Μάθημα 29 | 13/12/2022

<u>Θεώρημα</u> (Ύπαρξης παραγουσών σε αστρόμορφους τόπους)

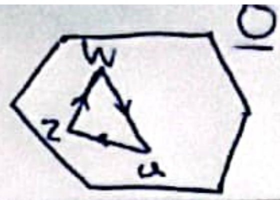
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος
(Ειδικότερα: Ω κυρτός τόπος)
και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ ισχύει $\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = 0$ τότε η f έχει παράγουσα στο Ω.
Μάλιστα αν ο Ω είναι αστρόμορφος ως προς το $a \in \Omega$ και ορίσουμε

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta \quad \text{για } z \in \Omega \text{ τότε η } F \text{ είναι}$$

μια παράγουσα της f στο Ω

<u>Απόδειξη</u>
Υποθέτουμε πρώτα ότι το Ω είναι κυρτό σύνολο, άρα είναι αστρόμορφο ως προς κάθε σημείο του.
Έστω $a \in \Omega$ σταθερό. Τότε ο Ω είναι αστρόμορφος ως προς a. Έστω επίσης $z \in \Omega$ σταθεροποιημένο.
Θα δείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$, δηλαδή
$\lim_{w \to z} \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$

Από τον ορισμό της F έχουμε ότι
$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \frac{1}{w-z}\left(\int_{[a,w]} f(\zeta)d\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta\right) \quad \text{για } w \in \Omega \text{ με } w \neq z$$



Από την υπόθεση έχουμε $\int_{\partial T} f(\zeta)\,d\zeta = 0$, για το τρίγωνο $T = T(a,w,z)$, επομένως

$$\int_{[z,w]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[w,a]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[a,z]} f(\zeta)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{[z,w]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[a,w]} f\,d\zeta - \int_{[a,z]} f\,d\zeta$$

Έτσι $\dfrac{F(w)-F(z)}{w-z} = \dfrac{1}{w-z}\displaystyle\int_{[z,w]} f(\zeta)\,d\zeta$

Επίσης προφανώς ισχύει $f(z) = \dfrac{1}{w-z}\displaystyle\int_{[z,w]} f(z)\,d\zeta$

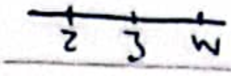
(αφού ολοκληρώνουμε την σταθερή συνάρτηση $g(\zeta) = f(z)$ επί της καμπύλης $[z,w]$.)

Συνεπώς $\dfrac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \dfrac{1}{w-z}\displaystyle\int_{[z,w]} (f(\zeta)-f(z))\,d\zeta$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{\cancel{|w-z|}} \sup_{\zeta\in[z,w]} |f(\zeta)-f(z)|\cdot\cancel{|w-z|} =$$

$$= \sup_{\zeta\in[z,w]} |f(\zeta)-f(z)|$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο z, δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\Delta(z,\delta) \subseteq \Omega$ και
$|\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$



Άρα αν $0<|w-z|<\delta$ έχω ότι
$\forall \zeta\in[z,w]$ είναι $|\zeta-z|\leq|w-z|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \zeta\in[z,w]$ είναι $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{\zeta\in[z,w]}|f(\zeta)-f(z)|\leq\varepsilon$$

Έτσι αν $0<|w-z|<\delta$ τότε

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}-f(z)\right|\leq\varepsilon \Rightarrow F'(z)=f(z)\quad\forall z\in\Omega$$

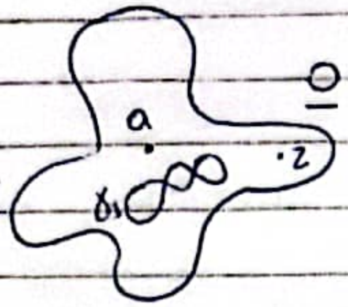
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Ω είναι αστρόμορφος τόπος (ως προς a)
Επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο
$\exists\, r>0: \Delta(z,r)\subseteq\Omega$ και άρα αν $w\in\Delta(z,r)$ με $w\neq z$
το ευθύγραμμο τμήμα $[w,z]\subseteq\Omega$
Επειδή ο Ω είναι αστρόμορφος τόπος ως προς a
έπεται ότι $[\zeta,a]\subseteq\Omega\quad\forall\zeta\in[w,z]$

