Διάλεξη 3 15.2.23

$\boxed{\text{ΠΙΝΑΚΕΣ}}$

Ορισμός: $n, m \in \mathbb{N} > 0$ είναι $n \times m$ πίνακας είναι μια ορθογώνια διάταξη $n \times m$ αριθμών σε n-γραμμές και m-στήλες.

<u>Παράδειγμα</u>: 2×3 6 αριθμοί ($\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$$2 \text{ γραμμές} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ e^{\pi} & 3 & 77 \end{pmatrix}}_{3 \text{ στήλες}} \begin{array}{l} \to 1^{\text{η}} \text{ γραμμή} \\ \to 2^{\text{η}} \text{ γραμμή} \\ \to 3^{\text{η}} \text{ στήλη} \end{array} \right.$$

$$n \times m \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ • i: γραμμή, j: στήλη

a_{23}: το στοιχείο της $2^{\text{ης}}$ γραμμής και της $3^{\text{ης}}$ στήλης!

- **Ειδικές μορφές πινάκων**

- <u>1×1</u>: $(a_{ij}) \overset{1-1}{\underset{\text{επί}}{\longleftrightarrow}} \mathbb{R}$

- <u>πίνακες στήλη</u>: $n \times 1$ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

- <u>πίνακες γραμμή</u>: $1 \times m$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix}$

- <u>Τετραγωνικοί Πίνακες</u>: $n \times n$ $(n = m)$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2×2

Ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί να είναι:

⇝ άνω τριγωνικός: $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}$

⇝ κάτω τριγωνικός: $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}$

- <u>Ο μηδενικός πίνακας</u>:

$O_{n \times m}$ ο μηδενικός έχει σε όλες τις θέσεις 0.

$\overset{\shortparallel}{O}$

15.2.23

· **Διαγώνιος Πίνακας** : Είναι τετραγωνικός άνω-κάτω τριγωνικός

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Επιτρέπεται να έχει μη-μηδενικά στοιχεία μόνο στην διαγώνιο.

<u>Διαγώνιος</u>: a_{ii} ~ τα νούμερα της στήλης και της γραμμής ταυτίζονται $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.

<u>Στοιχεία πάνω από την διαγώνιο</u> : a_{ij} , $j>i$

a_{12} a_{13} ...
a_{23} ...
διαγώνιος a_{34} ...

<u>Στοιχεία κάτω από την διαγώνιο</u> : a_{ij}, $j<i$

διαγώνιος
a_{21}
a_{31} a_{32}
... a_{43}

Ανάστροφος Πίνακας

↳ Μια διαδικασία όπου οι γραμμές γίνονται στήλες και το ανάποδο.

$$A \to A^t$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2x3 3x2

- $A = (a_{ij})$, $A^t = (a_{ji})$
- $(A^t)^t = A$

→ Ένας τετραγωνικός nxn θα λέγεται $\boxed{\text{συμμετρικός}}$ αν $\boxed{A = A^t}$

· $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός , $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

· $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ δεν είναι τετραγωνικός άρα δεν είναι συμμετρικός.

δεν γίνεται ένας πίνακας 2x3 να είναι ίσος με έναν 3x2!

Ισότητα Πινάκων

$\underset{n \times m}{A} = \underset{n' \times m'}{B}$ αν $n = n'$, $m = m'$ και $a_{ij} = b_{ij}$

· $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq A$! δεν είναι λοιπόν συμμετρικός

·Ένας συμμετρικός μπορεί να έχει ότι θέλει αλλά :

πχ) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι συμμετρικά.

→ Ένας τετραγωνικός nxn θα λέγεται $\boxed{\text{αντισυμμετρικός}}$ αν $\boxed{A = -A^t}$

↳ Ένας αντισυμμετρικός πίνακας θα έχει μηδέν στην διαγώνιο:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0 \quad !$$

πχ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

A, B πίνακες nxm

A+B νέος πίνακας nxm

$\left.\begin{array}{l} A=(a_{ij}) \\ B=(b_{ij}) \end{array}\right\} \boxed{A+B = (a_{ij}+b_{ij})}$

πχ) • $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ = Δεν ορίζεται! γιατί έχουν διαφορετικές διαστάσεις.

2x3   2x2

• $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+6 \\ 2+3 & 7+0 \\ 3+4 & 8+1 \end{pmatrix} = \dots$

$\boxed{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ}}$ A, B, Γ nxm

- $A+B = B+A$
- $A + O_{nxm} = A = O_{nxm} + A$
- $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$
- Για κάθε nxm πίνακα A υπάρχει −A $\begin{pmatrix} A=(a_{ij}) \\ B=(-a_{ij}) \end{pmatrix}$
  $A+(-A) = (-A)+A = O_{nxm}$

Αξιώματα της Αβελιανής ομάδας.

