ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

14/12/2022

30ο Μάθημα

Σημείωση: Από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας έπεται ότι κάθε πολυώνυμο P βαθμού $n \geq 1$, παραγοντοποιείται ως εξής: $p(z) = a_n(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)$ όπου $p_1, p_2, \ldots, p_n$ οι ρίζες του. Πράγματι αν a είναι μια ρίζα του P τότε $z-a \mid P(z)$, άρα $P(z) = (z-a)\cdot q(z)$ όπου q πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

2) Ο Μιγαδικός Λογάριθμος

Για τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου ισχύει ότι:

$$\log z = \int_{[1,z]} \frac{dJ}{J}, \quad \text{όπου } z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$$

Θέτουμε $\phi(z) = \int_{[1,z]} \frac{dJ}{J}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$. Επειδή ο $\mathbb{C}_\pi$ είναι αστρόμορφος τόπος ως προς το 1, έπεται ότι η ϕ είναι παράγουσα της $\frac{1}{z}$ στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$.

Όπως ξέρουμε ισχύει επίσης ότι $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$. Έτσι οι συναρτήσεις $\phi(z)$ και $\log z$ διαφέρουν κατά σταθερά στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ και επειδή $\phi(1) = 0 = \log 1$, έχουμε ότι $\phi(z) = \log z$ για $z \in \mathbb{C}_\pi$ ($\mathbb{C}_\pi$ μη κυρτός τόπος).

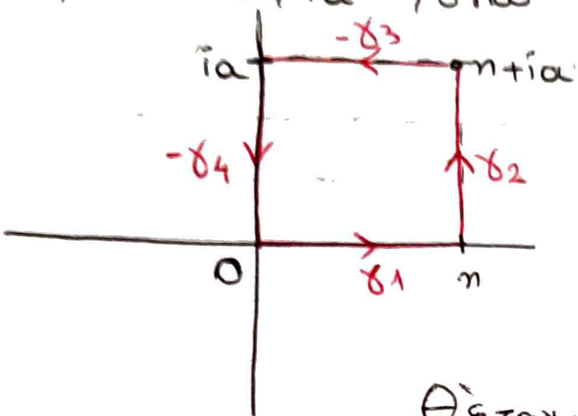
3) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ αποδείξτε ότι:

a) $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx = e^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και

β) $\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)\,dx = e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}dx$, $(a \in \mathbb{R})$

Λύση

Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κορυφές $0, n, n+ia, ia$, όπου $n \in \mathbb{N}$.



$\gamma_1(x) = x, \ x \in [0,n]$

$\gamma_2(y) = n+iy, \ y \in [0,a]$

$\gamma_3(x) = x+ia, \ x \in [0,n]$ και

$\gamma_4(y) = iy, \ y \in [0,a]$

Θέτουμε $\gamma_n = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ και παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια ισοδύναμη παραμέτρηση της πολυγωνικής γραμμής με κορυφές $0, n, n+ia, ia, 0$ δηλαδή της περιμέτρου του ορθογωνίου.

Από το θεώρημα του Cauchy για κυρτά σύνολα, την ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$ και την κλειστή καμπύλη γ_n έχουμε ότι:

$$\int_{\gamma_n} e^{-z^2} dz = 0$$

Έπεται ότι $\forall \ n \in \mathbb{N}$

$$0 = \int_0^n e^{-x^2} dx + \int_0^a i e^{-(n+iy)^2} dy - \int_0 e^{-(x+ia)^2} dx - \int_0^a i e^{-(iy)^2} dy = \quad (1)$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 - J_4$$

Παρατηρούμε ότι $J_1 \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \overset{\text{εκφώνηση}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$|J_2| \leq \int_0^a e^{-n^2+y^2} dy = e^{-n^2} \int_0^a e^{y^2} dy \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$J_3 = \int_0^n e^{-x^2 - 2iax + a^2} dx = e^{a^2} \int_0^n e^{-x^2} (\cos(2ax) - i \sin(2ax)) dx$$

$$= e^{a^2} \int_0^n e^{-x^2} \cos(2ax) dx - i e^{a^2} \int_0^n e^{-x^2} \sin(2ax) dx \xrightarrow{n \to \infty} \rightsquigarrow$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\sim\!\sim\!>} e^{a^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx - i e^{a^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)\,dx$$

$$J_4 = i\int_0^a e^{y^2}\,dy = i\int_0^a e^{x^2}\,dx$$

Αφήνοντας το $n\to\infty$, στην ① έχουμε ότι:

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx - e^{a^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx\right] + i\left[-\int_0^a e^{x^2}dx + e^{a^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)\,dx\right]$$

$=0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx = e^{-a^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = e^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

και $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)\,dx = e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}\,dx.$

Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy και Εφαρμογές

Υπενθύμιση: Μια μιγαδική συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{C}$ (Ω ανοικτό $\subseteq\mathbb{C}$) λέγεται αναλυτική, αν $\forall\, a\in\Omega$ $\exists$ $r=r(a)>0$ και μιγαδικοί αριθμοί $c_n=c_n(a)$, $n\geq 0$ ώστε $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $f(z)=\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$, $z\in\Delta(a,r)$

Λήμμα Έστω $\varphi, g:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θέτουμε $\Omega=\mathbb{C}\setminus g([a,b])$ και ορίζουμε $f:\Omega\to\mathbb{C}$ με τον τύπο: $f(z)=\displaystyle\int_a^b \frac{\varphi(t)}{g(t)-z}\,dt$, $z\in\Omega$

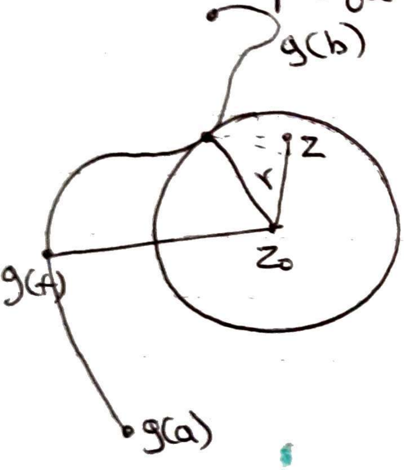
Τότε: (α) Η f είναι αναλυτική στο ανοικτό Ω και μάλιστα $\forall\, z_0\in\Omega$ η f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου z_0 και ακτίνας σύγκλισης $\geq r = d(z_0, g([a,b]))$)

(6) Οι συντελεστές $c_n = c_n(z_0)$, $n \geq 0$ της εν λόγω δυναμοσειράς, δίνεται από τον τύπο:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}}\,dt$$

Αποδ. Η g είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και άρα το $g([a,b])$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Έτσι το $\Omega = \mathbb{C} \setminus g([a,b])$ είναι ανοιχτό $\subseteq \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \Omega$. $\exists$ τότε $r>0$ ώστε $\Delta(z_0,r) \subseteq \Omega$. (Ο μεγαλύτερος θετικός r ώστε $\Delta(z_0,r) \subseteq \Omega$ είναι ο $r = d(z_0, g([a,b]))$).



Παρατηρούμε ότι αν $z \in \Delta(z_0,r)$ και $t \in [a,b]$ τότε $|z-z_0|<r$ και $|g(t)-z_0| \geq r$ επομένως

$$\frac{|z-z_0|}{|g(t)-z_0|} \leq \frac{|z-z_0|}{r} < 1.$$

Έτσι αν $z \in \Delta(z_0,r)$ και $t \in [a,b]$ τότε έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right)} = \frac{g(t)-z_0}{g(t)-z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{g(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(g(t)-z_0)^{n+1}} \qquad (2)$$

Άρα $$\frac{\varphi(t)}{g(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\varphi(t)\frac{(z-z_0)^n}{(g(t)-z_0)^{n+1}}}_{h_n(t)}, \quad t \in [a,b],\ z \in \Delta(z_0,r)$$

Η συνάρτηση φ είναι φραγμένη, ως συνεχής σε συμπαγές σύνολο, άρα $\exists\ M>0: |\varphi(t)|\leq M$, για $t\in[a,b]$

Αν, προς στιγμήν, σταθεροποιήσουμε το $z\in\Delta(z_0,r)$ έχουμε ότι $|h_n(t)|=|\varphi(t)|\cdot\dfrac{|z-z_0|^n}{|g(t)-z_0|^{n+1}}\leq M\dfrac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}}=$

$=\dfrac{M}{r}\cdot\dfrac{|z-z_0|}{r^n}$ για $t\in[a,b]$.

Επειδή η (γεωμετρική) σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{r}\cdot\dfrac{|z-z_0|^n}{r^n}$ συγκλίνει,

αφού $\dfrac{|z-z_0|}{r}<1$, από το κριτήριο Weierstrass

λαμβάνουμε ότι η σειρά συνεχών συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty}h_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$, στη

συνάρτηση $\dfrac{\varphi(t)}{g(t)-z}$. Άρα ολοκληρώνοντας και τα δύο

μέλη στη ② και εναλλάσσοντας την άθροιση με την ολοκλήρωση (λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης) λαμβάνουμε ότι, για $z\in\Delta(z_0,r)$

$$f(z)=\int_a^b\frac{\varphi(t)}{g(t)-z}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b\frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}}\,dt\right](z-z_0)^n \quad ③$$

Η ③ γράφεται: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ z\in\Delta(z_0,r)$
όπου $c_n=\displaystyle\int_a^b\frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}}\,dt$, για $n\geq 0$,

και από το θ. διαφόρισης δυναμοσειρών, έχουμε ότι: $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, για $n\geq 0$

Σημείωση: Το παραπάνω λήμμα ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η συνάρτηση φ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.