Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μέτρο Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A+t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A+t$ είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = t + I_n$, είναι κάλυψη του $A+t$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(t+I) = \ell(I)$ για κάθε διάστημα. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(A+t) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : A+t \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(t+I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, παρατηρήστε ότι αν $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του $A+t$ από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $I_n = -t + J_n$, είναι κάλυψη του A.

(β) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(X) &= \lambda^*(X-t) = \lambda^*((X-t)\cap A) + \lambda^*((X-t)\setminus A) \\ &= \lambda^*(-t + (X \cap (A+t))) + \lambda^*(-t + (X \setminus (A+t))) \\ &= \lambda^*(X \cap (A+t)) + \lambda^*(X \setminus (A+t)). \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του εξωτερικού μέτρου ως προς μεταφορές (το οποίο αποδείχτηκε στο (α)) και, για την δεύτερη ισότητα, το γεγονός ότι το A είναι μετρήσιμο.

2. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \leqslant \ell((-\alpha, \alpha)) = 2\alpha < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = \ell(I) > 0.$$

3. (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε την συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

Υπόδειξη. (α) Αφού $A \subseteq A \cup B$, έχουμε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A),$$

διότι $\lambda^*(B) = 0$.

(β) Παρατηρήστε ότι $\lambda^*(A \setminus B) \leqslant \lambda^*(A \triangle B) = 0$. Συνεπώς, $\lambda^*(A \setminus B) = 0$. Όμοια, $\lambda^*(B \setminus A) = 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\leqslant \lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(B \cup (A \setminus B)) \\ &\leqslant \lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda^*(B). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A)$.

4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = |t|\, \lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αν $t = 0$, το συμπέρασμα είναι προφανές. Έστω λοιπόν $t \neq 0$. Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = |t| \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = t\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{|t| \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = |t|\, \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Για τον ίδιο λόγο ισχύει και

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(\frac{1}{t}(tA)) \leq \frac{1}{|t|}\lambda^*(tA).$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*(tA) = |t|\, \lambda^*(A)$.

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}\\ &= C\,\lambda^*(A).\end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

5. (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda^*(E) + \varepsilon$.

(β)Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\,\ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon)\lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(E) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(A \cap I_m) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\, \ell(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(E_M) < \infty$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 5 (α) για το E_M, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) \geqslant \lambda^*(E_M \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

(β) Αφού $\lambda(A \cap I) \leqslant \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leqslant 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\lambda(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda(A^c) = 0$ (εξηγήστε τα βήματα).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\lambda(A^c) > 0$. Από το (α) υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda(A^c \cap I) > (1 - \delta)\, \ell(I).$$

Τότε,

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(A^c \cap I) < \ell(I) - (1 - \delta)\, \ell(I) = \delta\, \ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

6. Έστω $\delta > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) \mid E \subseteq \bigcup_n I_n,\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}\ I_n \text{ ανοικτό διάστημα με } \ell(I_n) < \delta \right\}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και $E \subseteq \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\lambda^*_\delta(E) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) \mid E \subseteq \bigcup_n I_n,\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}\ I_n \text{ ανοικτό διάστημα με } \ell(I_n) < \delta \right\}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει $\lambda^*(E) \leq \lambda^*_\delta(E)$. Για την αντίστροφη ανισότητα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) < +\infty$. Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε κάλυψη $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ του E από ανοικτά διαστήματα, υπάρχει κάλυψη $\{\Delta_s\}_{s=1}^{\infty}$ του E από ανοικτά διαστήματα με $\ell(\Delta_s) < \delta$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\sum_s \ell(\Delta_s) < \sum_n \ell(I_n) + \varepsilon.$$

Έστω λοιπόν ε με $0 < \varepsilon < \delta$ και $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του E. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1}, \ldots, J_{n,m_n}$ με μήκος μικρότερο από δ, ώστε $I_n \subseteq J_{n,1} \cup \cdots \cup J_{n,m_n}$ και $\sum_{i=1}^{m_n} \ell(J_{n,i}) < \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Πράγματι, αν $I_n = (a_n, b_n)$, μπορούμε να επιλέξουμε k_n

τέτοιο ώστε $\frac{b_n-a_n}{k_n} < \delta$ και να θέσουμε $x_i = a_n + \frac{i(b_n-a_n)}{k_n}$, $i = 0, \dots, k_n$. Αριθμώντας ως $J_{n,1}, \dots, J_{n,2k_n-1}$ την οικογένεια των διαστημάτων $\{(x_{i-1}, x_i) : i = 1, \dots, k_n\} \cup \{(x_i - \frac{\varepsilon}{k_n 2^{n+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{k_n 2^{n+1}}) : i = 1, \dots k_n - 1\}$, έχουμε τη ζητούμενη κάλυψη του I_n.

Τέλος, η $\{J_{n,i} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant 2k_n - 1\}$ είναι κάλυψη του E από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από δ, η οποία ικανοποιεί την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2k_n-1} \ell(J_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.$$

7. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A \cup B) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \mathrm{dist}(A, B)$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, μπορούμε να βρούμε μια κάλυψη $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου του δ με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon$. Είναι φανερό ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είτε $I_n \cap A = \emptyset$ είτε $I_n \cap B = \emptyset$ (διαφορετικά, θα υπήρχαν $a \in A \cap I_n$ και $b \in B \cap I_n$, οπότε $|b - a| < \ell(I_n) < \delta$, το οποίο είναι άτοπο). Θέτοντας λοιπόν $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : I_n \cap A \neq \emptyset\}$ και $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : I_n \cap B \neq \emptyset\}$, έχουμε ότι τα σύνολα N_1, N_2 είναι ξένα και οι οικογένειες $\{I_n : n \in N_1\}$, $\{I_n : n \in N_2\}$ καλύπτουν τα A, B αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leq \sum_{n \in N_1} \ell(I_n) + \sum_{n \in N_2} \ell(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, n]) = \lambda(A)$$

και
$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A\cap(-\infty,-n]) = \lambda(\emptyset) = 0.$$
Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A\cap(-\infty,n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A\cap(-\infty,-n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A\cap(-\infty,-1])\leqslant\lambda(A)<\infty$). Αφού η f είναι συνεχής και
$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\lambda(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda(A),$$
υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε
$$f(x) = \lambda(A\cap(-\infty,x]) = \frac{\lambda(A)}{2}.$$
Θέτοντας $F = A\cap(-\infty,x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

9. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το A είναι μετρήσιμο.
2. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλειστό $F\subseteq\mathbb{R}$ ώστε $F\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus F)<\varepsilon$.
3. Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus\Gamma)=0$.

