Ασκήσεις Κεφάλαιο 5

Άσκηση 16: Έστω f ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\exists M>0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(z)| \leq M|z|^\lambda \ \forall z \in \mathbb{C}$. Ν.δ.ο.

(α) Αν $\lambda \in \mathbb{N}$ τότε $f(z) = cz^\lambda$, όπου c σταθερά και

(β) Αν $\lambda \notin \mathbb{N}$ τότε $f \equiv 0$.

(γ) Τι συμβαίνει αν η ανισότητα της υπόθεσης ισχύει για $|z| \geq R$, όπου $R>0$ σταθερά;

Λύση:

Επειδή f ακέραια $\exists (a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n, \ z \in \mathbb{C}$

Από τον τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε $\forall n \geq 0$

$$\underbrace{\delta_{C(0,r)}(0)}_{=1} \cdot f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-0)^{n+1}} d\zeta \Rightarrow$$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\cancel{\pi}} \cdot \sup_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \right| 2\cancel{\pi} \cdot r \Rightarrow$$

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \left| \sup_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \right| r = \sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r^n} \quad (1)$$

Όμως $\forall |\zeta| = r$ έχω από υπόθεση ότι $|f(\zeta)| \leq M \cdot |\zeta|^\lambda = M \cdot r^\lambda$ (2)

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} |a_n| \leq M \cdot \frac{r^\lambda}{r^n} \quad \forall r>0.$$

- Για $n<\lambda$ έχω $|a_n| \leq M \cdot r^{\overbrace{\lambda-n}^{>0}} \xrightarrow{r \to 0} 0 \Rightarrow a_n = 0$.
- Για $n>\lambda$ έχω $|a_n| \leq \frac{M}{r^{\overbrace{n-\lambda}^{>0}}} \xrightarrow{r \to \infty} 0 \Rightarrow a_n = 0$.
- Για $n=\lambda$ έχω απλά ότι $|a_\lambda| \leq M$

Έτσι $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = cz^\lambda, z \in \mathbb{C}$ (όπου $c = a_\lambda$).

(β) Αν $\lambda \notin \mathbb{N}$ από τις εκτιμήσεις του Cauchy έχω $\forall n \geq 0$

$$|a_n| \leq \frac{M(0,r)}{r^n} \underset{\text{υπόθεση}}{\leq} \frac{M \cdot r^\lambda}{r^n} = \begin{cases} M \cdot r^{\lambda - n} \xrightarrow{r \to 0} 0, & n < \lambda \\ \dfrac{M}{r^{n-\lambda}} \xrightarrow{r \to \infty} 0, & n > \lambda. \end{cases}$$

Δεν γίνεται $\lambda = n$ γιατί $\lambda \notin \mathbb{N}$.

$a_n = 0 \ \forall n \geq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$

(γ) Αν ισχύει η υπόθεση για $|z| \geq R$

τότε για $n > \lambda$ έχω $|a_n| \leq \frac{M}{r^{n-\lambda}} \xrightarrow{r \to \infty} 0. \Rightarrow$

$f =$ πολυώνυμο βαθμού $\leq [\lambda]$.

Άσκηση 17: Έστω f, g ακέραιες συναρτήσεις ώστε $|f(z)| \leq |g(z)|$ για $z \in \mathbb{C}$. Βρείτε την σχέση που συνδέει τις f, g.

Λύση:

Αν $g \equiv 0$ τότε και η $f \equiv 0 \Rightarrow f = g$.

Αν $g \not\equiv 0$ τότε θεωρώ την συνάρτηση $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus Z(g)$.

Έστω $a \in Z(g)$. Τότε $\exists r > 0 : g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Delta(a, 0, r) = \Delta(a, r) \setminus \{a\}$.

Άρα για $z \in \Delta(a, 0, r)$ η $h = \frac{f}{g}$ ορίζεται και $\forall z \in \Delta(a, 0, r)$

είναι $|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq 1. \Rightarrow$

h τοπικά φραγμένη γύρω από το a (εκτός του a)

Από το Θ. Riemann έχουμε ότι το a είναι για την h επουσιώδη ανωμαλία.

Επεκτείνει την h σε όλο το $\mathbb{C}$ ως εξής:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{g(z)}, & z \in \mathbb{C} \setminus Z(g) \\ \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)}, & a \in Z(g) \end{cases}$$

Έτσι η h γίνεται $\tilde{h}$ ακέραια με $|\tilde{h}(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$

$$\left(|\tilde{h}(a)| = \lim_{z \to a} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq 1 \right)$$

$\Rightarrow \tilde{h}$ ακέραια και φραγμένη $\xrightarrow{\text{Θ.Liouville}}$ $\tilde{h}$ σταθερή.