Ιδιαιτέρως το τρίγωνο $T(a,w,z)$ περιέχεται στο Ω και συνεχίζουμε όπως πριν.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Του Cauchy σε αστρόμορφους τόπους)
Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος και μια αυθαίρετη $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε:
a) Η f έχει παράγουσα στο Ω
b) Αν $\gamma:[a,b]\to\Omega$ είναι κλειστή καμπύλη στο Ω τότε $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=0$ και επιπλέον αν $z\in\Omega\setminus[\gamma]$ τότε $f(z)\cdot\delta_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

$$\boxed{f(z)\cdot \delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$

Ο ανωτέρω τύπος είναι γνωστός ως <u>τύπος του Cauchy</u> ή και <u>ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy</u>



<u>Απόδειξη</u>

a) Επειδή η συνάρτηση f είναι ολόμορφη, από το Θεώρημα του Goursat έπεται ότι

$\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = 0$, για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$

Έτσι, επειδή ο τόπος Ω είναι αστρόμορφος, από το προηγούμενο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η f έχει παράγουσα στο Ω.

b) Αφού η f έχει παράγουσα στο Ω και $[\gamma] \subseteq \Omega$, γ κλειστή, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού για καμπύλες έπεται ότι

$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g:\Omega \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως εξής

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$, για $\zeta \in \Omega\setminus\{z\}$ και $g(z) = f'(z)$

Τότε η g είναι συνεχής στο z αφού
$\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = f'(z) = g(z)$ και

ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z\}$.

Από το Θεώρημα Goursat έπεται ότι

$\int_{\partial T} g(\zeta) d\zeta = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$
και επειδή ο Ω είναι αστρόμορφος τόπος, δι
η g έχει παράγουσα στο Ω από το προηγούμενο Θεώρημα.
Έτσι έπεται $\int_\gamma g(\zeta) d\zeta = 0$.
Επειδή $z \notin [\gamma]$ μπορούμε να γράψουμε $\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z)\, 2\pi i\, \delta_\gamma(z)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ (Θεώρημα Μέσης Τιμής)
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ $(a \in \Omega, r > 0)$
και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.
Τότε $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$

Επίσης αν $f = u + iv$ τότε ισχύει ο αντίστοιχος τύπος και για τις u και v

Απόδειξη
Θεωρούμε $R > r$ ώστε $\Delta(a, R) \subseteq \Omega$
και θέτουμε $\gamma(\theta) = a + r \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Από τον τύπο του Cauchy για το ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Delta(a,R)$ και την καμπύλη γ έχουμε ότι $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$, αφού $\delta_\gamma(a)=1$ (γυρνάει 1 φορά στο $(0,2\pi]$)

και συνεπώς $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{\cancel{re^{i\theta}}}\,i\cancel{re^{i\theta}}\,d\theta=$

$$=\frac{\cancel{i}}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

Για να αποδείξουμε τον αντίστοιχο τύπο για την v παρατηρούμε ότι

$$v(a)=\operatorname{Im} f(a)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Im}(f(a+re^{i\theta}))\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

Από τον τύπο $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)}\frac{f(z)}{z-z}\,dz$, $z\in\Delta(a,r)$

φαίνεται ότι οι τιμές της f στον δίσκο $\Delta(a,r)$ καθορίζονται από τις τιμές της f στο σύνορο του $\Delta(a,r)$ δηλαδή στον κύκλο $C(a,r)$

Παραδείγματα

1) Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $p(z)=a_n z^n+\dots+a_1\cdot z+a_0$ είναι μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο ($n\geq 1$, $a_n\neq 0$) τότε το p έχει τουλάχιστον μια μιγαδική ρίζα

Απόδειξη

Επειδή το p είναι μη σταθερό έπεται ότι $\lim\limits_{z\to\infty} p(z)=\infty \iff \lim\limits_{|z|\to+\infty}|p(z)|=+\infty$

Υποθέτουμε για άτοπο, ότι $p(z)\neq 0 \ \forall z\in\mathbb{C}$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy για τον κυρτό τόπο $\Omega=\mathbb{C}$, την καμπύλη $\gamma(\theta)=re^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$, $r>0$ το σημείο $z=0$ και τη συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{p(z)}$, $z\in\mathbb{C}$

Τότε έχουμε $f(0)\underbrace{\delta_\gamma(0)}_{1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=\frac{2\pi i}{p(0)}\neq 0$$

