# 1η Διάλεξη στην Μαθηματική Λογική

Γιάννης Λιβιεράτος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

5 Μαρτίου 2024

# Περιεχόμενα

# Έγκυροι και ορθοί συλλογισμοί

Οι άρτιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2.

# Έγκυροι και ορθοί συλλογισμοί

Οι άρτιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2.

Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2.

# Έγκυροι και ορθοί συλλογισμοί

Οι άρτιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2.

Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2.

Αν το 6 είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2.

# Έγκυροι και ορθοί συλλογισμοί

Αν υπάρχει Θεός, τότε το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό.
Υπάρχει Θεός.
Άρα το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό.

# Έγκυροι και ορθοί συλλογισμοί

Αν υπάρχει Θεός, τότε το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό.
Υπάρχει Θεός.
Άρα το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό.

Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2.
Το 7 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 7 διαιρείται με το 2.

# Έγκυροι και ορθοί συλλογισμοί

Αν υπάρχει Θεός, τότε το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό.
Υπάρχει Θεός.
Άρα το σύμπαν είναι ντετερμινιστικό.

Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2.
Το 7 είναι άρτιος αριθμός.
Άρα το 7 διαιρείται με το 2.

Ένας αριθμός είναι άρτιος αν και μόνον αν διαιρείται με το 2.
Το 6 είναι άρτιος αριθμός.
Το 7 δεν διαιρείται με το 2.
Άρα το 6 διαιρείται με το 2 και το 7 δεν είναι άρτιος.

# Αμφισημία

Αν $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$.

# Αμφισημία

Αν $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$.

- $a, b \in \mathbb{Z}$ : ορθή πρόταση.
- $[2]_6, [3]_6 \neq [0]_6$, αλλά $[2]_6 \cdot [3]_6 = [6]_6 = [0]_6$ στο $\mathbb{Z}_6$.
- $(1,0,1), (0,1,0) \neq \bar{0}$, αλλά $(1,0,1) \cdot (0,1,0) = \bar{0}$, όπου $\cdot$ το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ και $\bar{0} = (0,0,0)$.

# Αμφισημία

Αν $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$.

- $a, b \in \mathbb{Z}$ : ορθή πρόταση.
- $[2]_6, [3]_6 \neq [0]_6$, αλλά $[2]_6 \cdot [3]_6 = [6]_6 = [0]_6$ στο $\mathbb{Z}_6$.
- $(1,0,1), (0,1,0) \neq \bar{0}$, αλλά $(1,0,1) \cdot (0,1,0) = \bar{0}$, όπου $\cdot$ το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ και $\bar{0} = (0,0,0)$.

**Αν** $(a \cdot b = 0)$ **τότε** $(a = 0$ ή $b = 0)$ ή
(αν $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0)$ **ή** $b = 0$.

# Τυπική Γλώσσα

Γ: σύνολο συμβόλων $\Rightarrow$
$\Gamma^* := \{w = w_1 w_2 \cdots w_n \mid w_i \in \Gamma,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}$

$*$: άστρο του Kleene
Αφού επιτρέπουμε αυθαίρετα μεγάλες συμβολοσειρές, το $\Gamma^*$ είναι πάντα άπειρο σύνολο.

# Τυπική Γλώσσα

$\Gamma$: σύνολο συμβόλων $\Rightarrow$
$\Gamma^* := \{w = w_1 w_2 \cdots w_n \mid w_i \in \Gamma,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}$

$*$: άστρο του Kleene
Αφού επιτρέπουμε αυθαίρετα μεγάλες συμβολοσειρές, το $\Gamma^*$ είναι πάντα άπειρο σύνολο.

**Πεπερασμένο** σύνολο: το πλήθος των στοιχείων του έχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με κάποιο αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών.
**Άπειρο αριθμήσιμο** σύνολο: το πλήθος των στοιχείων του έχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$.
**Αριθμήσιμο** σύνολο: πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.
**Υπεραριθμήσιμο** σύνολο: όχι αριθμήσιμο σύνολο.

