Θεμελια Αλγεβρας και Γεωμετριας (Εαρινο 2021-22)
Φυλλαδιο Ασκησεων 1
καταληκτικη ημερομηνια υποβολης: 31.03.2022

Άσκηση 1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει ότι

$$1 + 2 + 3 \cdots + 2n = n(2n + 1).$$

Άσκηση 2. Έστω r πραγματικός αριθμός, $r \neq 1$. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει ότι $1 + r + r^2 + \cdots r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Άσκηση 3. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geqslant 4$ ισχύει η πρόταση:

$\Pi(n)$: Το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι μικρότερο του $n!$

Άσκηση 4. Έστω n, k θετικοί ακέραιοι με $1 \leqslant k \leqslant n$. Να δείξετε ότι ισχύουν οι ταυτότητες:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \quad \text{και} \quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

Άσκηση 5. Δίνονται τα ψηφία $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ για τη δημιουργία τετραψήφιου αριθμού PIN. Ποιό είναι το πλήθος όλων των δυνατών PIN που μπορούν να σχηματιστούν; Εάν θέσουμε τον περιορισμό ότι τα ψηφία $0, 7$ δεν μπορούν να τοποθετηθούν στις δύο πρώτες θέσεις του PIN, ποιο είναι το πλήθος;

Άσκηση 6. Έστω A, B προτασιακές μεταβλητές. Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να εξετάσετε εάν είναι ταυτολογία, αντιλογία ή ουδέτερη.

(i) $(\neg A) \to (A \to B)$
(ii) $((\neg A) \to (A \to B)) \wedge (\neg B)$
(iii) $(\neg A) \to (\neg A \to A)$

Άσκηση 7. Έστω n θετικός ακέραιος και $A, A_1, ..., A_n$ προτασιακές μεταβλητές. Δίνεται η πρόταση $\psi = (\neg A) \vee A$. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία

$$A_n \to (\cdots \to (A_2 \to (A_1 \to \psi)) \cdots)$$