Άσκηση 25: Έστω f ακέραια συνάρτηση ώστε $f'\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \ \forall n \geq 1$.
Δ.ο. η f είναι σταθερή.

Λύση:

$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq Z(f')$ και 0 είναι σ.σ. του $\left\{\frac{1}{n} : n \geq N\right\}$ άρα και του $Z(f')$ με $0 \in \mathbb{C}$.

Από αρχή μοναδικότητας έχω $f' \equiv 0$ στο $\mathbb{C} \Rightarrow f =$ σταθερή

Άσκηση 26: Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \left(\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη + φραγμένη.
Δ.ο. f σταθερή.

Λύση:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\frac{1}{n}$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f.
αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$: $\exists r_n$: $\Delta\left(\frac{1}{n}, r_n\right) \cap \left\{\frac{1}{k}, n \neq k\right\} \cup \{0\} = \emptyset$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε στον δακτύλιο $\Delta\left(\frac{1}{n}, r_n\right) \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}$ η f είναι ολόμορφη και φραγμένη.

Άρα από Riemann το $\frac{1}{n}$ είναι για την f επουσιώδης ανωμαλία

Έτσι, η f μπορεί να θεωρηθεί ολόμορφη και φραγμένη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Άρα για το $\Delta(0,1) \subseteq \mathbb{C}$ η $f|_{\Delta(0,1) \setminus \{0\}}$ είναι ολόμορφη και φραγμένη
Πάλι από το Θ.Riemann η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0.

Άρα η f μπορεί να θεωρηθεί ακέραια και επειδή είναι φραγμένη από Θ. Liouville η f είναι σταθερή.

Ασκήσεις Κεφάλαιο 6

Άσκηση 3: Έστω $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Βρείτε τη σειρά Laurent της f:

ⓐ στον δίσκο $|z|<1$

ⓑ στον δακτύλιο $1<|z|<2$

ⓒ στον δακτύλιο $|z|<2$.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $f(z) = -\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{1,2\}$.

ⓐ Για $|z|<1$ έχω $-\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ και

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \xrightarrow[\left|\frac{z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2} < 1]{} -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Έτσι για $|z|<1$ έχω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$

ⓑ Αν $1<|z|<2$ τότε $-\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} \xrightarrow[\left|\frac{1}{z}\right|<1]{} -\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n} =$

$-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$

Από ⓐ αφού έχω $|z|<2$ ότι $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}$

Άρα για $1<|z|<2$ είναι $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n} =$

$-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}$

(γ) $|z|>2$ τότε $|z|>1 \xRightarrow{(6)} -\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ και

για $|z|>2$ $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

Άρα για $|z|>2$ έχω ότι $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} =$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^n-1)}{z^{n+1}}$.

Άσκηση 12: Έστω $a\in\mathbb{C}$ και $0<\rho<+\infty$. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I_n(a) = \int_{C(a,\rho)} \frac{z^n}{(z-a)^n}dz$, $n\geq 1$.

Λύση:

(1ος τρόπος: τύπος Cauchy για παραγώγους για z^n) - προηγ. μάθημα-

2ος τρόπος: θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων:

Θέτω $g(z) = \frac{z^n}{(z-a)^n}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Αν $a=0$ τότε εύκολα $I_n(a)=0$.
Υποθέτω $a\neq 0$

Η g ορίζεται στο $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ αστρόμορφο.

Επίσης, έχει στο a μεμονωμένη ανωμαλία που είναι πόλος, τάξης n γιατί $g(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^n}$, $z\neq a$.

με $h(z)=z^n$ ολόμορφη στο C με $h(a)=a^n\neq 0$.

Έτσι, $Res(g,a) = \frac{h^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$

Όμως, για $z\in\mathbb{C}$ $h(z)=z^n \Rightarrow h'(z)=n\cdot z^{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow h^{(n-1)}(z) =$
$n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-2))\cdot z = n(n-1)(n-2)\cdot 2\cdot 1\cdot z = n!z \Rightarrow$

$h^{(n-1)}(a) = n!a$

Άρα $Res(g,a) = \frac{n!a}{(n-1)!} = n\cdot a$

Από Θεωρ. ολοκληρ. υπολ. : $I_n(a) = \int_{C(a,\rho)} g(z)dz = 2\pi i \, Res(g,a) \cdot \underbrace{\delta_{C(a,\rho)}(a)}_{=1}$

$= 2\pi i \cdot \eta a = 2\pi i \eta a$

Άσκηση 8: καθορίστε το είδος των ανωμαλιών και βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα για τις ακόλουθες συναρτήσεις:

(α) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, (β) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$, (γ) $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$

Λύση:

(α) Η f έχει μεμ. ανωμαλία στα $a_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Έχω $\lim_{z \to a_k} f(z) = \frac{1}{0} = \infty \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

Για κάθε k το a_k είναι πόλος της f.

