Μιγαδική Ανάλυση Ι – Ενδιάμεση Εξέταση
17 Δεκεμβρίου 2022

1. (1+1.5μ.) (α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
(β) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f = u + iv$ ($u = \mathrm{Re} f, v = \mathrm{Im} f$) και $u = v^2$ στο Ω. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

2. (1.5+1.5μ.) (α) Έστω $f(z) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ (για $z = x + iy \neq 0$) και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0$$

καθώς το $z \to 0$ κατά μήκος κάθε ευθείας L της μορφής $L = \{(a + ib)t : t \in \mathbb{R}\}$. Αποδείξτε επίσης ότι η $f'(0)$ δεν υπάρχει.
(β) Αποδείξτε το λήμμα του Abel: Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δυναμοσειρά και $z_0 \in \mathbb{C}$ με $z_0 \neq 0$ ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ να είναι συγκλίνουσα. Τότε:

(i) η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε $|z| < |z_0|$,

(ii) η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0, r)}$ για κάθε r με $0 \leqslant r < |z_0|$.

3. (1+1.5μ.) (α) Αν $|a_n| \leqslant 1$ για κάθε $n \geqslant 1$, δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι ολόμορφη στο δίσκο $\Delta(0, 1)$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1 - |z|}.$$

(β) Έστω $f(z) = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{C}$ και $H = \{x + iy : y > 0\}$ το άνω ημιεπίπεδο. Αποδείξτε ότι

$$f(H) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}.$$

4. (1+1.5μ.) (α) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{z-a}{a}\right)^{n+1},$$

όπου $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ και αποδείξτε ότι $f(z) = \log\left(\frac{z}{a}\right)$, για $z \in \Delta(a, R)$.
(β) Αποδείξτε ότι αν $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \Omega$ τότε η ολόμορφη συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα στον τόπο Ω. (Η απόδειξη να γίνει με τη βοήθεια κατάλληλου επικαμπύλιου ολοκληρώματος.)

5. (1+1.5μ.) (α) Αν $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι η πραγματική συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι ισχύει

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

(β) Έστω $a > 0$. Να βρεθεί το όριο

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \left(\frac{1}{t+ia} - \frac{1}{t-ia}\right) dt.$$

Καλή Επιτυχία!