

ΜΑΠ - Στρατηγικές και Παίγνια

1^η Σειρά Ασκήσεων – Φεβρουάριος 2022

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Θεωρήστε ένα παίγνιο 2 παικτών, όπου αποφασίζουν για τον ελεύθερο χρόνο που θα διαθέσουν στη περιποίηση του κοινοτικού πάρκου της γειτονιάς τους, σε εθελοντική βάση. Και οι δύο επιθυμούν ένα καθαρό πάρκο, του οποίου η κατάσταση βελτιώνεται όσο αυξάνουν οι ώρες που αφιερώνουν. Προφανώς, κάθε παίκτης επιθυμεί να αφιερώσει ο άλλος τις περισσότερες ώρες εθελοντικής εργασίας στον καθαρισμό του πάρκου. Κάθε παίκτης μπορεί να αφιερώσει από μία ως τέσσερις ώρες, και η ωφέλεια που απολαμβάνει είναι ίση με $\sqrt{x+y}$, αν ο παίκτης I αφιερώσει x ώρες, και ο παίκτης II αφιερώσει y ώρες από τον ελεύθερο χρόνο του, με $x, y \in \mathbf{Z}$, μείον τον χρόνο που απασχολήθηκε.

- (α) Να διατυπωθεί η κανονική μορφή του παιχνιδιού, αφού πρώτα ορίσετε τη συνάρτηση συνολικής ωφέλειας κάθε παίκτη.
- (β) Να αποδείξετε ότι η στρατηγική να αφιερώσει κάποιος 1 ώρα εθελοντικής εργασίας κυριαρχεί της στρατηγικής να αφιερώσει 2 ώρες. Είναι ταυτόχρονα και αυστηρώς κυρίαρχη στρατηγική;
- (γ) Υπάρχουν άλλες κυριαρχούμενες στρατηγικές του παίκτη I ; Υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική του παίκτη I ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. (Bertrand Price Competition)

Θεωρήστε το πρόβλημα τιμολόγησης ενός δυοπωλίου (μία αγορά με δύο εταιρείες) που αποφασίζουν τη τιμή ενός προϊόντος με συνάρτηση ζήτησης $Q = 6 - P$, όπου P είναι η μικρότερη από τις τιμές που βάζουν οι δύο εταιρείες. Η εταιρεία που θα θέσει τη μικρότερη τιμή, θα πάρει όλη τη ζήτηση Q , διαφορετικά αν θέσουν την ίδια τιμή τότε οι δύο εταιρείες θα μοιραστούν εξίσου τη ζήτηση που θα διαμορφωθεί. Έστω ότι οι δύο εταιρείες μπορούν να τιμολογήσουν σε ακέραιες χρηματικές μονάδες μεταξύ των 0 Ευρώ και 6 Ευρώ, και ότι το κόστος παραγωγής του προϊόντος είναι μηδενικό και για τις δύο εταιρείες. Το ζητούμενο για κάθε εταιρεία είναι να αποφασίσει μία τιμή που θα της μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, λαμβάνοντας υπόψη την τιμή που θα θέσει η άλλη.

- (α) Να δείξετε ότι η τιμολόγηση με 0 ή 6 Ευρώ είναι κυριαρχούμενες στρατηγικές. Τί ισχύει για τις στρατηγικές τιμολόγησης με 4 ή 5 Ευρώ;
- (β) Θεωρήστε ένα μονοπώλιο (μόνο μία εταιρεία). Να αποδείξετε ότι το μονοπώλιο μεγιστοποιεί τα κέρδη του είναι αν τιμολογήσει με 3 Ευρώ. Δείξτε ότι στο πρόβλημα του δυοπωλίου, η στρατηγική τιμολόγησης με 3 Ευρώ κυριαρχείται από μία μικρότερη τιμή.
- (γ) Δείξτε ότι η μοναδική λύση με επαναλαμβανόμενη αφαίρεση των κυριαρχούμενων στρατηγικών είναι η στρατηγική (1, 1), δηλαδή και οι δύο εταιρείες να τιμολογήσουν με 1 Ευρώ και να μοιραστούν την ζήτηση.
- (δ) Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικό ισχυρισμό για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε IEDS για μοντέλα στρατηγικής τιμολόγησης σε ένα δυοπώλιο με μηδενικό κόστος παραγωγής;
- (ε) Ποιά είναι η βέλτιστη απάντηση στην στρατηγικής τιμολόγησης των 6 ευρώ; Κάντε το ίδιο για τις υπόλοιπες στρατηγικές, και δώστε τη συνάρτηση βέλτιστης απάντησης κάθε εταιρείας έναντι της τιμολόγησης που κάνει η άλλη.
- (στ) Δείξτε ότι το σημείο στρατηγικής ισορροπίας είναι το (1, 1). Υπάρχει άλλο σημείο ισορροπίας; Τι παρατηρείτε;
- (ζ) Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικό ισχυρισμό για την ύπαρξη και μοναδικότητα σημείου στρατηγικής ισορροπίας για μοντέλα στρατηγικής τιμολόγησης στην περίπτωση του δυοπωλίου με μηδενικό κόστος παραγωγής; Πώς συνδέεται με τη λύση σε απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών (IEDS);

