513. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ασκήσεις

Εαρινό Εξάμηνο 2024

Γιάννης Λιβιεράτος
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών

Το αρχείο θα τροποποιείται και θα ενημερώνεται με λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων και νέες ασκήσεις ανά τακτά χρονικά διαστήματα.

Contents

1 Προτασιακή Λογική

1.1 Γλώσσα

Άσκηση 1.1. Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις της φυσικής γλώσσας με χρήση συμβόλων της Γ_0, κάνοντας σαφή το ποια κομμάτια των προτάσεων αντιστοιχούν στις μεταβλητές που χρησιμοποιείτε. Αν προκύπτουν αμφισημίες, σημειώστε σε ποιο/α σημεία και επιλύστε τις όπως προτιμάτε (με κατάλληλη παρενθετοποίηση):

(i) Αν αύριο βρέχει τότε είτε θα έχει μποτιλιάρισμα και τα ΜΜΜ θα είναι άδεια είτε ο κόσμος δεν θα δουλεύει αν και μόνον αν δεν φτιάξουν οι δρόμοι.

(ii) Ένας αριθμός είναι ρητός αν και μόνον αν υπάρχει ακέραιος και φυσικός που αν γραφτούν ως κλάσμα τότε να ισούνται με τον ρητό.

(iii) **if** !Sorted($list$($\{x$ **for** x **in** $INT13\}$: **print**(“$Error.$”)

(iv) Αν το S είναι ένα σύνολο από ΚΣΤ που περιέχει όλα τα σύμβολα προτάσεων και είναι κλειστό ως προς τις πέντε τυποκατασκευαστικές πράξεις, τότε το S είναι το σύνολο όλων των ΚΣΤ.

(v) Αν σκοιλ ελικικού προσθέσεις και ελέγχου λοιμώχθηκαν τότε ακοπός μέτζη του νέουκτη ή οι βακτηριαιμίες είναι συγκεκριμένες χρονότερες και τεχνρότερες διακρίσεις από τα μαθημένα βακτήρια.

Άσκηση 1.2. Να αποδειχθεί το Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας.

1.2 Επαγωγή

Στην ενότητα αυτή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μορφή της Αρχής της Επαγωγής προτιμάτε, με ή χωρίς τις τυποκατασκευαστικές πράξεις.

Άσκηση 1.3. Να αποδειχθεί ότι κάθε τύπος της $T(\Gamma_0)$ έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Άσκηση 1.4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε προτασιακό τύπο ϕ ισχύει ότι $m_\phi = n_\phi + 1$, όπου m_ϕ είναι το πλήθος των εμφανίσεων των προτασιακών μεταβλητών και n_ϕ των διθέσιων συνδέσμων στον ϕ.

Άσκηση 1.5. Να αποδειχθεί ότι κάθε αρχικό τμήμα κάθε τύπου της $T(\Gamma_0)$ δεν είναι τύπος της $T(\Gamma_0)$. Αρχικό τμήμα ενός τύπου ϕ είναι οποιαδήποτε μη κενή έκφραση ψ που περιέχει μόνο σύμβολα με την σειρά που εμφανίζονται στον ϕ και τουλάχιστον ένα λιγότερο από τον ϕ.

2 Ικανοποιησιμότητα

Για όλα τα ερωτήματα και τις ασκήσεις αυτής της ενότητας, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποια μέθοδο για τις απονομές αληθοτιμών θέλετε (πίνακες, ελεύθερο κείμενο, απονομές ως συναρτήσεις/διανύσματα).

Ερώτηση 2.1. Έστω $x, y, z \in M(\Gamma_0)$. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι ικανοποιήσιμες, αντιφάσεις, ταυτολογίες και γιατί;

(i) $x \wedge y \to x \vee y$.

(ii) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow ((\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y))$.

(iii) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge \neg z$.

Ερώτηση 2.2. Ποια από τα ακόλουθα σύνολα είναι ικανοποιήσιμα και γιατί;

(i) $M(\Gamma_0)$.

(ii) $T(\Gamma_0)$.

(iii) $\{p_0, p_0 \to p_1, \neg p_1\}, p_0, p_1 \in M(\Gamma_0)$,

(iv) $\{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}, p_i \in M(\Gamma_0), \forall i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.1. Έστω $x, y, z \in M(\Gamma_0)$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $x \wedge y \models\dashv y \wedge x$.

(ii) $x \vee (y \vee z) \models\dashv (x \vee y) \vee z$.

(iii) $\models (x \wedge (y \vee z)) \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(iv) $x \to y \models\dashv \neg y \to \neg x$.

(v) $\neg(\neg x) \models\dashv x$.

(vi) $x \to y \models\dashv \neg x \vee y$.

(vii) $x \wedge y \models\dashv \neg(\neg x \vee \neg y)$.

Άσκηση 2.2. Έστω $p, q, r \in M(\Gamma_0)$. Να δείξετε ότι:

(i) $p \to q \models (p \vee r) \to (q \vee r)$. Ισχύει το αντίστροφο;

(ii) $\models (p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$.

(iii) $\neg(\neg q \vee (q \vee r)) \models \phi, \forall \phi \in T(\Gamma_0)$.

Άσκηση 2.3. Έστω $x, y \in M(\Gamma_0)$. Από τους παρακάτω τρεις τύπους, να εξετάσετε ποιος οι ποιοι συνεπάγεται/συνεπάγονται ταυτολογικά ποιον.

- $p \leftrightarrow q$,
- $\neg((x \to y) \to (\neg(y \to x)))$,
- $(\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$.

Ερώτηση 2.3. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Να αποδείξετε τις σωστές και να βρείτε αντιπαράδειγμα για τις λάθος.

(i) $\phi \in T(\Gamma_0)$ ταυτολογία αν και μόνον αν $\neg\phi$ αντίφαση.

(ii) $\phi \in T(\Gamma_0)$ ταυτολογία αν και μόνον αν δεν είναι αντίφαση.

(iii) Έστω $\phi, \psi, \chi \in T(\Gamma_0)$. Αν $\{\phi, \psi\}$, $\{\psi, \chi\}$ ικανοποιήσιμα, τότε $\{\phi, \psi, \chi\}$ ικανοποιήσιμο.

(iv) Έστω $\phi, \psi, \chi \in T(\Gamma_0)$. Αν $\{\phi, \psi\}$, $\{\psi, \chi\}$, $\{\phi, \chi\}$ ικανοποιήσιμα, τότε $\{\phi, \psi, \chi\}$ ικανοποιήσιμο.

(v) Έστω $\phi(x_1, \ldots, x_n) \models \psi(y_1, \ldots, y_m)$, με $\phi, \psi \in T(\Gamma_0)$ και $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq T(\Gamma_0)$ ξένα. Τότε, ψ ταυτολογία.

(vi) $T(\Gamma_0) \models \phi, \forall \phi \in T(\Gamma_0)$.

(vii) $\emptyset \models \phi, \forall \phi \in T(\Gamma_0)$.

(viii) $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ μη ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν υπάρχει $\phi \in \Sigma$ που είναι αντίφαση.

(ix) Αν $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ μη ικανοποιήσιμο και $\phi \in T(\Gamma_0)$, τότε $\Sigma \models \phi$ αν και μόνον αν ϕ ταυτολογία.

(x) Έστω $\phi \subseteq T(\Gamma_0)$ αντίφαση. Τότε, $\psi \models \phi$ αν και μόνον αν $\psi \in T(\Gamma_0)$ μη ικανοποιήσιμος.