2η Διάλεξη στην Μαθηματική Λογική

Γιάννης Λιβιεράτος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

12 Μαρτίου 2024

Περιεχόμενα

Αληθοτιμές
- Πίνακες Αλήθειας
- Θεωρήματα της γλώσσας

Ικανοποιησιμότητα
- Βασικοί ορισμοί
- Συνεπαγωγές
- Κανονικές Μορφές

Περιεχόμενα

Αληθοτιμές
- Πίνακες Αλήθειας
- Θεωρήματα της γλώσσας

Ικανοποιησιμότητα
- Βασικοί ορισμοί
- Συνεπαγωγές
- Κανονικές Μορφές

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y,\ \ \chi(x,z) = \neg x \vee z,\ \ \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$
$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \;\; \chi(x,z) = \neg x \vee z, \;\; \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$
$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \rightarrow \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \rightarrow \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	1	0				

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \quad \chi(x,z) = \neg x \vee z, \quad \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$
$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1			
0	0	1	0	1			
0	1	0	1	1			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	1	1	1			
1	1	0	0	0			
1	1	1	0	1			

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \ \ \chi(x,z) = \neg x \vee z, \ \ \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$
$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1	0		
0	0	1	0	1	0		
0	1	0	1	1	0		
0	1	1	1	1	0		
1	0	0	1	0	1		
1	0	1	1	1	0		
1	1	0	0	0	0		
1	1	1	0	1	0		

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \;\; \chi(x,z) = \neg x \vee z, \;\; \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$
$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \rightarrow \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \rightarrow \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1	0	1	
0	0	1	0	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	
1	1	0	0	0	0	1	
1	1	1	0	1	0	1	

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y,\ \ \chi(x,z) = \neg x \vee z,\ \ \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \rightarrow \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \rightarrow \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

Βασικό Παράδειγμα

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \quad \chi(x,z) = \neg x \vee z, \quad \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

- Τι θα γινόταν αν είχαμε τύπο με 4 μεταβλητές; Ή 5;
- $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow 2^n$ απονομές αληθοτιμών.
- Για μικρά n, το 2^n γίνεται μη διαχειρίσιμος αριθμός.

Απλοποιήσεις

$$(x, y, z) =$$

$$(x \leftrightarrow \neg y) \quad \wedge \quad \Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \quad \rightarrow \quad (\neg x \vee z)\Big)$$

Απλοποιήσεις

$$(x, y, z) = (1, 0, 0)$$

$$\begin{array}{ccccc} (x \leftrightarrow \neg y) & \wedge & \Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) & \rightarrow & (\neg x \vee z)\Big) \\ & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Απλοποιήσεις

$$(x, y, z) = (1, 0, 0),\ \ (1, 0, 1)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
(x \leftrightarrow \neg y) & \wedge & \big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) & \to & (\neg x \vee z)\big) \\
 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\
1 & \mathbf{1} & 0 & 1 &
\end{array}$$

Απλοποιήσεις

$$(x, y, z) = (1,0,0),\ \ (1,0,1),\ \ (0,1,*)$$

$$\begin{array}{ccccc}
(x \leftrightarrow \neg y) & \wedge & \Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) & \rightarrow & (\neg x \vee z)\Big) \\
 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\
1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \\
1 & \mathbf{1} & 0 & 1 &
\end{array}$$

Απλοποιήσεις

$$(x, y, z) = (1, 0, 0),\ \ (1, 0, 1),\ \ (0, 1, *),\ \ (c, c, *)$$

$(x \leftrightarrow \neg y)$	$\wedge$	$\Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z)$	$\rightarrow$	$(\neg x \vee z)\Big)$
	0	1	0	0
1	**1**	0	1	
1	**1**	0	1	
0	**0**			

Απλοποιήσεις

$$(x, y, z) = (1,0,0),\ (1,0,1),\ (0,1,*),\ (c,c,*)$$

$$\begin{array}{ccccc}
(x \leftrightarrow \neg y) & \wedge & \Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) & \rightarrow & (\neg x \vee z)\Big) \\
 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\
1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \\
1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \\
0 & \mathbf{0} & & &
\end{array}$$

- $T(\phi) := \{(x, y, z) \mid (x = 0,\ y = 1)$ ή $(x = z = 1,\ y = 0)\}$
- $F(\phi) := \{(x, y, z) \mid (x = y)$ ή $(x = 1,\ y = z = 0)\}$
- Δεν υπάρχει εγγύηση ότι θα γλιτώνουμε πάντα απονομές αληθοτιμών.

