

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

§1. Κατηγορίες

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Μια κατηγορία είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$, όπου

i) \mathcal{C} είναι μια υψώση τὰ στοιχεία τῆς ὁποίας λέγονται αντικείμενα.

ii) \mathcal{M} είναι μια ἔνωση τῆς μορφῆς

$$\mathcal{M} = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

ὅπου γιὰ κάθε $(A,B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ τὸ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ εἶναι ἕνα σύνολο τὰ στοιχεία τοῦ ὁποίου λέγονται μορφισμοί με domain τὸ A καὶ codomain τὸ B, καὶ συμβολίζονται $f: A \rightarrow B$.

iii) \circ εἶναι μία ἀπεικόνιση γιὰ κάθε τριάδα (A,B,C) ἀντικειμένων

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

καὶ λέγεται νόμος συνδέσεως. Ἡ εἰκόνα ἑνὸς (f,g) μῆσω τοῦ \circ συμβολίζεται $g \circ f$ ἢ gf .

Ἡ κατηγορία πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα

A1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, B_2) = \emptyset$.

A2) ἢ ἂν $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ τότε
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

A3) $\forall A \in \mathcal{C} \exists 1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ ὥστε $\forall f: A \rightarrow B$ καὶ $\forall g: C \rightarrow A$ ἰσχύει

$$f \circ 1_A = f \text{ και } 1_B \circ g = g.$$

Το A3) εξασφαλίζει ότι ο μορφισμός 1_A ορίζεται μονοσήμαντα. Το 1_A λέγεται ταυτοτικός μορφισμός του A .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Μια κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται μικρή όταν η κλάση \mathcal{C} είναι σύνολο.

Παρακάτω θα γράφουμε "η κατηγορία \mathcal{C} " αντί "η κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ " όταν αυτό δεν δημιουργεί σύγχυση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.3. i) Η κατηγορία \mathcal{S} της οποίας η κλάση των αντικειμένων είναι η κλάση των συνόλων, τα σύνολα $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B)$ είναι τα σύνολα των απεικονίσεων $f: A \rightarrow B$ και \circ είναι η συνήθης σύνθεση των απεικονίσεων.

ii) Όμοια ορίζεται η κατηγορία \mathcal{C} των τοπολογικών χώρων με μορφισμούς τις συνεχείς συναρτήσεις, και \circ την συνήθη σύνθεση.

iii) Η κατηγορία \mathcal{S}_0 των σημειωμένων συνόλων με αντικείμενα τα ζεύγη (A, a) όπου A σύνολο και $a \in A$, και μορφισμούς $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ τις απεικονίσεις $f: A \rightarrow B$ με $f(a) = b$.

iv) Η κατηγορία \mathcal{G} των ομάδων με αντικείμενα τις ομάδες και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων.

v) Η κατηγορία \mathcal{Ab} των αβελιανών ομάδων με αντικείμενα τις αβελιανές ομάδες και μορφισμούς τους μορφισμούς των ομάδων.

vi) Η κατηγορία \mathcal{V}_F των διανυσματικών χώρων επί ενός σώματος F με μορφισμούς τις γραμμικές απεικονίσεις.

vii) Η κατηγορία \mathcal{C}_g των τοπολογικών ομάδων με μορφισμούς τους συνεχείς ομομορφισμούς.

viii) Η κατηγορία \mathcal{R} των δακτυλίων με μορφισμούς τους μορφισμούς δακτυλίων.

ix) Η κατηγορία \mathcal{R}_1 των δακτυλίων με μονάδα, με μορφισμούς τους μορφισμούς δακτυλίων που διατηρούν την μονάδα.

x) Η κατηγορία \mathcal{M}_R^l των αριστερά R -προτύπων με μορφισμούς τις R -γραμμικές απεικονίσεις ($R \in \mathcal{R}_1$).

xi) Η κατηγορία \mathcal{M}_R^r των δεξιά R -προτύπων με μορφισμούς τις R -γραμμικές απεικονίσεις.

xii) Η κατηγορία \mathcal{E}_g των (X, R) , όπου X σύνολο, R σχέση ισοδυναμίας στο X και μορφισμοί οι απεικονίσεις $f: (X, R) \rightarrow (Y, S)$ που είναι τέτοιοι ώστε αν $(x, y) \in R$ τότε $(f(x), f(y)) \in S$.

xiii) Η κατηγορία \mathcal{Ord} με αντικείμενα τα ζεύγη (X, \leq) όπου X σύνολο και \leq μια σχέση διατάξεως στο X και μορφισμοί $f: (X, \leq) \rightarrow (Y, <)$ τις απεικονίσεις $f: X \rightarrow Y$ που διατηρούν τη διατάξη.

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα οι μορφισμοί είναι απεικονίσεις και ο νόμος σύνδεσης είναι ή σύνδεση απεικονίσεων. Υπάρχουν όμως κατηγορίες που οι μορφισμοί τους δεν είναι απεικονίσεις:

xiv) Αν $(G, *)$ είναι ομάδα, τότε $(\{G\}, G, *)$ είναι κατηγορία.

xv) Ένα σύνολο A με μια σχέση ισοδυναμίας \sim είναι κατηγορία με αντικείμενα τα στοιχεία του A , και

$$\text{Hom}_A(a, b) = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } a \not\sim b \\ \{a, b\} & \text{αν } a \sim b. \end{cases}$$

xvi) Ένα σύνολο A με μια σχέση διατάξεως \leq είναι κατηγορία με αντικείμενα τα στοιχεία του A και

$$\text{Hom}_A(a,b) = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } a > b \\ \{a,b\} & \text{αν } a \leq b \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Μια κατηγορία \mathcal{C}_0 λέγεται υποκατηγορία της \mathcal{C} αν

- i) τα αντικείμενα της \mathcal{C}_0 είναι αντικείμενα της \mathcal{C} .
- ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : \text{Hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$
- iii) η σύνδεση δύο μορφισμών στην \mathcal{C}_0 ισούται με την σύνδεσή τους στη \mathcal{C} .

Μια υποκατηγορία \mathcal{C}_0 μιας κατηγορίας \mathcal{C} λέγεται πλήρης αν $\forall (A,B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : \text{Hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.5. i) η $\mathcal{A}b$ είναι πλήρης υποκατηγορία της \mathcal{G} .

ii) \mathcal{R}_1 είναι υποκατηγορία της \mathcal{R} η οποία δέν είναι πλήρης γιατί αν $A, B \in \mathcal{R}_1$ τότε υπάρχουν μορφισμοί δαυτωρίων, δηλ. στοιχεία του $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(A,B)$ που δέν διατηρούν την μονάδα, άρα δέν ανήκουν στο $\text{Hom}_{\mathcal{R}_1}(A,B)$.

iii) \mathcal{S}_0 δέν είναι υποκατηγορία της \mathcal{S} , γιατί \mathcal{S}_0 έχει περισσότερα αντικείμενα.

iv) Όμοια $\mathcal{E}\mathcal{G}$ δέν είναι υποκατηγορία της \mathcal{G} ούτε της \mathcal{E} .

v) \mathcal{S} υποκ της \mathcal{E} ;

§2. Ιδιότητες των μορφισμών

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. Ένας μορφισμός $r: A \rightarrow B$ λέγεται retraction αν υπάρχει $s: B \rightarrow A$ ώστε $rs = 1_B$. Ένας μορφισμός $s: A \rightarrow B$ λέγεται coretraction ή section αν υπάρχει $r: B \rightarrow A$ ώστε $rs = 1_A$. Ένας μορφισμός θ που είναι και retraction και coretraction λέγεται ισομορφισμός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.2. Αν $\theta: A \rightarrow B$ και $\pi: B \rightarrow C$ είναι coretractions τότε $\pi\theta: A \rightarrow C$ είναι coretraction. Αντίστροφα αν $\pi\theta$ είναι coretraction τότε θ είναι coretraction.

Αν $\theta: A \rightarrow B$ είναι retraction και $\pi: B \rightarrow C$ είναι retraction τότε $\pi\theta$ είναι retraction. Αντίστροφα αν $\pi\theta$ είναι retraction, τότε π retraction.

Αν θ είναι ισομορφισμός και $\theta'\theta = 1_A$, $\theta\theta'' = 1_B$ τότε

$$\theta' = \theta'1_B = \theta'(\theta\theta'') = (\theta'\theta)\theta'' = 1_A\theta'' = \theta''$$

Ο μορφισμός $\theta' = \theta''$ λέγεται αντίστροφος του θ και συμβολίζεται με θ^{-1} .

