ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 28/11/2022

Μάθημα 21ο

Ασκ. στο κεφ 2

(7) Έστω $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$. Ορίζουμε $r : \mathbb{C}_\pi \to \mathbb{C}$ με τις συνθήκες:

α) $(r(z))^2 = z$ και β) $Re(r(z)) > 0$ $\forall z \in \mathbb{C}_\pi$.

Αποδείξτε ότι η r είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$ και ακολούθως με τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου δ.ο $r'(z) = \frac{1}{2r(z)}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$

Λύση

Για κάθε $z \in \mathbb{C}_\pi$ το $r(z)$ είναι τετραγωνική ρίζα του z.

άρα $\forall z \in \mathbb{C}_\pi$, $r(z) = \pm\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{arg(z)}{2}} = \pm\sqrt{z}$

όμως $Re(\sqrt{z}) = Re\left(\sqrt{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{arg(z)}{2}\right) + i\sin\left(\frac{arg(z)}{2}\right)\right)\right) = \sqrt{|z|}\cdot\cos\left(\frac{arg(z)}{2}\right)$, $z \in \mathbb{C}_\pi$

Επίσης $arg(z) \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \frac{arg(z)}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{arg(z)}{2}\right) > 0$ ενώ $Re(-\sqrt{z}) = -\sqrt{|z|}\cos\left(\frac{arg(z)}{2}\right) < 0$.

Από την υπόθεση $Re(r(z)) > 0$ άρα

$r(z) = \sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{arg(z)}{2}} = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$

Η συνάρτηση $z \mapsto \sqrt{|z|}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$ (μάλιστα είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$).

Επίσης ξέρουμε ότι η συνάρτηση $z \mapsto arg(z)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$.

Έτσι η $r(z) = \sqrt{z}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}_\pi$. Τότε έχουμε για $z \in \mathbb{C}_\pi$, $z \neq z_0$ ότι

$$\frac{r(z)-r(z_0)}{z-z_0} = \frac{(r(z)-r(z_0))(r(z)+r(z_0))}{(z-z_0)(r(z)+r(z_0))} =$$ $z \in \mathbb{C}_\pi$

$$= \frac{r^2(z)-r^2(z_0)}{(z-z_0)(r(z)+r(z_0))} = \frac{\cancel{(z-z_0)}}{\cancel{(z-z_0)}(r(z)+r(z_0))} = \frac{1}{r(z)+r(z_0)} \xrightarrow[z\to z_0]{} \frac{1}{2r(z_0)} \Rightarrow \exists\ \eta\ r'(z_0) \overset{\text{και}}{=} \frac{1}{2r(z_0)}\ \forall z_0 \in \mathbb{C}_\pi.$$

8) Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στο τόπο D. Αν κάποια από τις $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ ή $|f|$ είναι σταθερή, τότε η f είναι σταθερή.

Λύση

i) $\mathrm{Re} f \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$. Θέτω $f = u + iv$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ και έχω ότι $u = c$ στο $D \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ στο D

Όμως $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z)$, $z \in D$

Από Cauchy-Riemann έχω ότι $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -0 = 0$

$\Rightarrow \forall z \in D$ είναι $f'(z) = 0$.

Επειδή D τόπος έχω ότι η f είναι σταθερή στο D.

ii) $\mathrm{Im} f = v \equiv c \xRightarrow{(\text{ΑΣΚΗΣΗ})} f(z) = \frac{1}{i} \frac{df}{dy}(z) = 0 \xRightarrow{D\ \text{τόπος}} f =$ σταθερή

iii) Έστω ότι $|f| \equiv c$, $c \geq 0$

Αν $c = 0$ τότε $|f| = 0$ στο $D \Rightarrow f \equiv 0$ στο D (σταθερή)

Αν $c > 0$ τότε έχουμε ότι $u^2 + v^2 = c^2$ στο D

Παραγωγίζω ως προς x και μετά ως προς y.

Έχω ότι $2u \frac{du}{dx} + 2v \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow (u, v) \perp \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ ①

Επίσης είναι $2u \frac{\partial u}{\partial y} = 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow (u, v) \perp \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ ②

Από τις ①, ② έχω ότι $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ δηλ. $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial f}{\partial x} = f'} = \lambda \Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial f}{\partial y} = if'}\Big) \Rightarrow$

Άρα $f'(z) = \lambda i f'(z)$, $z \in D \Rightarrow (1-\lambda i) f'(z) = 0$, $z \in D \xRightarrow{1-\lambda i \neq 0}$

$\Rightarrow f'(z) = 0$, $z \in D$ - τόπος $\Rightarrow f$ σταθερή

(12) Έστω ότι η συνάρτηση $u = u(x,y)$ είναι αρμονική στο ανοιχτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$

Δ.ο. η $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y}$ είναι ολόμορφη στο D.