Περιεχόμενα

Αληθοτιμές

- Πίνακες Αλήθειας
- Θεωρήματα της γλώσσας

Ικανοποιησιμότητα

- Βασικοί ορισμοί
- Συνεπαγωγές
- Κανονικές Μορφές

Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας

$E_\neg : T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, με $E_\neg(\phi) := (\neg\phi)$,
$E_* : T(\Gamma_0) \times T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, με $E_*(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$,
$* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας

$E_{\neg} : T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, με $E_{\neg}(\phi) := (\neg\phi)$,
$E_{*} : T(\Gamma_0) \times T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, με $E_{*}(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$,
$* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

(i) Τα πεδία τιμών των $E_{\neg}$, E_{*} είναι ανά δύο ξένα και
(ii) $E_{\neg}$, E_{*} 1-1.

Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας

$E_\neg : T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, με $E_\neg(\phi) := (\neg\phi)$,
$E_* : T(\Gamma_0) \times T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, με $E_*(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$,
$* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

(i) Τα πεδία τιμών των $E_\neg$, E_* είναι ανά δύο ξένα και
(ii) $E_\neg$, E_* 1-1.

Απόδειξη.

◇ $\phi \in T(\Gamma_0)$ και ψ αρχικό τμήμα του $\phi \Rightarrow \psi \notin T(\Gamma_0)$.

(i) $E_\neg(\phi) = E_*(\psi, \chi) \;\Leftrightarrow\; (\neg\phi) = (\psi * \chi) \;\Leftrightarrow\; \neg\phi) = \psi * \chi)$.
Έπεται ότι το πρώτο σύμβολο της ψ πρέπει να είναι το $\neg$. Άτοπο, αφού $\psi \in T(\Gamma_0)$ (γιατί;).

(ii) $E_*(\phi, \psi) = E_*(\chi, \zeta) \;\Leftrightarrow\; (\phi * \psi) = (\chi * \zeta) \;\Leftrightarrow\; \phi = \chi,\; \psi = \zeta$ (γιατί;)

□

Θεώρημα Μοναδικής Επέκτασης

Έστω $u : M(\Gamma_0) \to \{0,1\}$. Υπάρχει μοναδική επέκταση $\bar{u}$ της u στο $T(\Gamma_0)$:

0. $(\bar{u}(\phi) = u(\phi),$ αν $\phi \in M(\Gamma_0),)$
1. $\bar{u}(\neg\phi) = 1 \Leftrightarrow \bar{u}(\phi) = 0,$
2. $\bar{u}(\phi \vee \psi) = 0 \Leftrightarrow \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi) = 0,$
3. $\bar{u}(\phi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi) = 1,$
4. $\bar{u}(\phi \to \psi) = 0 \Leftrightarrow \bar{u}(\phi) = 1$ και $\bar{u}(\psi) = 0,$
5. $\bar{u}(\phi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi)$

Περιεχόμενα

Αληθοτιμές
- Πίνακες Αλήθειας
- Θεωρήματα της γλώσσας

Ικανοποιησιμότητα
- Βασικοί ορισμοί
- Συνεπαγωγές
- Κανονικές Μορφές

Ικανοποιήσιμος τύπος

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ικανοποιήσιμος αν υπάρχει απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$.

Ικανοποιήσιμος τύπος

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ικανοποιήσιμος αν υπάρχει απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0,1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$.

Ισοδύναμα, $\exists \bar{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$: $\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Ικανοποιήσιμος τύπος

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ικανοποιήσιμος αν υπάρχει απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$.

Ισοδύναμα, $\exists \bar{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$: $\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

- $\psi(x, y) = x \leftrightarrow \neg y$ ικανοποιήσιμος για $u(x) = 1$, $u(y) = 0$.
- $\chi(x, z) = \neg x \vee z$ ικανοποιήσιμος, αφού για $\bar{a} = (0, 1)$, $\chi(0, 1) = 1$.
- $\zeta(x, y, z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$ για $u(x) = 1$, $u(y) = u(z) = 0$.
- $\phi(x, y, z) = \psi(x, y) \wedge (\zeta(x, y, z) \to \chi(x, z))$ ικανοποιήσιμος, αφού για $\bar{a} = (0, 1, 0)$, $\phi(0, 1, 0) = 1$.