Αν υπάρχει ισομορφισμός $\theta: A \rightarrow B$ λέμε ότι το A είναι ισομορφο με το B , και γράφουμε $A \cong B$. Η σχέση \cong είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των αντικειμένων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. Έστω $A \in \mathcal{C}$. Κάθε $f: A \rightarrow A$ δηλ. κάθε στοιχείο του συνόρου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ λέγεται ένδομορφισμός του A . Χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα $\text{End}(A)$ ή $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ αντί $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$. Το σύνολο $\text{End}(A)$ είναι ήμιομάδα.

^a Ένας ενδομορφισμός που είναι ισομορφισμός λέγεται αὐτομορφισμός. Το σύνολο τῶν αὐτομορφισμῶν τοῦ A συμβολίζεται με $\text{Aut}_E(A)$ ἢ $\text{Aut}(A)$ καὶ εἶναι ὁμάδα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. Ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$ λέγεται μονομορφισμός ἂν

$$fa = fb \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \text{ με } \text{codomain } A.$$

^a Ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$ λέγεται ἐπιμορφισμός ἂν

$$af = bf \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \text{ με } \text{domain } B.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.5. i) Ἄν f μονομορφισμός εἶναι \mathcal{C} τότε εἶναι μονομορφισμός σὲ καθεὶ υποκατηγορία. Τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει. Ὁμοίως ἂν f ἐπιμορφισμός.

ii) Κάθε coretraction εἶναι μονομορφισμός. Τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει. Κάθε retraction εἶναι ἐπιμορφισμός. Τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει.

iii) Ἄν f, g μονομορφισμοὶ καὶ δρίζεται $g \circ f$ τότε ἢ $g \circ f$ εἶναι μονομορφισμός. Ἄν $g \circ f$ εἶναι μονομορφισμός τότε f μονομορφισμός. Ὁμοίως ἂν f, g ἐπιμορφισμοὶ καὶ δρίζεται ὁ $g \circ f$ τότε ὁ $g \circ f$ εἶναι ἐπιμορφισμός. Ἄν $g \circ f$ εἶναι ἐπιμορφισμός τότε g ἐπιμορφισμός.

iv) Κάθε ισομορφισμός εἶναι καὶ μονομορφισμός καὶ ἐπιμορφισμός. Τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει. Ἄν εἶναι κατηγορία \mathcal{C} καὶ μονομορφισμός καὶ ἐπιμορφισμός εἶναι ισομορφισμός, ἢ κατηγορία \mathcal{C} λέγεται ἰσορροπημένη.

v) Ἄν $a: A \rightarrow B$ εἶναι coretraction καὶ ἐπιμορφισμός ἢ retraction καὶ μονομορφισμός τότε εἶναι ισομορφισμός.

7

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Ένα $A \in \mathcal{C}$ λέγεται άρχικό αν $\forall X \in \mathcal{C} \text{ Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ είναι μονοσύνολο. Ένα $T \in \mathcal{C}$ λέγεται τελικό αν $\forall X \in \mathcal{C} \text{ Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ είναι μονοσύνολο. Αν ένα αντικείμενο είναι και άρχικό και τελικό λέγεται μηδενικό και συμβολίζεται με 0 .

Αν σε μια κατηγορία \mathcal{C} υπάρχει μηδενικό αντικείμενο, τότε $\forall (X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός

$$0_{XY} : X \longrightarrow Y$$

που είναι σύνθεση των μορφισμών $X \rightarrow 0$ και $0 \rightarrow Y$. Ο 0_{XY} λέγεται μηδενικός μορφισμός από το X στο Y . Αν δεν δημιουργείται εύχρηστα θα συμβολίζεται απλά με 0 .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.7. i) Όλα τα άρχικά αντικείμενα είναι μεταξύ τους ισομορφα. Όλα τα τελικά αντικείμενα είναι μεταξύ τους ισομορφα. Άρα και όλα τα μηδενικά αντικείμενα είναι μεταξύ τους ισομορφα.

ii) Αν σε μια κατηγορία υπάρχει μηδενικό αντικείμενο, τότε για κάθε $f: X \rightarrow Y$ και κάθε $g: Y \rightarrow Z$ έχουμε:

$$0_{YX} \circ f = 0_{XN} \text{ και } g \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$$

iii) Ένα αντικείμενο A της κατηγορίας \mathcal{C} είναι μηδενικό αντικείμενο έαν και μόνον εάν $1_A = 0_{AA}$.

§ 3. Δυϊσμός

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Ονομάζουμε δυϊκή κατηγορία της \mathcal{C} και συμβολίζουμε με \mathcal{C}^{opp} την κατηγορία που κατασκευάζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

i) Τα αντικείμενα της \mathcal{C}^{opp} ταυτίζονται με τα αντικείμενα της \mathcal{C} .

ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} = \mathcal{C}^{opp} \times \mathcal{C}^{opp}$ ορίζουμε:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{opp}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

iii) Ο νόμος της σύνδεσης στην \mathcal{C}^{opp} ορίζεται ως εξής:

αν $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{opp}}(A, B)$ και $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{opp}}(B, C) \Rightarrow$

$u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ και $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$. Θέτουμε

$$(v \circ u)_{\mathcal{C}^{opp}} = (u \circ v)_{\mathcal{C}}$$

Διαπιστώνει κανείς εύκολα πως η \mathcal{C}^{opp} είναι κατηγορία, οι ταυτοτικοί μορφισμοί της \mathcal{C}^{opp} ταυτίζονται με τους ταυτοτικούς της \mathcal{C} και 0 είναι μηδενικό αντικείμενο της \mathcal{C} εάν και μόνον εάν είναι μηδενικό της \mathcal{C}^{opp} .

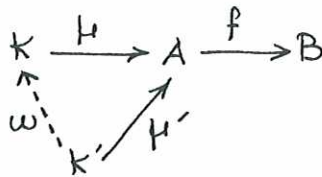
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2. Έστω μια πρόταση P που έχει έννοια για κάθε κατηγορία. Η πρόταση P για την \mathcal{C}^{opp} αντιστοιχεί σε μια πρόταση P^{opp} για την \mathcal{C} . Το παραπάνω μας οδηγεί στην αρχή του δυϊσμού: αν P ισχύει σε όλες τις κατηγορίες που ικανοποιούν τα αξιώματα A, B, \dots, M τότε P^{opp} ισχύει σε όλες τις κατηγορίες που ικανοποιούν τα αξιώματα $A^{opp}, B^{opp}, \dots, M^{opp}$. Ειδικότερα αν P ισχύει σε όλες τις κατηγορίες, τότε P^{opp} ισχύει σε όλες τις κατηγορίες.

§4. Πυρήνες και συμπυρήνες

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. "Εστω ότι στην κατηγορία \mathcal{C} υπάρχει μηδενικό αντικείμενο, κι έστω ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$. Ονομάζουμε πυρήνα της f το ζεύγος (K, μ) όπου $\mu: K \rightarrow A$ αν ικανοποιούνται οι συνθήκες:

i) $f\mu = 0$

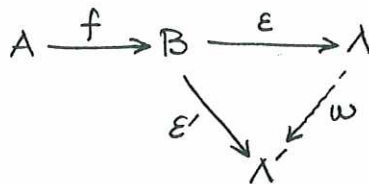
ii) αν $f\mu' = 0 \Rightarrow \exists! \omega: K' \rightarrow K$ με $\mu' = \mu\omega$.



Δυϊκή έννοια του πυρήνα είναι ο συμπυρήνας δηλ. ένα ζεύγος (ϵ, λ) με $\epsilon: B \rightarrow \lambda$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

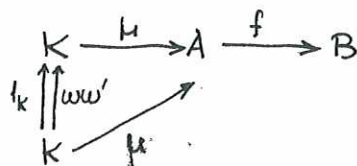
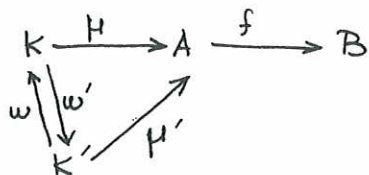
i) $\epsilon f = 0$

ii) αν $\epsilon' f = 0 \Rightarrow \exists! \omega: \lambda \rightarrow \lambda'$ με $\epsilon' = \omega\epsilon$.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 4.2. i) Η ύπαρξη μηδενικού αντικειμένου δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη πυρήνων και συμπυρήνων.

ii) Αν υπάρχει ο πυρήνας ενός μορφισμού, είναι οξείως ένας δηλ. αν (K, μ) και (K', μ') είναι πυρήνες του $f: A \rightarrow B$, τότε $\exists! \omega: K' \rightarrow K$ με $\mu' = \mu\omega$ και $\exists! \omega': K \rightarrow K'$ με $\mu = \mu'\omega'$, δηλαδή $\mu = \mu'\omega'$ επειδή $\mu = \mu \cdot 1_K \Rightarrow \omega\omega' = 1_K$. Ομοίως $\omega'\omega = 1_{K'}$.

