $(A+B)+\Gamma$ λέγεται *άθροισμα* των A, B, Γ και συμβολίζεται απλά $\mathbf{A+B+\Gamma}$. Γενικότερα με τον τύπο:

$$\mathbf{A_1 + A_2 + \ldots + A_k = (A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}) + A_k}$$

ορίζεται επαγωγικά το άθροισμα $k \geqslant 3$ πινάκων $\nu \times \mu$ $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

- **Αντιμεταθετική**

$$\boxed{A+B = B+A} \qquad (2)$$

Προκύπτει αμέσως, αφού

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} = \beta_{ij} + \alpha_{ij}$$

- **Ουδέτερο στοιχείο.** Ο πίνακας $\nu \times \mu$ με όλα τα στοιχεία του μηδέν συμβολίζεται $\mathbf{O}_{\nu\times\mu}$ ή απλά $\mathbf{O}$ και, όπως είναι φανερό, για κάθε πίνακα $\nu \times \mu$ A έχουμε:

$$\boxed{A + O = O + A = A} \qquad (3)$$

Άλλος πίνακας $\nu \times \mu$ με την ιδιότητα (3) δεν υπάρχει, γιατί ο αριθμός 0 είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση πραγματικών αριθμών. Ο μοναδικός αυτός πίνακας $\nu \times \mu$ **O** λέγεται **μηδενικός** και χαρακτηρίζεται ως *«ουδέτερο στοιχείο»* ως προς την πρόσθεση πινάκων $\nu \times \mu$.

- **Αντίθετος πίνακα.** Αν δοθεί ένας πίνακας $\nu \times \mu$ A υπάρχει μοναδικός πίνακας $\nu \times \mu$ A' τέτοιος ώστε

$$\mathbf{A + A' = A' + A = O} \qquad (4)$$

Πράγματι, αν είναι $A = [\alpha_{ij}]$, τότε ο πίνακας $A' = [\alpha'_{ij}]$ με στοιχεία $\alpha'_{ij} = -\alpha_{ij}$ επαληθεύει την (4) και είναι μοναδικός, γιατί ο αντίθετος κάθε πραγματικού αριθμού είναι μοναδικός. Το μοναδικό αυτό πίνακα A' τον λέμε **αντίθετο** του A και θα τον συμβολίζουμε **-A**. Έτσι η (4) γράφεται:

$$\boxed{\mathbf{A + (-A) = (-A) + A = O}} \qquad (4')$$

Π.χ. ο αντίθετος του $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$ είναι ο $-B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$, του $\Gamma = [6\ -3\ -2]$ είναι ο $-\Gamma = [-6\ 3\ 2]$ κτλ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από την (4′) προκύπτει ότι αντίθετος του -A είναι ο A, δηλαδή

$$\mathbf{-(-A) = A}$$

Γι' αυτό οι πίνακες A και -A λέγονται απλά **αντίθετοι.**

2. Αντίθετος του μηδενικού πίνακας $\nu \times \mu$ **O** είναι ο ίδιος πίνακας.

Έστω τώρα δυο πίνακες $\nu \times \mu$ A και B. Το άθροισμα $A + (-B)$ λέγεται **διαφορά του B από τον A** και συμβολίζεται **A-B**.

Π.χ. είναι

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)+(-9) & 4+5 \\ 7+1 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν A, B, Γ είναι πίνακες $\nu \times \mu$, να δειχτεί ότι:

(i) $A+\Gamma = B+\Gamma \Leftrightarrow A = B$, (ii) $A+B = \Gamma \Leftrightarrow A = \Gamma - B$, (iii) $-(A+B) = (-A)+(-B)$

(i) Από τη μοναδικότητα του αθροίσματος έχουμε $A=B \Rightarrow A+\Gamma = B+\Gamma$

Αντιστρόφως: $A+\Gamma = B+\Gamma \Rightarrow (A+\Gamma)+(-\Gamma) = (B+\Gamma) + (-\Gamma) \Rightarrow A+[\Gamma+(-\Gamma)] = B+[\Gamma+(-\Gamma)]$
$\Rightarrow A+\mathbf{O} = B+\mathbf{O} \Rightarrow A = B$

(ii) Επίσης είναι: $A+B = \Gamma \Leftrightarrow (A+B)+(-B) = \Gamma+(-B) \Leftrightarrow A+[B+(-B)] = \Gamma-B$
$\Leftrightarrow A+\mathbf{O} = \Gamma-B \Leftrightarrow A = \Gamma-B.$

(iii) Τώρα είναι: $(A+B)+[(-A)+(-B)] = (A+B)+[(-B)+(-A)] = A+[B+[(-B)+(-A)]]$
$= A+[(B+(-B))+(-A)] = A+[\mathbf{O}+(-A)] = A+(-A) = \mathbf{O}$

Συνεπώς θα είναι $-(A+B) = (-A)+(-B)$

2. Αν $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, **να βρεθεί ο πίνακας X**

Λόγω της ισοδυναμίας (ii) της προηγούμενης εφαρμογής έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 4, 5, 6

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

1.6 Οι τιμές με τις οποίες διαθέτει μια βιοτεχνία υποδημάτων το ζευγάρι ανδρικών, γυναικείων καί παιδικών υποδημάτων στα δυο υποκαταστήματά της περιγράφονται με τον πίνακα

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{ανδρικά} & \textit{γυναικεία} & \textit{παιδικά} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1800 & 2000 & 950 \\ 2100 & 2400 & 1100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{1ο υποκατάστημα} \\ \textit{2ο υποκατάστημα} \end{array}$$

Αν στην περίοδο των εκπτώσεων προτίθεται να κάνει γενική έκπτωση 20%, θα πρέπει να διαμορφώσει τις νέες τιμές στο 80% ή 0,8 των προηγουμένων και συνεπώς οι τιμές αυτές θα περιγράφονται με τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}8 \cdot 1800 & 0{,}8 \cdot 2000 & 0{,}8 \cdot 950 \\ 0{,}8 \cdot 2100 & 0{,}8 \cdot 2400 & 0{,}8 \cdot 1100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1440 & 1600 & 760 \\ 1680 & 1920 & 880 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας B λέγεται *γινόμενο* του 0,8 με τον πίνακα A. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ *Γινόμενο* **του $\lambda \in \mathbb{R}$ με τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $B = [\beta_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο β_{ij} είναι γινόμενο του αντίστοιχου στοιχείου τού A με το λ. Δηλαδή**

$$\forall (i,j),\ \beta_{ij} = \lambda\alpha_{ij}$$

Το παραπάνω γινόμενο αριθμού με πίνακα, που για κάθε ζεύγος (λ, A) είναι **μοναδικό,** συμβολίζεται **λ·A** ή **A·λ** ή απλούστερα **λA** ή **Aλ**.

Π.χ. είναι

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3(-5) \\ 3(-4) & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 \\ -12 & 18 \end{bmatrix},$$

$$-7 \cdot [1\ \ -2\ \ 0] = [-7\ \ 14\ \ 0], \quad \frac{10}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ -10 \end{bmatrix}$$

Έτσι ορίζεται ο **«πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα»**.

Ειδικά, αν $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $\lambda > 1$ αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\lambda A = A + A + \ldots + A \ (\lambda \text{ προσθετέοι})$$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

1.7 Θεωρούμε τους πίνακες $\nu \times \mu$ $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ και τους πραγματικούς αριθμούς λ, λ΄. Ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B & (\lambda+\lambda')A = \lambda A + \lambda' A \\ \lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A & 1A = A \end{array}}$$

Πράγματι, τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων που είναι μέλη καθεμιάς από τις παραπάνω ισότητες ταυτίζονται, αφού για κάθε i = 1, 2, ..., ν και j = 1, 2, ..., μ έχουμε:

$$\lambda(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = \lambda\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij} \qquad (\lambda+\lambda')\alpha_{ij} = \lambda\alpha_{ij} + \lambda'\alpha_{ij}$$

$$\lambda(\lambda'\alpha_{ij}) = (\lambda\lambda')\alpha_{ij} \qquad 1\alpha_{ij} = \alpha_{ij}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έχουμε: $5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 20 \\ 55 & 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

$$= 5 \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 11 & 2 \end{bmatrix} \right) = 5 \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}$$

2. Ομοίως έχουμε: $-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}-40 & 0\\ 25 & -10\end{bmatrix} = -\frac{2}{5}\left(-5\begin{bmatrix}8 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}\right)$

$$=\left(\left(-\frac{2}{5}\right)(-5)\right)\begin{bmatrix}8 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}8 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

3. Επίσης έχουμε: $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 6 & -12\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\left(-3\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\right)$

$$=\left(\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)\right)\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 7, 8, 9

Πολλαπλασιασμός πινάκων

1.8 Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανέμεται σε τρεις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν α, β και γ εργαζόμενοι αντιστοίχως. Αν x_1, x_2, x_3, είναι αντίστοιχα η μηνιαία αποζημίωση κάθε εργαζομένου, τότε η μηνιαία δαπάνη του εργοστασίου για μισθούς του προσωπικού θα είναι:

$$\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3$$

Αν το προσωπικό είναι κατανεμημένο σε δυο τμήματα σύμφωνα με τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{bmatrix} \begin{matrix}\textit{1ο τμήμα}\\ \textit{2ο τμήμα}\end{matrix}$$

τότε η μηνιαία δαπάνη του εργοστασίου μπορεί να αναλυθεί κατά τμήμα.

Εξάλλου έστω ότι το ημερομίσθιο κάθε εργαζομένου είναι κατά κατηγορία μ_1, μ_2, μ_3 δραχμές και η αποζημίωση για εργασία σε ημέρα αργίας ν_1, ν_2, ν_3 δραχμές αντιστοίχως. Αν σ' ένα μήνα το εργοστάσιο λειτούργησε 25 εργάσιμες ημέρες και 3 αργίες, τότε η μηνιαία αποζημίωση κατά κατηγορία είναι:

$$\begin{aligned} x_1 &= 25\mu_1+3\nu_1\\ x_2 &= 25\mu_2+3\nu_2\\ x_3 &= 25\mu_3+3\nu_3 \end{aligned}$$

και καθορίζεται από τον πίνακα των ημερήσιων αποζημιώσεων:

$$B = \begin{bmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\\ \mu_3 & \nu_3\end{bmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να έχουμε την ημερήσια δαπάνη του εργοστασίου κατά τμήμα:
$\alpha_1\mu_1+\beta_1\mu_2+\gamma_1\mu_3$ για εργάσιμη ημέρα και $\alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\gamma_1\nu_3$ για ημέρα αργίας
$\alpha_2\mu_1+\beta_2\mu_2+\gamma_2\mu_3$ για εργάσιμη ημέρα και $\alpha_2\nu_1+\beta_2\nu_2+\gamma_2\nu_3$ για ημέρα αργίας
που περιγράφεται από τον πίνακα:

$$\Gamma = \begin{bmatrix}\alpha_1\mu_1+\beta_1\mu_2+\gamma_1\mu_3 & \alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\gamma_1\nu_3\\ \alpha_2\mu_1+\beta_2\mu_2+\gamma_2\mu_3 & \alpha_2\nu_1+\beta_2\nu_2+\gamma_2\nu_3\end{bmatrix}$$

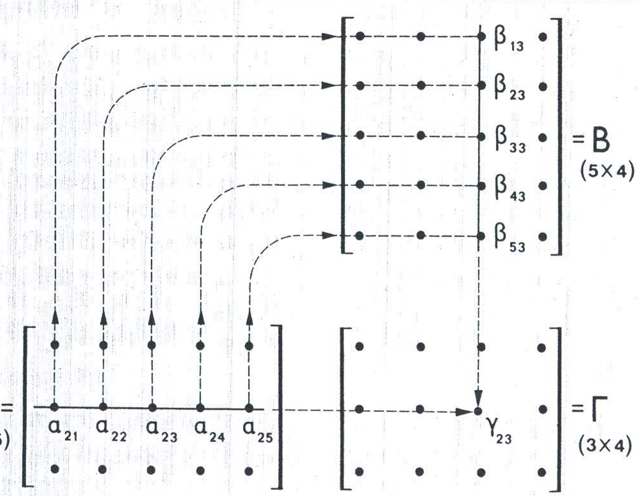
Τα στοιχεία του Γ παράγονται με πολλαπλασιασμό των 3 στοιχείων κάθε γραμμής του **Α** με τα αντίστοιχα 3 στοιχεία κάθε στήλης του **Β**.

