Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

Πτυχιακή Εξέταση - 5/4/2024

Θέμα 1ο. $(1+1+1=3$ μον.$)$

(α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(E) < +\infty$. Αν υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $D \subseteq E$ με $\lambda(D) = \lambda^*(E)$, αποδείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο σύνολο.

(β) Αν η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι η παράγωγός της, f', είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq \mathbb{R}$, το $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Θέμα 2ο. $(1,5+1,5=3$ μον.$)$

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, δηλαδή ότι $\lambda(\{f = +\infty\}) = 0$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\int |f_n| < \frac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ σχεδόν παντού.

Θέμα 3ο. $(1,5+1,5=3$ μον.$)$

(α) Στον διανυσματικό χώρο c_0 των πραγματικών ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 θεωρούμε τη νόρμα $\|\cdot\|$ με

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)|, \text{ για κάθε } x = (x(1), x(2), \ldots) \in c_{00}.$$

Αποδείξτε ότι ο χώρος $(c_0, \|\cdot\|)$ δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: Για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$, η ακολουθία $(\|Tx_n\|)$ είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι ο τελεστής T είναι φραγμένος.

Θέμα 4ο. $(1,5+1,5=3$ μον.$)$

(α) Έστω H χώρος Hilbert και M, N κλειστοί υπόχωροι του H οι οποίοι είναι κάθετοι, δηλαδή $\forall w \in M, z \in N$ ισχύει $w \perp z$. Αποδείξτε ότι ο υπόχωρος $M + N$ είναι κλειστός στον H.

(β) Έστω H χώρος Hilbert και (x_n) ακολουθία ορθογώνιων διανυσμάτων στον H (δηλαδή $x_n \perp x_m$, για κάθε $n \neq m$). Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Καλή Επιτυχία!