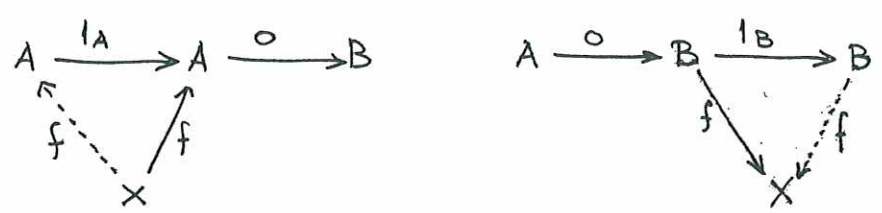


ομοια ο συμπυκνωσ ενος μορφισμου αν υπαρχει ειναι οιδιωδι ενας.

ii) "An (K, μ) ειναι πυκνωσ ενος $f: A \rightarrow B$ τότε μ μονομορφισμος. Ομοια αν (ϵ, λ) ειναι συμπυκνωσ τότε ϵ επιμορφισμος. Τα αντιστροφα εν γειει δεν ισχυουν. "An σε μια κατηγορια \mathcal{C} κωδε μονομορφισμος ειναι πυκνωσ τότε η κατηγορια λεγεται normal. "An κωδε επιμορφισμος ειναι συμπυκνωσ τότε η κατηγορια λεγεται conormal.

iv) "An $f: A \rightarrow B$ ειναι μονομορφισμος τότε ο πυκνωσ του f ειναι ο $(0, 0)$. Το αντιστροφο εν γειει δεν ισχυει. Ομοια αν f επιμορφισμος τότε ο συμπυκνωσ του f ειναι ο $(0, 0)$. Το αντιστροφο δεν ισχυει.

v) Ο πυκνωσ της $0: A \rightarrow B$ ειναι ο $(1_A, 1_A)$ κωι ο συμπυκνωσ ο $(1_B, 1_B)$.



vi) Στην κατηγορια \mathcal{M}_R^l των αριστερα R-μοδων, αν $f: A \rightarrow B$ ειναι R-γραμμικη απεικονιση τότε ο πυκνωσ της f ειναι το ζευγος $(\ker f, i)$ οπου $i: \ker f \rightarrow A$ η κανονικη εμφυτευση.

Ο συμπυκνωσ της $f: A \rightarrow B$ ειναι το ζευγος $(\rho, B/f(A))$ οπου

$$\rho: B \rightarrow B/f(A) : y \mapsto \rho(y) = y + f(A)$$

η κανονικη προβολη.

§5. Γινόμενα και συνγινόμενα

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία και $(X_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια αντικειμένων της \mathcal{C} . Ονομάζουμε γινόμενο της οικογένειας $(X_i)_{i \in I}$ ένα ζεύγος $(X, (p_i)_{i \in I})$, όπου $X \in \mathcal{C}$ και $\forall i \in I$

$p_i: X \rightarrow X_i$, το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall (f_i)_{i \in I} \text{ με } f_i: Y \rightarrow X_i, \exists! f: Y \rightarrow X:$$
$$p_i \circ f = f_i \quad \forall i \in I$$

Οι μορφοισμοί $p_i: X \rightarrow X_i$ λέγονται προβολές. Το γινόμενο των $(X_i)_{i \in I}$ συμβολίζεται συχνά με $\prod X_i$. Αν $I = \{1, 2, \dots, n\}$ γράφουμε και $\prod X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.2.**
- i) Στην κατηγορία \mathcal{S} των συνόλων γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο.
 - ii) Στην κατηγορία Mod_R^l των αριστερά R -προτύπων γινόμενο είναι το γινόμενο των προτύπων
 - iii) Στην κατηγορία \mathcal{C} των τοπολογικών χώρων γινόμενο είναι το τοπολογικό γινόμενο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.3. i) Για τον μονοσήμαντα ορισμένο μορφοισμό $f: Y \rightarrow \prod X_i$ που επάγεται από την οικογένεια των μορφοισμών $f_i: Y \rightarrow X_i, i \in I$ χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

$$f = \{f_i\}$$

ii) Έστω $i_0 \in I$. Αν $\forall i \neq i_0, \exists f_i: X_{i_0} \rightarrow X_i$ τότε ορίζονται $f_{i_0} = 1_{X_{i_0}}: X_{i_0} \rightarrow X_{i_0}$ έχουμε ότι $\exists! f: X_{i_0} \rightarrow \prod X_i$ με $p_{i_0} \circ f = f_{i_0} = 1_{X_{i_0}}$, δηλ. p_{i_0} retraction.

Σε μία κατηγορία \mathcal{C} η ύπαρξη του γινόμενου μιας ομογένειας $(X_i)_{i \in I}$ δεν εξασφαλίζεται πάντα. Όμως αν υπάρχει τότε ορίζεται μονοσήμαντα ως προς ένα ισομορφισμό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. Έστω $(X, (p_i)_{i \in I})$ και $(X', (p'_i)_{i \in I})$ γινόμενα της ομογένειας $(X_i)_{i \in I}$. Τότε υπάρχει άρριθως ένας ισομορφισμός $\xi: X \rightarrow X'$ με $p'_i \xi = p_i, \forall i \in I$.

Απόδειξη. Υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\xi: X \rightarrow X'$ με $p'_i \xi = p_i$ και ένας μοναδικός μορφισμός $\eta: X' \rightarrow X$ με $p_i \eta = p'_i$. Τότε

$$p_i \eta \xi = p'_i \xi = p_i = p_i 1_X \quad \forall i \in I$$

οπότε επειδή $(X, (p_i)_{i \in I})$ είναι γινόμενο, έχουμε $\eta \xi = 1_X$. Ομοίως $\xi \eta = 1_{X'}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. i) Έστω δύο ομογένειες $(X_i)_{i \in I}$ και $(Y_i)_{i \in I}$ στην κατηγορία \mathcal{C} . Αν τα γινόμενα $(X, (p_i)_{i \in I})$ και $(Y, (p'_i)_{i \in I})$ υπάρχουν και αν $\forall i \in I: f_i: X_i \rightarrow Y_i$ τότε ορίζεται μονοσήμαντα ένας μορφισμός

$$\prod f_i: X \rightarrow Y$$

με $p'_i(\prod f_i) = f_i p_i$.

ii) Με τις προηγούμενες υποθέσεις, αν $g_i: Z \rightarrow X_i \quad \forall i \in I$ και $h: W \rightarrow Z$ τότε

$$\{g_i\} h = \{g_i h\} \text{ και } (\prod f_i) \{g_i\} = \{f_i g_i\}$$

Αποδείξτε. i) $f_i \rho_i : \prod X_i \longrightarrow Y_i \quad \forall i \in I$. Έπειδή $(Y, (\rho_i)_{i \in I})$ είναι γινόμενο $\exists!$ $\prod f_i : \prod X_i \longrightarrow \prod Y_i$ με $\rho_i (\prod f_i) = f_i \rho_i \quad \forall i \in I$.

ii) Άρκει να αποδείξουμε ότι οι συνδέσεις με τις προβολές είναι όλες γοσες. Πράγματι:

$$\rho_i \{g_i\}^h = g_i \cdot h = \rho_i \{g_i \cdot h\} \quad \text{και}$$

$$\rho_i (\prod f_i) \{g_i\} = (f_i \rho_i) \{g_i\} = f_i g_i = \rho_i \{f_i g_i\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. "Εστω \mathcal{C} κατηγορία στην οποία κάθε δύο αντικείμενα έχουν γινόμενο. Για τα αντικείμενα X, Y, Z της \mathcal{C} ορίζονται οι προβολές

$$\rho_1 : X \times Y \longrightarrow X \quad q_1 : (X \times Y) \times Z \longrightarrow X \times Y$$

$$\rho_2 : X \times Y \longrightarrow Y \quad q_2 : (X \times Y) \times Z \longrightarrow Z$$

Τότε $((X \times Y) \times Z, \rho_1 q_1, \rho_2 q_1, q_2)$ είναι γινόμενο των X, Y, Z .