Ο πίνακας Γ λέγεται *γινόμενο* του Α με τον Β και συμβολίζεται: **Α·Β** ή **ΑΒ**

Δηλαδή
$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\\ \mu_3 & \nu_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\mu_1+\beta_1\mu_2+\gamma_1\mu_3 & \alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\gamma_1\nu_3\\ \alpha_2\mu_1+\beta_2\mu_2+\gamma_2\mu_3 & \alpha_2\nu_1+\beta_2\nu_2+\gamma_2\nu_3\end{bmatrix}$$
$$[2\times\boxed{3}]\,[\boxed{3}\times 2] \;=\; [2\times 2]$$

ΟΡΙΣΜΟΣ *Γινόμενο* **του πίνακα ν×μ Α = $[\alpha_{ij}]$ με τον πίνακα μ×ρ Β = $[\beta_{jk}]$ λέγεται ο πίνακας ν×ρ Γ = $[\gamma_{ik}]$ του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ik} είναι το άθροισμα των γινομένων των μ στοιχείων της i-γραμμής του Α με τα αντίστοιχα μ στοιχεία της k-στήλης του Β. Δηλαδή:**

$$\forall (i,k),\ \gamma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{i\mu}\beta_{\mu k}$$



$$\gamma_{23} = \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23}+\alpha_{23}\beta_{33}+\alpha_{24}\beta_{43}+\alpha_{25}\beta_{53}$$

Το παραπάνω γινόμενο ΑΒ είναι **μοναδικό.**

Είναι αξιοσημείωτο ότι για να υπάρχει το γινόμενο ενός πίνακα Α με τον πίνακα Β πρέπει **ο αριθμός των στηλών του Α να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του Β.** Στα επόμενα θα συμβολίζουμε $\mathbf{\Pi}_\nu$ το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων ν×ν. Είναι φανερό, ότι το γινόμενο πινάκων ν×ν είναι πίνακας ν×ν. Άρα:

Στο σύνολο Π_ν ορίζεται πάντοτε «ο πολλαπλασιασμός πινάκων»

Αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{jk}]$ είναι πίνακες ν×μ και μ×ρ αντιστοίχως, τότε ορίζεται το γινόμενο AB. Επειδή για κάθε i = 1, 2, ..., ν, k = 1, 2, ..., ρ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\lambda\gamma_{ik} = \lambda(\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{i\mu}\beta_{\mu k}) &= (\lambda\alpha_{i1})\beta_{1k} + (\lambda\alpha_{i2})\beta_{2k} + \dots + (\lambda\alpha_{i\mu})\beta_{\mu k}\\ &= \alpha_{i1}(\lambda\beta_{1k})+\alpha_{i2}(\lambda\beta_{2k}) + \dots + \alpha_{i\mu}(\lambda\beta_{\mu k})\end{aligned}$$

θα έχουμε:

$$\boxed{\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\cdot 4+0\cdot 3 & -3\cdot(-2)+0\cdot 5\\ 2\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12 & 6\\ 5 & -9\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}[7\ 6\ -3\ 5] = \begin{bmatrix}-2\cdot 7 & -2\cdot 6 & -2\cdot(-3) & -2\cdot 5\\ 3\cdot 7 & 3\cdot 6 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-14 & -12 & 6 & -10\\ 21 & 18 & -9 & 15\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot(-2)+4\cdot 1 & 2\cdot 2+4(-1) & 2\cdot 4+4(-2)\\ -1(-2)+(-2)\cdot 1 & -1\cdot 2+(-2)(-1) & -1\cdot 4+(-2)(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}6 & 5 & 9\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9 & 31 & 19\\ -7 & 24 & 15\\ 10 & -34 & -21\end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix}6(-9)+5\cdot(-7)+9\cdot 10 & 6\cdot 31+5\cdot 24+9(-34) & 6\cdot 19+5\cdot 15+9(-21)\\ 3(-9)+(-1)(-7)+2\cdot 10 & 3\cdot 31+(-1)24+2(-34) & 3\cdot 19+(-1)15+2(-21)\\ -2(-9)+4\cdot(-7)+1\cdot 10 & -2\cdot 31+4\cdot 24+1(-34) & -2\cdot 19+4\cdot 15+1(-21)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5. $2\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\right) = \left(2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραδείγματα 3 και 5 συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων μπορεί να είναι ο μηδενικός πίνακας.

Ασκήσεις: 10, 11

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

1.9 Όπως στην § 1.5 εξετάσαμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων, έτσι και εδώ θα εξετάσουμε, αν ο πολλαπλασιασμός πινάκων έχει ανάλογες ιδιότητες.

- **Προσεταιριστική.** Έστω A, B, Γ ∈ Π_ν. Αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{(AB)\Gamma = A(B\Gamma)} \qquad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έχουμε $\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4\\ -2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 24\\ 6 & -54\end{bmatrix}$

και $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 12\\ 3 & -22\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 24\\ 6 & -54\end{bmatrix}$

Το (AB)Γ λέγεται *γινόμενο* των πινάκων A, B, Γ και συμβολίζεται απλά **ABΓ**. Γενικότερα, αν $A_1, A_2, \dots, A_k \in \Pi_\nu$ με $k \geqslant 3$, τότε με την ισότητα

$$A_1A_2 \dots A_k = (A_1A_2 \dots A_{k-1})\, A_k$$

ορίζεται επαγωγικά το γινόμενό τους.

Ειδικά το γινόμενο ίσων πινάκων γράφεται ως δύναμη:

$$AA\dots A = A^k \text{ (Για } k = 1 \text{ ορίζουμε } A^1 = A.)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν A, B, Γ, είναι πίνακες ν×μ, μ×ρ και ρ×k αντιστοίχως, το γινόμενο AB είναι πίνακας ν×ρ και το (AB)Γ ν×k. Εξάλλου το BΓ είναι πίνακας μ×k και το A(BΓ) ν×k. Τότε αποδεικνύεται γενικότερα, ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστική πράξη,

δηλαδή $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$ (5΄)

- **Αντιμεταθετική.** Με τους πίνακες $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ βρίσκουμε ότι

$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4\\ -2 & 10\end{bmatrix}$, ενώ $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -6\\ 2 & 12\end{bmatrix}$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 4 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & -3\\ 2 & 18\end{bmatrix}$, ενώ $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 15 & 8\\ -2 & 0 & 2\\ 4 & 30 & 14\end{bmatrix}$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι:

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι πράξη αντιμεταθετική.

- **Ουδέτερο στοιχείο.** Ο τετραγωνικός πίνακας $I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ έχει, για κάθε πίνακα

$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, την ιδιότητα

$$\mathbf{AI_2} = \mathbf{I_2A} = \mathbf{A}$$

Πράγματι, είναι $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cdot 1+\beta\cdot 0 & \alpha\cdot 0+\beta\cdot 1 \\ \gamma\cdot 1+\delta\cdot 0 & \gamma\cdot 0+\delta\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

και $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Γενικά, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ορίζεται ο διαγώνιος πίνακας $\nu \times \nu$

$$\mathbf{I}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{με } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Τότε, αποδεικνύεται ότι για κάθε **τετραγωνικό** πίνακα $\nu \times \nu$ A, είναι

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_\nu = \mathbf{I}_\nu \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}} \qquad (6)$$

Άλλος πίνακας $\nu \times \nu$ $\mathbf{I}'$, που για κάθε πίνακα $\nu \times \nu$ A επαληθεύει την (6) δεν υπάρχει, γιατί:

$$\mathbf{I}'\mathbf{I}_\nu = \mathbf{I}' \qquad [\text{ιδιότητα (6) για τον πίνακα } \mathrm{I}_\nu]$$
$$\mathbf{I}'\mathbf{I}_\nu = \mathbf{I}_\nu \qquad [\text{ιδιότητα (6) για τον πίνακα } \mathrm{I}']$$

και συνεπώς $\mathbf{I}' = \mathbf{I}_\nu$.

Ο μοναδικός πίνακας $\nu \times \nu$ $\mathbf{I}_\nu$ λέγεται **μοναδιαίος** και χαρακτηρίζεται ως *«ουδέτερο στοιχείο»* του πολλαπλασιασμού στο $\mathbf{\Pi}_\nu$. Όταν υπονοείται το ν, γράφουμε απλούστερα **I**.

Σημείωση

Γενικότερα, αν ο A είναι πίνακας $\nu \times \mu$ έχουμε $\mathrm{I}_\nu \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$, ενώ αν ο A είναι πίνακας $\mu \times \nu$ έχουμε $\mathrm{A} \cdot \mathrm{I}_\nu = \mathrm{A}$.

Ασκήσεις: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

Αντιστρέψιμοι πίνακες

1.10 Έστω οι **τετραγωνικοί** πίνακες 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και } A' = \begin{bmatrix} -9 & 31 & 19 \\ -7 & 24 & 15 \\ 10 & -34 & -21 \end{bmatrix}$$

Στο παράδειγμα 4 της § 1.8 είδαμε ότι $AA' = \mathbf{I}$. Διαπιστώνουμε ακόμη ότι είναι και $A'A = \mathbf{I}$. Δηλαδή έχουμε

$$AA' = A'A = \mathbf{I}$$

Γενικότερα, για $A \in \mathbf{\Pi}_\nu$ είναι δυνατό να υπάρχει $A' \in \mathbf{\Pi}_\nu$, ώστε:

$$AA' = A'A = \mathbf{I}_\nu \qquad (7)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν υπάρχει ο A′ (όπως στην περίπτωση του αρχικού μας παραδείγματος), τότε είναι **μοναδικός**.

Πράγματι, αν υπήρχε και ο $A'' \in \mathbf{\Pi}_\nu$, ώστε $AA'' = A''A = \mathbf{I}_\nu$, θα είχαμε

$$\begin{aligned} A'' &= A''\mathbf{I}_\nu && [\text{ο } \mathbf{I}_\nu \text{ μοναδιαίος}] \\ &= A''(AA') && [\text{λόγω της (7)}] \\ &= (A''A)A' && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ &= \mathbf{I}_\nu A' && [\text{λόγω της } A''A = \mathbf{I}_\nu] \\ &= A' && [\text{ο } \mathbf{I}_\nu \text{ μοναδιαίος}] \end{aligned}$$

Ο μοναδικός πίνακας $A' \in \mathbf{\Pi}_\nu$ (όταν υπάρχει) που επαληθεύει την (7) λέγεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται $\mathbf{A^{-1}}$. Έτσι **όταν** υπάρχει ο αντίστροφος του $A \in \mathbf{\Pi}_\nu$ μπορούμε να γράφουμε

$$\boxed{\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I}_\nu} \qquad (8)$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει αντίστροφο λέγεται **αντιστρέψιμος**.