# Η γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού

$\Gamma_0$: η γλώσσα της προτασιακής λογικής:

- Προτασιακές μεταβλητές: (συνήθως) γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου, με ή χωρίς δείκτες ($p, q, r, x, y, z$, $x_1, \ldots, x_n$).
  $M(\Gamma_0)$: σύνολο προτασιακών μεταβλητών (όσο μεγάλο χρειάζεται)

# Η γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού

$\Gamma_0$: η γλώσσα της προτασιακής λογικής:

- Προτασιακές μεταβλητές: (συνήθως) γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου, με ή χωρίς δείκτες ($p, q, r, x, y, z$, $x_1, \ldots, x_n$).
  $M(\Gamma_0)$: σύνολο προτασιακών μεταβλητών (όσο μεγάλο χρειάζεται)
- Σύμβολα:
  - παρενθέσεις: (, )
  - μονοθέσιος σύνδεσμος: $\neg$
  - διθέσιοι σύνδεσμοι: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

# Εκφράσεις

Έκφραση στην $\Gamma_0$ είναι ένα στοιχείο του $\Gamma_0^*$.

- $q$
- $\neg x \vee y$
- $p_0())\neg \rightarrow p_1 p_2((,\ldots$

# Εκφράσεις

Έκφραση στην $\Gamma_0$ είναι ένα στοιχείο του $\Gamma_0^*$.

- $q$
- $\neg x \vee y$
- $p_0())\neg \to p_1 p_2((,\ldots$

ΚαλοΣχηματισμένος Τύπος (ΚΣΤ) ή well-formed forula (wff):

(i) Κάθε $p \in M(\Gamma_0)$ είναι ΚΣΤ,

(ii) αν $x, y$ ΚΣΤ τότε $(\neg x)$, $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \to y)$, $(x \leftrightarrow y)$ ΚΣΤ και

(iii) καμία άλλη έκφραση πλην των (i), (ii) δεν είναι ΚΣΤ.

$$T(\Gamma_0) := \{\phi \mid \phi \text{ ΚΣΤ}\}$$

# Εκφράσεις

Έκφραση στην $\Gamma_0$ είναι ένα στοιχείο του $\Gamma_0^*$.

- $q$
- $\neg x \vee y$
- $p_0())\neg \to p_1 p_2((, \ldots$

ΚαλοΣχηματισμένος Τύπος (ΚΣΤ) ή well-formed forula (wff):

(i) Κάθε $p \in M(\Gamma_0)$ είναι ΚΣΤ,

(ii) αν $x, y$ ΚΣΤ τότε $(\neg x)$, $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \to y)$, $(x \leftrightarrow y)$ ΚΣΤ και

(iii) καμία άλλη έκφραση πλην των (i), (ii) δεν είναι ΚΣΤ.

$$T(\Gamma_0) := \{\phi \mid \phi \text{ ΚΣΤ}\}$$

Προφανώς, $M(\Gamma_0) \subsetneq T(\Gamma_0) \subsetneq \Gamma_0^*$.

# Παραδείγματα ΚΣΤ

$p$: αφού $p \in M(\Gamma_0)$.

# Παραδείγματα ΚΣΤ

$p$: αφού $p \in M(\Gamma_0)$.

$(\neg q)$: αφού $q \in M(\Gamma_0)$, άρα $(\neg q)$ ΚΣΤ.

# Παραδείγματα ΚΣΤ

$p$: αφού $p \in M(\Gamma_0)$.

$(\neg q)$: αφού $q \in M(\Gamma_0)$, άρα $(\neg q)$ ΚΣΤ.

$((p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \to ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1))$:

# Παραδείγματα ΚΣΤ

$p$: αφού $p \in M(\Gamma_0)$.

$(\neg q)$: αφού $q \in M(\Gamma_0)$, άρα $(\neg q)$ ΚΣΤ.