Για $k=0$ παρατηρώ ότι $\lim_{z \to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ ο πόλος τάξης 1.

Για $k \neq 0$ $(z-a_k) \cdot f(z) = \frac{(z-a_k)}{\sin z} = \frac{z-a_k}{\sin z - \sin a_k} =$

$$\frac{1}{\frac{\sin z - \sin a_k}{z - a_k}} \xrightarrow{z \to a_k} \frac{1}{(\sin)'(a_k)} = \frac{1}{\cos a_k} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^{-k} =$$

$(-1)^k \neq 0$

Άρα τα a_k, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ είναι επίσης πόλος τάξης 1. με

$Res(f, a_k) = \lim_{z \to a_k} (z-a_k) f(z) = (-1)^k$.

Τέλος, $Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = 1 = (-1)^0 \Rightarrow$

$Res(f, a_k) = (-1)^k, k \in \mathbb{Z}$.

(β) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$

Η f έχει μεμ. ανωμαλία στα σημεία $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (αφού $e^z = 1 \Leftrightarrow z = z_k$ για κάποιο k)

Επίσης $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\lim\limits_{z \to z_k} f(z) = \lim\limits_{z \to z_k} \dfrac{1}{1-e^z} = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Άρα τα $z_k, k \in \mathbb{Z}$ είναι πόλοι της f.

Για $z \neq z_k$ έχω $(z-z_k) f(z) = \dfrac{(z-z_k)}{1-e^z} = \dfrac{z-z_k}{e^{z_k}-e^z} = -\dfrac{z_k-z}{e^{z_k}-e^z} \xrightarrow{z \to z_k}$
$-\dfrac{1}{(\exp)'(z_k)} = \dfrac{1}{-e^{z_k}} = -1 \neq 0$.

Άρα $\forall k \in \mathbb{Z}$ του z_k είναι πόλος τάξης 1 της f.

$\text{Res}(f, z_k) = \lim\limits_{z \to z_k} (z-z_k) f(z) = 1$.

⑧ Για $z=0$:

$$1-\cos z = 1-\Sigma(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right) =$$

$$\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\dots = z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\dots\right)$$

$$f(z)=\frac{z}{1-\cos z}=\frac{\cancel{z}}{z^{\cancel{2}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\dots}}_{g(z)}=\frac{1}{z}g(z)$$

$g(0)=2\neq 0$ Το 0 είναι πόλος τάξης 1 και άρα
$\mathrm{Res}(f,0)=2\left(=\lim\limits_{z\to a} g(z)=g(a)\right)$

Για $z\neq 0$:

$$\cos z=\cos(z-z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-z_k)^{2n}$$

$$1-\cos z = 1-\left[1-\frac{(z-z_k)^2}{2!}+\frac{(z-z_k)^4}{4!}-\frac{(z-z_k)^6}{6!}+\dots\right]=$$

$$\frac{(z-z_k)^2}{2!}-\frac{(z-z_k)^4}{4!}+\frac{(z-z_k)^6}{6!}-\dots=$$

$$(z-z_k)^2\underbrace{\left[\frac{1}{2!}-\frac{(z-z_k)^2}{4!}+\frac{(z-z_k)^4}{6!}-\dots\right]}_{h(z)}$$

$$f(z)=\frac{z}{1-\cos z}=\frac{1}{(z-z_k)^2}\cdot\underbrace{\frac{z}{h(z)}}_{\varphi(z)}$$

$h(z_k)=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$ (z_k ρίζα τάξης 2)

$$\varphi(z_k)=\frac{z_k}{h(z_k)}=\frac{2k\pi}{\frac{1}{2}}=4k\pi\neq 0$$

Άρα z_k πόλος τάξης 2 της f

$$\mathrm{Res}(f,z_k)=\varphi'(z_k)=\frac{h(z_k)-z_k\cdot h'(z_k)}{h^2(z_k)}=\frac{h(z_k)}{h^2(z_k)}=\frac{1}{h(z_k)}=2$$