Αντίφαση

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ αντίφαση αν **δεν** είναι ικανοποιήσιμος.

Αντίφαση

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ αντίφαση αν δεν είναι ικανοποιήσιμος.

Ισοδύναμα, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 0$.

Αντίφαση

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ αντίφαση αν δεν είναι ικανοποιήσιμος.

Ισοδύναμα, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 0$.

Ισοδύναμα, $\forall \bar{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$: $\phi(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Αντίφαση

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ αντίφαση αν δεν είναι ικανοποιήσιμος.

Ισοδύναμα, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 0$.

Ισοδύναμα, $\forall \bar{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$: $\phi(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

- $x \wedge \neg x$.
- $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$.
- $\neg(x \to (y \to x))$.

Ταυτολογία

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ ταυτολογία αν για κάθε απονομή
$u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$.

Ταυτολογία

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ταυτολογία αν για κάθε απονομή
$u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$.

Ισοδύναμα, $\forall \bar{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$: $\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Ταυτολογία

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ταυτολογία αν για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0,1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$.

Ισοδύναμα, $\forall \bar{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$: $\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Προσοχή: Η αντίφαση και η ταυτολογία **ΔΕΝ** είναι αντίθετες έννοιες. Ένας τύπος μπορεί να μην είναι τίποτα από τα δύο.

Γνωστές ταυτολογίες

Μεταθετικότητα για $* \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$: $\phi * \psi \leftrightarrow \psi * \phi$.

Προσετ/τητα για $* \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$: $\phi * (\psi * \chi) \leftrightarrow (\phi * \psi) * \chi$.

De Morgan: $\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi) \vee (\neg\psi)$, $\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)$.

Διπλή άρνηση: $\neg(\neg\phi) \leftrightarrow \phi$.

Διπλή συνεπαγωγή: $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \to \psi \wedge \psi \to \phi)$.

Αντιθετοαντιστροφή: $(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)$.

Συνεπαγωγή: $(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$.

Περιεχόμενα

Αληθοτιμές
- Πίνακες Αλήθειας
- Θεωρήματα της γλώσσας

Ικανοποιησιμότητα
- Βασικοί ορισμοί
- Συνεπαγωγές
- Κανονικές Μορφές

Ταυτολογική συνεπαγωγή

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ **συνεπάγεται ταυτολογικά** τον $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$, ισχύει:

$$\bar{u}(\phi) = 1 \Rightarrow \bar{u}(\psi) = 1.$$

Γράφουμε $\phi \models \psi$.

Ταυτολογική συνεπαγωγή

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ συνεπάγεται ταυτολογικά τον $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$, ισχύει:

$$\bar{u}(\phi) = 1 \Rightarrow \bar{u}(\psi) = 1.$$

Γράφουμε $\phi \models \psi$.

x	y	z	$x \leftrightarrow \neg y$	$\neg x \vee z$	$x \wedge \neg y \wedge \neg z$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

$x \wedge \neg y \wedge \neg z \models x \leftrightarrow \neg y$

Ταυτολογική Συνεπαγωγή

$\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ συνεπάγεται ταυτολογικά τον ϕ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$, ισχύει πως αν για κάθε $\psi \in \Sigma$: $\bar{u}(\psi) = 1$, τότε $\bar{u}(\phi) = 1$. Γράφουμε $\Sigma \models \phi$.

Ταυτολογική Συνεπαγωγή

$\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ συνεπάγεται ταυτολογικά τον ϕ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0,1\}$, ισχύει πως αν για κάθε $\psi \in \Sigma$: $\bar{u}(\psi) = 1$, τότε $\bar{u}(\phi) = 1$. Γράφουμε $\Sigma \models \phi$.

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \quad \chi(x,z) = \neg x \vee z, \quad \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

$\{\psi, \chi\} \models \phi$, $\{\chi, \zeta\} \models \phi$

Ταυτολογική Ισοδυναμία

Ο $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$, ισχύει: $\bar{u}(\phi) = 1 \Leftrightarrow \bar{u}(\psi) = 1$. Γράφουμε $\phi \vDash\dashv \psi$.

