ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
715. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ
30 ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2022

Δίνεται το ακόλουθο μοντέλο

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x\left(1 - \frac{1}{k}x\right) - \frac{\beta xy}{h+x} \tag{1α'}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\gamma y + \frac{\delta xy}{h+x}, \tag{1β'}$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές και, επιπλέον, $\gamma < \delta$ και $h < k$, με το αντίστοιχο πρόβλημα Cauchy:

Με δεδομένα $x_0, y_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(x,y)\colon \mathcal{I} \to [0,\infty)^2$, τέτοια ώστε η (x,y) να ικανοποιεί τόσο το σύστημα εξισώσεων (1) στο $(\mathcal{I} \smallsetminus \{0\})^\circ$, όσο και την $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. (Π_1)

Θεωρούμε, επίσης, δεδομένη την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, ολικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης του (Π_1).

I.
- i. [1M] Να αναγνωρίσετε τους όρους αλληλεπίδρασης, και μη, του δεξιού μέλους του (1).
- ii. [1M] Να χαρακτηρίσετε τους όρους αυτούς.

II.
- i. [1M] Να βρείτε τις μηδενοκλινείς καμπύλες.
- ii. Να απεικονίσετε αδρά το πεδίο διευθύνσεων,
  - α'. [1M] τόσο για $\frac{\gamma h}{\delta-\gamma} > k$,
  - β'. [1M] όσο και για $0 < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} < k$.

III. Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του (Π_1),

- α'. [1M] τόσο για $\frac{\gamma h}{\delta-\gamma} > k$,
- β'. [1M] όσο και για $0 < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} < k$.

<u>Υπόδειξη</u>: Μπορείτε να βρείτε τα σημεία ισορροπίας είτε αλγεβρικά, είτε γεωμετρικά από το πεδίο διευθύνσεων.

IV.
- i. [1M] Να δείξετε ότι υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από το $(k,0)$ όταν $k = \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}$.
  <u>Υπόδειξη</u>: Μπορείτε να αξιοποιήσετε είτε το πεδίο διευθύνσεων, είτε τη μέθοδο γραμμικοποίησης.
- ii. [1M] Να χαρακτηρίσετε τα σημεία ισορροπίας ως προς την ευστάθεια σε περιοχή γύρω από τη διακλάδωση μέσω της μεθόδου της γραμμικοποίησης.
- iii. [1M] Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διακλάδωσης στο $k\,y^*$-επίπεδο, να βρείτε τον τύπο της και να χαρακτηρίζετε την ευστάθεια στο σημείο της διακλάδωσης.

<u>Λύσεις</u>

$\boxed{\text{I.}}$ Για το μοντέλο (1), γνωστό και ως μοντέλο rosenzweig-macarthur, έχουμε ότι στην εξίσωση

i.
- (1α′) ο όρος μη αλληλεπίδρασης είναι ο $\alpha x\left(1-\frac{1}{k}x\right)$, και ο όρος αλληλεπίδρασής είναι ο $-\dfrac{\beta xy}{h+x}$.
- (1β′) ο όρος μη αλληλεπίδρασης είναι ο $-\gamma y$, και ο όρος αλληλεπίδρασής είναι ο $\dfrac{\delta xy}{h+x}$.

ii.
- (1α′) ο όρος μη αλληλεπίδρασης περιγράφεται από έναν λογιστικό όρο και η συναρτησιακή απόκριση του όρου αλληλεπίδρασης είναι τύπου II του Holling.
- (1β′) ο όρος μη αλληλεπίδρασης περιγράφεται από έναν εκθετικό όρο και η συναρτησιακή απόκριση του όρου αλληλεπίδρασης είναι τύπου II του Holling.

