Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση
Τελική εξέταση Ιουνίου (22-6-2023)

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν είναι Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^\star(A) < +\infty$ και υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $B \subseteq A$ με $\lambda(B) = \lambda^\star(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν, για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in E : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αν ο X είναι χώρος με νόρμα και $f \in X^\star$, τότε $f(B_X) = [\,-\|f\|, \|f\|\,]$.

Θέμα 2ο.

(α) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων (f_n) στο $[0, 1]$ για την οποία η ανισότητα του Λήμματος του Fatou είναι γνήσια.

(β) Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

Θέμα 3ο.

(α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(ii) Το σύνολο $T^{-1}(S_Y) = \{x \in X : \|Tx\|_Y = 1\}$ είναι κλειστό.

(β) Έστω H χώρος Hilbert και Z κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $f \in Z^\star$, αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^\star$ με $\tilde{f}|_Z = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^\star} = \|f\|_{Z^\star}$.

Θέμα 4ο.

(α) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $\|Tx\| \geq a\|x\|$, για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y και ότι ο $T : X \to \mathrm{Im}(T)$ είναι ισομορφισμός.

(β) Έστω X χώρος Banach και έστω (f_n) μια ακολουθία μη μηδενικών συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f_n : X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $f_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 5ο.

Έστω $1 \leq p < \infty$, (f_n) μια ακολουθία στον $L_p[0, 1]$ και $f \in L_p[0, 1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $A \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(A) < \delta$ ισχύει $\int_A |f_n|^p < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*Υπόδειξη:* Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι, αν η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: Για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \delta$ ισχύει $\int_A |g| < \varepsilon$.)

Απαντήστε σε 4 από τα 5 θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και καθένα έχει αξία 3 μονάδες.

Καλή επιτυχία