Ταυτολογική Ισοδυναμία

Ο $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$, ισχύει: $\bar{u}(\phi) = 1 \Leftrightarrow \bar{u}(\psi) = 1$. Γράφουμε $\phi \models\!\!\dashv \psi$.

Ισοδύναμα: $\phi \models\!\!\dashv \psi \Leftrightarrow (\phi \models \psi) \land (\psi \models \phi))$.

Ταυτολογική Ισοδυναμία

Ο $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ αν, για κάθε απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0, 1\}$, ισχύει: $\bar{u}(\phi) = 1 \Leftrightarrow \bar{u}(\psi) = 1$. Γράφουμε $\phi \models\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! \mathrel{=}\!\mid \psi$.

Ισοδύναμα: $\phi \models\!\dashv \psi \Leftrightarrow (\phi \models \psi) \wedge (\psi \models \phi))$.

Μεταθετικότητα για $* \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$: $\phi * \psi \models\!\dashv \psi * \phi$.

Προσετ/τητα για $* \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$: $\phi * (\psi * \chi) \models\!\dashv (\phi * \psi) * \chi$.

De Morgan: $\neg(\phi \wedge \psi) \models\!\dashv (\neg\phi) \vee (\neg\psi)$, $\neg(\phi \vee \psi) \models\!\dashv (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)$.

Διπλή άρνηση: $\neg(\neg\phi) \models\!\dashv \phi$.

Διπλή συνεπαγωγή: $(\phi \leftrightarrow \psi) \models\!\dashv (\phi \to \psi \wedge \psi \to \phi)$.

Αντιθετοαντιστροφή: $(\phi \to \psi) \models\!\dashv (\neg\psi \to \neg\phi)$.

Συνεπαγωγή: $(\phi \to \psi) \models\!\dashv (\neg\phi \vee \psi)$.

Ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων

$\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ ικανοποιήσιμο αν υπάρχει απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0,1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$ για κάθε $\phi \in \Sigma$.

Ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων

$\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ ικανοποιήσιμο αν υπάρχει απονομή $u : M(\Gamma_0) \to \{0,1\}$: $\bar{u}(\phi) = 1$ για κάθε $\phi \in \Sigma$.

$$\psi(x,y) = x \leftrightarrow \neg y, \;\; \chi(x,z) = \neg x \vee z, \;\; \zeta(x,y,z) = x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

$$\phi(x,y,z) = \psi(x,y) \wedge (\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z))$$

x	y	z	$\psi(x,y)$	$\chi(x,z)$	$\zeta(x,y,z)$	$\zeta(x,y,z) \to \chi(x,z)$	ϕ
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

$\{\psi, \chi, \zeta \to \chi, \phi\}$ ικανοποιήσιμο.

$\{\psi, \chi, \zeta, \phi\}$ μη ικανοποιήσιμο.

Θεωρήματα

- $\Sigma \models \phi \;\Leftrightarrow\; \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ μη ικανοποιήσιμο.

Απόδειξη.

Θεωρήματα

- $\diamond$ $\Sigma \models \phi \;\Leftrightarrow\; \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ μη ικανοποιήσιμο.

Απόδειξη.

$\Rightarrow$ Έστω u που ικανοποιεί κάθε ψ στο Σ. Τότε $\bar{u}(\phi) = 1$, άρα $\bar{u}(\neg\phi) = 0$.

$\Leftarrow$ Με αντιθετοαναστροφή: Έστω ότι για κάθε u που ικανοποιεί κάθε ψ στο Σ, $\bar{u}(\phi) = 0$ (γιατί υπάρχει τέτοια u;). Τότε $\bar{u}(\neg\phi) = 1$, άρα $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ ικανοποιήσιμο.

$\square$

Θεωρήματα

◇ $\Sigma \models \phi \;\Leftrightarrow\; \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ μη ικανοποιήσιμο.

Απόδειξη.

$\Rightarrow$ Έστω u που ικανοποιεί κάθε ψ στο Σ. Τότε $\bar{u}(\phi) = 1$, άρα $\bar{u}(\neg\phi) = 0$.

$\Leftarrow$ Με αντιθετοαναστροφή: Έστω ότι για κάθε u που ικανοποιεί κάθε ψ στο Σ, $\bar{u}(\phi) = 0$ (γιατί υπάρχει τέτοια u;). Τότε $\bar{u}(\neg\phi) = 1$, άρα $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ ικανοποιήσιμο.