(Να ορίσουμε την πράξη ώστε να είναι ανεξάρτητη των πραγμάτων που γίνεται η πράξη, πχ) μετράω πορτοκάλια).

---

n εξισώσεις σε m μεταβλητές

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1m}X_m \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2m}X_m \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + \dots + a_{nx}X_m \end{pmatrix}}_{nx1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{nxm} \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}}_{mx1}$$

$\boxed{\begin{array}{l} 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \\ 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 \end{array}}$

Το γινόμενο των πινάκων nxm και mx1

Διατρέχω τον 1º πίνακα κατά γραμμές και τον 2º κατά στήλη.

Γενικά: Ενα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους

$$\underset{nxm}{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{AX = b}$$

Γενικός Ορισμός Πολλαπλασιασμού

15.2.23

$\left.\begin{array}{l} A_{n\times m} \\ B_{m\times \ell} \end{array}\right\}$ Ορίζουμε $\Gamma = A\cdot B$ πίνακας $n\times \ell$

↳ Εδώ δεν ζητάμε να έχουν ίδιες διαστάσεις, αλλά οι στήλες του ενός να είναι ίσες με τις γραμμές του άλλου!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & A & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{b_{m1}}_{b^1} & \underbrace{b_{m2}}_{b^2} & \cdots & \underbrace{b_{m\ell}}_{b^\ell} \end{pmatrix} = (Ab^1, Ab^2, Ab^3, \ldots, Ab^\ell)$$

στήλες

Παραδείγματα: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ δεν ορίζονται: $2\times 3 \neq 2\times 3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 1 & 4\cdot 0 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 \end{pmatrix}$$

(3 = 3)

πολ/ζω κάθε γραμμή του 1ου με την πρώτη στήλη του 2ου | πολ/ζω κάθε γραμμή του 1ου με την 2η στήλη του 2ου | πολ/ζω κάθε γραμμή του 1ου με την τρίτη στήλη του 2ου.

Γενικότερα:

Αν $\underset{n\times m}{A = (a_{ij})}, \underset{m\times \ell}{B = (b_{ij})}, \Gamma = (\gamma_{ij}) : \Gamma = A\cdot B \rightsquigarrow \boxed{\gamma_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu} b_{\nu j}} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$\underset{n\times m}{A}\cdot\overset{n\times k}{(\underset{m\times \ell}{B}\cdot\underset{\ell\times k}{\Gamma})} = \underbrace{\underbrace{(A\cdot B)}_{n\times \ell}\cdot\Gamma}_{n\times k}$$

- $D = (d_{ij}) = B\cdot\Gamma$, $d_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\ell} b_{i\nu}\gamma_{\nu j}$
- $(x_{ij}) = A\cdot D$, $x_{ij} = \sum_{\mu=1}^{m} a_{i\mu} d_{\mu j} = \sum_{\mu=1}^{m} a_{i\mu}\sum_{\nu=1}^{\ell} b_{\mu\nu}\gamma_{\nu j} = \boxed{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\ell} a_{i\mu} b_{\mu\nu}\gamma_{\nu j}}$
- $\overset{=D'}{(d'_{ij})} = A\cdot B$, $d'_{ij} = \sum_{\mu=1}^{m} a_{i\mu} b_{\mu j}$
- $D'\cdot\Gamma = (y_{ij})$, $y_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\ell} d'_{i\nu}\gamma_{\nu j} = \boxed{\sum_{\nu=1}^{\ell}\sum_{\mu=1}^{m} a_{i\mu} b_{\mu\nu}\gamma_{\nu j}}$

Μπορούμε να γράψουμε $A\cdot B = B\cdot A$; → !όχι!

15.2.23

$$\underset{n\times m}{A}\cdot\underset{m\times \ell}{B} = \underset{m\times \ell}{B}\cdot\underset{n\times m}{A}$$

δεν γίνεται η πράξη εαν $\ell \neq n$

Άρα $A\cdot B = B\cdot A$ μπορεί να ισχύει μόνο αν A, B είναι τετραγωνικοί ίδιας διάστασης $(n\times n)$

Παράδειγμα: Αν $n=1$ ισχύει, διότι:

$A=(a_{11})$, $B=(b_{11})$

$A\cdot B = (a_{11}b_{11}) = (b_{11}a_{11}) = B\cdot A$

Αν $n=2$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot1 & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot0+1\cdot1 & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

$\neq$ Άρα εδώ δεν ισχύει.