Αποδείξτε. "Αν $f_1 : W \longrightarrow X, f_2 : W \longrightarrow Y, f_3 : W \longrightarrow Z$ τότε υπάρχει $g : W \longrightarrow X \times Y$ με $\rho_1 g = f_1, \rho_2 g = f_2$ και $h : W \longrightarrow (X \times Y) \times Z$ με $q_1 h = g, q_2 h = f_3$, οπότε $\rho_1 q_1 h = f_1, \rho_2 q_1 h = f_2$.

"Αν υπάρχει κι άλλη $h' : W \longrightarrow (X \times Y) \times Z$ με $\rho_1 q_1 h' = f_1,$

$\rho_2 q_1 h' = f_2$ και $q_2 h' = f_3$ τότε

$$\rho_1 q_1 h' = \rho_1 q_1 h \quad \text{και} \quad \rho_2 q_1 h' = \rho_2 q_1 h \implies q_1 h = q_1 h'.$$

Οπότε μαζί με την $q_2 h = q_2 h'$ δίδουν $h = h'$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.7. "Αν κάθε ζεύγος αντικειμένων της \mathcal{C} έχει γινόμενο, τότε κάθε πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων της \mathcal{C} έχει γινόμενο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8. Έστω \mathcal{C} μια κατηγορία και $(X_i)_{i \in I}$ μια ομογένεια αντικειμένων της \mathcal{C} . Ονομάζουμε συνγινόμενο της ομογένειας $(X_i)_{i \in I}$ ένα ζεύγος $(X, (q_i)_{i \in I})$ όπου $X \in \mathcal{C}$ και $q_i: X_i \rightarrow X \quad \forall i \in I$, που ικανοποιεί την συνθήκη

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall (f_i)_{i \in I} \text{ με } f_i: X_i \rightarrow Y \quad \exists! f: X \rightarrow Y :$$

$$f q_i = f_i \quad \forall i \in I$$

Οι μορφισμοί $q_i: X_i \rightarrow X$ λέγονται έμφυτες.

Το άθροισμα των $(X_i)_{i \in I}$ συμβολίζεται συχνά με $\coprod X_i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.9. i) Πά τον μορφισμό $f: X \rightarrow Y$ που δ-
ρίζεται μονοσήμαντα από την ομογένεια των μορφισμών $(f_i)_{i \in I}$
με $f_i: X_i \rightarrow Y$ χρησιμοποιείται και το σύμβολο

$$f = \langle f_i \rangle_{i \in I}$$

ii) Έστω $i_0 \in I$. Αν για κάθε $i \neq i_0 \exists f_i: X_i \rightarrow X_{i_0}$ και θέσου-
με $f_{i_0} = 1_{X_{i_0}}: X_{i_0} \rightarrow X_{i_0}$ έχουμε ότι $\exists! f: \coprod X_i \rightarrow X_{i_0}$ με
 $f q_{i_0} = 1_{X_{i_0}}$, δηλ. q_{i_0} coretraction.

iii) Το συνγινόμενο είναι η δυνάμη ένωση του γινόμενου. Δεν
υπάρχει πάντα, αλλά όταν υπάρχει δρίζεται μονοσήμαντα.

iv) Αν στην \mathcal{C} κάθε ζεύγος αντικειμένων έχει συνγινόμενο τότε
κάθε πεπερασμένο μηδός αντικειμένων έχει συνγινόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.10. i) Στην κατηγορία \mathcal{F} συνγινόμενο είναι
η διαμεριζόμενη ένωση.

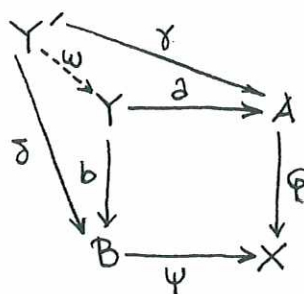
ii) Στην κατηγορία \mathcal{C} συνγινόμενο είναι η διαμεριζόμενη ένωση
με την φυσική τοπολογία.

iii) Στην κατηγορία Top_R^l συνγινόμενο είναι το εὐδὲ ἀθροισμα.

§6. Pull-backs και Push-outs.

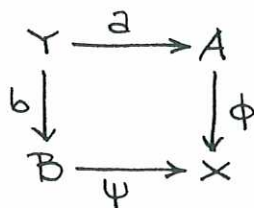
ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1. " Έστω $f: A \rightarrow X$ και $\psi: B \rightarrow X$. Ένα pull-back του (f, ψ) είναι μια τριάδα (Y, a, b) με $a: Y \rightarrow A$ και $b: Y \rightarrow B$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

- i) $fa = \psi b$.
- ii) αν $\gamma: Y' \rightarrow A$ και $\delta: Y' \rightarrow B$ είναι τέτοιοι ώστε $f\gamma = \psi\delta$ τότε $\exists!$ $\omega: Y' \rightarrow Y$ με $a\omega = \gamma$, $b\omega = \delta$.



Ένα pull-back εάν υπάρχει είναι ομοιαστικά μοναδικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. Έστω ότι σε μία κατηγορία \mathcal{C} το διάγραμμα

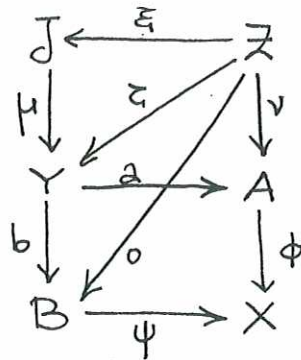


είναι pull-back. Αν $\eta \in \mathcal{C}$ έχει μηδενικό αντικείμενο τότε:

- i) $(\mathcal{J}, \mu) = \ker b \Rightarrow (\mathcal{J}, a\mu) = \ker \phi$.
- ii) $(\mathcal{J}, \nu) = \ker \phi \Rightarrow \nu = a\mu$ και $(\mathcal{J}, \mu) = \ker b$.

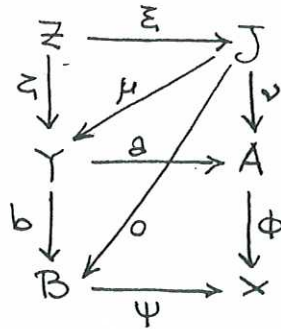
Τό (ii) είναι περίττο αν ξέρουμε πως κάθε μορφισμός στην \mathcal{C} έχει πυρήνα.

Απόδειξη. i) $(\mathcal{J}, \mu) = \ker b \Rightarrow b\mu = 0 \Rightarrow \psi b\mu = \phi a\mu = 0$. Αν $\nu: Z \rightarrow A$ με $\phi\nu = 0 \Rightarrow \phi\nu = \psi 0 \Rightarrow \exists!$ $\zeta: Z \rightarrow Y$ με $b\zeta = 0$



και $\alpha\zeta = \nu$. Όμως $\beta\zeta = 0 \Rightarrow \zeta = \mu\epsilon$ οαότε $\alpha\zeta = \alpha\mu\epsilon = \nu$.

ii) Έστω $(J, \nu) = \ker \phi$. Τότε $\phi\nu = 0 = \psi 0 \Rightarrow \exists! \mu: J \rightarrow Y$ με



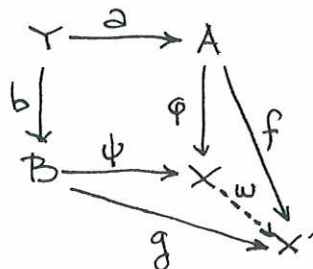
$\alpha\mu = \nu$ και $\beta\mu = 0$. Έστω $\zeta: Z \rightarrow Y$ με $\beta\zeta = 0$. Τότε $\psi\beta\zeta = 0 = \psi\alpha\zeta \Rightarrow \exists! \xi: J \rightarrow Z: \alpha\zeta = \nu\xi$. θεωρώ $0: Z \rightarrow B$ και $\nu\xi: Z \rightarrow A$. $\phi\nu\xi = \phi\alpha\zeta = \psi\beta\zeta = \psi 0$. Άρα υπάρχει αμφι-βώς ένας μορφοισμός (ό ζ): $Z \rightarrow Y$ με $\alpha\zeta = \nu\xi$ και $\beta\zeta = 0$. Όμως $\alpha\mu\xi = \nu\xi$ και $\beta\mu\xi = 0$, άρα $\mu\xi = \zeta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3. Έστω $\alpha: Y \rightarrow A$ και $\beta: Y \rightarrow B$ στην \mathcal{C} .