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. (Hawk-Dove Game)

Το παιχνίδι (Hawk-Dove Game) μοντελοποιεί ένα βασικό τύπο διλήμματος που συναντάται σε διάφορες εφαρμογές και διαπραγματεύσεις, και έχει τη βάση του στην εξελικτική Θεωρία Παίγνιων, και την Βιολογία. Δύο πληθυσμοί ζώων στην ίδια περιοχή, οι I και II , ανακαλύπτουν παράλληλα μία πεδιάδα με αρκετή διαθέσιμη τροφή. Μπορούν να μοιραστούν την πεδιάδα χωρίς να επιτεθούν ο ένας στον άλλο (concede). Εναλλακτικά, κάθε πληθυσμός μπορεί να επιλέξει να επιτεθεί (fight) στον άλλο πληθυσμό με σκοπό να τον διώξει από την πεδιάδα. Για κάθε πληθυσμό, η καλύτερη έκβαση είναι να υποχωρήσει ο άλλος ώστε ο ίδιος να καταλάβει εξολοκλήρου την πεδιάδα με ωφέλεια 4 μονάδες (θεωρείται έτσι πιο θαρραλέος από τον άλλο). Η δεύτερη καλύτερη έκβαση είναι να υποχωρήσουν και οι δύο πληθυσμοί και να μοιραστούν την πεδιάδα (μοιράζονται τις 4 μονάδες ωφέλειας). Αμέσως μετά στις προτιμήσεις του κάθε πληθυσμού είναι να υποχωρήσει για να επιβιώσει, αν ο άλλος επιτεθεί, και εγκαταλείπει την πεδιάδα με ωφέλεια 0. Και τέλος, η χειρότερη έκβαση είναι να επιτεθούν ο ένας στον άλλο, οπότε και συμβαίνει η σύγκρουση, με αποτέλεσμα να μην επιβιώσει κανείς (ωφέλεια -1). Να δώσετε την κανονική μορφή του παιχνιδιού και να δείξετε ότι αυτή εκφράζει τις παραπάνω προτιμήσεις. Να βρείτε τα σημεία στρατηγικής ισορροπίας, αν υπάρχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. (Cournot Model)

Θεωρήστε το εξής παίγνιο δυοπωλίου κατά Cournot. Δύο εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν. Αν η πρώτη παράγει ποσότητα Q_1 και η δεύτερη παράγει ποσότητα Q_2 τότε η τιμή του προϊόντος θα είναι $P(Q_1; Q_2) = \frac{7}{Q_1 + Q_2}$. Επίσης, το κόστος παραγωγής για την πρώτη εταιρεία είναι $C_1(Q_1) = 10Q_1 + 8$ και για τη δεύτερη είναι $C_2(Q_2) = 4Q_2 + 2$. υπολογίστε την τιμή του προϊόντος και τις ποσότητες που θα παράγουν οι εταιρείες αν επικρατήσει ισορροπία κατά Nash.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. (Differentiated Goods Duopoly Model)

Θεωρήστε το εξής παίγνιο δυοπωλίου κατά Cournot. Δύο εταιρείες παράγουν ελαφρώς διαφορετικά προϊόντα. Αν η πρώτη παράγει ποσότητα Q_1 και η δεύτερη παράγει ποσότητα Q_2 , τότε η τιμή του προϊόντος που παράγει η εταιρεία 1 θα είναι $P_1(Q_1; Q_2) = a - bQ_1 - dQ_2$, και η τιμή του προϊόντος της εταιρείας 2 θα είναι $P_2(Q_2; Q_1) = a - bQ_2 - dQ_1$, όπου $b, d > 0$.

Αν το κόστος παραγωγής για κάθε εταιρεία είναι ανάλογο της ποσότητας παραγωγής, και το μοναδιαίο κόστος είναι c και για τις δύο, με $a > c$, να υπολογίσετε τις τιμές του προϊόντος και τις ποσότητες που θα παράγουν οι εταιρείες αν επικρατήσει ισορροπία κατά Nash, και ακολούθως να εξετάσετε την περίπτωση προσυνεννόησης στην τιμολόγηση, δηλαδή την περίπτωση Cartel. Τι παρατηρείτε, αν συγκρίνεται το κέρδος που επιτυγχάνεται από κάθε εταιρεία σε κάθε περίπτωση (Cournot Nash Equilibrium, Cartel Optimal Solution).

Η παράδοση της εργασίας θα γίνει ηλεκτρονικά σε σκαναρισμένα αντίγραφα μέχρι τη Δευτέρα 7/3/2022 στη διεύθυνση dimgiannhs81@gmail.com.

Γιάννης Δημητρακόπουλος