Εξάλλου υπάρχουν μη αντιστρέψιμοι πίνακες, όπως π.χ. ο $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Πράγματι, αν υπήρχε πίνακας $B' = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$, ώστε $BB' = B'B = \mathbf{I}$, θα είχαμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+3z & y+3\omega \\ 2x+6z & 2y+6\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} x+3z = 1 \\ 2x+6z = 0 \end{cases}$, το οποίο είναι αδύνατο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την (8) προκύπτει, ότι ο μοναδικός αντίστροφος του A^{-1} υπάρχει και είναι ο A. Δηλαδή

$$(\mathbf{A^{-1}})^{-1} = \mathbf{A}$$

Γι' αυτό οι πίνακες A και A^{-1} λέγονται απλά **αντίστροφοι**.

Επιμεριστικότητα

1.11 Είδαμε ότι στο σύνολο Π_ν των πινάκων $\nu\times\nu$ ορίζεται το άθροισμα και το γινόμενο πινάκων. Έτσι, αν Α, Β, $\Gamma \in \Pi_\nu$, τότε οι πίνακες Α(Β+Γ), ΑΒ και ΑΓ, καθώς και οι (Β+Γ)Α, ΒΑ και ΓΑ είναι πίνακες $\nu\times\nu$. Αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma \qquad \text{και} \qquad (B+\Gamma)A = BA + \Gamma A} \qquad (9)$$

Οι ισότητες (9) που εκφράζουν ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη **επιμεριστική** ως προς την πρόσθεση, επαληθεύονται με τα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -24 \\ -17 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 21 \\ 9 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Ομοίως είναι

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι η πρώτη από τις ισότητες (9) ισχύει και όταν ο Α είναι πίνακας $\nu\times\mu$ και οι Β, Γ πίνακες $\mu\times\rho$, οπότε οι πίνακες Α(Β+Γ), ΑΒ και ΑΓ είναι πίνακες $\nu\times\rho$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι η δεύτερη ισχύει και όταν οι Β, Γ είναι πίνακες $\mu\times\rho$ και ο Α πίνακας $\rho\times k$. Τότε οι πίνακες (Β+Γ)Α, ΒΑ και ΓΑ είναι πίνακες $\mu\times k$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν Α είναι πίνακας $\nu\times\mu$, να δειχτεί ότι:

(i) $0A = O$, (ii) $\lambda O = O$, (iii) $(-1)A = -A$, (iv) $(-\lambda)A = \lambda(-A)$

Οι (i) και (ii) προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό του γινομένου αριθμού με πίνακα.

(iii) Έχουμε: $0\cdot A = O \Rightarrow [(-1)+1]A = O \Rightarrow (-1)A + 1A = O \Rightarrow (-1)A + A = O \Rightarrow (-1)A = -A$.
(iv) Από την τρίτη ιδιότητα της § 1.7 έχουμε $(-\lambda)A = [\lambda(-1)]A = \lambda[(-1)A] = \lambda(-A)$.

2. Αν Α, Β είναι αντιστρέψιμοι πίνακες ν×ν, να δειχτεί ότι ο ΑΒ είναι αντιστρέψιμος και ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Έχουμε: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A[B(B^{-1}A^{-1})] = A[(BB^{-1})A^{-1}] = A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Συνεπώς υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα ν×ν ΑΒ και είναι ο $B^{-1}A^{-1}$.

3. Αν Α, Β, $\Gamma \in \Pi_\nu$ και ο πίνακας Γ είναι αντιστρέψιμος, να δειχτεί ότι:

(i) $A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow A = B$ και (ii) $\Gamma A = \Gamma B \Rightarrow A = B$

Αφού ο Γ είναι αντιστρέψιμος, θα υπάρχει ο $\Gamma^{-1} \in \Pi_\nu$. Έτσι θα έχουμε
(ι) $A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow (A\Gamma)\Gamma^{-1} = (B\Gamma)\Gamma^{-1} \Rightarrow A(\Gamma\cdot\Gamma^{-1}) = B(\Gamma\Gamma^{-1}) \Rightarrow A\cdot I = B\cdot I \Rightarrow A = B$
(ii) $\Gamma A = \Gamma B \Rightarrow \Gamma^{-1}(\Gamma A) = \Gamma^{-1}(\Gamma B) \Rightarrow (\Gamma^{-1}\Gamma)A = (\Gamma^{-1}\Gamma)B \Rightarrow IA = IB \Rightarrow A = B$

4. Να δειχτεί ότι:

(i) $\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\beta & \eta\mu\beta \\ \eta\mu\beta & -\sigma\upsilon\nu\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) & -\eta\mu(\alpha-\beta) \\ \eta\mu(\alpha-\beta) & \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}^2 = I$

(iii) $\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu2\theta & -\eta\mu2\theta \\ \eta\mu2\theta & \sigma\upsilon\nu2\theta \end{bmatrix}$

(i) Έχουμε

$$\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\beta & \eta\mu\beta \\ \eta\mu\beta & -\sigma\upsilon\nu\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta & \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \\ \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta & \eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) & -\eta\mu(\alpha-\beta) \\ \eta\mu(\alpha-\beta) & \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

(ii) Προκύπτει από την (i) για $\alpha = \beta$.

iii) Έχουμε

$$\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta & -2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \\ 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta & \sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu2\theta & -\eta\mu2\theta \\ \eta\mu2\theta & \sigma\upsilon\nu2\theta \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 22, 23, 24, 25

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η γραμμική εξίσωση αx=β

1.12 Έστω η **γραμμική συνάρτηση** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x$. Όταν δοθεί η τιμή της στο x, π.χ. $f(x) = \beta$, μπορούμε να βρούμε το x αν λύσουμε την εξίσωση

$$\alpha x = \beta \qquad (1)$$

Η (1) λέγεται **γραμμική εξίσωση** με έναν άγνωστο και είναι γνωστό ότι, αν:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \neq 0, \text{ έχει τη μοναδική λύση } x = \dfrac{\beta}{\alpha} \\ \alpha = 0 \text{ και } \begin{cases} \beta \neq 0 \text{ είναι αδύνατη} \\ \beta = 0 \text{ είναι αόριστη} \end{cases} \end{array}}$$

Η έννοια του γραμμικού συστήματος

1.13 Γενικά κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\mu x_\mu = \beta \qquad (2)$$

λέγεται **γραμμική εξίσωση** με μ αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **γραμμικό.** Ένα τέτοιο σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους έχει ν εξισώσεις της μορφής (2). Η θέση κάθε εξίσωσης στο σύστημα προσδιορίζεται με ένα πρόσθετο δείκτη 1, 2, 3, ..., ν στους συντελεστές της.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{cases} \qquad (3)$$

Το σύστημα αυτό μπορεί και πάλι να πάρει τη μορφή (1). Πράγματι, επειδή το πρώτο μέλος κάθε εξίσωσης είναι γινόμενο του πίνακα-γραμμή των συντελεστών της με τον πίνακα-στήλη των αγνώστων, το σύστημα (3) γράφεται ως **εξίσωση πινάκων:**

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Αν λοιπόν είναι A ο πίνακας $\nu \times \mu$ των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας-στήλη των μ αγνώστων και B ο πίνακας-στήλη των ν σταθερών όρων, το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$AX = B$$

Έτσι π.χ. το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - 2z = 8 \\ 3x - 8y + 3z = -8 \end{cases}$ γράφεται $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων ενός γραμμικού συστήματος λέγεται **πίνακας του συστήματος,** ενώ ο πίνακας $\nu \times (\mu + 1)$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\mu} & : & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\mu} & : & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\mu} & : & \beta_\nu \end{bmatrix}$$

λέγεται **επαυξημένος πίνακας του συστήματος.** Ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους θα αναφέρεται ως **σύστημα $\nu \times \mu$.**

Αν οι σταθεροί όροι όλων των εξισώσεων ενός γραμμικού συστήματος είναι μηδέν ($\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = 0$), το σύστημα λέγεται **ομογενές.**

Σύνολο λύσεων συστήματος

1.14 **Λύση** ενός γραμμικού συστήματος $\nu \times \mu$ είναι κάθε μ-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ που επαληθεύει το σύστημα.

Έστω S το σύνολο λύσεων ενός συστήματος. Τότε:

- αν $S = \varnothing$ το σύστημα λέγεται **αδύνατο**
- αν $S \neq \varnothing$ υπάρχει τουλάχιστο μια λύση και το σύστημα λέγεται **συμβιβαστό.**

Δυο συστήματα με κοινό σύνολο λύσεων λέγονται **ισοδύναμα.**

Ειδικές περιπτώσεις:

I. Το ομογενές σύστημα έχει πάντοτε τη *μηδενική λύση (0, 0, ..., 0)* και συνεπώς είναι πάντοτε *συμβιβαστό.*

II. Αν όλοι οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι μηδέν ο άγνωστος αυτός παραλείπεται χωρίς να επηρεάζεται η επίλυση του συστήματος(1).

III. Αν οι συντελεστές όλων των αγνώστων μιας εξίσωσης είναι μηδέν, τότε

---

(1) Με την παράλειψη ενός αγνώστου προκύπτει σύστημα (μ' έναν άγνωστο λιγότερο) από τις λύσεις του οποίου προκύπτουν οι λύσεις του αρχικού συστήματος. Π.χ. λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ είναι το ζεύγος (1, 2), ενώ λύση του $\begin{cases} 2x + 3y + 0z = 8 \\ x - 2y + 0z = 3 \end{cases}$ είναι κάθε τριάδα $(1, 2, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

(i) αν ο σταθερός όρος της εξίσωσης αυτής δεν είναι μηδέν, η εξίσωση είναι αδύνατη, συνεπώς και το σύστημα θα είναι αδύνατο.

(ii) αν και ο σταθερός όρος της εξίσωσης αυτής είναι μηδέν, η εξίσωση θα αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των αγνώστων και συνεπώς μπορεί να παραλειφθεί χωρίς να επηρεάζεται η επίλυση του συστήματος.

Μέθοδος διαδοχικών απαλοιφών

1.15 Είναι γνωστό ότι η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλα ισοδύναμα συστήματα και τελικά σε σύστημα εξισώσεων με προφανείς λύσεις. Αυτή η μετατροπή γίνεται κυρίως[1] αν αντικαταστήσουμε μια εξίσωση (ε) του συστήματος

- *με την λ(ε), που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της (ε) επί* $\lambda \in \mathbb{R}^*$
- *με την «(ε) + (ε΄)», που προκύπτει αν προσθέσουμε στα μέλη της (ε) τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης εξίσωσης (ε΄) του συστήματος*
- *γενικότερα με έναν οποιονδήποτε* ***«γραμμικό συνδυασμό»*** *«λ(ε) + λ΄(ε΄)»,* $\lambda \neq 0$, *των (ε) και (ε΄).*

Με επιλογή κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού αποβλέπουμε κάθε φορά στην απαλοιφή ενός αγνώστου. Ειδικότερα, αν σε μια εξίσωση (ε) του συστήματος π.χ. ο άγνωστος x έχει συντελεστή 1, μπορούμε να τον απαλείψουμε από κάθε άλλη εξίσωση (ε΄) αν αντικαταστήσουμε την (ε΄) με την «(-λ)(ε) + (ε΄)», όπου λ ο συντελεστής του x στην (ε΄).