Ένα push-out του (α, β) είναι μια τριάδα (X, ϕ, ψ) με $\phi: A \rightarrow X$ και $\psi: B \rightarrow X$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

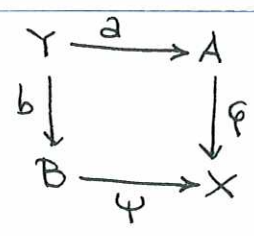
i) $\phi\alpha = \psi\beta$

ii) αν $f\alpha = g\beta$ όπου $f: A \rightarrow X'$ και $g: B \rightarrow X'$ τότε $\exists! \omega: X \rightarrow X'$ με $\omega\phi = f$ και $\omega\psi = g$.



"Ένα push-out, αν υπάρχει, είναι ουσιαστικά μοναδικό. Το push-out είναι δυϊκή έννοια του pull-back.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4. "Έστω σε μια κατηγορία \mathcal{C} με μηδενικό αντικείμενο ένα push-out

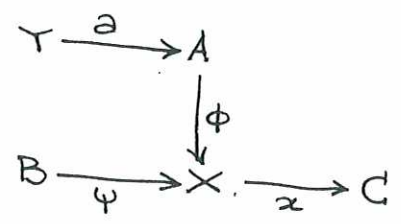


Τότε:

- i) "Αν $\epsilon = \text{coker } \phi \Rightarrow \epsilon \psi = \text{coker } b$.
- ii) "Αν $\eta = \text{coker } b \Rightarrow \eta = \epsilon \psi$ και $\epsilon = \text{coker } \phi$.

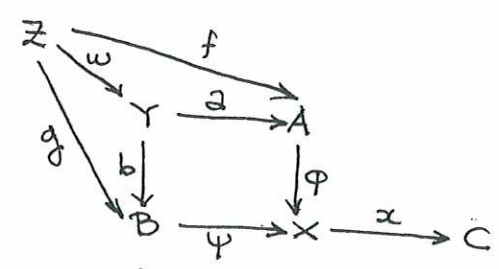
Τό (ii) είναι περίττο αν υάδε μορφισμός στην \mathcal{C} έχει coker

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5. "Έστω το διάγραμμα



όπου $\psi = \text{ker } \alpha$. Το διάγραμμα επευτείνεται σε pull-back $\Leftrightarrow a = \text{ker}(\alpha\phi)$.

Απόδειξη. "Αν $a = \text{ker}(\alpha\phi) \Rightarrow \alpha\phi a = 0 \Rightarrow \exists! b: Y \rightarrow B: \phi a = \psi b$.



$\phi f = \psi g \Rightarrow \alpha \phi f = \alpha \psi g = 0 \Rightarrow f = a \omega$. Τότε $\psi g = \phi f = \phi a \omega = \psi b \omega \Rightarrow g = b \omega$.
 "Αντίστροφα $\psi = \text{ker } \alpha \Rightarrow \alpha \psi b = \alpha \phi a = 0$. "Αν $\alpha \phi f = 0 \Rightarrow \phi f = \psi g$ και επειδή (Y, a, b) pull-back $\Rightarrow f = a \omega$ και $g = b \omega$. Δηλ. $a = \text{ker}(\alpha\phi)$.

§7. Συναρτητές

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.1. "Εστω \mathcal{A}, \mathcal{B} δύο κατηγορίες. Ένας συναρτηώδης συναρτητής $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι ένα ζεύγος (F_1, F_2) απεικονίζει $F_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, F_2: \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $f: A \rightarrow B \Rightarrow F_2 f: F_1 A \rightarrow F_1 B.$

ii) $F_2 1_A = 1_{F_1 A}$

iii) $F_2 (f \circ g) = (F_2 f) \circ (F_2 g).$

α Ένας ανταρτηώδης συναρτητής $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι ένα ζεύγος (F_1, F_2) όπως προηγουμένως που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $f: A \rightarrow B \Rightarrow F_2 f: F_1 B \rightarrow F_1 A$

ii) $F_2 1_A = 1_{F_1 A}$

iii) $F_2 (f \circ g) = (F_2 g) \circ (F_2 f)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.2. i) α Ένας ανταρτηώδης συναρτητής $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι συναρτηώδης $: \mathcal{A}^{opp} \rightarrow \mathcal{B}$. Παρατηρώ γεγονός συναρτητής θα έπρεπε συναρτηώδης συναρτητής.
 ii) Με προφανή τρόπο μπορεί να δοθεί ταυτοτικός συναρτητής σύνδεση συναρτητών, αναστρέψιμος συναρτητής και ισομορφες κατηγορίες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 7.3. 1) Η εμφύτευση μιας υποκατηγορίας στην κατηγορία είναι συναρτητής.

2) "Εστω S σύνολο και $F(S)$ η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση S . Το F είναι συναρτητής $: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Ab}$ και λέγεται ελεύθερος συναρτητής. Όμοια υπάρχουν ελεύθεροι συναρτητές $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{G}, \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}_F, \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}_R^l$, κτθ.

3) Ο συναρτητής $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ που απεικονίζει τον τοπολ. χώρο (X, \mathcal{T}) στο σύνολο X λέγεται επιτήθειωσι. Όμοια υπάρχουν επιτήθειωσις συναρτητές $\pi_{\mathbb{R}}^l \rightarrow \mathcal{A}b, \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}b$ κ.

4) Αν $A \in \pi_{\mathbb{R}}^l$, η απεικόνιση

$$F_A = \pi_{\mathbb{R}}^l(A, -): \pi_{\mathbb{R}}^l \rightarrow \mathcal{A}b: B \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B)$$

είναι συναρτητής. Λέμε ότι παρίσταται από το A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.4. Ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ λέγεται πηθής αν $\forall A, B \in \mathcal{C}$ απεικονίζει το $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ έπι του $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$. Λέγεται πιστός αν $\forall A, B \in \mathcal{C}$ η $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ είναι 1-1 και λέγεται full-embedding αν είναι πηθής, πιστός και $A \neq B \Rightarrow FA \neq FB$. Τότε $F(\mathcal{C})$ είναι πηθής υποκατηγορία της \mathcal{D} ενώ γενικά $F(\mathcal{C})$ δεν είναι υποκατηγορία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.5. Ονομάζουμε γινόμενο των \mathcal{C} και \mathcal{D} την κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ που έχει:

- i) αντικείμενα: τα ζεύγη $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$.
- ii) μορφισμοί: $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C_1, D_1), (C_2, D_2)) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$.
- iii) σύνδεση: $(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) := (f_1 f_2, g_1 g_2)$.

Ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ λέγεται δισυναρτητής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6. Για κάθε κατηγορία γινόμενο $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ορίζεται ένας δισυναρτητής $P_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ με $P_{\mathcal{C}}(A, B) = A$ και $P_{\mathcal{C}}(f, g) = f$ κ ένας δισυναρτητής $P_{\mathcal{D}}: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ με $P_{\mathcal{D}}(A, B) = B$ και $P_{\mathcal{D}}(f, g) = g$. Οι $P_{\mathcal{C}}$ και $P_{\mathcal{D}}$ λέγονται προβολικοί συναρτητές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.7. "Έστω $F_B: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ και $G_A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ συν-
τητές $\forall A \in \mathcal{A}$ και $\forall B \in \mathcal{B}$. Τότε αν

$F_B(A) = G_A(B)$ και $F_{B'}(f)G_A(g) = G_{A'}(g)F_B(f)$
 $\forall A, A' \in \mathcal{A}, \forall B, B' \in \mathcal{B}, \forall f: A \rightarrow A', \forall g: B \rightarrow B'$, υπάρχει
 άρρηκως ένας δισυνάρτησης $H: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ με

$$H(A, B) = F_B(A) \text{ και } H(f, g) = F_{B'}(f)G_A(g).$$

Απόδειξη. $H(1_A, 1_B) = F_{B'}(1_A)G_A(1_B) = 1_{F_B(A)} \circ 1_{G_A(B)} =$
 $= 1_{H(A, B)} \circ 1_{H(A, B)} = 1_{H(A, B)}.$

$H(f_1 f_2, g_1 g_2) = F_{B''}(f_1 f_2)G_A(g_1 g_2) = F_{B''}(f_1)F_{B''}(f_2)G_A(g_1)G_A(g_2)$
 $= F_{B''}(f_1)G_{A'}(g_1)F_{B''}(f_2)G_A(g_2) = H(f_1, g_1) \circ H(f_2, g_2).$

§ 8. Φυσιολογικοί μετασχηματισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.1. Θεωρώ τους συναρτητές $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.
 "Ένας φυσιολογικός μετασχηματισμός $t: F \rightarrow G$ είναι μια
 απεικόνιση $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}}: X \mapsto t(X) := t_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, GX)$
 τέτοια ώστε για κάθε $f: X \rightarrow Y$ στην \mathcal{C} , το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{t_x} & GX \\ FF \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{t_y} & GY \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Αν $\forall X \in \mathcal{C}$ t_x είναι ισομορφισμός, τότε t
 λέγεται φυσιολογική ισοδυναμία.