Από την άλλη μεριά έχουμε $\left|\int_{C(0,r)}\frac{1}{\zeta\cdot p(\zeta)}\right|\leq 2\pi r\max\limits_{|\zeta|=r}\left|\frac{1}{\zeta\cdot p(\zeta)}\right|=$

$$=2\pi \cancel{r}\,\frac{1}{\cancel{r}}\,\frac{1}{\min\limits_{|\zeta|=r}|p(\zeta)|}=\frac{2\pi}{\min\limits_{|\zeta|=r}|p(\zeta)|}=h(r)$$

Επειδή $C(0,r)$ = συμπαγές σύνολο και $z \mapsto |p(z)|$ πραγματική και συνεχής έπεται ότι υπάρχει $z_r \in C(0,r) : |p(z_r)| = \min_{|z|=r} |p(z)|$

Όμως $|z_r| = r \xrightarrow{r\to+\infty} +\infty \Rightarrow z_r \xrightarrow{r\to+\infty} \infty$
άρα $p(z_r) \xrightarrow{r\to+\infty} \infty \Rightarrow \min_{|z|=r} |p(z)| \xrightarrow{r\to+\infty} +\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(r) = \frac{2\pi}{\min_{|z|=r} |p(z)|} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Άρα $\int_{C(0,r)} \frac{1}{z p(z)} dz = 0$, Άτοπο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

κεφάλαιο 4

Άσκηση 8

Έστω γ μια απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν A του (φραγμένου) τόπου που περικλείει η γ δίνεται από τον τύπο $A = \frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z}\, dz$

Αποδείξτε ακόμα ότι $A = -\int_\gamma y\, dz = \frac{1}{i} \int_\gamma x\, dz$ και βρείτε την τιμή του $\int_\gamma y\, dz$, για $\gamma(t) = 2 + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Λύση ($z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$, $u = x$, $v = -y$)

$$\frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z}\, dz = \frac{1}{2i} \int_\gamma (x - iy)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\gamma (v\,dx + u\,dy) \right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_\gamma (\overset{P}{x}dx+\overset{Q}{y}dy) + i\int_\gamma(\overset{P'}{-y}dx+\overset{Q'}{x}dy)\right) =$$

Θεώρημα Green $$= \frac{1}{2i}\left(\iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy + i\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\iint_D \overset{0}{\cancel{(0-0)dxdy}} + i\iint_D (1-(-1))\,dxdy\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\, i \iint_D 2\,dxdy = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\iint_D dxdy = \underbrace{A(D)}_{\text{Εμβαδόν του D}} = A$$

Δ.ο. $A = -\int_\gamma y\,dz = \int_\gamma (-y)\,dz$

Γνωρίζω ότι $\int_\gamma z\,dz = 0$ (η z έχει παράγουσα και γ κλειστή καμπύλη)

Άρα $\int_\gamma (x+iy)\,dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma x\,dz = -i\int_\gamma y\,dz$

$\Rightarrow \int_\gamma \bar z\,dz = \int_\gamma (x-iy)\,dz = -2i\int_\gamma y\,dz$

$\Rightarrow 2iA = -2i\int_\gamma y\,dz \Rightarrow A = -\int_\gamma y\,dz$

Από την $\int_\gamma x\,dz = -i\int_\gamma y\,dz \Rightarrow -\int_\gamma y\,dz = \frac{1}{i}\int_\gamma x\,dz$

Για $\gamma(t) = 2+3e^{it} = \underbrace{2+3\cos t}_{Re(\gamma)} + i\underbrace{3\sin t}_{Im(\gamma)}$, $t\in[0,2\pi]$

$$\int_\gamma y\,dz = \int_0^{2\pi} Im\gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 3\sin t\cdot 3ie^{it}\,dt =$$

$$= 9i\int_0^{2\pi}\sin t\cdot e^{it}\,dt = 9i\int_0^{2\pi}\sin t(\cos t + i\sin t)\,dt =$$

$\boxed{\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t}$

$= 9i\left(\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt + i\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt\right) =$

$= 9i\left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} dt + i\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt\right) =$

$= 9i\left(\left[-\frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^{2\pi} \xrightarrow{} 0\right) + i \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}\Big) =$

$= 9i \cdot i\pi = -9\pi$

(Εναλλακτικά μπορούσα να σκεφτώ ότι ξέρω από πριν: $A = -\int_\gamma y\,dz$ και το εμβαδόν του κύκλου $2+3e^{it}$ είναι $\pi\rho^2 = \pi 3^2 = 9\pi$

Επομένως $\int_\gamma y\,dz = -9\pi$)