$\square$

◇ <u>Θεώρημα Συμπάγειας:</u> Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ άπειρο. Αν κάθε πεπερασμένο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ είναι ικανοποιήσιμο, τότε Σ ικανοποιήσιμο.

Περιεχόμενα

Αληθοτιμές
- Πίνακες Αλήθειας
- Θεωρήματα της γλώσσας

Ικανοποιησιμότητα
- Βασικοί ορισμοί
- Συνεπαγωγές
- Κανονικές Μορφές

Κανονική Διαζευκτική Μορφή (DNF)

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{m} D_i,\ \ D_i(l_{i_1}, \ldots, l_{i_{k_i}}) = \bigwedge_{j=1}^{k_i} l_{i_j},\ \ l_{i_j} \in \{x_p, \neg x_p\}$$

Κανονική Διαζευκτική Μορφή (DNF)

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{m} D_i, \;\; D_i(l_{i_1}, \ldots, l_{i_{k_i}}) = \bigwedge_{j=1}^{k_i} l_{i_j}, \;\; l_{i_j} \in \{x_p, \neg x_p\}$$

x	y	z	$(x \leftrightarrow \neg y) \wedge \Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \rightarrow (\neg x \vee z)\Big)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$\phi(x, y, z) \models\!\!\!\!\dashv (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$

$\phi(x, y, z) \models\!\!\!\!\dashv (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$

Κανονική Συζευκτική Μορφή (CNF)

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i,\ \ C_i(l_{i_1}, \ldots, l_{i_{k_i}}) = \bigvee_{j=1}^{k_i} l_{i_j},\ \ l_{i_j} \in \{x_p, \neg x_p\}$$

Κανονική Συζευκτική Μορφή (CNF)

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i, \;\; C_i(l_{i_1}, \ldots, l_{i_{k_i}}) = \bigvee_{j=1}^{k_i} l_{i_j}, \;\; l_{i_j} \in \{x_p, \neg x_p\}$$

x	y	z	$(x \leftrightarrow \neg y) \wedge \Big((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \to (\neg x \vee z)\Big)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$\phi(x, y, z) \vDash\Dashv (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge$
$\wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$.

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Κάθε τύπος μπορεί να γραφτεί σε ΚΔΜ και ΚΣΜ (άρα δεν χρειαζόμαστε τα $\rightarrow, \leftrightarrow$;)
- Υπάρχουν αλγοριθμικές διαδικασίες που μετατρέπουν τύπους σε ΚΔΜ ή/και ΚΣΜ.
- Αν έχουμε έναν τύπο σε ΚΔΜ μορφή, ο έλεγχος για το αν είναι ικανοποιήσιμος γίνεται αποδοτικά.
- (Μάλλον) δεν μπορούμε να μετατρέψουμε αποδοτικά έναν τύπο σε ΚΔΜ ή ΚΣΜ.
- Μπορούμε να μετρατρέψουμε αποδοτικά έναν τύπο ϕ σε έναν ϕ' σε ΚΣΜ μορφή, έτσι ώστε ο ϕ' να είναι ικανοποιήσιμος μόνο αν είναι και ο ϕ.

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Κάθε τύπος μπορεί να γραφτεί σε ΚΔΜ και ΚΣΜ (άρα δεν χρειαζόμαστε τα $\to, \leftrightarrow$;)
- Υπάρχουν αλγοριθμικές διαδικασίες που μετατρέπουν τύπους σε ΚΔΜ ή/και ΚΣΜ.
- Αν έχουμε έναν τύπο σε ΚΔΜ μορφή, ο έλεγχος για το αν είναι ικανοποιήσιμος γίνεται αποδοτικά.
- (Μάλλον) δεν μπορούμε να μετατρέψουμε αποδοτικά έναν τύπο σε ΚΔΜ ή ΚΣΜ.
- Μπορούμε να μετρατρέψουμε αποδοτικά έναν τύπο ϕ σε έναν ϕ' σε ΚΣΜ μορφή, έτσι ώστε ο ϕ' να είναι ικανοποιήσιμος μόνο αν είναι και ο ϕ.

Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας: ϕ σε ΚΣΜ μορφή. Είναι ο ϕ ικανοποιήσιμος;
Cook-Levin (1971): Το πρόβλημα αυτό (μάλλον) δεν μπορεί να λυθεί αποδοτικά ($P =^? NP$).