§9 Επαγωγικά και προβολικά συστήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.1. Εστω \mathcal{C} μια κατηγορία και (Λ, \leq) ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα επαγωγικό σύστημα στον \mathcal{C} (με δείκτη από το Λ) είναι ένας συναρτητής $A: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$. Ισοδύναμα, είναι μια οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ αντικειμένων της \mathcal{C} μαζί με μια οικογένεια μορφισμών $\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}: A_{\lambda_1} \rightarrow A_{\lambda_2}$, $\forall \lambda_1 \leq \lambda_2$, που ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$(i) \quad \phi_{\lambda}^{\lambda} = \text{id}_{A_{\lambda}}, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \text{ και}$$

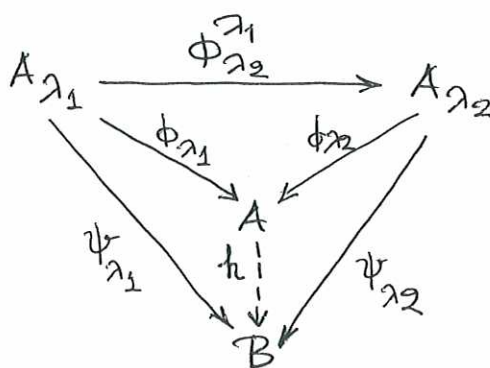
$$(ii) \quad \phi_{\lambda_3}^{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_3}^{\lambda_1}, \quad \forall \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.2. Εστω $A: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ ένα επαγωγικό σύστημα. Ονομάζουμε επαγωγικό όριο του συστήματος ένα ζεύγος $(A, (\phi_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$, όπου $A \in \mathcal{C}$ και $\phi_{\lambda} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_{\lambda}, A)$, $\forall \lambda \in \Lambda$, αν

$$(i) \quad \phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \phi_{\lambda_1}, \quad \forall \lambda_1 \leq \lambda_2$$

και επιπλέον ικανοποιείται η επόμενη (καθοδική) συνθήκη:

(ii) για κάθε ζεύγος $(B, (\psi_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$, όπου $B \in \mathcal{C}$ και $\psi_{\lambda} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_{\lambda}, B)$, $\lambda \in \Lambda$, με $\psi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1} = \psi_{\lambda_1}$, $\forall \lambda_1 \leq \lambda_2$, υπάρχει ακριβώς ένας $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$:
 $h \circ \phi_{\lambda} = \psi_{\lambda}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$



ΠΡΟΤΑΣΗ 9.3. Αν το επαγωγικό σύστημα $A: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ έχει όριο (A, ϕ_λ) , το όριο είναι μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ισομορφισμό.

Απόδειξη. Έστω $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ και $(B, (\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$

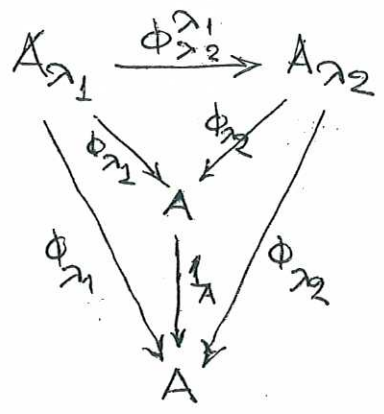
δύο όρια του συστήματος. Επειδή (A, ϕ_λ) όριο και οι ψ_λ κίνουν μεταθετικό το (μεγάλο) τρίγωνο στο διάγραμμα της σελ. 21, $\exists! h: A \rightarrow B$ με

$$h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Παρόμοια, επειδή (B, ψ_λ) είναι όριο, $\exists! h': B \rightarrow A$ με

$$h' \circ \psi_\lambda = \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Άρα $(h' \circ h) \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$



Στο ανωτέρω διάγραμμα, ξαναεφαρμόζοντας τον ορισμό των επαγ. ορίων για το A και τον εαυτό του, έχουμε ότι $\exists! \xi: A \rightarrow A$ με $\xi \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$ Επειδή $\iota_A \circ \phi_\lambda = (h' \circ h) \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda,$ έπεται ότι $h' \circ h = \iota_A.$ Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι $h \circ h' = \iota_B.$ ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.4. Στην κατηγορία \mathcal{F} των συνόλων, κάθε επαγωγικό σύστημα έχει επαγωγικό όριο.

Απόδειξη. Έστω $(A_\lambda, (\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}))$ ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με δείκτες από ένα κατευθυνόμενο σύνολο Λ .

Θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ εφοδιασμένη με την σχέση

$$A_{\lambda_1} \ni a_1 \sim a_2 \in A_{\lambda_2} \iff \exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2 : \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1) = \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2)$$

Η ανωτέρω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Είναι προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική. Είναι και μεταβατική: αν $a_1 \in A_{\lambda_1}, a_2 \in A_{\lambda_2}, a_3 \in A_{\lambda_3}$ με $a_1 \sim a_2$ και $a_2 \sim a_3$, τότε $\exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1) = \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2)$ και $\exists \mu \geq \lambda_2, \lambda_3$ με $\phi_{\mu}^{\lambda_2}(a_2) = \phi_{\mu}^{\lambda_3}(a_3)$. Θεωρούμε $k \geq \lambda, \mu$. Τότε

$$\begin{aligned} \phi_k^{\lambda_1}(a_1) &= \phi_k^{\lambda}(\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a_1)) = \phi_k^{\lambda}(\phi_{\lambda}^{\lambda_2}(a_2)) = \phi_k^{\lambda_2}(a_2) = \\ &= \phi_k^{\mu}(\phi_{\mu}^{\lambda_2}(a_2)) = \phi_k^{\mu}(\phi_{\mu}^{\lambda_3}(a_3)) = \phi_k^{\lambda_3}(a_3), \end{aligned}$$

δηλ. $a_1 \sim a_3$. Έστω A το σύνολο πηλίκο, δηλ.

$$A = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda / \sim$$

και

$$q: \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \longrightarrow A : a \longmapsto [a]$$

η κανονική απεικόνιση. Συμβολίζουμε με $\phi_{\lambda}: A_{\lambda} \rightarrow A$ τους περιορισμούς της q , δηλ.

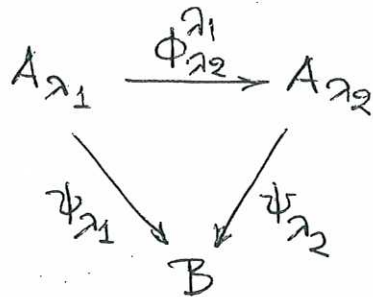
$$\phi_{\lambda}(a) = [a] \in A, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall a \in A_{\lambda}.$$

Ισχυρίζομαστε ότι $(A, \phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι επαγωγικό όριο του συστήματος $(A_\lambda, \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1})$. Πράγματι:

(i) $\forall \lambda_1 \leq \lambda_2$, $\forall a \in A_{\lambda_1}$ είναι $a \sim \phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}(a)$, άρα $[a] = [\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}(a)]$ και $\phi_{\lambda_1}(a) = \phi_{\lambda_2}(\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}(a))$.

(ii) Έστω $(B, (\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ με B σύνολο και

$\psi_\lambda: A_\lambda \rightarrow B$ απεικονίσεις που κάνουν μεταθετικά όλα τα διαγράμματα



Έστω $[a] \in A$, όπου $[a]$ η κλάση ενός $a \in A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.
Θέτουμε

$$h: A \rightarrow B: [a] \mapsto h([a]) := \psi_\lambda(a).$$

Η h είναι καλά ορισμένη: αν $a_1 \sim a_2$ με $a_1 \in A_{\lambda_1}$ και $a_2 \in A_{\lambda_2}$, τότε $\exists \lambda \leq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1) = \phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)$.