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon>0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c\subseteq G$ και $\lambda^*(G\setminus A^c)=\lambda(G\setminus A^c)<\varepsilon$. Θέτουμε $F=G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F\subseteq A$, και $A\setminus F = G\setminus A^c$. Συνεπώς,
$$\lambda^*(A\setminus F) = \lambda^*(G\setminus A^c) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k\subseteq\mathbb{R}$ με $F_k\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus F_k)<1/k$. Ορίζουμε $\Gamma=\bigcup_{k=1}^\infty F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma\subseteq A$. Παρατηρούμε ότι
$$\lambda^*(A\setminus\Gamma)\leqslant\lambda^*(A\setminus F_k)<\frac{1}{k}$$
για κάθε $k\in\mathbb{N}$, άρα
$$\lambda^*(A\setminus\Gamma)=0.$$
Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus\Gamma)=0$. Το $A\setminus\Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας
$$A = \Gamma\cup(A\setminus\Gamma)$$
συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

10. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα
$$\limsup A_n = \{x\in\mathbb{R} \mid x\in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$
και
$$\liminf A_n = \{x\in\mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x)\in\mathbb{N} \text{ ώστε } x\in A_n \text{ για κάθε } n\geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geqslant n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

11. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(β) $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε

$$\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n).$$

(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).

(β) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\lambda(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\lambda(B_n) \leqslant \lambda(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n)$.

(γ) Με τον συμβολισμό του (β), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(\limsup A_n) \leqslant \lambda(C_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

12. Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι σύνολα Borel και βρείτε το μέτρο τους: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $C + 1$, $2C$, όπου C το σύνολο του Cantor.

Υπόδειξη. (α) Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο σύνολο και $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(β) Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda([0,n] \setminus \mathbb{Q}) = n - \lambda([0,n] \cap \mathbb{Q}) = n - 0 = n$. Συνεπώς, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \geqslant \lambda([0,n] \setminus \mathbb{Q}) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$.

(γ) Το $[0,1] \setminus \mathbb{Q} = [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ είναι μετρήσιμο ως τομή μετρήσιμων συνόλων. Όπως στο (β), βλέπουμε ότι $\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$.

(δ) Το C είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Από την Άσκηση 1, το ίδιο ισχύει και για το $C + 1$ (μεταφορά του C).

(ε) Το C είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 4, βλέπουμε ότι το $2C$ είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν.

13. Έστω A υπεραριθμήσιμο σύνολο και έστω $\mathcal{X}$ η οικογένεια των υποσυνόλων X του A που ικανοποιούν το εξής: είτε το X ή το $A \setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

Υπόδειξη. Έχουμε $A \in \mathcal{X}$ διότι το $A \setminus A = \emptyset$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Έστω $X \in \mathcal{X}$ Τότε, είτε το X είναι αριθμήσιμο ή το $A \setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Αν το X είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι $A \setminus X \in \mathcal{X}$ διότι το $A \setminus (A \setminus X) = X$ είναι αριθμήσιμο, ενώ αν το $A \setminus X$ είναι αριθμήσιμο έπεται πάλι (άμεσα) ότι $A \setminus X \in \mathcal{X}$.

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{X}$. Αν όλα τα X_n είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι αριθμήσιμο κι αυτό, άρα ανήκει στην $\mathcal{X}$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A \setminus X_m$ να είναι αρίθμήσιμο, τότε από την $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq A \setminus X_m$ έπεται ότι το $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{X}$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η ένωση των X_n ανήκει στην $\mathcal{X}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

14. Δείξτε ότι ο αριθμός $1/4$ ανήκει στο σύνολο του Cantor.

Υπόδειξη. 1η απόδειξη: Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το C_n, και χωρίζει το $I_k^{(n)}$ σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν n περιττός και $1:3$ αν n άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το C_n.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^{(n)} = (a,b)$ και $x - a = 3(b - x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a,b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$, $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b+a}{4} = \frac{b-a}{4} = 3\left(\frac{3b+a}{4} - \frac{2b+a}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2b+a}{3}\right).$$

2η απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό των σημείων του C με βάση την τριαδική τους παράσταση: Είναι $\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}}$, δηλαδή

$$\frac{1}{4} = (0,2,0,2,0,2,\ldots) \in C.$$

15. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

2. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.

3. Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

4. Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

5. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n) < \frac{1}{n} + \lambda^*(A)$. Ορίζουμε $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G \setminus B) = \lambda(G) - \lambda(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Τότε, γράφοντας $A = B \cup (A \cap N)$ βλέπουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αντίστροφα, έστω (I_n) κάλυψη του A από ανοικτά διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Αφού κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: αν $\lambda(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα, και αν $\lambda(A) > 0$, τότε έχουμε δείξει ότι το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

16. Προηγούμενες απόπειρες για τον ορισμό του μέτρου ενός φραγμένου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ ήταν παρόμοιες με αυτήν του Lebesgue, με τη διαφορά ότι θεωρούσαν καλύψεις του A από *πεπερασμένο* πλήθος ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι αν το $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ περιέχεται σε μια πεπερασμένη ένωση $\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$, τότε $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \geqslant 1$. Επομένως, με έναν τέτοιο ορισμό, το $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ θα είχε «μέτρο» 1.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) > 1 - \varepsilon$. Πράγματι, υπάρχει $k_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $0 \in (a_{k_1}, b_{k_1})$. Αν $b_{k_1} > 1$, τότε $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \geq b_{k_1} - a_{k_1} \geq 1$. Διαφορετικά, υπάρχει ρητός $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ με $b_{k_1} \leq q < b_{k_1} + \frac{\varepsilon}{n}$. Έπεται ότι υπάρχει $k_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $q \in (a_{k_2}, b_{k_2})$, οπότε $a_{k_2} < b_{k_1} + \frac{\varepsilon}{n}$. Συνεχίζοντας έτσι, επιλέγουμε $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με

$a_{k_1} < 0$, $b_{k_m} > 1$ και $a_{k_{i+1}} < b_{k_i} + \frac{\varepsilon}{n}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m-1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) &\geq \sum_{i=1}^{m}(b_{k_i} - a_{k_i}) \\ &= (b_{k_m} - a_{k_1}) + (b_{k_1} - a_{k_2}) + (b_{k_2} - a_{k_3}) + \cdots + (b_{k_{m-1}} - a_{k_m}) \\ &> 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \geq 1$.

Ομάδα Β΄

17. Έστω $A \subseteq [a,b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda(A) > 0$.

18. (α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$.

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Από την $\lambda(A \triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A \setminus B) = 0$ και $\lambda(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\lambda(B) = [\lambda(A) - \lambda(A \setminus B)] + \lambda(B \setminus A) = \lambda(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\lambda(A) = \lambda(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\lambda(B \setminus A) = 1 > 0$.

19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta),\ |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in A$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ έχουμε

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u-\delta_1, u+\delta_1) \subseteq (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u-\delta_1, u+\delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

20. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

21. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

1. Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

2. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

3. Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε
$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$
διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

4. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

22. Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

1. $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

2. $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

3. $A = \{x \in [0,1) \mid x_n \neq 5, \text{ για κάθε } \ n = 1, 2, \ldots\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι
$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$
Συνεπώς, $\lambda(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0, 1/10), [1/10, 2/10), \ldots, [9/10, 1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10, 6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10, (k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους 1/100. Συνεπώς,
$$\lambda(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο
$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \ldots, x_n \neq 5\}$$
έχει μέτρο
$$\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$
Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε
$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

23. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με την διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.

(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1-\theta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1-\frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1-\frac{\theta}{3}-2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1,2,\dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

2. Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

3. $\lambda(I^{(n)}) = 1-\frac{\theta}{3}-2\frac{\theta}{3^2}-\cdots-2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\theta) = \lim_{n\to\infty}\lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty}\left[1-\theta\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1-\theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1-\theta\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

Ομάδα Γ΄

24. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n}, q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1]\subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1\leqslant\lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon<1$.

(γ) Αφού $0\leqslant q_n\leqslant 1$, για κάθε $j\in\mathbb{N}$ έχουμε $A\subseteq A(1/j)\subseteq[-1/j,1+1/j]$. Άρα,

$$A\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}[-1/j,1+1/j]=[0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A)\leqslant\lambda(A(1/j))\leqslant 2/j$$

για κάθε $j\in\mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A)=0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq A(1/j)$ για κάθε $j\in\mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)=A$.

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1]=A\cup([0,1]\setminus A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}([0,1]\setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

25. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty}\lambda(A_n)=1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0<\alpha<1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty}A_{k_n}\right)>\alpha.$$

Υπόδειξη. Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty}\lambda(A_n)=1$, για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε $m\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n>m$ ώστε $\lambda(A_n)>1-\varepsilon$.

Έστω $0<\alpha<1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}<\cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n})>1-\frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c:=[0,1]\setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{k_n}^c\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_{k_n}^c)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{2^n}=1-\alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

26. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

(β) Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

27. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0, 1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0, 1)) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

28. Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\lambda_*(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_*(E) \leqslant \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_*(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

Υπόδειξη. (α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leqslant \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leqslant \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0, 1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

29. Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - t, x + t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A, x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap (x - t, x + t)) = 0 \;\text{ και }\; \lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x - t, x + t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t, x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q}, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q} \cap (x - t, x + t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x - t, x + t))}{2t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t}{2t} = 1.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n) = \alpha\lambda(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 9(β)). Ορίζουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leqslant t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} \leqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/n,1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha\frac{n+1}{n} \leqslant \alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} &\geqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n} = \frac{2\alpha/(n+1)}{2/n} \\ &= \alpha\frac{n}{n+1} \geqslant \alpha(1-2t). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} = \alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0) = \alpha$.

Ομάδα Δ΄

30. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n).$$

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος. Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $[0,1]$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Αν $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$, ορίζουμε, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, ένα σύνολο $E \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε F_α. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $[-1,1]$ και ορίζουμε $E_n = q_n + E$. Από τον τρόπο ορισμού του E ελέγχουμε ότι τα E_n είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$[0,1] \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1,2].$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1]) \leqslant \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = 0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(E_n) = +\infty > 3 = \lambda([-1,2]) \geqslant \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).$$

Δεύτερος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(E) < \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c).$$

Θεωρήστε τα σύνολα $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap A^c$, $E_3 = E_4 = \cdots = \emptyset$.

31. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(W) > 0$, τότε, για κάθε $0 < \beta < \lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \beta$.

Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ώστε $W \subseteq [a,b]$. Ορίζουμε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \lambda(W \cap [a,t]\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t) - f(s)| \leqslant |t-s|.$$

(Δείτε και την Άσκηση 8.) Αφού $f(a) = 0$ και $f(b) = \lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. □

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in (\lambda(E), \lambda(F))$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε (Άσκηση 9) συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

32. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0,1]$,

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Υπόδειξη. Ελέγξτε πρώτα ότι αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n-οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0 < \delta < 1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \cup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} D_j^2\right).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \cup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

1. $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

2. $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2 \cdots \delta_n$.

3. Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \delta_1 \cdots \delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leqslant b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a,b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leqslant \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leqslant \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1 - \delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1}\delta_{n+2} \cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E \cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n \setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E \cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

33. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το A περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n.

Υπόδειξη. Αφού $\lambda(E) > 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{n-1}{n}(b-a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b)$ σε n διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{n}$:

$$I_1 = [a, a+s), \;\; I_2 = [a+s, a+2s), \;\; \ldots \;\; , \;\; I_n = [a+(n-1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \ldots, n$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{n} B_j \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^n B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(n-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της $(*)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} (I_1 \setminus B_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a, b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{n}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^n B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται η $(*)$.

Κεφάλαιο 2

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a : A \to [-\infty, +\infty]$ με

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \leqslant a \\ a, & \text{αν } f(x) > a \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $f_a = f \cdot \chi_E + a \cdot \chi_{A \setminus E}$, όπου $E = [f \leqslant a]$. Παρατηρήστε ότι το E είναι μετρήσιμο άρα η συνάρτηση f_a είναι μετρήσιμη ως πράξεις μετρησίμων.

Ένας άλλος τρόπος να το δούμε είναι ο εξής: Έστω $b \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $a \leqslant b$. Τότε $[f_a \leqslant b] = A$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

(β) $a > b$. Τότε, $[f_a \leqslant b] = [f \leqslant b]$, το οποίο είναι μετρήσιμο αφού η f είναι μετρήσιμη.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση το $[f_a \leqslant b]$ είναι μετρήσιμο.

2. Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

3. (α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$[f > b] = \{x \in A \cup B : f(x) > b\} = \{x \in B : f(x) > b\} \cup \{x \in A : f(x) > b\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C = C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Τότε, το $B = A \setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

4. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ αν $x \in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leqslant 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \leqslant 0$. Τότε, $[f \leqslant b] = [f^2 \geqslant b^2] \cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b > 0$ τότε

$$[f \leqslant b] = (A_1 \cap [f^2 \leqslant b^2]) \cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \liminf f_n(x)$ και $h(x) = \limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L = [g = h] = \{x \in A \mid g(x) = h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

6. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n \to a$. Τότε,

$$\{x \in A \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x \in A \mid f(x) > q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f \geqslant a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Δηλαδή, $(a,b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Β΄

8. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a,+\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a,+\infty))$. Όμως, η h είναι Borel μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a,+\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο, αφού έχει μέτρο 0. Θέτουμε $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a,b]$ σε κλειστά σύνολα. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a,b]$, επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.
Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

10. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : \ f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.
Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(x \in A : f(x) > t_n) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(x \in A : f(x) > t) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t) \overset{\lambda(A)<\infty}{\iff} \lambda(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.
(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leqslant \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lambda(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

11. (α) Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ το σύνολο $\{x : f(x) = \alpha\}$ είναι μετρήσιμο.
(β) Μπορείτε να βρείτε μη μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : g(x) = \alpha\}$ να είναι μετρήσιμο;

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\{x \mid f(x) > 0\} = E$ το οποίο είναι μη μετρήσιμο. Παρ' όλα αυτά αν $a \neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $a \in E$, τότε $[f = a] = \{a\}$, ενώ αν

(ii) $a \notin E$, τότε $[f = a] = \emptyset$,

δηλαδή σε κάθε περίπτωση το $[f = a]$ είναι μετρήσιμο.
(β) Θεωρούμε ένα μη μετρήσιμο $E \subset (-1,0)$ και θέτουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x + \chi_E(x)$. Τότε $[g > 0] = (0,+\infty) \cup E$, το οποίο είναι μη μετρήσιμο, άρα η g είναι μη μετρήσιμη. Όμως, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο $[g = a]$ είναι το πολύ δισύνολο, άρα μετρήσιμο.

12. Σωστό ή λάθος; Αν η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b - \varepsilon)$ για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a, b).

Υπόδειξη. Σωστό. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < b-a$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f \cdot \chi_{[a,b-\frac{1}{n+k}]}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη από την υπόθεση και $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

13. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $A = g^{-1}((a, +\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b, +\infty)$ ή (b, ∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

14. Έστω (ϕ_n) ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f - \phi_k\|_\infty < 1$. Καθώς η ϕ_k είναι απλή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\phi_k(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)| \leqslant |\phi_k(x)| + \|f - \phi_k\|_\infty < 1 + M,$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄

15. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli (Άσκηση 11γ) έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leqslant \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\lambda(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $f_n(x) \leqslant \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \to 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

16. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $A_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = [0,1]$ και η $\{A_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(x : |f_n(x)| > \beta_n) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Κεφάλαιο 3

Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Υπόδειξη. Για κάθε $t > s \geqslant 0$ έχουμε $\{f > t\} \subseteq \{f > s\}$. Συνεπώς,

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) \leqslant \lambda(\{f > s\}) = F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n \to t$ ισχύει $F(t_n) \to F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f > t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x) > t_n$ τότε $f(x) > t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x) > t$, από το γεγονός ότι $t_n \to t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x) > t_n > t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f > t_n\} \subseteq \{f > t_{n+1}\}$ για κάθε n. Δηλαδή, η $(\{f > t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\{f > t_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t\,\lambda(\{f > t\}) \leqslant \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leqslant \frac{1}{t}\int f,$$

και αυτό δείχνει ότ $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$.

2. Δείξτε ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \geqslant \int_{[1,n)} \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k,k+1)} \frac{1}{x} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k,k+1)} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Η αρμονική σειρά αποκλίνει, συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Έπεται ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = +\infty$.