$\boxed{\text{II.}}$ i. Από την $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ έχουμε τις x-μηδενοκλινείς

$$x=0 \text{ και } y=\frac{\alpha}{\beta k}\left(k-x\right)\left(h+x\right),$$

και από την $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ έχουμε τις y-μηδενοκλινείς

$$y=0 \text{ και } x=\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}.$$

ii. Κατά μήκος της
- x-μηδενοκλινούς $x=0$ παρατηρούμε ότι $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\gamma y\le 0$, δηλαδή η y φθίνει, και άρα η φορά της είναι προς «τα κάτω», δηλαδή προς την καμπύλη $y=0$.
- x-μηδενοκλινούς $y=\frac{\alpha}{\beta k}\left(k-x\right)\left(h+x\right)$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha}{\beta k}\left(k-x\right)\left(h+x\right)\left(-\gamma+\frac{\delta x}{h+x}\right)\le 0 \text{ για } x\le k.$$

- y-μηδενοκλινούς $y=0$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha}{k}x\left(k-x\right)\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}0 \text{ για } x\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}k.$$

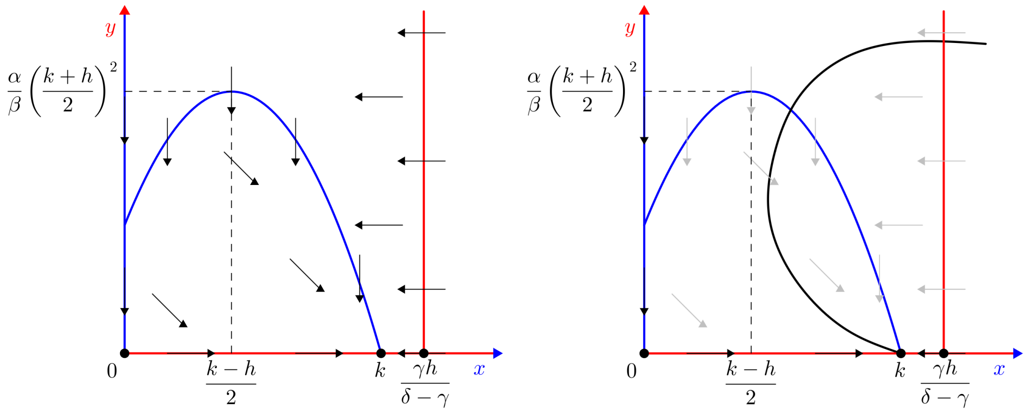
- y-μηδενοκλινούς $x=\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha\gamma h}{k\left(\delta-\gamma\right)}\left(k-\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\right)-\frac{\beta\gamma y}{\delta}<0.$$

Η απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων για $\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}>k$ φαίνεται στο Σχήμα 1.

iii. Κατά μήκος της
- x-μηδενοκλινούς $x=0$ παρατηρούμε ότι $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\gamma y\le 0$, δηλαδή η y φθίνει, και άρα η φορά της είναι προς «τα κάτω», δηλαδή προς την καμπύλη $y=0$.
- x-μηδενοκλινούς $y=\frac{\alpha}{\beta k}\left(k-x\right)\left(h+x\right)$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha}{\beta k}\left(k-x\right)\left(h+x\right)\left(-\gamma+\frac{\delta x}{h+x}\right)\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}0 \text{ για } \begin{Bmatrix}x<\dfrac{\gamma h}{\delta-\gamma}\\ x=\dfrac{\gamma h}{\delta-\gamma} \text{ ή } x=k\\ \dfrac{\gamma h}{\delta-\gamma}<x<k\end{Bmatrix}.$$



Σχήμα 1: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων (καθώς και μιας τυχαίας τροχιάς) του (Π_1) για $\frac{\gamma h}{\delta-\gamma} > k$. Με μπλε οι x-μηδενοκλινείς καμπύλες και με κόκκινο οι y-μηδενοκλινείς.