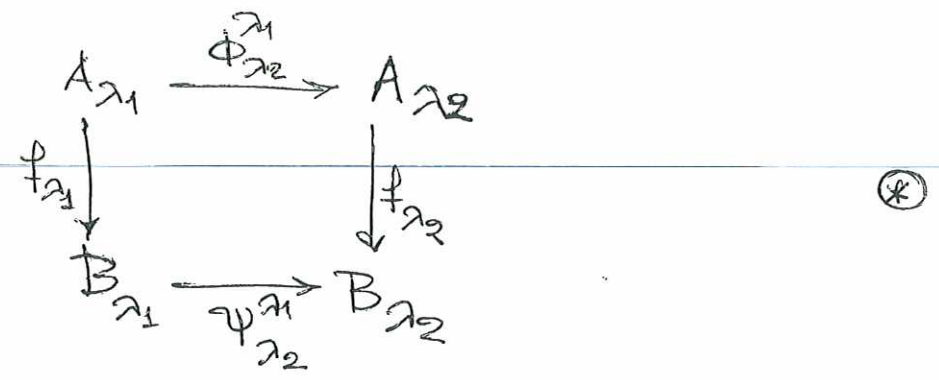
Άρα

$$\psi_{\lambda_1}(a_1) = \psi_\lambda(\phi_\lambda^{\lambda_1}(a_1)) = \psi_\lambda(\phi_\lambda^{\lambda_2}(a_2)) = \psi_{\lambda_2}(a_2).$$

Η h είναι η μοναδική για την οποία $h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda$, από τον ορισμό της. ■

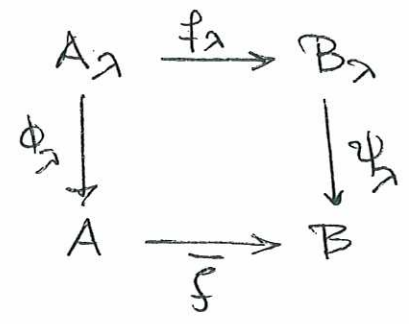
ΟΡΙΣΜΟΣ 9.5. Έστω $A, B: \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ δύο επαγωγικά συστήματα. Ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων $f: A \rightarrow B$ είναι ένας φυσικός μζβχ. μεταξύ των

επαχρητων A και B, δηλ. μια οικογενεια (f_λ)_{λ ∈ Λ}
μορφισμων f_λ: A_λ → B_λ εστω C, που κανουν
μεταθετικο το διαγραμμα



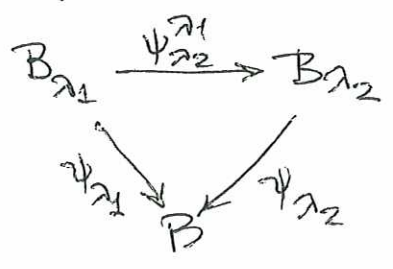
για καθε λ₁ ≤ λ₂.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.5. Αν τα επαχρητικα συστηματα A, B: Λ → C
εχουν ορια (A, φ_λ), (B, ψ_λ), τότε καθε μορφισμος
επαχρητικων συστηματων f = (f_λ)_{λ ∈ Λ}: A → B
οριζει ενα μοναδικο μορφισμο f̄: A → B (εστω C)
που κανει μεταθετικο το διαγραμμα

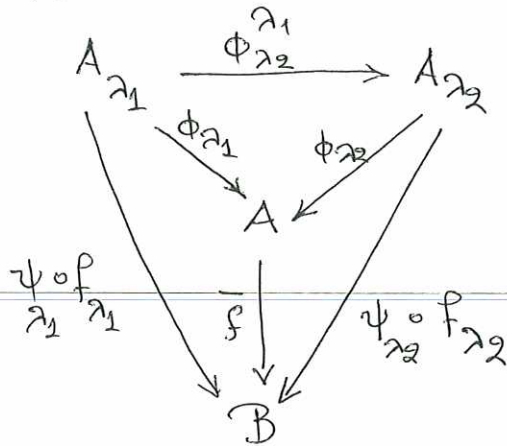


για καθε λ ∈ Λ.

Απόδειξη. Η μεταθετικότητα των διαγραμμάτων (*) και



εξασφαλίζει την μεταθετικότητα του μεγάλου τριγώνου στο διάγραμμα



άρα, αφού $(A, (\phi_\lambda))$ είναι όριο του \mathcal{A} , $\exists! \bar{f}: A \rightarrow B$ με $\bar{f} \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$ (μεταθετικότητα των πλευρικών τριγώνων). ■

Έστω $\mathcal{A}: \Lambda \rightarrow \mathcal{G}$ ένα επαγωγικό σύστημα στην κατηγορία των ομάδων και $F: \mathcal{G} \rightarrow \text{Set}$ ο επιλέξιμος συνδεστής. Τότε η σύνθεση $F \circ \mathcal{A}: \Lambda \rightarrow \text{Set}$ είναι επαγωγικό σύστημα συνόλων με όριο (στην Set) το $(A, (\phi_\lambda))$. Ισχύει η επόμενη:

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.7. Με τις προηγούμενες υποθέσεις:

(i) Το A δέχεται δομή ομάδας.

(ii) Κάθε $\phi_\lambda: A_\lambda \rightarrow A$ είναι μορφισμός ομάδων.

(iii) Αν $(f_\lambda: A_\lambda \rightarrow B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι μορφισμός επαγωγικά συστημάτων ομάδων (i: κάθε f_λ είναι μορφ. ομάδων), τότε το όριο $\bar{f}: A \rightarrow B$ είναι μορφ. ομάδων.

Απόδ. (i) Έστω $[a], [b] \in A$. Τότε $\exists \lambda_1 \in \mathbb{N}$ με $a \in A_{\lambda_1}$ και $\exists \lambda_2 \in \mathbb{N}$ με $b \in A_{\lambda_2}$. Επίσης $\exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$. Τότε $\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a), \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b) \in A_{\lambda}$ και A_{λ} είναι ομάδα, θέτουμε

$$[a] * [b] := [\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b)].$$

Η πράξη είναι καλά ορισμένη: Αν $[a] = [a']$ και $[b] = [b']$ τότε $a \in A_{\lambda_1}, a' \in A_{\lambda_1'}, b \in A_{\lambda_2}, b' \in A_{\lambda_2'}$ και $\exists \lambda \geq \lambda_1, \lambda_1'$ με $\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) = \phi_{\lambda}^{\lambda_1'}(a')$ και $\exists \mu \geq \lambda_2, \lambda_2'$ με $\phi_{\mu}^{\lambda_2}(b) = \phi_{\mu}^{\lambda_2'}(b')$

Θεωρούμε ένα $\nu \geq \lambda, \mu \Rightarrow \nu \geq \lambda_1, \lambda_1', \lambda_2, \lambda_2'$. Τότε:

$$\begin{aligned} \phi_{\nu}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\nu}^{\lambda_2}(b) &= \phi_{\nu}^{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\nu}^{\mu} \circ \phi_{\mu}^{\lambda_2}(b) = \\ &= \phi_{\nu}^{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1'}(a') * \phi_{\nu}^{\mu} \circ \phi_{\mu}^{\lambda_2'}(b') = \\ &= \phi_{\nu}^{\lambda_1'}(a') * \phi_{\nu}^{\lambda_2'}(b') \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[\phi_{\nu}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\nu}^{\lambda_2}(b)] = [\phi_{\nu}^{\lambda_1'}(a') * \phi_{\nu}^{\lambda_2'}(b')].$$

Είναι αμεσο ότι η πράξη $*$ στο A είναι πράξη ομάδας.

Το ουδέτερο των A είναι το $[e_{\lambda}]$, όπου e_{λ} το ουδέτερο στην A_{λ} , για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{N}$, και το αντίστροφο του $[a]$ είναι το $[a^{-1}]$.

(ii) Έστω $a, b \in A_{\lambda}$. Τότε $\phi_{\lambda}(a) * \phi_{\lambda}(b) = [a] * [b] = [a * b] = \phi_{\lambda}(a * b)$, εξ ορισμού της $[a] * [b]$.