3. Βρείτε μια ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την (f_n) έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση;

Υπόδειξη. Θεωρήστε τις $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x).$$

Παρατηρήστε ότι $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. Όμως,

$$\int f_n = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant f_k - f \leqslant f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leqslant \int (f_k - f) \leqslant \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

5. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ *σ.π.* Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\,\lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \leqslant \int_E f = 0,$$

άρα $\lambda(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ *σ.π.*: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\lambda(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\lambda(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(E) = 0$.

6. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geq 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geqslant 1/n\} \subseteq \{f \geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

7. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leqslant n\} \subseteq \{f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leqslant n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{f\leqslant n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

8. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

Ομάδα Β΄

9. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n\int f < +\infty.$$

10. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leqslant F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty,x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty,x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n$ και $F(x) = \int g$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leqslant f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n \to \int g = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

11. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leqslant \int_E f_n + \int (f - f_n) \leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

12. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

13. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leqslant f_n \leqslant 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\lambda([0, n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

14. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leqslant \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

15. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f$ και $\int_{E^c} f$.]

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty} \left(- \int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_E f_n \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

16. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

17. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1 - x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

18. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2} dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leqslant e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geqslant 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \right] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

19. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geqslant 0$, $g_n \geqslant g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – Άσκηση 10):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \left(\int f - \int f_n \right) = \lim_n \left(\int f - f_n \right) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

20. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.

Υπόδειξη. Γράφουμε
$$\left|\int |f_n| - \int |f|\right| \leqslant \int \big||f_n| - |f|\big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$
Άρα,
$$\int |f_n| \to \int |f|.$$
Με ανάλογο τρόπο,
$$\left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int (f_n - f)\right| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$
Άρα,
$$\int f_n \to \int f.$$

21. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε
$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_n - f)\right| \leqslant \int_E |f_n - f| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$
Άρα,
$$\int_E f_n \to \int_E f.$$
Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 27. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \to 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$. Συνεπώς,
$$\begin{aligned}\int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2}\int f_n + \frac{1}{2}\int |f_n| \to \frac{1}{2}\int f + \frac{1}{2}\int |f| \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} = \int f^+.\end{aligned}$$

22. (α) Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leqslant |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Ομάδα Γ΄

23. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

Υπόδειξη. Οι συναρτήσεις $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x$ είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Beppo Levi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n\cos x dx=\int_0^{\pi/2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n\cos x\Big).$$

Επίσης, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n\cos x=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

για κάθε $x\in(0,\pi/2]$. Άρα,

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n\cos x\Big)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}.$$

Για κάθε $0<\delta<\pi/2$ έχουμε

$$\int_{\sin\delta}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=\int_{\sin\delta}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx=\int_{\delta}^{1}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=2(1-\sqrt{\delta}).$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{\delta\to 0^+}2(1-\sqrt{\delta})=2.$$

Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n\cos x dx=2.$$

Θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει και απευθείας το $\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n\cos x dx$ για κάθε n και στη συνέχεια να υπολογίσει το άθροισμα της σειράς.

24. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n|\leq g_n$, $f_n\to f$, $g_n\to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n\to\int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n\to\int f$.

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f,g και οι f_n,g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n|\leqslant g_n$ έχουμε $-g_n\leqslant f_n\leqslant g_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n+g_n\geqslant 0\quad\text{και}\quad g_n-f_n\geqslant 0.$$

Αφού $f_n+g_n\to f+g$ και $g_n-f_n\to g-f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f+\int g=\int(f+g)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int(f_n+g_n)=\liminf_{n\to\infty}\int f_n+\int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n\to\int g$). Άρα,

$$\int f\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

25. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big| |f_n| - |f| \big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big| |f_n - f| - |f_n| \big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

26. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκλη- ρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n\right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκηρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geqslant 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\int [g + \liminf(-f_n)] = \int \liminf h_n \leqslant \liminf \int h_n = \liminf\left(\int g - \int f_n\right).$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g < +\infty$ προκύπτει ότι

$$-\int \limsup f_n \leqslant -\limsup \int f_n ,$$

το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

27. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.
(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.
(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf\left\{\int_E f : \lambda(E) \geq \frac{1}{2}\right\} > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου 1/2. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0,1] \setminus (A \cup B)) \geqslant 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f = \int_{A\cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B\cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A\cup C) = \lambda(B \cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A \cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2\int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant m \leqslant 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geqslant 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geqslant \frac{1}{k}\lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\lambda(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geqslant 1/2$ τότε

$$\int_E f \geqslant \int_{E\cap F} f \geqslant \varepsilon\lambda(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E\cap F) \geqslant \lambda(E) + \lambda(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f \geqslant \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

28. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Υπόδειξη. Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο: θέτοντας $y = 1 + n^2x^2$, παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2n}\int_1^{1+n^2} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \to 0.$$

Τέλος,

$$\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}\,dx = \sqrt{n}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\ln(1+n^2)}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

29. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n.$$

30. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|f_n| = \infty,$$

η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$, και

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n.$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{\infty} ae^{-nax}dx = -\frac{a}{na}e^{-nax}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n}$$

και όμοια $\int_0^{\infty} be^{-nbx}dx = \frac{1}{n}$. Συνεπώς,

$$\int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty}(ae^{-nax} - be^{-nbx})dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

και έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n = 0.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\delta_n := \frac{\ln(b/a)}{n(b-a)}$ τότε $f_n(x) < 0$ στο $[0,\delta_n)$ και $f_n(x) > 0$ στο (δ_n,∞). Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}|f_n| &= \int_0^{\delta_n}[be^{-nbx} - ae^{-nax}]\,dx + \int_{\delta_n}^{\infty}[ae^{-nax} - be^{-nbx}]dx\\ &= \left(\frac{e^{-nax}}{n} - \frac{e^{-bnx}}{n}\right)\Big|_0^{\delta_n} + \left(\frac{e^{-nbx}}{n} - \frac{e^{-anx}}{n}\right)\Big|_{\delta_n}^{\infty}\\ &= \frac{2}{n}(e^{-na\delta_n} - e^{-nb\delta_n}) = \frac{2}{n}\left(e^{-\frac{a\ln(b/a)}{b-a}} - e^{-\frac{b\ln(b/a)}{b-a}}\right) = \frac{C_{a,b}}{n},\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|f_n| = +\infty$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} ae^{-nax} = \sum_{n=1}^{\infty} a(e^{-ax})^n = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}},$$

συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - b\frac{e^{-bx}}{1-e^{-bx}}.$$

Με την αντικατάσταση $y = e^{-ax}$ βλέπουμε ότι

$$\int a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}}dx = \ln(1-e^{-ax}),$$

άρα
$$\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = (\ln(1-e^{-ax}) - \ln(1-e^{-ax}))\Big|_0^\infty = -\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\right) = \ln(b/a).$$
Συνοψίζοντας,
$$\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \ln(b/a) \neq 0 = \sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty f_n.$$

31. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $\lambda(E_i) \geq k/n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε
$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geqslant k$$
για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,
$$\sum_{i=1}^n \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\,(x) = \int_{[0,1]} f \ \geqslant k.$$
Έπεται ότι
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda(E_i) \geqslant \frac{k}{n}.$$
Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geqslant \frac{k}{n}$.

Κεφάλαιο 4

Χώροι με νόρμα

1. *Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X, αποδείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.*

Υπόδειξη. (α) Για την τομή: υποθέτουμε ότι $x, y \in Y \cap Z$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Αφού $x, y \in Y$ και ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, παίρνουμε $\lambda x + \mu y \in Y$. Ομοίως, $\lambda x + \mu y \in Z$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in Y \cap Z$.

(β) Για την ένωση: αν $Y \subseteq Z$ τότε $Y \cup Z = Z$, ενώ αν $Z \subseteq Y$ τότε $Y \cup Z = Y$. Σε κάθε περίπτωση, ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Με την υπόθεση ότι υπάρχουν $y \in Y \setminus Z$ και $z \in Z \setminus Y$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αφού $y, z \in Y \cup Z$, έχουμε $y + z \in Y \cup Z$.

Αν $y + z \in Y$ τότε $(y + z) - y \in Y$ γιατί ο Y είναι υπόχωρος, δηλαδή $z \in Y$ το οποίο είναι άτοπο.

Αν $y + z \in Z$ τότε $(y + z) - z \in Z$ γιατί ο Z είναι υπόχωρος, δηλαδή $y \in Z$ το οποίο είναι πάλι άτοπο.

Αφού δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι $Y \setminus Z \neq \emptyset$ και $Z \setminus Y \neq \emptyset$, έχουμε είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X.*

Υπόδειξη. Έστω $z, w \in \overline{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Υπάρχουν $z_n, w_n \in Y$ με $z_n \to z$ και $w_n \to w$. Αφού ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda z_n + \mu w_n \in Y$.

Όμως οι πράξεις του X είναι συνεχείς ως προς τη νόρμα, άρα

$$\lambda z_n + \mu w_n \to \lambda z + \mu w.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda z + \mu w \in \overline{Y}$.

3. Αποδείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$B(x, r) = \overline{D(x, r)}, \quad \mathrm{int}\,(B(x, r)) = D(x, r) \quad \text{και} \quad \partial B(x, r) = \partial D(x, r) = S(x, r).$$

Υπόδειξη. Η $B(x, r)$ είναι κλειστό σύνολο και $D(x, r) \subseteq B(x, r)$. Άρα,

$$\overline{D(x, r)} \subseteq B(x, r).$$

Αντίστροφα, έστω $y \in B(x,r)$, $y \neq x$. Ορίζουμε $y_n = x + \lambda_n(y-x)$, όπου (λ_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με όριο το 1. Τότε $y_n \to x + (y-x) = y$ και

$$\|x - y_n\| = \|\lambda_n(y-x)\| = \lambda_n\|y-x\| < \|y-x\| \leqslant r,$$

δηλαδή $y_n \in D(x,r)$ και $y_n \to y$. Έπεται ότι $y \in \overline{D(x,r)}$, και αφού το $y \in B(x,r)$, $y \neq x$ ήταν τυχόν, $B(x,r) \subseteq \overline{D(x,r)}$.

Η $D(x,r)$ είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στην $B(x,r)$. Άρα, $D(x,r) \subseteq \mathrm{int}(B(x,r))$. Αντίστροφα, έστω y εσωτερικό σημείο της $B(x,r)$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$. Τότε, αν $\|z\| < \delta$, έχουμε $\|y+z-x\| \leqslant r$. Επιλέγουμε $z = t(y-x)$ για $t > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $\|z\| < \delta$. Τότε,

$$\|y+z-x\| = \|(1+t)(y-x)\| = (1+t)\|y-x\| \leqslant r,$$

δηλαδή $\|y-x\| \leqslant \frac{r}{1+t} < r$, άρα $y \in D(x,r)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\partial B(x,r) = B(x,r) \setminus \mathrm{int}(B(x,r)) = B(x,r) \setminus D(x,r) = S(x,r)$$

και

$$\partial D(x,r) = \overline{D(x,r)} \setminus D(x,r) = B(x,r) \setminus D(x,r) = S(x,r).$$

4. *Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Αποδείξτε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.*

Υπόδειξη. Έστω ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|')}$, τότε $\|x\|' \leqslant 1$. Άρα, $\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant 1$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$. Δηλαδή, $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\|' = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|'} \in B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)},$$

δηλαδή

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant 1.$$

Η $\|0\| \leqslant \|0\|'$ ισχύει σαν ισότητα, οπότε δείξαμε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$.