$((p_1 \lor (p_2 \land (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \lor p_1))$:

- $p_3 \in M(\Gamma_0)$, άρα $(\neg p_3)$ ΚΣΤ.
- $p_2 \in M(\Gamma_0)$, άρα $(\neg p_2)$ ΚΣΤ.
- $p_2$, $(\neg p_3)$ ΚΣΤ, άρα $(p_2 \land (\neg p_3))$ ΚΣΤ.
- $(\neg p_2)$ ΚΣΤ, άρα $(\neg(\neg p_2))$ ΚΣΤ.
- $p_1$, $(p_2 \land (\neg p_3))$, $(\neg(\neg p_2))$ ΚΣΤ, άρα $(p_1 \lor (p_2 \land (\neg p_3)))$, $((\neg(\neg p_2)) \lor p_1)$ ΚΣΤ.
- $(p_1 \lor (p_2 \land (\neg p_3)))$, $((\neg(\neg p_2)) \lor p_1)$ ΚΣΤ, άρα $((p_1 \lor (p_2 \land (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \lor p_1))$ ΚΣΤ.

# Αρχή της Επαγωγής στην Προτασιακή Λογική

Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$, με:

(i) $M(\Gamma_0) \subseteq \Sigma$ *και*

(ii) Αν $\phi, \psi$ ΚΣΤ με $\phi, \psi \in \Sigma$, τότε $(\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \Sigma$.

Έπεται ότι $\Sigma = T(\Gamma_0)$.

# Αρχή της Επαγωγής στην Προτασιακή Λογική

Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$, με:

(i) $M(\Gamma_0) \subseteq \Sigma$ και

(ii) Αν $\phi, \psi$ ΚΣΤ με $\phi, \psi \in \Sigma$, τότε $(\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \Sigma$.

Έπεται ότι $\Sigma = T(\Gamma_0)$.

$A$ κλειστό ως προς την $n$-μελή πράξη $*(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, αν και μόνον αν για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $*(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$.

# Τυποκατασκευαστικές πράξεις

Ορίζουμε τις πράξεις:

- $E_{\neg}(\phi) := (\neg\phi)$
- $E_{*}(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

# Τυποκατασκευαστικές πράξεις

Ορίζουμε τις πράξεις:

- $E_\neg(\phi) := (\neg\phi)$
- $E_*(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

★ Αν $\phi$ ΚΣΤ, τότε υπάρχει ακολουθία $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, με $\epsilon_n = \phi$ και τ.ω., για κάθε $i = 1, \ldots, n$:

(i) είτε $\epsilon_i \in M(\Gamma_0)$,

(ii) ή $\epsilon_i = E_\neg(\epsilon_j)$, $j < i$,

(iii) ή $\epsilon_i = E_*(\epsilon_j, \epsilon_k)$, $j, k < i$.

# Τυποκατασκευαστικές πράξεις

Ορίζουμε τις πράξεις:

- $E_\neg(\phi) := (\neg\phi)$
- $E_*(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

★ Αν $\phi$ ΚΣΤ, τότε υπάρχει ακολουθία $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, με $\epsilon_n = \phi$ και τ.ω., για κάθε $i = 1, \ldots, n$:

(i) είτε $\epsilon_i \in M(\Gamma_0)$,

(ii) ή $\epsilon_i = E_\neg(\epsilon_j)$, $j < i$,

(iii) ή $\epsilon_i = E_*(\epsilon_j, \epsilon_k)$, $j, k < i$.

Για την $\phi = ((p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1))$, έχουμε την $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{10})$, όπου $\epsilon_{10} = \phi$ και:

# Τυποκατασκευαστικές πράξεις

Ορίζουμε τις πράξεις:

- $E_{\neg}(\phi) := (\neg\phi)$
- $E_{*}(\phi, \psi) := (\phi * \psi)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

★ Αν $\phi$ ΚΣΤ, τότε υπάρχει ακολουθία $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, με $\epsilon_n = \phi$ και τ.ω., για κάθε $i = 1, \ldots, n$:

(i) είτε $\epsilon_i \in M(\Gamma_0)$,

(ii) ή $\epsilon_i = E_{\neg}(\epsilon_j)$, $j < i$,

(iii) ή $\epsilon_i = E_{*}(\epsilon_j, \epsilon_k)$, $j, k < i$.