Λύση

$u \in C^2(D)$ αφού u αρμονική άρα $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C'(D)$

$\Rightarrow f \in C'(D) \Rightarrow f$ διαφορίσιμη στο D.

Θέτω $f = f_1 + i f_2$, όπου $f_1 = \mathrm{Re} f$, $f_2 = \mathrm{Im} f$ δηλ.

$f_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, και $f_2 = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Γνωρίζουμε ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (1)

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ και

$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Από την (1) έχω ότι:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ στο D, δηλ. $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$ (2)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \overset{u \in C^2}{=\!=\!=} -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$ (3) Οι (2), (3) $\Rightarrow$

Συνολικά η f είναι ολόμορφη στο D ως διαφορίσιμη και ως λύση των Εξισώσεων C-R.

(13) Έστω u αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ ώστε η u να παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Δ.ο. η u είναι σταθερή

[Θεώρημα Αν $D \subseteq \mathbb{C}$ απλά συνεκτικός τόπος και $u: D \to \mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση τότε η u έχει αρμονική συζυγή στο D. Υπάρχει δηλ. $v: D \to \mathbb{C}$ αρμονική ώστε η $f = u + iv$ να είναι ολόμορφη στο D]

Λύση

Επειδή $\mathbb{R}^2$ = απλά συνεκτικός τόπος (μη κυρτός) μπορούμε να θεωρήσουμε την αρμονική συζυγή της u, έστω v.

Τότε η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ (ή όπως λέμε είναι ακέραια)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h = e^{-f}$. Τότε $h = e^{-f} = e^{-(u+iv)}$
$= e^{-u} \cdot e^{-iv}$, στο $\mathbb{C}$. $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$ $|h(z)| = |e^{-u} e^{-iv}| = |e^{-u}||e^{-iv}|$
$= e^{-u} \cdot 1 = e^{-u} \underset{u \geq 0}{\leq} e^{-0} = 1$. $\Rightarrow |h(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow h$ φραγμ.

[Θεώρημα (Liouville) Αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και φραγμένη τότε η f είναι σταθερή]

Επειδή f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ έπεται ότι και η $h = e^{-f}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.
Επειδή επιπλέον η h είναι φραγμένη, από το Θ. Liouville έπεται ότι η $h = e^{-f}$ είναι σταθερή.
Άρα $h' \equiv 0$ στο $\mathbb{C}$ δηλ. $\forall z \in \mathbb{C}$ $h'(z) = -e^{-f(z)} f'(z) =$
$= 0 \overset{e^{-f(z)} \neq 0}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \forall z$ $f'(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$ = τόπος $\Rightarrow f$ σταθερή

■

Κεφ 3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8 Αν $|a_n| \leq n$, $n \geq 1$ δ.ο. η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι ολόμορφη στο δίσκο $\Delta(0,1)$ και ικανοποιεί την ανισότητα: $|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, για $|z|<1$

Λύση

$|a_n| \leq n$, $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n} \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{n} =$
$= \lim \sqrt[n]{n} \to 1. \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1$ (R η ακτίνα σύγκλισης της f)

Άρα $\Delta(0,1) \subseteq \Delta(0,R)$ και επειδή η f είναι ολόμορφη στο $\Delta(0,R)$ έπεται ότι είναι ολόμορφη στον $\Delta(0,1)$.

Για $z \in \Delta(0,1)$ έχουμε ότι $|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \leq$

$\leq \sum_{n=0}^{\infty} n|z|^n = |z| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |z|^{n-1}}$ Παρατηρούμε ότι αν

$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$, $z \in \Delta(0,1)$ τότε $g'(|z|) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, |z|^{n-1}$

Όμως $g(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \Delta(0,1) \to g''(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $|z|<1$

$\Rightarrow$ Για $|z|<1$ είναι $g'(|z|) = \frac{1}{(1-|z|)^2}$

Έχουμε λοιπόν $|f(z)| \leq |z| \cdot g'(|z|) = |z| \cdot \frac{1}{(1-|z|)^2} =$

$= \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, $|z|<1$.

μ'

(10) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αποδ. ότι αν $\exists$ z_0 με $|z_0-a| = R$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα $\forall$ z με $|z-a|=R$

<u>Λύση</u> Έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0-a|^n < +\infty$ δηλ. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|R^n < +\infty$

Έστω αν $z\in \mathbb{C}$ ώστε $|z-a|=R$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z-a|^n =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0-a|^n < +\infty \Rightarrow$ # $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ συγκλίνει απόλυτα στον $C(a,R)$