Ας πάρουμε π.χ. το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{\begin{aligned} (\varepsilon_1)&: \ 2x - 3y + z = -1 \\ (\varepsilon_2)&: \ x + 2y - 2z = 8 \\ (\varepsilon_3)&: \ 3x - 8y + 3z = -8 \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Η επίλυση του συστήματος επιτυγχάνεται με τα ακόλουθα βήματα:

- Απαλείφουμε τον άγνωστο x από δυο εξισώσεις, π.χ. τις (ε_1) και (ε_3), του συστήματος, που σημαίνει ότι τις αντικαθιστούμε με άλλες που δεν έχουν το x.

(1) Βλέπε Μαθηματικά Α΄ Λυκείου.

Αρκεί στη θέση της (ε_1) να θέσουμε την «(ε_1) + (-2) (ε_2)» που γράφεται:

$$(2-2)x + (-3-4)y + (1+4)z = -1-16 \quad \text{ή}$$
$$(\varepsilon_1'): -7y + 5z = -17$$

Ομοίως στη θέση της (ε_3) θέτουμε την «$(-3)(\varepsilon_2) + (\varepsilon_3)$» που γράφεται:

$$(3-3)x + (-6-8)y + (6+3)z = -24-8 \quad \text{ή}$$
$$(\varepsilon_3'): -14y + 9z = -32$$

Έτσι το σύστημα (4) με εναλλαγή των δυο πρώτων εξισώσεών του είναι ισοδύναμο με το:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 8 \\ -7y + 5z &= -17 \\ -14y + 9z &= -32 \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

- Απαλείφουμε τον y από την (ε_3') αντικαθιστώντας την με «$(-2)(\varepsilon_1') + (\varepsilon_3')$», δηλαδή με την $(14-14)y + (-10+9)z = -34+32$ ή $-z = 2$ ή τελικά

$$z = -2$$

Έτσι το σύστημα (4) είναι ισοδύναμο με το:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 8 \\ -7y + 5z &= -17 \\ z &= -2 \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός κάτω (§ 1.3). Με αντικατάσταση της τιμής του z στη δεύτερη εξίσωση του (6) και στη συνέχεια με αντικατάσταση των y και z στην πρώτη, έχουμε τη λύση του συστήματος (x, y, z) = = (2, 1, -2). Στην ουσία αυτές οι αντικαταστάσεις σημαίνουν:

- απαλοιφή του z από τις δυο πρώτες εξισώσεις του (6) και στη συνέχεια
- απαλοιφή του y από την πρώτη εξίσωση του (6)

που οδηγούν στο ισοδύναμο με το (4) σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} x \qquad\quad &= 2 \\ y \quad\ &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}\right.$$

του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι ο μοναδιαίος 3×3.

Γενικά η ίδια μέθοδος εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε σύστημα $\nu \times \mu$. Οι διαδοχικές απαλοιφές γίνονται με γνώμονα τη μετατροπή του πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτό και τελικά σε μοναδιαίο. Την όλη διαδικασία, που είναι προσαρμοσμένη σε πρόγραμμα υπολογιστή, διευκολύνει η κατάλληλη αντιμετάθεση εξισώσεων ή και αγνώστων που έχουν συντελεστή 1 ή 0.

Λύση συστήματος με επαυξημένο πίνακα

1.16 Παρακολουθώντας **βήμα-βήμα** τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την επίλυση του συστήματος (4), ας εντοπίσουμε τα ισοδύναμα συστήματα, στα οποία μετατρέπεται το σύστημα (4). Έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-2z=8 \\ 3x-8y+3z=-8 \end{array}\right. \;-2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -7y+5z=-17 \\ x+2y-2z=8 \\ 3x-8y+3z=-8 \end{array}\right. \;-3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -7y+5z=-17 \\ x+2y-2z=8 \\ -14y+9z=-32 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y+5z=-17 \\ -14y+9z=-32 \end{array}\right. \;-2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y+5z=-17 \\ -z=2 \;\cdot(-1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y+5z=-17 \\ z=-2 \end{array}\right. \;-5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y=-7:(-7) \\ z=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right. \;2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=4 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right. \;-2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Η παραπάνω διαδικασία επίλυσης του συστήματος συνεπάγεται αντίστοιχες μετατροπές του επαυξημένου πίνακά του σε «ισοδύναμους» πίνακες.[1] Έτσι η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -7 & 5 & -17 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{array}\right] -3 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -7 & 5 & -17 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -14 & 9 & -32 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & -14 & 9 & -32 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \cdot(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] -5 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] :(-7)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] 2 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] -2$$

(1) Δηλαδή πίνακες που αντιστοιχούν σε ισοδύναμα συστήματα.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν κατά την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας παρουσιαστεί μια γραμμή της μορφής

$$0 \quad 0 \ldots 0 \;\vdots\; \alpha$$

τότε (§ 1.12) αν:

- $\alpha \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.
- $\alpha = 0$ η αντίστοιχη εξίσωση του συστήματος παραλείπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω το σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 5x+4y+3z=-1 \\ x+4y+6z=0 \end{array}\right.$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος καί έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] -3 \; -5 \; -1 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -6 & -7 & -11 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right] 3 \; -4 \; -4 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 41 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right] :9$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] -7 \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Από την τρίτη γραμμή του τελευταίου πίνακα προκύπτει σύμφωνα με την παρατήρηση 1, ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της § 1.16 στο σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} 2x-z-4\omega+5\varphi=4 \\ -2x+5z-12\omega-17\varphi=-4 \\ 2y-2\omega-\varphi=2 \end{array}\right.$

Έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -12 & -17 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -12 & -17 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -12 & 0 \end{array}\right] :4 \sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 0 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} :2 \\ :2 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} x \quad -4\omega + \quad \varphi = 2 \\ y \; - \omega - \frac{1}{2}\varphi = 1 \\ z - 4\omega - \; 3\varphi = 0 \end{cases}$

που γράφεται $\begin{cases} x = 4\omega - \varphi + 2 \\ y = \omega - \frac{\varphi}{2} + 1 \\ z = 4\omega + 3\varphi \end{cases}$ και έχει άπειρες λύσεις οι οποίες προκύπτουν,

αν οι άγνωστοι ω και φ πάρουν αυθαίρετες τιμές.

Σημείωση

Οι άγνωστοι ω, φ που παίρνουν αυθαίρετες τιμές λέγονται **ελεύθεροι άγνωστοι**, ενώ οι x, y, z που οι τιμές τους εξαρτώνται από τις τιμές των ω και φ λέγονται **κύριοι άγνωστοι.**

Ασκήσεις: 26, 27, 28, 29, 30

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ορίζουσα 2ης τάξης

1.17 Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x = \beta_1 \\ \alpha_2 x = \beta_2 \end{cases}$ (1)

με επαυξημένο πίνακα $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$

Ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι γενικά συμβιβαστό, γιατί η ρίζα της πρώτης εξίσωσης δεν επαληθεύει κατ' ανάγκη τη δεύτερη εξίσωση.

Θα ζητήσουμε μια **αναγκαία** συνθήκη για να είναι το σύστημα (1) **συμβιβαστό.** Έστω ότι υπάρχει λύση $x = x_0$ του συστήματος. Τότε, αν:

- $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, θα είναι $x_0 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ και επειδή $\alpha_2 x_0 = \beta_2$, θα έχουμε $\alpha_2 \cdot \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \beta_2$, δηλαδή

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$$

Στην ίδια συνθήκη καταλήγουμε, αν υποθέσουμε $\alpha_2 \neq 0$.

- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, τότε η προηγούμενη συνθήκη ισχύει.

Ώστε: **Αν το σύστημα (1) είναι συμβιβαστό τότε**

$$\boldsymbol{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0} \qquad (2)$$

Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$ που αντιστοιχεί στον **τετραγωνικό** πίνακα M, παριστάνεται σχηματικά $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ και τότε λέγεται **ορίζουσα του πίνακα M.** Συνήθως γράφεται **D(M)** ή απλά **D**. Επειδή αντιστοιχεί σε πίνακα 2×2 είναι μια **ορίζουσα 2ης τάξης.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί το σύστημα (1)

Αν $\mathbf{D \neq 0}$, το σύστημα (1), όπως προκύπτει από το προηγούμενο συμπέρασμα, είναι **αδύνατο.**
Αν $\mathbf{D = 0}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$. Τότε η πρώτη εξίσωση του (1) έχει τη **μοναδική λύση** $x = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$, η οποία λόγω της $D = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, επαληθεύει και τη δεύτερη εξίσωση.
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Τότε (§ 1.12), αν
  1. $\beta_1 \neq 0$ ή $\beta_2 \neq 0$, το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).
  2. $\beta_1 = \beta_2 = 0$, το σύστημα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αόριστο).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει, ότι μόνη η συνθήκη $D = 0$ **δεν είναι ικανή** για να είναι το σύστημα (1) **συμβιβαστό.**
2. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D = 0$ και $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$.

Αντίστροφος ενός πίνακα 2×2

1.18 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, τον αντίστροφό του πίνακα A^{-1}. *Έστω ότι υπάρχει* πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε

$$AX = I$$

Τότε:

$$AX = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta\omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση του (4) αποκλείεται $\gamma = \delta = 0$. Υποθέτουμε ότι είναι π.χ. $\gamma \neq 0$, οπότε από τη $\gamma x + \delta z = 0$ βρίσκουμε

$$x = -\frac{\delta}{\gamma} z \qquad (5)$$

και η $\alpha x + \beta z = 1$ γίνεται $\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta \right) z = 1$ ή ισοδύναμα $(\alpha\delta - \beta\gamma) z = -\gamma$.

Έστω D η ορίζουσα του πίνακα A. Τότε η $(\alpha\delta - \beta\gamma) z = -\gamma$ γράφεται

$$Dz = -\gamma \qquad (6)$$

οπότε, επειδή $\gamma \neq 0$, **θα είναι κατ' ανάγκη $D \neq 0$.**

Από τις (6) και (5) βρίσκουμε

$$z = \frac{-\gamma}{D}, \qquad x = \frac{\delta}{D}$$

Ομοίως από το σύστημα (4) βρίσκουμε:

$$y = \frac{-\beta}{D}, \qquad \omega = \frac{\alpha}{D}$$

Άρα είναι

$$X = \begin{bmatrix} \delta/D & -\beta/D \\ -\gamma/D & \alpha/D \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Ο πίνακας X ορίστηκε από την $AX = I$ αλλά επαληθεύει και την $XA = I$, γιατί

$$XA = \left(\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Συνεπώς είναι $X = A^{-1}$.

Αντιστρόφως, αν η ορίζουσα του πίνακα A είναι $D \neq 0$, ορίζεται από την (7) ο πίνακας X για τον οποίο είναι $AX = XA = I$. Άρα $X = A^{-1}$.