Για την $\phi = ((p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1))$, έχουμε την $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{10})$, όπου $\epsilon_{10} = \phi$ και:

- $\epsilon_i = p_i$, $i = 1, 2, 3$,
- $\epsilon_4 = E_{\neg}(\epsilon_2)$, $\epsilon_5 = E_{\neg}(\epsilon_4)$, $\epsilon_6 = E_{\neg}(\epsilon_3)$,
- $\epsilon_7 = E_{\wedge}(\epsilon_2, \epsilon_6)$, $\epsilon_8 = E_{\vee}(\epsilon_5, \epsilon_1)$, $\epsilon_9 = E_{\vee}(\epsilon_1, \epsilon_7)$,
- $\epsilon_{10} = E_{\rightarrow}(\epsilon_9, \epsilon_8)$.

# Αρχή της Επαγωγής στην Προτασιακή Λογική

Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$, με $M(\Gamma_0) \subseteq \Sigma$ και $\Sigma$ κλειστό ως προς τις τυποπαρασκευαστικές πράξεις. Τότε, $\Sigma = T(\Gamma_0)$.

# Αρχή της Επαγωγής στην Προτασιακή Λογική

Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$, με $M(\Gamma_0) \subseteq \Sigma$ και $\Sigma$ κλειστό ως προς τις τυποπαρασκευαστικές πράξεις. Τότε, $\Sigma = T(\Gamma_0)$.

**Απόδειξη.**

- Έστω $\phi \notin M(\Gamma_0)$.
- Υπάρχει $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, με $\epsilon_n = \phi$.
- Ισχυρή Επαγωγική Υπόθεση: $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1} \in T(\Gamma_0)$.
- $\phi = E_\neg(\epsilon_j)$ ή $\phi = E_*(\epsilon_j, \epsilon_k)$, για $j, k < n$.
- $\Sigma$ κλειστό στις τυποπαρασκευαστικές πράξεις.

$\square$

# Συντομογραφίες

- Οι εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται,
- $\neg$ προηγείται των διθέσιων συμβόλων,
- $\wedge, \vee$ προηγούνται των $\to, \leftrightarrow$,
- τα $\wedge, \vee$ είναι ισοδύναμα,
- τα $\to, \leftrightarrow$ είναι ισοδύναμα.

$$((p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \to ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1))$$
$$(p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \to ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1)$$
$$p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \to \neg\neg p_2 \vee p_1$$

# Συντομογραφίες

- Οι εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται,
- $\neg$ προηγείται των διθέσιων συμβόλων,
- $\wedge, \vee$ προηγούνται των $\rightarrow, \leftrightarrow$,
- τα $\wedge, \vee$ είναι ισοδύναμα,
- τα $\rightarrow, \leftrightarrow$ είναι ισοδύναμα.

$$((p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1))$$
$$(p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1)$$
$$p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \rightarrow \neg\neg p_2 \vee p_1$$

# Συντομογραφίες

- Οι εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται,
- $\neg$ προηγείται των διθέσιων συμβόλων,
- $\wedge, \vee$ προηγούνται των $\rightarrow, \leftrightarrow$,
- τα $\wedge, \vee$ είναι ισοδύναμα,
- τα $\rightarrow, \leftrightarrow$ είναι ισοδύναμα.

$$(p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1)$$

$$(p_1 \vee (p_2 \wedge (\neg p_3))) \rightarrow ((\neg(\neg p_2)) \vee p_1)$$

$$p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \rightarrow \neg\neg p_2 \vee p_1$$

# Περιεχόμενα

# Boolean σταθερές

Προτασιακός Λογισμός: δύτιμη / δυαδική λογική/ Boolean Logic.

Οποιεσδήποτε δύο διακριτές τιμές για τις μεταβλητές μας είναι αποδεκτές.