5. *Θεωρούμε τον c_{00} ως υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n = (0,\dots,0,\frac{1}{n^2},0,\dots)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y. Τι συμπεραίνετε;*

Υπόδειξη. Έχουμε $\sum_{n=1}^\infty \|y_n\| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$. Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_n y_n$ είναι

$$s_k = y_1 + \cdots + y_k = \left(1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{k^2}, 0, \dots\right) \to x = (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

στον ℓ_∞. Αν υπήρχε $y \in c_{00}$ για το οποίο $s_k \to y$, από μοναδικότητα του ορίου (στον ℓ_∞) θα είχαμε $y = x \notin c_{00}$, άτοπο. Βρήκαμε σειρά στον c_{00} η οποία συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

6. (α) *Αποδείξτε ότι, αν* $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, *τότε για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$\|x\|_r \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x *για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.*

(β) *Αποδείξτε ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιος ώστε: αν* $N < p < +\infty$, *τότε για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε την εξής ανισότητα: αν $r \geqslant 1$ και $a, b \geqslant 0$, τότε $(a+b)^r \geqslant a^r + b^r$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $r \geqslant 1$ και $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_n)^r \geqslant a_1^r + \cdots + a_n^r.$$

Έστω $p < r$. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\|_p^r = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{r/p} \geqslant (|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p} = |\xi_1|^r + \cdots + |\xi_n|^r = \|x\|_r^r,$$

οπότε $\|x\|_r \leqslant \|x\|_p$ (χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη ανισότητα για τα $r/p > 1$ και $a_k = |\xi_k|^p$).

Για την άλλη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Holder:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^p &= |\xi_1|^p \cdot 1 + \cdots + |\xi_n|^p \cdot 1 \\
&\leqslant \left((|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p}\right)^{\frac{p}{r}} (1 + \cdots + 1)^{1-\frac{p}{r}} \\
&= \|x\|_r^p n^{1-\frac{p}{r}},
\end{aligned}$$

άρα $\|x\|_p \leqslant \|x\|_r n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$. Η περίπτωση $r = \infty$ είναι απλή.

Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty$ για κάθε $p \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $n^{1/p} \to 1$ όταν $p \to \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n^{1/p} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $p > N$. Τότε, για κάθε $p > N$ ισχύει η

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

7. *Έστω* X *χώρος με νόρμα, και* Y *ένας γραμμικός υπόχωρος του* X. *Αποδείξτε ότι αν* $Y^\circ \neq \emptyset$, *τότε* $Y = X$.

Υπόδειξη. Αφού $Y^\circ \neq \emptyset$, υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $B(y, r) \subseteq Y$. Ειδικότερα, $y \in Y$.

Έστω $x \in X$, $x \neq y$. Τότε, $y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in B(y, r)$ (γιατί;), άρα

$$y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y.$$

Όμως ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, οπότε χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $y \in Y$ παίρνουμε

$$\frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y \Longrightarrow x - y \in Y \Longrightarrow x \in Y.$$

Το x ήταν τυχόν, άρα $Y = X$.

8. *Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Αποδείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon^p$.

Ορίζουμε $w = (\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, \ldots) \in c_{00}$. Τότε,

$$\|x - w\| = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap c_{00} \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ και το $x \in \ell_p$ ήταν τυχόντα, συμπεραίνουμε ότι ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$.

(β) Θεωρούμε το $x = (1, \ldots, 1, \ldots) \in \ell_\infty$. Αν $w \in c_{00}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $w_k = 0$ για κάθε $k \geqslant N$. Άρα,

$$\|x - w\| = \sup\{|1 - w_k| : k \in \mathbb{N}\} \geqslant |1 - w_N| = 1.$$

Δηλαδή $d(x, c_{00}) \geqslant 1$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x, 1) \cap c_{00} = \emptyset$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον ℓ_∞.

9. *Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 1\}$. Αποδείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.*

Αποδείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x_n = (\xi_{nk}) \in S$, δηλαδή $\sum_k |\xi_{nk}| \leqslant 1$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k) \in \ell_\infty$. Τότε,

$$\sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\xi_{nk} \to \xi_k$ καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}| \leqslant 1,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leqslant 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε N, έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in S$. Αυτό αποδεικνύει ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_∞.

(β) Θα δείξουμε ότι το S έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ - άρα και στον ℓ_∞. Έστω ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$\{z \in \ell_1 : \|z - x\|_\infty < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \ldots$ για τους οποίους $\xi_{k_j} \geqslant 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τα αρνητικά ξ_k). Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $N\varepsilon/2 > 1$ και ορίζουμε $\xi'_{k_1} = \xi_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \xi'_{k_N} = \xi_{k_N} + \frac{\varepsilon}{2}$, και $\xi'_k = \xi_k$ για όλους τους άλλους k. Τότε το $x' = (\xi'_k) \in \ell_1$, $\|x - x'\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{N\varepsilon}{2} > 1,$$

δηλαδή $x' \notin S$. Άτοπο, γιατί είχαμε υποθέσει ότι $\ell_1 \cap B(x, \varepsilon) \subseteq S$.

(γ) Έστω ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach. Τότε, ο ℓ_1 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ (γιατί;). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = nS = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_1 ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, και έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$: αν το nS περιείχε μπάλα ακτίνας $r > 0$, τότε το S θα περιείχε μπάλα ακτίνας r/n, άτοπο από το (β).

Τα F_n είναι κλειστά υποσύνολα του ℓ_1 με κενό εσωτερικό και $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα του Baire. Άρα, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος Banach.

