ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 23/11/22

19° Μάθημα

Παραδείγματα

(3) Λύστε την εξίσωση $e^z = -2$

Η εξίσωση έχει λύση αφού $-2 \neq 0$
Έτσι έχουμε ότι: $e^z = -2 \iff$

$$e^z = e^{\log|-2| + i\arg(-2)} \iff$$

$$e^z = e^{\log 2 + i\pi} \iff$$

$$z = \log 2 + i\pi + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

Σημείωση: Από τα παραπάνω και τον ορισμό του κύριου κλάδου του λογαρίθμου έπεται ότι οι λύσεις της εξίσωσης $e^z = \omega$, όπου $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι οι $z = \underbrace{\log|\omega| + i\arg(\omega)}_{\log\omega} + 2k\pi i$

$$= \log\omega + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

Όλες αυτές οι λύσεις είναι όλοι οι "λογάριθμοι" του ω.
Η κύρια τιμή λαμβάνεται για $k=0$ και είναι $\log|\omega| + i\arg(\omega)$

★ Η συνάρτηση $\log z = \log|z| + i\arg(z)$, $z \neq 0$ είναι συνεχής εκεί όπου η συνάρτηση arg είναι συνεχής.
(η συνάρτηση $\log|z|$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $z \neq 0$)

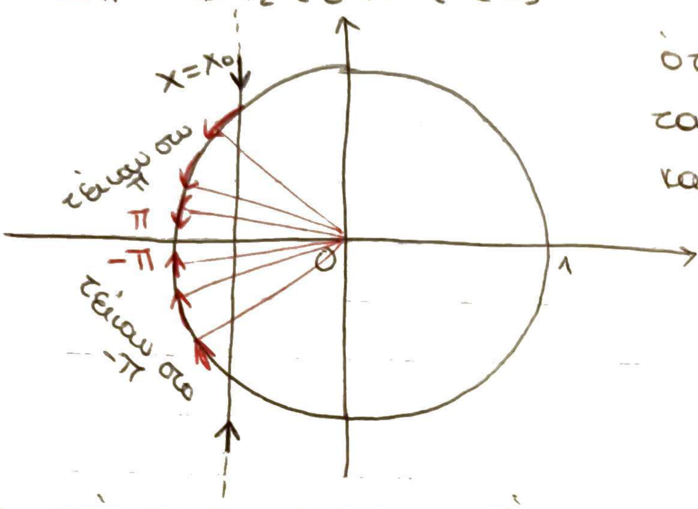
Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της arg και θ.δ.ο. είναι συνεχής στον τόπο $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα $\{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$

1)

Πρόταση Η συνάρτηση Πρωτεύον όρισμα $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\longrightarrow \arg(z)\in(-\pi,\pi]$

α) είναι συνεχής στο τόπο $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R} : t\le 0\}$ και

β) είναι παντού ασυνεχής στο σύνολο $\{t\in\mathbb{R} : t<0\}$



Αποδ. Γεωμετρικά είναι σαφές ότι η συνάρτηση arg ικανοποιεί τα (α) και (β). Θα δώσουμε και μια αναλυτική απόδειξη.

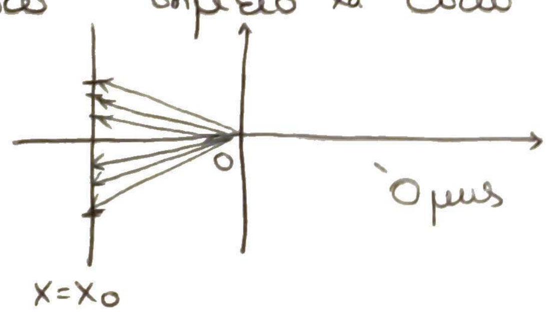
Αν $z = x+iy \neq 0$ τότε

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, & x<0,\ y\ge 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\pi, & x<0,\ y<0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση arctan είναι αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης περιορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Υπενθυμίζουμε ότι:
$x\in\mathbb{R}$ και $\arctan x=\vartheta \Leftrightarrow \tan\vartheta = x$ και $\vartheta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

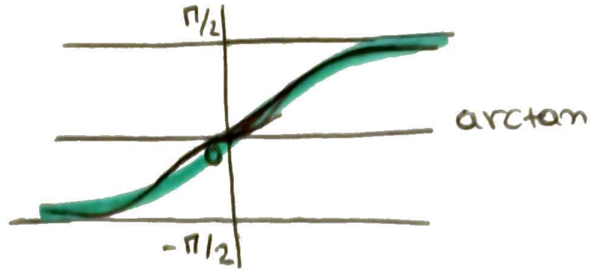
Η συνέχεια της arg στα σημεία του τόπου $\mathbb{C}_\pi$ έπεται τώρα απ' τη συνέχεια της $(x,y)\longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ σε κάθε ένα από τα σύνολα: $D_1=\{x+iy;\ x>0\}$, $D_2=\{x+iy;\ x<0,\ y\ge 0\}$ και $D_3=\{x+iy : x<0,\ y<0\}$

β) Έστω $x<0$. Θ.δ.ο. η συνάρτηση arg είναι ασυνεχής στο σημείο x_0. Έστω $z_n = x_0+\frac{1}{n}i$, και $w_n = x_0-\frac{1}{n}i$, $n\ge 1$.