Έχουμε λοιπόν το συμπέρασμα

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν η ορίζουσά του $D \neq 0$.
Αντίστροφος του A είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ υπάρχει, γιατί $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, και είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Λύση συστήματος με τον αντίστροφο πίνακα

1.19 Έστω π.χ. το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

το οποίο, αν θέσουμε

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

γράφεται

$$AX = B \qquad (8)$$

Αν ο **πίνακας A** του συστήματος (8) **είναι αντιστρέψιμος**, τότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (8) από αριστερά με A^{-1} έχουμε:

$$\begin{aligned} & A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & (A^{-1}A)X = A^{-1}B && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ \Leftrightarrow\ & IX = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & X = A^{-1}B && [I \text{ μοναδιαίος πίνακας}] \end{aligned}$$

Ο πίνακας λοιπόν $A^{-1}B$ είναι **η λύση** του συστήματος (8), γιατί το επαληθεύει. Πράγματι:

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$$

Ώστε: **Αν ο πίνακας A ενός συστήματος $AX = B$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση**

$$X = A^{-1}B$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε παραπάνω για τη λύση του συστήματος

(8) εφαρμόζεται γενικότερα σε συστήματα $\nu \times \nu$, αρκεί ο πίνακας Α του συστήματος να είναι αντιστρέψιμος.

Εφαρμογή: Σύστημα 2×2

1.20 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \qquad (9)$$

Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος αυτού, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $D \neq 0$. Τότε, όπως είδαμε στην §1.18, ο πίνακας του συστήματος έχει αντίστροφο τον $\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}$ και συνεπώς, σύμφωνα με το συμπέρασμα της §1.19, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 \\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \end{bmatrix}$$

Αν θέσουμε $D_x = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

έχουμε ως μοναδική λύση του συστήματος την

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}}$$

- $D = 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

1. $D_x \neq 0$, τότε αποκλείεται να είναι $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Υποθέτουμε $\beta_1 \neq 0$ και θέτουμε $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \lambda$, οπότε $\beta_2 = \lambda\beta_1$. Επειδή $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, θα είναι και $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, ενώ από την $D_x = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 \neq 0$, είναι $\gamma_2 \neq \lambda\gamma_1$. Έτσι, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος γράφεται ισοδύναμα (§1.16)

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \vdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \vdots & \gamma_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \vdots & \gamma_1 \\ \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \vdots & \gamma_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \vdots & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \vdots & \gamma_2 - \lambda\gamma_1 \end{bmatrix}$$

και επειδή $\gamma_2 - \lambda\gamma_1 \neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο.**

2. $D_y \neq 0$. Ομοίως καταλήγουμε ότι το σύστημα είναι επίσης **αδύνατο.**

3. $D_x = D_y = 0$. Τότε:

(i) Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, το σύστημα είναι αόριστο, δηλ. έχει άπειρες λύσεις, (αν $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) ή αδύνατο (αν $\gamma_1 \neq 0$ ή $\gamma_2 \neq 0$).

(ii) Αν υπάρχει συντελεστής μη μηδενικός, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, τότε, όπως στην περίπτωση 1, βρίσκουμε $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\beta_1$, $\gamma_2 = \lambda\gamma_1$. Συνεπώς το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$ και έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο y. Οι λύσεις αυτές είναι

$$\left(\frac{\gamma_1 - \beta_1 y}{\alpha_1}, y\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω το σύστημα: $\begin{cases} 3x+5y = 12 \\ x-3y = 4 \end{cases}$

Επειδή $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -56$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ το σύστημα έχει τη λύση $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56/-14 \\ 0/-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Θεωρούμε ακόμη το σύστημα: $\begin{cases} 2x-3y = 1 \\ -4x+6y = 5 \end{cases}$, στο οποίο είναι

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ και $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$. Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} (\lambda+2)x+7(\lambda-3)y = 35 \\ x+(\lambda-3)y = \lambda \end{cases}$

Έχουμε $D = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 7(\lambda-3) \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3) - 7(\lambda-3) = (\lambda-3)(\lambda+2-7) = (\lambda-3)(\lambda-5)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $(\lambda-3)(\lambda-5) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq 5)$. Τότε επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 35 & 7(\lambda-3) \\ \lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} = 35(\lambda-3) - 7\lambda(\lambda-3) = 7(\lambda-3)(\lambda-5) \text{ και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 35 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda-35 = (\lambda+7)(\lambda-5)$$

το σύστημα έχει την μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = -7, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda+7}{\lambda-3}$$

II. $\lambda-3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Επειδή τώρα είναι $D_y = (3+7)(3-5) = -20 \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.

III. $\lambda-5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$. Επειδή $D_x = D_y = 0$ και υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής, το σύστημα είναι αόριστο. Το σύστημα τώρα γίνεται $\begin{cases} 7x+14y = 35 \\ x+2y = 5 \end{cases}$ και είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+2y = 5$, η οποία έχει ελεύθερο π.χ. τον άγνωστο y. Συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι οι $(5-2y, y)$

2. **Αν** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, **να βρεθεί ο πίνακας Χ.**

Επειδή $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1$, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και έχει αντίστροφο τον $\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Τώρα έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} X\right) = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\right) X = \begin{bmatrix} -51 & 29 \\ 20 & -11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow IX = \begin{bmatrix} -51 & 29 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -51 & 29 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}.$$

3. **Αν** $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ **και** $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$, **να δειχτεί ότι** $A^2 - (\alpha+\delta)A + DI = O$ **(Ι ο μοναδιαίος 2×2).**

Έχουμε $A^2-(\alpha+\delta)A+DI = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^2 - (\alpha+\delta)\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + (\alpha\delta-\beta\gamma)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^2+\alpha\delta & \alpha\beta+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \alpha\delta+\delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\delta-\beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta-\beta\gamma \end{bmatrix} = O$$

Ασκήσεις: 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

Ορίζουσα 3ης τάξης

1.21 Το σύστημα $\begin{cases} 3x+2y = -1 \\ 2x+\ y = \ 1 \end{cases}$ έχει τη λύση (x, y) = (3, -5).

Έτσι το σύστημα $\begin{cases} 3x+2y = -1 \\ 2x+\ y = \ 1 \\ 5x+4y = \gamma \end{cases}$ είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν η λύση (3, -5) των δύο πρώτων εξισώσεών του επαληθεύει και την $5x+4y = \gamma$. Δηλαδή, αν ικανοποιείται η συνθήκη $5 \cdot 3+4(-5) = \gamma$ ή $\gamma = -5$. Άρα ένα σύστημα 3×2 γενικά δεν είναι συμβιβαστό.

Θα ζητήσουμε μια **αναγκαία** συνθήκη για να είναι γενικότερα συμβιβαστό τό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y = \gamma_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y = \gamma_2 \\ \alpha_3x+\beta_3y = \gamma_3 \end{cases} \qquad (10)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος αυτού είναι ο **τετραγωνικός** πίνακας 3×3

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Με διαγραφή της γραμμής και της στήλης που περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο του πίνακα Μ σχηματίζεται ένας πίνακας 2×2, που είναι ένας *υποπίνακας*(1) του Μ. Π.χ. με διαγραφή της γραμμής και της στήλης του στοιχείου γ_2 σχηματίζεται ο υποπίνακας $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$. Έτσι υπάρχουν 9 τέτοιοι πίνακες 2×2 μέ αντίστοιχες ορίζουσες 2ης τάξης, τις οποίες θα συμβολίζουμε με το αντίστοιχο προς το διαγραφόμενο στοιχείο κεφαλαίο γράμμα. Π.χ. αντίστοιχη προς το στοιχείο γ_2 είναι η ορίζουσα $\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$.

Έστω ότι υπάρχει μια λύση (x_0,y_0) του συστήματος (10). Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3| \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με αναδιάταξη ενδεχομένως των αγνώστων ή των εξισώσεων του συστήματος) υποθέτουμε ότι $\Gamma_3 \neq 0$. Τότε το σύστημα των δυο πρώτων εξισώσεων έχει **μοναδική λύση** που σύμφωνα με την § 1.20 είναι:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \frac{-A_3}{\Gamma_3},\quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_3}{\Gamma_3}$$

και επειδή $\alpha_3x_0 + \beta_3y_0 = \gamma_3$, θα έχουμε $\alpha_3 \frac{-A_3}{\Gamma_3} + \beta_3 \frac{B_3}{\Gamma_3} = \gamma_3$, δηλαδή

$$\boxed{\alpha_3A_3 - \beta_3B_3 + \gamma_3\Gamma_3 = 0} \qquad (1$$

Η (11), αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος της, γράφεται

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 = 0$$

Στην ίδια συνθήκη καταλήγουμε, αν υποθέσουμε $\Gamma_1 \neq 0$ ή $\Gamma_2 \neq 0$.

- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$. Στην περίπτωση αυτή επειδή το σύστημα (10) είναι συμβιβαστό, κατ' ανάγκη θα είναι (§ 1.20) και $A_i = B_i = 0$ (i = 1, 2, 3). Άρα (11) ισχύει.

(1) Με τον όρο «υποπίνακας» ενός πίνακα Μ εννοούμε κάθε πίνακα που ...

Ώστε: Αν το σύστημα (10) είναι συμβιβαστό τότε θα ισχύει η (11), δηλαδή

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 = 0$$

Ο αριθμός $\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1$ που αντιστοιχεί στον **τετραγωνικό** πίνακα **Μ**, παριστάνεται σχηματικά

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

και τότε λέγεται **ορίζουσα του πίνακα Μ.** Συνήθως γράφεται **D (M)** ή απλά **D**. Είναι μια **ορίζουσα** 3ης **τάξης**.

Σύστημα 3×2

1.22 Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y = \gamma_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y = \gamma_2 \\ \alpha_3x+\beta_3y = \gamma_3 \end{cases}$ (10)

και έστω D η ορίζουσα του επαυξημένου πίνακά του.

Αν **D ≠ 0**, το σύστημα (10), όπως προκύπτει από το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου, είναι **αδύνατο.**

Υποθέτουμε λοιπόν **D = 0** και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3| \neq 0$, π.χ. $\Gamma_3 \neq 0$. Τότε το σύστημα των δυο πρώτων εξισώσεων του (10) έχει (§ 1.20) τη **μοναδική λύση** $x = \frac{-A_3}{\Gamma_3}$, $y = \frac{B_3}{\Gamma_3}$, η οποία, λόγω της $D = \alpha_3A_3-\beta_3B_3+\gamma_3\Gamma_3 = 0$, επαληθεύει και την $\alpha_3x+\beta_3y = \gamma_3$.
- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$. Τότε σύμφωνα με την § 1.20
  1. Αν μια από τις ορίζουσες A_i ή B_i (i = 1, 2, 3) δεν είναι μηδέν, ένα σύστημα 2×2 εξισώσεων του (10) είναι αδύνατο, άρα και το (10) είναι **αδύνατο.**
  2. Αν $A_i = B_i = 0$ (i = 1, 2, 3) και τα τρία συστήματα 2×2 εξισώσεων του (10) είναι αόριστα, άρα και το (10) είναι **αόριστο,** εκτός από την περίπτωση που ένα σύστημα 2×2 έχει όλους τους συντελεστές των αγνώστων μηδέν και ένα τουλάχιστο σταθερό όρο μη μηδενικό, οπότε είναι **αδύνατο.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

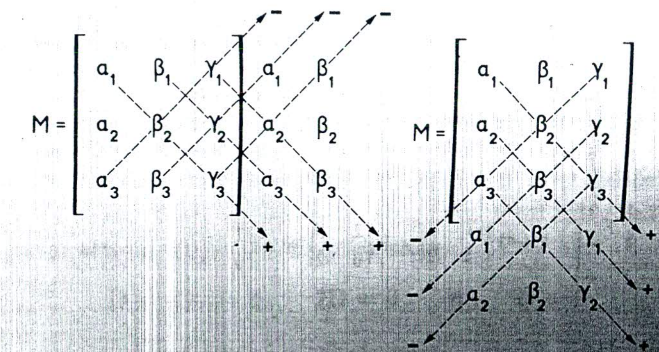
1. Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι μόνη η συνθήκη D = 0 **δεν είναι ικανή** για να είναι το σύστημα (10) **συμβιβαστό.**
2. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν D = 0 και

Ανάπτυγμα ορίζουσας 3ης τάξης

1.23 Από όσα είπαμε στην § 1.21 προκύπτει ότι η ορίζουσα (12) του πίνακα Μ γράφεται:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 \qquad (13)$$

Τα έξι γινόμενα του τελευταίου μέλους της ισότητας (13) μπορούν να σχηματιστούν, με τα πρόσημά τους, από τον πίνακα Μ με διάφορους τρόπους, όπως δείχνουν τα σχήματα (**κανόνας Sarrus**)



Κάθε ορίζουσα 2ης τάξης που αντιστοιχεί σε υποπίνακα του Μ ο οποίος προκύπτει με διαγραφή της γραμμής και στήλης ενός στοιχείου, λέγεται **ελάσσων ορίζουσα** του διαγραφόμενου στοιχείου. Π.χ. η ορίζουσα $\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$ είναι η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου γ_2.

