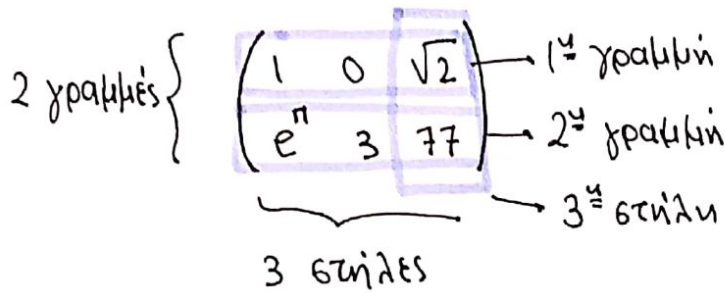


ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός: $n, m \in \mathbb{N} > 0$ είναι $n \times m$ πίνακας είναι μια ορθογώνια διάταξη $n \times m$ αριθμών σε n -γραμμές και m -στήλες.

Παράδειγμα: 2×3 6 αριθμοί ($\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$)



$$n \times m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

i : γραμμή
 j : στήλη

a_{23} : το στοιχείο της 2^{ης} γραμμής και της 3^{ης} στήλης!

Ειδικές μορφές πινάκων

1×1 : $(a_{ij}) \xrightarrow[ε_{ni}]{1} \mathbb{R}$

πίνακες στήλη: $n \times 1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

πίνακες γραμμή: $1 \times m (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m})$

Τετραγωνικοί Πίνακες: $n \times n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} 2 \times 2$
($n=m$)

Ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί να είναι:

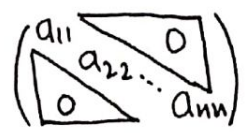
\rightarrow άνω τριγωνικός: $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \dots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

\rightarrow κάτω τριγωνικός: $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ * & a_{22} & \dots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ο μηδενικός πίνακας:

$O_{n \times m}$ Ο μηδενικός έχει σε όλες τις θέσεις 0.
" "
0

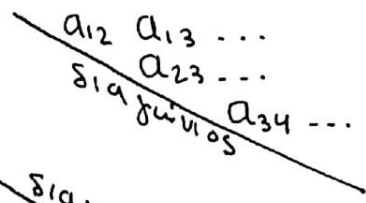
Διαγώνιος Πίνακας: είναι τετραγωνικός άνω-κάτω τριγωνικός



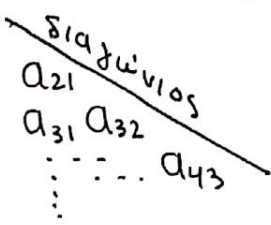
επιτρέπεται να έχει μη-μηδενικά στοιχεία μόνο στην διαγώνιο.

Διαγώνιος: $a_{ii} \rightsquigarrow$ τα νούμερα της στήλης και της γραμμής ταυίζονται $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.

Στοιχεία πάνω από την διαγώνιο: $a_{ij}, j > i$



Στοιχεία κάτω από την διαγώνιο: $a_{ij}, j < i$



⊙ Ανάστροφος Πίνακας

↳ μια διαδικασία όπου οι γραμμές γίνονται στήλες και το ανάστροφο.

$A \rightarrow A^t$
" " "
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
2x3 3x2
• $A = (a_{ij}), A^t = (a_{ji})$
• $(A^t)^t = A$

→ Ένας τετραγωνικός $n \times n$ θα λέγεται συμμετρικός αν $A = A^t$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ δεν είναι τετραγωνικός άρα δεν είναι συμμετρικός.

Ισότητα Πινάκων
 $A = B$ αν $n = n'$ και $a_{ij} = b_{ij}$
 $n \times m$ $n' \times m'$ $m = m'$

↓
δεν γίνεται ένας πίνακας 2x3 να είναι ίσος με έναν 3x2!

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq A$! δεν είναι λοιπόν συμμετρικός

Ένας συμμετρικός μπορεί να έχει δυ δέλεα αλλά :

πχ) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι συμμετρικά.

$A_{n \times m}$ } Ορίζουμε $\Gamma = A \cdot B$ πίνακας $n \times \ell$
 $B_{m \times \ell}$ } \hookrightarrow Εδώ δεν ζητάμε να έχουν ίδιες διαστάσεις, αλλά οι στήλες του ενός να είναι ίσες με τις γραμμές του άλλου!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m\ell} \end{pmatrix} = (Ab^1, Ab^2, Ab^3, \dots, Ab^\ell)$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{b^1} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{b^2} \quad \dots \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{b^\ell}$ στήλες

Παραδείγματα : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Δεν ορίζονται : $2 \times 3 \neq 2 \times 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

2×3 3×3 $=$ 2×3
 πολλαπλαζω κάθε γραμμή του 1ου με την πρώτη στήλη του 2ου πολλαπλαζω κάθε γραμμή του 1ου με την 2η στήλη του 2ου πολλαπλαζω κάθε γραμμή του 1ου με την 3η στήλη του 2ου.

Γενικότερα :

Αν $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $B = (b_{ij})_{m \times \ell}$, $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times \ell} \equiv \Gamma = A \cdot B \rightarrow \gamma_{ij} = \sum_{v=1}^m a_{iv} b_{vj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ :

$$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$$

$n \times m$ $m \times \ell$ $\ell \times k$ $n \times \ell$ $n \times k$

• $D = (d_{ij}) = B \cdot \Gamma$, $d_{ij} = \sum_{v=1}^{\ell} b_{iv} \gamma_{vj}$

• $(X_{ij}) = A \cdot D$, $x_{ij} = \sum_{\mu=1}^m a_{i\mu} d_{\mu j} = \sum_{\mu=1}^m a_{i\mu} \sum_{v=1}^{\ell} b_{\mu v} \gamma_{vj} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{v=1}^{\ell} a_{i\mu} b_{\mu v} \gamma_{vj}$

• $(d'_{ij}) = A \cdot B$, $d'_{ij} = \sum_{\mu=1}^m a_{i\mu} b_{\mu j}$

• $D' \cdot \Gamma = (y_{ij})$, $y_{ij} = \sum_{v=1}^{\ell} d'_{iv} \gamma_{vj} = \sum_{v=1}^{\ell} \sum_{\mu=1}^m a_{i\mu} b_{\mu v} \gamma_{vj}$

Μπορούμε να γράψουμε $A \cdot B = B \cdot A$? → οχι!

15.2.23

$$\begin{matrix} A \cdot B & = & B \cdot A \\ n \times m & m \times l & m \times l & n \times m \end{matrix}$$

δεν γίνεται η πράξη
εάν $l \neq n$

Αρα $A \cdot B = B \cdot A$ μπορεί να ισχύει μόνο αν
 A, B είναι τετραγωνικοί ιδίως διαστάσεις
($n \times n$)

Παράδειγμα: Αν $n=1$ ισχύει, διότι:

$$A = (a_{11}), B = (b_{11})$$

$$A \cdot B = (a_{11} b_{11}) = (b_{11} a_{11}) = B \cdot A$$

Αν $n=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

} \neq

Αρα εδώ
δεν ισχύει.