- y-μηδενοκλινούς $y = 0$ παρατηρούμε ότι

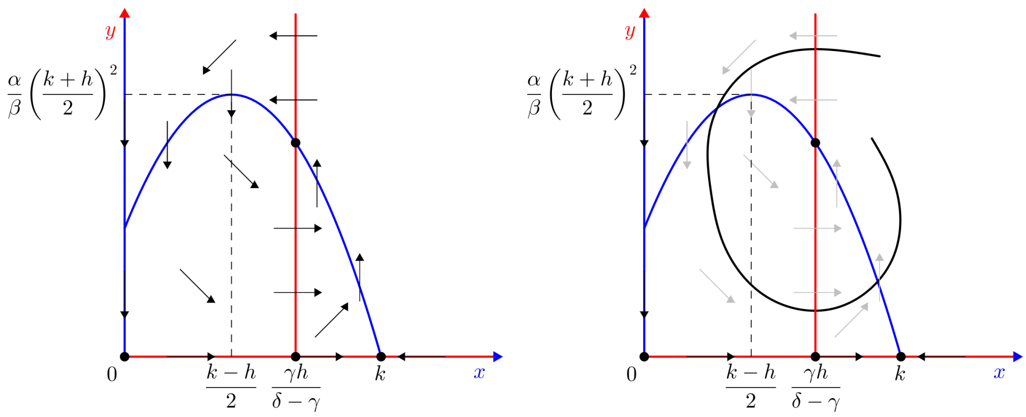
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{k}x\,(k-x)\begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \text{ για } x \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} k.$$

- y-μηδενοκλινούς $x = \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha\gamma h}{k\,(\delta-\gamma)}\left(k-\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\right)-\frac{\beta\gamma y}{\delta}\begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \text{ για } y \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \frac{\alpha}{\beta k}\left(k-\frac{\gamma h}{\delta-h}\right)\left(h+\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\right)$$

.

Η απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων για $0 < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} < k$ φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων (καθώς και μιας τυχαίας τροχιάς) του (Π_1) για $0 < \left(\frac{k-h}{2} <\right) \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} < k$. Με μπλε οι x-μηδενοκλινείς καμπύλες και με κόκκινο οι y-μηδενοκλινείς.

$\boxed{\text{III.}}$ Τα σημεία τομής των x-μηδενοκλινών και y-μηδενοκλινών καμπυλών είναι τα σημεία ισορροπίας του (Π_1). Συνεπώς, έχουμε από το

i. Σχήμα 1 τα σημεία ισορροπίας

$$(x^*, y^*) = \begin{cases} (0,0)\,, & \text{όταν } \dfrac{\gamma h}{\delta - h} > k \\ (k,0)\,, & \end{cases}$$

ii. Σχήμα 2 τα σημεία ισορροπίας

$$(x^*, y^*) = \begin{cases} (0,0)\,, & \\ (k,0)\,, & \text{όταν } 0 < \dfrac{\gamma h}{\delta - h} < k. \\ \left(\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}, \frac{\alpha}{\beta k}\left(k - \frac{\gamma h}{\delta - h}\right)\left(h + \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\right)\right), & \end{cases}$$

$\boxed{\text{IV.}}$ i. Από το πεδίο διευθύνσεων βλέπουμε ότι για $0 < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} < k$ έχουμε ένα επιπλέον σημείο ισορροπίας. Επομένως, υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από το $(k,0)$ όταν $k = \dfrac{\gamma h}{\delta - \gamma}$.

ii. Γράφουμε το (1) στη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x)\left(G(x) - \beta y\right), \tag{2α'}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left(-\gamma + \delta F(x)\right), \tag{2β'}$$

όπου

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \setminus \{-h\} &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto F(w) \coloneqq \frac{w}{h+w} \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} G\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto G(w) \coloneqq \frac{\alpha}{k}(k-x)(h+x)\,. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi για το (2) ως

$$J(w,z) = \begin{pmatrix} F(w)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}w}(w) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}(w)\left(G(w) - \beta z\right) & -\beta F(w) \\ \delta z \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}(w) & -\gamma + \delta F(w) \end{pmatrix},$$

δηλαδή

- $$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

- $$J(k,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta k}{h+k} \\ 0 & \frac{\delta k}{h+k} - \gamma \end{pmatrix}$$

  και

- $$J\left(x^\dagger, y^\dagger\right) = \begin{pmatrix} F\left(x^\dagger\right)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}w}\left(x^\dagger\right) & -\beta F\left(x^\dagger\right) \\ \delta y^\dagger \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}\left(x^\dagger\right) & 0 \end{pmatrix},$$

  όπου $\left(x^\dagger, y^\dagger\right) = \left(\frac{\gamma h}{\delta-\gamma}, \frac{\alpha}{\beta k}\left(k - \frac{\gamma h}{\delta - h}\right)\left(h + \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\right)\right)$.