Εξάλλου από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ακόμη ότι

$$D = \alpha_3A_3 - \beta_3B_3 + \gamma_3\Gamma_3 \qquad (14)$$

Το δεύτερο μέλος της (14) λέγεται **ανάπτυγμα** της ορίζουσας (12) **κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής της**[1]. Θα μπορούσαμε να έχουμε αναπτύγματα της (12) κατά τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής. Τότε διαπιστώνουμε (με εκτέλεση των πράξεων) ότι

$$\begin{aligned} D &= \alpha_1A_1 - \beta_1B_1 + \gamma_1\Gamma_1 \\ &= -\alpha_2A_2 + \beta_2B_2 - \gamma_2\Gamma_2 \\ &= \alpha_3A_3 - \beta_3B_3 + \gamma_3\Gamma_3 \end{aligned}$$

(1) Οι γραμμές και οι στήλες ενός τετραγωνικού πίνακα Μ λέγονται αντιστοίχως γραμμές και στήλες της ορίζουσας D(M)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Γενικά το ανάπτυγμα της D κατά τα στοιχεία της i-γραμμής είναι

$$D = (-1)^{i+1} (\alpha_i A_i - \beta_i B_i + \gamma_i \Gamma_i) \qquad (15)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έχουμε $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 32 - (-1)(-8) + 3 \cdot 20 = 116$

Ομοίως, αν αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 2ης και 3ης γραμμής της, έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 116$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \dots = 116$$

Ιδιότητες οριζουσών

1.24 Έστω $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ και $D' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ η ορίζουσα που

έχει ως στήλες τις γραμμές της D με την ίδια διάταξη. Τότε είναι

$$\begin{aligned} D' &= \alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2 (\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3 (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 \\ &= D \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

1. **Η ορίζουσα δε μεταβάλλεται, αν οι γραμμές γίνουν στήλες με την ίδια διάταξη.**
   Ισχύουν ακόμα τα εξής:

2. **Για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα, μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμά της κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε στήλης της.** (Άμεση συνέπεια της ιδιότητας 1).

3. **Αν εναλλάξουμε τη θέση δυο γραμμών (ή *στηλών*) μιας ορίζουσας, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.**
   Π.χ. αν εναλλάξουμε την 1η και 2η γραμμή της D, έχουμε την

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

   Αν πάρουμε το ανάπτυγμα της D_1 κατά τα στοιχεία της 2ης γραμμής της, σύμφωνα με τον τύπο (15), έχουμε

$$D_1 = -\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = -\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 - \gamma_1 \Gamma_1 = -D$$

   Συνέπεια της ιδιότητας 3 είναι ότι:

4. **Αν τα αντίστοιχα στοιχεία δυο γραμμών (ή *στηλών*) μιας ορίζουσας D είναι ίσα, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.**
   Πράγματι, η εναλλαγή των δυο αυτών γραμμών (ή στηλών) δε μεταβάλλει την ορίζουσα, αφού είναι τα στοιχεία τους ίσα. Εξάλλου (ιδιότ. 3) η ορίζουσα D μετατρέπεται στην -D. Έτσι θα είναι

$$D = -D \quad \text{ή} \quad 2D = 0 \quad \text{ή} \quad D = 0$$

5. **Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή *στήλης*) μιας ορίζουσας με τον αριθμό λ, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με το λ.**
   Πράγματι, έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda\beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda\beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\lambda\beta_1 B_1 + \lambda\beta_2 B_2 - \lambda\beta_3 B_3 = \lambda(-\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 - \beta_3 B_3) = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

   Από τις ιδιότητες 4 και 5 προκύπτει ότι:

6. **Αν τα αντίστοιχα στοιχεία δυο γραμμών (ή *στηλών*) μιας ορίζουσας είναι ανάλογα, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.**
   Π.χ. είναι

$$\begin{vmatrix} -8 & 24 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 5 & -15 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & (-3)(-8) & 2 \\ 1 & (-3)\cdot 1 & 7 \\ 5 & (-3)\cdot 5 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} -8 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 0 = 0$$

7. **Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή *στήλης*) μιας ορίζουσας D είναι άθροισμα δυο προσθετέων, τότε η D ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών.**

Π.χ. είναι $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2' + \alpha_2'' & \beta_2' + \beta_2'' & \gamma_2' + \gamma_2'' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

$$= -(\alpha_2' + \alpha_2'')A_2 + (\beta_2' + \beta_2'')B_2 - (\gamma_2' + \gamma_2'')\Gamma_2$$
$$= (-\alpha_2' A_2 + \beta_2' B_2 - \gamma_2' \Gamma_2) + (-\alpha_2'' A_2 + \beta_2'' B_2 - \gamma_2'' \Gamma_2)$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2'' & \beta_2'' & \gamma_2'' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

Από την ιδιότητα 7 προκύπτει ότι:

8. **Αν στα στοιχεία μιας γραμμής** (ή *στήλης*) **μιας ορίζουσας προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής** (ή *μιας άλλης στήλης*) **πολλαπλασιασμένα με αριθμό λ, η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.**

Π.χ. έχουμε $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1+\lambda\alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2+\lambda\alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3+\lambda\alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda\alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda\alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda\alpha_3 \end{vmatrix}$

$$= D + 0 = D$$

9. **Μια ορίζουσα που αντιστοιχεί σε τριγωνικό πίνακα, είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της.**

Πράγματι, έχουμε π.χ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - 0\cdot\gamma_2) = \alpha_1\beta_2\gamma_3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\text{-}1 & 1 & 1 \\ 35\text{-}34 & 37 & 34 \\ 23\text{-}25 & 26 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\text{-}1 & 1\text{-}1 & 1 \\ 35\text{-}34 & 37\text{-}34 & 34 \\ 23\text{-}25 & 26\text{-}25 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 34 \\ -2 & 1 & 25 \end{vmatrix}$

   και αν αναπτύξουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής βρίσκουμε:

   $D = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$

2. $\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\beta+\gamma)-\beta-\gamma & \alpha-(\gamma+\alpha)-\gamma & \alpha-\beta-(\alpha+\beta) \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\gamma & -2\beta \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

   $= -(-2\gamma)\begin{vmatrix} \beta & \beta \\ \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} + (-2\beta)\begin{vmatrix} \beta & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma \end{vmatrix}$

   $= 2\beta\gamma\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} -2\beta\gamma\begin{vmatrix} \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma-\beta+\alpha+\gamma) = 4\alpha\beta\gamma$

Ασκήσεις: 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45

Ομογενές σύστημα 3×3

1.25 Έστω το ομογενές σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0 \end{cases}$ (1

και D η ορίζουσα του πίνακά του. Στην § 1.14 είδαμε ότι το ομογενές σύστη είναι πάντοτε συμβιβαστό και έχει τουλάχιστο τη μηδενική λύση. Εξάλλου είν φανερό ότι αν έχει μια μη μηδενική λύση (x_0, y_0, z_0) θα έχει και τις $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Το σύστημα (18) έχει και μη μηδενικές λύσεις, αν και μόνο
$D = 0$

Απόδειξη. Έστω $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ μια λύση του (18). Ένα τουλάχιστο τα x_0, y_0, z_0 δεν είναι μηδέν. Αν π.χ. $z_0 \neq 0$, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z_0 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z_0 = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή το} \quad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = -\gamma_1 z_0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = -\gamma_2 z_0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = -\gamma_3 z_0 \end{cases} \quad ($$

είναι συμβιβαστό σύστημα 3×2 και έχει τη λύση (x_0, y_0). Συνεπώς (§ 1.21) έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & -\gamma_1 z_0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -\gamma_2 z_0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} z_0 = 0 \quad \text{ή} \quad Dz_0 = 0$$

και επειδή $z_0 \neq 0$, θα είναι $D = 0$.

Αντιστρόφως έστω $D = 0$. Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Υπάρχει μη μηδενική ελάσσων ορίζουσα της D, π.χ. $\Gamma_3 \neq 0$. Τότε για $z_0 \in \mathbb{R}$ τό σύστημα (19), λόγω της (20), έχει (§ 1.22, παρατ. 2) τη μοναδ λύση $x = \dfrac{A_3}{\Gamma_3} z_0$, $y = \dfrac{-B_3}{\Gamma_3} z_0$. Επομένως το (18) έχει άπειρες λύσεις με ε θερο τον άγνωστο z. Έτσι για αυθαίρετες τιμές του $z \in \mathbb{R}$ έχουμε τις λύ $\left(\dfrac{A_3}{\Gamma_3} z, \dfrac{-B_3}{\Gamma_3} z, z\right)$, άρα και τις $(A_3 z, -B_3 z, \Gamma_3 z)$.
2. Όλες οι ελάσσονες ορίζουσες της D είναι μηδέν. Στην ειδική περίπτ που όλοι οι συντελεστές των αγνώστων είναι μηδέν, το σύστημα (18) αλη ει για οποιεσδήποτε τιμές των αγνώστων (και οι τρεις άγνωστοι ελεύθερο

Όταν ένας τουλάχιστο από τους συντελεστές ...

δεν είναι μηδέν, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, θέτουμε $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\alpha_3 = \lambda\alpha_1$. Τότε από τις $\Gamma_3 = 0$, $B_3 = 0$ προκύπτει ότι $\beta_2 = k\beta_1$, $\gamma_2 = k\gamma_1$, ενώ από τις $\Gamma_2 = 0$, $B_2 = 0$ ότι $\beta_3 = \lambda\beta_1$, $\gamma_3 = \lambda\gamma_1$ αντιστοίχως. Έτσι το σύστημα (18) είναι ισοδύναμο με την πρώτη εξίσωσή του, που γράφεται

$$x = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}y - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}z$$

και έχει ελεύθερους τους αγνώστους y, z. Τότε για αυθαίρετες τιμές των $y, z \in \mathbb{R}$ έχουμε τις λύσεις $\left(\frac{-\beta_1}{\alpha_1}y - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}z, y, z\right)$, άρα και τις $(-\beta_1 y - \gamma_1 z, \alpha_1 y, \alpha_1 z)$.