(iii) Έστω $[a], [b] \in A$. Τότε, λαμβάνονται υπ' όψιν ότι $\phi_{\lambda}^{\lambda_1}, \phi_{\lambda}^{\lambda_2}, \psi_{\lambda_1}^{\lambda}, \psi_{\lambda_2}^{\lambda}, f_{\lambda}$ είναι μορφισμοί ομάδων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\bar{f}([a] * [b]) &= \bar{f}([\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b)]) = \\
&= \bar{f} \circ \phi_{\lambda}(\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b)) = \\
&= \psi_{\lambda} \circ f_{\lambda}(\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b)) = \\
&= \psi_{\lambda} \circ f_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \psi_{\lambda} \circ f_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b) = \\
&= \bar{f} \circ \phi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a) * \bar{f} \circ \phi_{\lambda} \circ \phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b) = \\
&= \bar{f}([\phi_{\lambda}^{\lambda_1}(a)]) * \bar{f}([\phi_{\lambda}^{\lambda_2}(b)]) = \\
&= \bar{f}([a]) * \bar{f}([b]). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ. Να ορίσετε τις δυνάμεις έννοιες των επαγωγικών συστημάτων (: προβολικό σύστημα) και του επαγωγικού όριου (: προβολικό όριο) και να εξετάσετε αν ισχύουν οι αντίστοιχες των προτάσεων 9.3, 9.4, 9.6 και 9.7.

ΑΣΚΗΣΗ. Να εξετάσετε αν επαγωγικά και προβολικά όρια κληρονομούν τυχόν υπάρχουσες τοπολογίες (δηλ. αν υπάρχουν επαγωγικά/προβολικά όρια στην κατηγορία Top). Το ίδιο για την κατηγορία των διαφορικών πολλαπλασιαστών.

§ 10. Προσαρτημένοι (adjoint) συναρτητές

ΟΡΙΣΜ. 10.1. Εστω \mathcal{C}, \mathcal{D} κατηγορίες και $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (συναλλοιώτοι) συναρτητές. Λέμε ότι ο F είναι αριστερά προσαρτημένος στον G , αν $\forall C \in \mathcal{C}$ και $\forall D \in \mathcal{D}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Phi_{CD} : \text{Mor}(F(C), D) \longrightarrow \text{Mor}(C, G(D)),$$

που είναι φυσικός ως προς κάθε ένα από τους δείκτες C, D .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 10.2. (i) Το $\text{Mor}(F(C), D)$ είναι σύνολο μορφισμών στην κατηγορία \mathcal{D} και το $\text{Mor}(C, G(D))$ είναι σύνολο μορφισμών στην κατηγορία \mathcal{C} .

(ii) Η αναικότητα του Φ_{CD} ως προς καθένα από τα C, D σημαίνει ότι αν το ένα σταθεροποιηθεί, έχουμε φυσικό μεταχ. ως προς το άλλο.

Εστω $D \in \mathcal{D}$, σταθ. Τότε ορίζεται ο ανταλλοίωτος ενταρτητής

$$\text{Mor}(F(\cdot), D) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$$

μέσω των σχέσεων:

$$\mathcal{C} \ni C \rightsquigarrow \text{Mor}(F(C), D) \in \text{Set}$$

και, $\forall f: C \rightarrow C'$ μορφισμό στην \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} \text{Mor}(F(\cdot), D) : \text{Mor}(F(C'), D) &\longrightarrow \text{Mor}(F(C), D) \\ h &\longmapsto h \circ F(f) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} C & & F(C) \\ f \downarrow & & F(f) \downarrow \\ C' & & F(C') \xrightarrow{h} D \end{array}$$

Επίσης ορίζεται ο ανταλλοίωτος ενταρτητής

$$\text{Mor}(\cdot, G(D)) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$$

μέσω των σχέσεων

$$\mathcal{C} \ni C \rightsquigarrow \text{Mor}(C, G(D)) \in \text{Set}$$

και, $\forall f: C \rightarrow C'$ μορφισμό στην \mathcal{C} ,

$$\text{Mor}(f, G(D)) : \text{Mor}(C', G(D)) \longrightarrow \text{Mor}(C, G(D))$$

$$h \longmapsto h \circ f$$

Η φυσικότητα του Φ_{CD} ως προς C (με D σταθ.) σημαίνει ότι η οικογένεια $(\Phi_{CD})_{C \in \mathcal{C}}$ είναι φυσικός μζεχ (ισομορφ.) μεταξύ των συνάρτησιών $\text{Mor}(F(\cdot), D)$ και $\text{Mor}(\cdot, G(D))$, δηλ. $\forall f: C \rightarrow C'$ είναι μεταθετικό το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(F(C), D) & \xrightarrow{\Phi_{CD}} & \text{Mor}(C, G(D)) \\ \uparrow \text{Mor}(F(f), D) & & \uparrow \text{Mor}(f, G(D)) \\ \text{Mor}(F(C'), D) & \xrightarrow{\Phi_{C'D}} & \text{Mor}(C', G(D)) \end{array}$$

Αντίστροφα, αν σταθεροποιήσουμε το $C \in \mathcal{C}$, ορίζονται οι συναλλοίωτοι συνάρτητές

$$\text{Mor}(F(C), \cdot), \text{Mor}(C, G(\cdot)) : \mathcal{D} \longrightarrow \text{Set},$$

όπου ο πρώτος δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathcal{D} \ni D \rightsquigarrow \text{Mor}(F(C), D) \in \text{Set}$$

$$\text{και } \forall g: D \rightarrow D' \text{ γενν } \mathcal{D}$$

$$\text{Mor}(F(C), g) : \text{Mor}(F(C), D) \longrightarrow \text{Mor}(F(C), D')$$

$$h \longmapsto g \circ h$$

ενώ ο δεύτερος δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathcal{D} \ni D \rightsquigarrow \text{Mor}(C, G(D)) \in \text{Set}$$

$$\text{και } \forall g: D \rightarrow D' \text{ γενν } \mathcal{D}$$

$$\text{Mor}(C, G(g)) : \text{Mor}(C, G(D)) \longrightarrow \text{Mor}(C, G(D'))$$

$$h \longmapsto G(g) \circ h.$$

Η φυσικότητα του Φ_{CD} ως προς D (με C σταθ.) σημαίνει ότι η οικογ. $(\Phi_{CD})_{D \in \mathcal{D}}$ είναι φυσ. μεταχ. (ισομορφ.) μεταξύ των Μοε $(F(C), \cdot)$ και Μοε $(C, G(\cdot))$, δηλ.
 $\forall g: D \rightarrow D'$ είναι μεταθετικό το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} \text{Μοε}(F(C), D) & \xrightarrow{\Phi_{CD}} & \text{Μοε}(C, G(D)) \\ \downarrow \text{Μοε}(F(C), g) & & \downarrow \text{Μοε}(C, G(g)) \\ \text{Μοε}(F(C), D') & \longrightarrow & \text{Μοε}(C, G(D')) \end{array}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.3. Έστω $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ενδοχλωίωτοι ενδορρητές. Τότε είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο F είναι αριστερά προωρημένος του G .
 (ii) Υπάρχουν φυσικοί μεταχ. $\eta: I_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ και $\varepsilon: FG \rightarrow I_{\mathcal{D}}$ που κάνουν μεταθετικά τα διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{1} & G \\ \eta G \searrow & & \nearrow G\varepsilon \\ & GF & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{1} & F \\ F\eta \searrow & & \nearrow \varepsilon F \\ & FG & F \end{array}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 10.4. Αν δίνεται το (i), $\forall C \in \mathcal{C}$ είναι $F(C) \in \mathcal{D}$, άρα $\exists \Phi_{C, F(C)}: \text{Μοε}(F(C), F(C)) \rightarrow \text{Μοε}(C, G(F(C)))$. Τότε ο φυσ. μεταχ. $(\eta_C)_{C \in \mathcal{C}}$ δίνεται από την

$$\eta_C := \Phi_{C, F(C)}(1_C).$$

Επίσης, $\forall D \in \mathcal{D}$, είναι $G(D) \in \mathcal{C}$, άρα υπάρχει ο

$$\Phi_{G(D), D}: \text{Μοε}(F(G(D)), D) \rightarrow \text{Μοε}(G(D), G(D)).$$

Τότε ο φυσ. φρσξ. $(\varepsilon_D)_{D \in \mathcal{D}}$ δίνεται από την

$$\varepsilon_D := \bar{\Phi}_{G(D), D}^{-1} (1_{G(D)}).$$

Αντίστροφα, αν δίνεται το (η_i) , τότε για κάθε $f \in \text{Mor}(F(C), D)$ είναι

$$\bar{\Phi}_{C, D}(f) := G(f) \circ \eta_C$$

και $\forall g: C \rightarrow G(D)$

$$\bar{\Phi}_{C, D}(g^{-1}) = \varepsilon_D \circ F(g).$$