Συνήθως χρησιμοποιούμε: Αλήθεια/Ψέμα, Α/Ψ, True/False, T/F, 1/0.

Υπάρχουν και πολυ-ειδείς λογικές, με πεπερασμένα ή και άπειρα σύνολα τιμών για τις μεταβλητές.

# Απονομές αλήθειας

$u : M(\Gamma_0) \to \{F, T\}$

Κάθε απονομή $u$ αποτιμά ολόκληρο το $M(\Gamma_0)$. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται στον εκάστοτε τύπο ή τύπους που κοιτάμε.

# Απονομές αλήθειας

$u : M(\Gamma_0) \to \{F, T\}$

Κάθε απονομή $u$ αποτιμά ολόκληρο το $M(\Gamma_0)$. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται στον εκάστοτε τύπο ή τύπους που κοιτάμε.

Επεκτείνουμε την $u$ στο $T(\Gamma_0)$ ως εξής:

$$\bar{u}(\phi) = u(\phi), \text{ αν } \phi \in M(\Gamma_0).$$

$$\bar{u}(\neg\phi) = \begin{cases} F, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = T, \\ T, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{1}$$

# Απονομές αλήθειας

$$\bar{u}(\phi \wedge \psi) = \begin{cases} T, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi) = T, \\ F, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{2}$$

$$\bar{u}(\phi \vee \psi) = \begin{cases} F, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi) = F, \\ T, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3}$$

$$\bar{u}(\phi \to \psi) = \begin{cases} F, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = T \text{ και } \bar{u}(\psi) = F, \\ T, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{4}$$

$$\bar{u}(\phi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} T, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi), \\ F, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{5}$$

# Απονομές αλήθειας

$$\bar{u}(\phi \wedge \psi) = \begin{cases} T, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi) = T, \\ F, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (2)$$

$$\bar{u}(\phi \vee \psi) = \begin{cases} F, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi) = F, \\ T, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{u}(\phi \to \psi) = \begin{cases} F, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = T \text{ και } \bar{u}(\psi) = F, \\ T, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (4)$$

$$\bar{u}(\phi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} T, & \text{αν } \bar{u}(\phi) = \bar{u}(\psi), \\ F, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (5)$$

Από τα (1), (2), (3), (4), (5), διαισθητικά $\neg$: όχι, $\wedge$: και, $\vee$: ή, $\to$: αν...τότε, $\leftrightarrow$: αν και μόνον αν.

# Παράδειγμα

$$\phi(x, y, z) = (x \wedge \neg y) \to (z \leftrightarrow (x \vee y))$$

# Παράδειγμα

$$\phi(x, y, z) = (x \wedge \neg y) \to (z \leftrightarrow (x \vee y))$$

Έστω αποτίμηση $u$ με:

- $u(x, y, z) = (T, T, T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.

# Παράδειγμα

$$\phi(x,y,z) = (x \wedge \neg y) \rightarrow (z \leftrightarrow (x \vee y))$$

Έστω αποτίμηση $u$ με:

- $u(x,y,z) = (T,T,T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x,y,z) = (T,T,F)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x,y,z) = (T,F,T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = \bar{u}(z \leftrightarrow (x \vee y)) = T$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x,y,z) = (F,T,T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.

# Παράδειγμα

$$\phi(x, y, z) = (x \wedge \neg y) \rightarrow (z \leftrightarrow (x \vee y))$$

Έστω αποτίμηση $u$ με:

- $u(x, y, z) = (T, T, T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x, y, z) = (T, T, F)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x, y, z) = (T, F, T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = \bar{u}(z \leftrightarrow (x \vee y)) = T$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x, y, z) = (F, T, T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x, y, z) = (T, F, F)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = T$, $\bar{u}(z \leftrightarrow (x \vee y)) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = F$.
- $u(x, y, z) = (F, T, F)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x, y, z) = (F, F, T)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.
- $u(x, y, z) = (F, F, F)$. Τότε $\bar{u}(x \wedge \neg y) = F$, άρα $\bar{u}(\phi) = T$.