Τότε $\lim z_n = \lim w_n = x_0$

Όμως $\lim \arg(z_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{1}{n x_0}\right)+\pi\right) = 0+\pi=\pi$



και $\lim_{n\to\infty} \arg(w_n) = -\pi$.

Άρα η arg δεν είναι συνεχής στο $x_0<0$.

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varphi:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ ώστε $\varphi(z)=\log z$, $z\in\mathbb{C}_\pi$. Δηλαδή $\nexists$ συνεχής επέκταση του περιορισμού $\log|_{\mathbb{C}_\pi}$ στον τόπο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
(διότι η arg άρα και η log δεν έχει όριο στο x $\forall\, x<0$)

Θεώρημα: Η συνάρτηση πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}_\pi=\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R}: t\le 0\}$ και μάλιστα $\log' z=\frac{1}{z}$, $z\in\mathbb{C}_\pi$
Επίσης $\log(\mathbb{C}_\pi)=\mathbb{R}\times(-\pi,\pi)$

Αποδ.
Από την προηγούμενη πρόταση η συνάρτηση log είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$. Η εκθετική συνάρτηση είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $(\exp)'(z)=\exp(z)\neq 0$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}$

Επίσης ισχύει $\mathbb{C}_\pi \xrightarrow{\log} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ότι:
$\exp(\log z)=e^{\log|z|+i\arg(z)}=|z|\cdot e^{i\arg(z)}=z$, $z\in\mathbb{C}_\pi$.

Από γνωστό Θεώρημα (αντίστροφης απεικόνισης) έπεται ότι η log είναι ολόμορφη στον $\mathbb{C}_\pi$ και ισχύει ότι $\log' z=\dfrac{1}{(\exp)'(\log z)}=\dfrac{1}{\exp(\log z)}=\dfrac{1}{z}$

$\log(\mathbb{C}_\pi)=\mathbb{R}\times(-\pi,\pi)$
(Αν $z=x+iy$ με $y\in(-\pi,\pi)$ τότε $z=\log(\underbrace{e^{x}\cdot e^{iy}}_{e^{z}})$)

Γενικά $\log e^{z} \neq z$ (ισότητα ισχύει αν $\operatorname{Im} z \in (-\pi,\pi)$)

★ Γνωρίζουμε ότι $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $|x|<1$, $x \in \mathbb{R}$

Πρόταση: (Θα αποδ. το αντίστοιχο για z αντί του x)

Ισχύει ότι $\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $|z|<1$.

Αποδ. Παρατηρούμε ότι αν $|z|<1$ τότε $\operatorname{Re}(1+z)>0$ και άρα $1+z \in \mathbb{C}_\pi$.

Θέτουμε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ και έχουμε $\left(\begin{array}{l} k_n = n+1 \\ a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \end{array} \right)$

$$\limsup \sqrt[k_n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n+1]{\left|(-1) \cdot \frac{1}{n+1}\right|} = \lim \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $f(z)$ είναι $R = \frac{1}{1} = 1$.

Επίσης έχουμε $\forall z \in \mathbb{C} : |z|<1$ ότι:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^n) \underset{w=-z}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} w^n =$$
$$= \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1+z}$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι $\log'(1+z) = \frac{1}{1+z}$

Έπεται ότι οι συναρτήσεις $\log(1+z)$ και $f(z)$, $|z|<1$ έχουν την ίδια παράγωγο στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$. Επειδή ο D είναι τόπος έχουμε ότι οι $\log(1+z)$ και $f(z)$, $z \in D$ διαφέρουν κατά σταθερά. Όμως $\log(1+0) = \log 1 = 0$ και $f(0)=0$ άρα η σταθερά ισούται με μηδέν, δηλ. $\log(1+z) = f(z)$, $z \in D$

__Ορισμός:__

Έστω $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Θέτουμε:

$z^\lambda = e^{\lambda \log z}$ $(= \exp(\lambda \log z))$

Η κατ' αυτόν τον τρόπο οριζόμενη συνάρτηση $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \longmapsto z^\lambda \in \mathbb{C}$ ονομάζεται __κύριος κλάδος της λ-δύναμης__.

Η συνάρτηση αυτή είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$.

__Παραδείγματα__

① $i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\pi/2}$ $(i^i \in \mathbb{R})$

② $(-1)^i = e^{i \log(-1)} = e^{i \cdot i\pi} = e^{-\pi}$

③ $2^{3i} = e^{3i \log 2} = e^{i \log 2^3} = \cos(\log 8) + i \sin(\log 8)$

④ $(1+i)^{1-i} = \exp((1-i)\log(1+i)) = \exp\left((1-i)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)\right) \overset{\text{πράξεις}}{=} (\dots) =$

$= \exp\left(\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)\right) =$

$= e^{\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)} =$

$= e^{\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)\right)$