Αντίστροφος ενός πίνακα 3×3

1.26 Έστω ο **τετραγωνικός** πίνακας $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ με ορίζουσα D.

Θα αποδείξουμε ότι αν $D \neq 0$, ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, τότε οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων της D (που δεν είναι όλες μηδέν) σχηματίζουν τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$$

και μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

Πράγματι:

Στο παραπάνω γινόμενο τα τρία διαγώνια στοιχεία είναι αναπτύγματα της D κατά τα στοιχεία μιας γραμμής της, όπως π.χ. $-\alpha_2A_2 + \beta_2B_2 - \gamma_2\Gamma_2 = D$. Τα υπόλοιπα στοιχεία είναι τα ίδια αυτά αναπτύγματα στα οποία έχουν αντικατασταθεί τα στοιχεία μιας γραμμής της D με τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής της, π.χ.

$$-\alpha_1A_2 + \beta_1B_2 - \gamma_1\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε τον πίνακα $M' = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$ (που ορίζεται επειδή $D \neq 0$), θα είναι $MM' = I$. Τότε βρίσκουμε ότι είναι και $M'M = I$ και συνεπώς (§ 1.10) ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος.

Ώστε: **Αν η ορίζουσα D του πίνακα M δεν είναι μηδέν, ο M είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του πίνακας είναι ο**

$$M^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι και αντιστρόφως, αν ο M είναι αντιστρέψιμος, τότε $D \neq 0$.

Εφαρμογή. Λύση συστήματος 3×3

1.27 Έστω το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z = \delta_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z = \delta_2 \\ \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z = \delta_3 \end{cases} \qquad (22)$$

που γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Αν D είναι η ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος (22), διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$D \neq 0$.** Τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς το (22) έχει (§ 1.19, παρατ.) τη μοναδική λύση

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta_1A_1-\delta_2A_2+\delta_3A_3 \\ -\delta_1B_1+\delta_2B_2-\delta_3B_3 \\ \delta_1\Gamma_1-\delta_2\Gamma_2+\delta_3\Gamma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x/D \\ D_y/D \\ D_z/D \end{bmatrix}$$

Αλλά η $D_x = \delta_1A_1 - \delta_2A_2 + \delta_3A_3$ προκύπτει από την $D = \alpha_1A_1 - \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3$, αν η στήλη των συντελεστών α_1, α_2, α_3 του x αντικατασταθεί με τη στήλη δ_1, δ_2, δ_3.

Ομοίως η $D_y = -\delta_1B_1 + \delta_2B_2 - \delta_3B_3$ προκύπτει από την D, αν η στήλη των συντελεστών του y αντικατασταθεί με τη στήλη των δ_1, δ_2, δ_3 και η $D_z = \delta_1\Gamma_1 - \delta_2\Gamma_2 + \delta_3\Gamma_3$ προκύπτει από την D, αν η στήλη των συντελεστών του z αντικατασταθεί με τη στήλη των δ_1, δ_2, δ_3.

Έτσι η λύση του συστήματος (22) είναι

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα λέγεται **σύστημα Cramer.**

- **D = 0.** Τότε όπως θα αποδείξουμε στο 3° κεφάλαιο το σύστημα είναι **αδύνατο** ή **αόριστο.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σύστημα $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ 4x-4y+3z=6 \end{cases}$

έχει $D = -7 \neq 0$ και συνεπώς μοναδική λύση. Με τον κανόνα Sarrus βρίσκουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

Έτσι το σύστημα έχει τη λύση $\left(\frac{15}{7},\ \frac{3}{7},\ -\frac{2}{7}\right)$

Ασκήσεις: 46, 47

Ορίζουσα ν τάξης

1.28 Μέχρι τώρα ορίσαμε την έννοια της ορίζουσας για πίνακες 2×2 και 3×3. Μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά ορίζουσα για κάθε **τετραγωνικό** πίνακα ν×ν με τη βοήθεια των οριζουσών ν-1 τάξης[1]. Συγκεκριμένα έστω ο πίνακας ν×ν.

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu j} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τότε

- Με διαγραφή της στήλης και της γραμμής που περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο ορίζεται ένας υποπίνακας (ν-1)×(ν-1) του M, στον οποίο αντιστοιχεί μια ορίζουσα ν-1 τάξης. Υπάρχουν λοιπόν ν^2 ελάσσονες ορίζουσες ν-1 τάξης, τις οποίες συμβολίζουμε με το αντίστοιχο προς το διαγραφόμενο στοιχείο κεφαλαίο γράμμα.

[1] Τονίζουμε ότι ορίζεται η έννοια της ορίζουσας **μόνο** για τετραγωνικούς πίνακες.

- Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα

$$(-1)^{i+1}\alpha_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}A_{i2} + \dots + (-1)^{i+\nu}\alpha_{i\nu}A_{i\nu} \qquad (23)$$

είναι σταθερό και ανεξάρτητο της i-γραμμής.

- Ο αριθμός $(-1)^{i+1}\alpha_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}A_{i2} + \dots + (-1)^{i+\nu}\alpha_{i\nu}A_{i\nu}$ που αντιστοιχεί στον τετραγωνικό πίνακα ν×ν M παριστάνεται σχηματικά

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

και τότε λέγεται **ορίζουσα του πίνακα M.** Συνήθως γράφεται **D(M)** ή απλά **D**. Είναι μια **ορίζουσα ν τάξης.**

Το άθροισμα (23) λέγεται *ανάπτυγμα* της ορίζουσας D κατά τα στοιχεία της i γραμμής (i = 1, 2, ..., ν).

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες της § 1.24 ισχύουν και για ορίζουσες ν τάξης.

Λύση συστήματος ν×ν με ορίζουσες

1.29 Η λύση ενός συστήματος ν×ν γίνεται και με τη βοήθεια των οριζουσών ν τάξης, με τρόπο ανάλογο εκείνου που ακολουθήσαμε στην § 1.27 για σύστημα 3×3. Έστω το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \dots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{cases} \qquad (24)$$

Αν συμβολίσουμε D την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και D_1, D_2, ..., D_ν τις ορίζουσες που προκύπτουν από τη D με αντικατάσταση της στήλης των συντελεστών του αγνώστου x_1, x_2, ..., x_ν αντιστοίχως με τη στήλη των σταθερών όρων του (24), τότε αποδεικνύεται[1] ότι:

[1] Η απόδειξη θα γίνει στο κεφάλαιο 3.

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα (14) έχει τη **μοναδική λύση:**

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_\nu = \frac{D_\nu}{D} \qquad \text{(σύστημα Cramer)}$$

- Αν $D = 0$, το σύστημα (14) είναι **αδύνατο ή αόριστο.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί το σύστημα:**

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = 3\lambda \\ x + y + \lambda z = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Έχουμε $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda^3 - \lambda) - 2(\lambda - 1) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

Ομοίως βρίσκουμε: $D_x = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda-1)$, $D_y = (\lambda-1)(\lambda+2)(2\lambda-1)$, $D_z = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

I. $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2)$. Τότε το σύστημα έχει τη λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda-1},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda-1}{\lambda-1},\ z = \frac{D_z}{D} = -1$$

II. $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1$ ή $\lambda = -2)$. Τότε εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

1. $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = 3 \\ x+y+z = 2 \end{cases}$ και είναι φανερό ότι είναι αδύνατο.

2. $\lambda = -2$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -2x+y+z = 4 \\ x-2y+z = -6 \\ x+y-2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = 2 \\ -2x+y+z = 4 \\ x-2y+z = -6 \end{cases} \qquad (2)$

Από τον επαυξημένο πίνακα του τελευταίου συστήματος έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : 3 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 & 8/3 \end{bmatrix}$$

Έτσι το σύστημα (2) είναι ισοδύναμο με το

$\begin{cases} x - z = -2/3 \\ y - z = 8/3 \end{cases}$ με ελεύθερο τον άγνωστο z.

Άρα η λύση του (1), όταν $\lambda = -2$, είναι: $x = z - \frac{2}{3}$, $y = z + \frac{8}{3}$, $z \in \mathbb{R}$, δηλαδή η $(x, y, z) = (z - \frac{2}{3}, z + \frac{8}{3}, z)$

2. **Να λυθεί το σύστημα:**

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z - \omega = 6 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ -3x + y - 2\omega = -1 \\ 4x + 3y - z + 5\omega = -7 \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας D του συστήματος κατά τα στοιχεία της 4ης στήλης είναι

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 - (-2)\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -(-1) \cdot 32 + 0 - (-2) \cdot 42 + 5 \cdot 18 = 206$

και συνεπώς το σύστημα έχει μια μόνο λύση.

Τώρα βρίσκουμε: $D_x = 412$, $D_y = -206$, $D_z = -618$, $D_\omega = -618$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

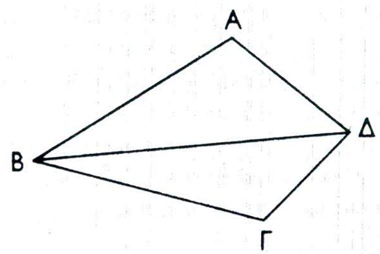
$$x = \frac{D_x}{D} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = -1,\ z = \frac{D_z}{D} = -3,\ \omega = \frac{D_\omega}{D} = -3.$$

Ασκήσεις: 48, 49, 50, 51

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Από τους μαθητές ενός Λυκείου απασχολούνται, κατά τάξη, στις ομάδες βόλεϋ (Β), ποδοσφαίρου (Π), μπάσκετ (Μ) και στίβου (Σ):
από την α΄ τάξη 32 μαθητές με βόλεϋ, 21 με ποδόσφαιρο και 17 με στίβο, από τη β΄ τάξη 26 μαθητές με βόλεϋ και 19 με στίβο και από τη γ΄ τάξη 15 μαθητές με βόλεϋ, 16 με ποδόσφαιρο, 9 με μπάσκετ και 15 με στίβο. Να παραστήσετε τις πληροφορίες αυτές με πίνακα.

2. Ένα ευθύγραμμο γεωμετρικό σχήμα, π.χ. το διπλανό, μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα, αν οι στήλες του πίνακα αντιστοιχούν στις κορυφές του σχήματος και οι γραμμές του στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τις κορυφές ανά δύο. Τα στοιχεία του πίνακα ορίζονται με τον κανόνα: «Το στοιχείο α_{ij} είναι ίσο με 1, όταν το τμήμα που βρίσκεται στη γραμμή i έχει ένα άκρο την κορυφή που βρίσκεται στη στήλη j. Διαφορετικά $\alpha_{ij} = 0$». Να παρασταθεί με πίνακα το διπλανό σχήμα.



3. Είναι ο πίνακας της άσκησης 2: (i) τετραγωνικός; (ii) κλιμακωτός; (iii) διαγώνιος;

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 8 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$,

$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

να βρεθούν τα αθροίσματα: Α+Β και Β+Γ+Δ.

5. Να βρεθούν οι x, y, z, ω, αν $\begin{bmatrix} 2x & -y \\ 3z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ -1 & 2\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+\omega & 3 \end{bmatrix}$

6. Σε όσες περιπτώσεις επιτρέπεται, να εκτελέσετε τις πράξεις:

(i) $[4 \quad 2 \quad -5] - [-3 \quad -2 \quad 3] + [-6 \quad 0 \quad 3]$.

(ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $[4 \quad 3] + [3 \quad -9] + [0]$

(iv) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{bmatrix}$

7. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 1 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

τότε να δείξετε ότι: $A - 3B + \Gamma + 2\Delta - 7E = \mathbf{O}$

8. Να βρεθούν οι x, y, z, ω, αν $2\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 \\ -1 & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ z+\omega & 1 \end{bmatrix}$

9. Εφαρμόστε τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα για να δείξετε ότι:

$$3X-4\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \frac{15}{2} & 3 & 9 \end{bmatrix} = X-3\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \frac{15}{2} & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να βρείτε τον πίνακα X.

10. Να εκτελεστούν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί πινάκων:

(i) $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ x & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & x \end{bmatrix}$

11. Να βρείτε τους πίνακες Χ, Ψ, Ζ, Ω, Τ, Ρ, από τις ισότητες:

$X = [1 \quad -2 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Psi = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [-2 \quad 1 \quad 3]$

$Z = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Omega + \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & -\alpha & -1 \\ \alpha & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$

$T + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 7 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$

12. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & x & 2 \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $AB \neq BA$.

13. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ και I, **O** ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 2×2 αντιστοίχως, να δείξετε ότι

$$A^2 + 2A - 11\,I = \mathbf{O}.$$

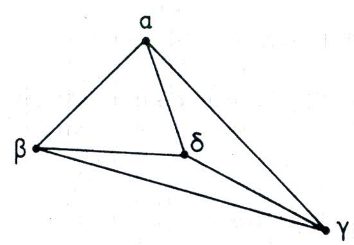
14. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ και I, **O** ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 3×3 αντιστοίχως,

να προσδιορίσετε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $(A - xI) \cdot (A - yI) = \mathbf{O}$

15. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ και $X = \begin{bmatrix} 1 & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πίνακες X, ώστε

$$AX = XA$$

16. Το διπλανό σχήμα παριστάνει το οδικό δίκτυο που συνδέει τις πόλεις α, β, γ και δ. Να παραστήσετε με πίνακα A το δίκτυο αυτό σημειώνοντας 1 στη διασταύρωση της στήλης μιας πόλης και της γραμμής μιας άλλης πόλης που συνδέονται οδικά κατευθείαν και 0 στις άλλες περιπτώσεις. Έστω B ο πίνακας που τα στοιχεία του φανερώνουν τους δυνατούς τρόπους μετάβασης από πόλη σε πόλη (όχι οπωσδήποτε διαφορετική) αφού προηγουμένως περάσουμε από μια άλλη πόλη (π.χ. από την α στην α υπάρχουν 3 τρόποι, από τη β στη γ 2 τρόποι κτλ.).



Να αποδείξετε ότι $B = A^2$.

17. Αν $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε τον πίνακα

$$X = A^2 + B^2 + \Gamma^3$$

18. Αν $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & x \\ -1 & x & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ να προσδιοριστεί η τιμή του x, ώστε να είναι

$$AB = BA = I$$

19. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι:

(i) $A^\nu = 2^{\nu-1}A$, (ii) $B^\nu = 2^{\nu-1}\alpha^\nu A$.

20. Να βρείτε τους αριθμούς x, y, z, ω (αν υπάρχουν) για τους οποίους είναι:

(i) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

22. Αν A, B είναι πίνακες 2×2, να δείξετε ότι:

$$AB = BA \Leftrightarrow (A - \lambda I)(B - \lambda I) = (B - \lambda I)(A - \lambda I)$$

23. Να βρεθεί (όταν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, να υπολογίσετε τον πίνακα A(A+B) -2B

25. Αν A, B είναι πίνακες ν × ν με $A^2 = A$ και $B^2 = B$, τότε να δείξετε ότι είναι και $(A + B)^2 = A + B$, αν και μόνο αν $AB = BA = \mathbf{O}$.

26. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x - y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - z = 9 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 2z = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

27. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

28. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 4x - y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - \frac{2}{3}z = 9 \end{cases}$

29. Να δείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα δεν είναι συμβιβαστά:

(i) $\begin{cases} 20x + y = 1 \\ y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = 16 \end{cases}$

30. Να λυθούν τα συστήματα: (i) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + 2y + 6z = -1 \\ 5x + 2y + 3z = -6 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x - z + 4\omega + 5\varphi = 4 \\ y - 2\omega - \varphi = 1 \\ -x + 5z - 12\omega - 17\varphi = -4 \end{cases}$

31. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 0 \end{cases}$

32. Αν Α, Β είναι πίνακες 2×2 και $k \in \mathbb{R}$, να δειχτεί ότι

(i) $D(kA) = k^2 D(A)$ (ii) $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$

33. Έστω ότι τα γράμματα του αλφαβήτου μας παριστάνονται με αριθμούς, ως εξής:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
15	9	12	20	21	18	1	5	13	8	22	24

Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
2	10	3	7	16	4	23	6	11	19	17	14

Χρησιμοποιώντας τον κώδικα αυτό μπορούμε κάθε λέξη με τέσσερα γράμματα να την παραστήσουμε με πίνακα 2×2, π.χ. η λέξη ΒΗΜΑ γίνεται $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$

Να παρασταθούν με τον κώδικα αυτό οι λέξεις: ΗΡΩΣ, ΤΙΝΑ, ΧΑΡΗ, ΠΟΛΑ.
Ο κώδικας αυτός δεν είναι ίσως δύσκολο να αποκαλυφτεί (να «σπάσει», όπως λέμε). Για να τον κάνουμε πιο δύσκολο, χρησιμοποιούμε συνήθως ένα πίνακα 2×2 ως «πολλαπλασιαστή» από αριστερά, π.χ. τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Έτσι ο πίνακας της λέξης ΒΗΜΑ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 & 35 \\ 42 & 17 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν με χρήση του πίνακα Α οι λέξεις που παριστάνουν οι πίνακες (αποκωδικοποίηση)

$$\begin{bmatrix} 119 & 140 \\ 52 & 59 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 150 & 35 \\ 64 & 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 119 & 95 \\ 48 & 41 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 59 & 77 \\ 24 & 31 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πολλαπλασιαστής οποιοσδήποτε πίνακας;

34. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}$

35. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + (\lambda-1)y = 4 \\ (\lambda-2)x + \lambda y = \lambda+2 \end{cases}$

36. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-4)x + 2(\lambda-1)y = 3 \\ (\lambda-6)x + (\lambda-3)y = \lambda \end{cases}$

37. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda+4)x + (2\lambda+1)y = 3\lambda - 1 \\ (3\lambda+7)x + (5\lambda+1)y = 2\lambda+2 \end{cases}$$

(i) να έχει μια λύση, (ii) να είναι αόριστο και (iii) να είναι αδύνατο.

38. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ για τις οποίες τα συστήματα

$$\begin{cases} (\mu+1)x + \lambda y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} -(\mu+1)x + (\lambda+1)y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

39. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} -1 & 97^{13} & \alpha \\ 0 & 2 & 62^{105} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

40. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες των οριζουσών για να δείξετε ότι:

(i) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & 2+\alpha & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} 1+y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1+y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1+y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

41. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες των οριζουσών για να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$, (ii) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

42. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες των οριζουσών για να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\begin{vmatrix} 2^5 & 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5-x & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

43. Να βρεθεί η αναγκαία συνθήκη, που πρέπει να πληρούν τα α και β, ώστε καθένα από τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} \beta x + \alpha y = 13 \\ 2x + y = 2 \\ 2\beta x + 3\beta y = 1 \end{cases}$ και (ii) $\begin{cases} (\alpha+1)x + \beta y = 1 \\ (\beta-1)x + \alpha y = \alpha\beta \\ x + y = \alpha+\beta \end{cases}$

να είναι συμβιβαστό.

44. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & x & x^2 \\ x+x^2 & x^2+\alpha & x+\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

45. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-1)x + \lambda y = 1 \\ (\lambda-1)x + y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda - 1 \end{cases}$

46. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2x + 4z = 3 \\ 2y + 2z = 5 \end{cases}$

47. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} x + 2y + 8z = 0 \\ x + 3y + 7z = 0 \\ x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases}$

48. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{(i)}\quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(ii)}\quad \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

49. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho & 1+k & 1+\alpha \\ 1+2\lambda & 1+2\mu & 1+2\rho & 1+2k & 1+2\alpha \\ 1+3\lambda & 1+3\mu & 1+3\rho & 1+3k & 1+3\alpha \\ 1+4\lambda & 1+4\mu & 1+4\rho & 1+4k & 1+4\alpha \\ 1+5\lambda & 1+5\mu & 1+5\rho & 1+5k & 1+5\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{I} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & \\ 5 & 4 & 3 & \end{vmatrix}$$

50. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x - 3z + 2\omega = 1 \\ 2y + 5z - 4\omega = -13 \\ x + 3y + z = -2 \\ 2x - y + 3\omega = -5 \end{cases}$$

51. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

2

ΟΜΑΔΕΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

Η 'Άλγεβρα χαρακτηρίζεται από τη μελέτη συνόλων στα έχουν οριστεί πράξεις. Οι συγκεκριμένες ιδιότητες των πρ προσδίδουν κάθε φορά στο σύνολο στο οποίο έχουν οριστεί μι σμένη «αλγεβρική δομή». Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται δυ τις κυριότερες αλγεβρικές δομές: της ομάδας, με μια μόνο εσ κή πράξη, και του δακτυλίου, με δυο εσωτερικές πράξεις.

Μετά την εισαγωγή των βασικών εννοιών, η παρουσίαση γίνε τη σειρά: ημιομάδα - ομάδα, δακτύλιος, σώμα. Κάθε νέα δομ άμεσα συγκρίσιμη με την προηγούμενη, της οποίας άλλωστε ει δική περίπτωση. Έτσι, κάθε φορά στα θεωρήματα που προηγ προσθέτονται νέα, τα οποία χαρακτηρίζουν τη νέα δομή κα χρόνως τη διαφοροποιούν από τις προηγούμενες.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκουμε: α) να σ τοποιήσουν οι μαθητές ως αυτονόητη την παρουσία πράξεων σ νολα που μελετούν, β) να διαπιστώσουν ότι οι κανόνες λογισ στοιχεία ενός συνόλου διαμορφώνονται ανεξάρτητα από το είδ στοιχείων με βάση τις ιδιότητες των πράξεων (π.χ. οι συνέπε προσεταιριστικότητας και αντιμεταθετικότητας), γ) να διακρίν σε σύνολα διαφορετικά και ετερόκλητα μπορεί να ορίζονται με τις ίδιες βασικές ιδιότητες. Να εντοπίζουν δηλαδή σύνολα ίδια αλγεβρική δομή. Αυτή η δομή έχει τελικά σημασία. Π.χ μος της διαγραφής ισχύει σε οποιαδήποτε ομάδα πολλαπλασ ή προσθετική με στοιχεία αριθμούς, διανύσματα, συναρτήσεις κες κτλ.
Για την επίτευξη των παραπάνω επιδιώξεων υπάρχει η απα υποδομή: παλαιότερη από τη μελέτη των συνόλων $\mathbb{R}$ και έγινε στην Α΄ Λυκείου και πρόσφατη από τη μελέτη του των πινάκων ν×μ και του συνόλου των διανυσμάτων του χώ