Έχουμε τα εξής:

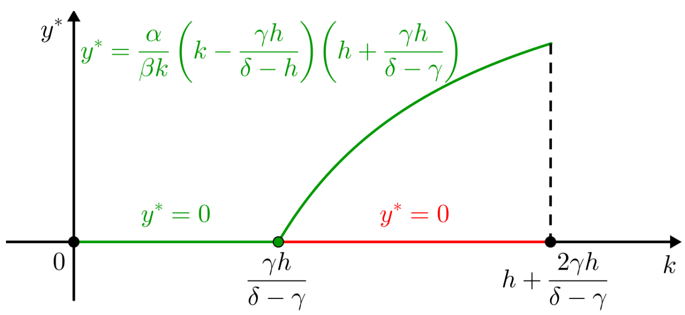
- Οι ιδιοτιμές του πίνακα $J(0,0)$ είναι οι $\lambda_1 = \alpha > 0$ και $\lambda_2 = -\gamma < 0$. Συνεπώς, το $(0,0)$ είναι θετικά ασταθές.

- Σχετικά με το $(k,0)$, έχουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = \frac{\delta k}{h+k} - \gamma$ και $\lambda_2 = -\alpha < 0$, δηλαδή
$$\lambda_1 \begin{cases} < 0, & \text{όταν } k < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} \\ = 0, & \text{όταν } k = \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} \\ > 0 & \text{όταν } k > \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}, \end{cases} \quad \text{και επίσης } \lambda_2 < 0.$$
Άρα το παραπάνω σημείο ισορροπίας είναι
$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές}, & \text{όταν } k < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} \\ \text{θετικά ασταθές}, & \text{όταν } k > \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}. \end{cases}$$

- Σχετικά με το $\left(x^\dagger, y^\dagger\right)$, οι ιδιοτιμές δίνονται από τον τύπο
$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr} \pm \left(\mathrm{tr}^2 - 4\mathrm{det}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$
όπου
$$\mathrm{tr} = \frac{\alpha\gamma}{\delta k}\left(k - h - 2\frac{\gamma h}{\delta - \gamma}\right)$$
και
$$\mathrm{det} = \beta\gamma\frac{(\delta-\gamma)^2}{h\delta^2}y^\dagger > 0, \text{ όταν } 0 < \frac{\gamma h}{\delta - \gamma} < k.$$
Αφού σε αυτή την περίπτωση η ορίζουσα είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobi καθορίζεται από το αντίστοιχο πρόσημο του ίχνους. Άρα, το παραπάνω σημείο ισορροπίας είναι
$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές}, & \text{όταν } (0 <)\ \frac{k-h}{2} < \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\ (< k) \\ \text{θετικά ασταθές}, & \text{όταν } (0 <)\ \frac{\gamma h}{\delta-\gamma} < \frac{k-h}{2}\ (< k). \end{cases}$$
Η δεύτερη περίπτωση (δηλαδή η $\frac{k-h}{2} > \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}$) όμως δεν μας ενδιαφέρει γιατί βρίσκεται μακριά από την διακλάδωση σταθερής κατάστασης.

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με την θετική ευ/αστάθεια του
$$(k,0)\,,\ \text{όταν } k = \frac{\gamma h}{\delta-\gamma},$$
με αυτή την τεχνική.

iii. Το διάγραμμα της διακλάδωσης στο $k\,y^*$-επίπεδο δίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Διάγραμμα διακλάδωσης $y^*\left(y^* - \frac{\alpha}{\beta k}\left(k - \frac{\gamma h}{\delta-h}\right)\left(h + \frac{\gamma h}{\delta-\gamma}\right)\right) = 0$. Με πράσινο απεικονίζεται η θετική ασυμπτωτική ευστάθεια, ενώ με κόκκινο η θετική αστάθεια.

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια διακρίσιμη διακλάδωση (ο ασταθής κλάδος $y^* = \frac{\alpha}{\beta k}\left(k - \frac{\gamma h}{\delta - h}\right)\left(h + \frac{\gamma h}{\delta - \gamma}\right) < 0$ για $k < \frac{\gamma h}{\delta - \gamma}$ απορρίπτεται) γύρω από το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας $\left(\frac{\gamma h}{\delta - h}, 0\right)$.