10. *Στον ℓ_1 ορίζουμε*

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)|\xi_k|.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

Υπόδειξη. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά, γιατί αν $x \in \ell_1$ έχουμε

$$2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)|\xi_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| < +\infty.$$

Η μόνη ιδιότητα της νόρμας που χρειάζεται προσοχή, είναι η $\|x\|' = 0 \Longrightarrow x = 0$. Έχουμε

$$\|x\|' = 0 \Longrightarrow 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)|\xi_k| = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0$. Αυτά τα δύο μάς δίνουν και την $\xi_1 = 0$, άρα $x = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|'$ και η συνήθης νόρμα $\|\cdot\|$ στον ℓ_1 είναι ισοδύναμες. Αφού ο $(\ell_1, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, αυτό δείχνει αμέσως ότι ο ℓ_1 είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). Έχουμε:

$$\|x\|' \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \frac{7}{2}\|x\|,$$

και

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = |\xi_1| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k - \sum_{k=2}^{\infty}\xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + |\sum_{k=2}^{\infty}\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + 2\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leqslant 2\left(2\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k|\right) \\
&= 2\|x\|'.
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \frac{7}{2}\|x\|$ για κάθε $x \in \ell_1$, άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

11. *Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$. Ορίζουμε*

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

Υπόδειξη. Τα x_i παράγουν τον X, επομένως κάθε $x \in X$ γράφεται με τουλάχιστον έναν τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$. Άρα, το

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}$$

είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, οπότε η

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}$$

ορίζεται καλά. Προφανώς, $\|x\| \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$.

Για την $(N2)$: Έστω ότι $\|x\| = 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\lambda_i^{(k)}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i^{(k)}| < \frac{1}{k}$ και $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k)}x_i$. Αφού $|\lambda_i^{(k)}| < 1/k$, έχουμε $\lambda_i^{(k)} \to 0$ για κάθε $i \leqslant m$. Θεωρούμε τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X. Τότε, $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k)}x_i \to \sum_{k=1}^{m}0\cdot x_i = \vec{0}$ ως προς την $\|\cdot\|'$, άρα $x = \vec{0}$.

Για την $(N3)$: Έστω $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ και $\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon$. Τότε, $ax = \sum_{i=1}^{m}(a\lambda_i)x_i$ και

$$\sum_{i=1}^{m}|a\lambda_i| < |a|\cdot\|x\| + |a|\varepsilon \Longrightarrow \|ax\| < |a|\cdot\|x\| + |a|\varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|ax\| \leqslant |a|\cdot\|x\|$. Τελείως ανάλογα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για την $(N4)$: Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|y\| + \varepsilon.$$

Τότε, $x + y = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i| + \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$\|x + y\| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon,$$

και αφού το ε ήταν τυχόν, παίρνουμε την $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

12. *Έστω $C^1[0,1]$ ο χώρος όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με νόρμα την*

$$\|f\| = \max\left\{\max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|\,,\ \max_{0\leq t\leq 1} |f'(t)|\right\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι όντως νόρμα και ότι ο $C^1[0,1]$ είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $C^1[0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι (f_n) είναι μια βασική ακολουθία στον $C^1[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n, m \geqslant n_0$, τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f_n' - f_m'\|_\infty < \varepsilon$, όπου $\|\cdot\|_\infty$ η συνήθης νόρμα στον $C[0,1]$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης, άρα υπάρχουν συνεχείς f και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα. Από γνωστό θεώρημα (της Πραγματικής Ανάλυσης), η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. Αφού η g είναι συνεχής, έχουμε $f \in C^1[0,1]$. Τέλος,

$$\|f_n - f\| = \max\{\|f_n - f\|_\infty\,,\ \|f_n' - f'\|_\infty\} \to 0.$$

Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $C^1[0,1]$.

13. *Στον c_0 θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|}{2^k}$, όπου $x = (\xi_k) \in c_0$. Αποδείξτε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.*

Υπόδειξη. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά: αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε $|\xi_k| \to 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_k| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{M}{2^k} = M < +\infty.$$

Τα αξιώματα της νόρμας ελέγχονται εύκολα.

Θα ορίσουμε βασική ακολουθία στον $(c_0, \|\cdot\|')$, η οποία δεν συγκλίνει. Αυτό θα δείξει ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ δεν είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ (n μονάδες). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geqslant n_0$, τότε

$$\|x_n - x_m\| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

δηλαδή η (x_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|'$. Έστω ότι υπάρχει $x = (\xi_k) \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\|' \to 0$. Αφού $\xi_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\xi_{k_0}| < 1/2$. Αν $n \geqslant k_0$, τότε

$$\|x_n - x\|' = \sum_{k=1}^{n} \frac{|1-\xi_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k} \geqslant \frac{|1-\xi_{k_0}|}{2^{k_0}} \geqslant \frac{1}{2^{k_0+1}}.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\|x_n - x\|' \to 0$.

14. *Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant r_n - r_{n+1} \tag{1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_{n+1} = x_n$ αυτό είναι απλό (γιατί;) ενώ αν $x_{n+1} \neq x_n$ παρατηρούμε ότι

$$y = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} r_{n+1} \in B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n),$$

οπότε

$$\|y - x_n\| \leqslant r_n \Longrightarrow \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leqslant r_n.$$

Από την (1) βλέπουμε ότι η (r_n) είναι φθίνουσα, άρα συγκλίνει. Ειδικότερα, είναι βασική ακολουθία. Πάλι από την (1) βλέπουμε ότι, αν $n < m$ τότε

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (r_{m-1} - r_m) + \cdots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m,$$

οπότε η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x$. Αποδείξτε τώρα ότι $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$.

15. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η κύμανση της f ορίζεται από την*

$$V(f) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \right\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, τότε λέμε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο $BV[0,1]$ όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0,1]$ και ότι ο $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι ο $BV[0,1]$ είναι γραμμικός χώρος. Οι ιδιότητες της νόρμας έπονται άμεσα από τον ορισμό. Η υπόθεση ότι $f(0) = 0$ εξασφαλίζει την $V(f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$: από την $V(f) = 0$ συμπεραίνουμε αρχικά ότι η f είναι σταθερή, και αφού $f(0) = 0$ έχουμε ότι η f μηδενίζεται παντού στο $[0,1]$.

Έστω (f_m) βασική ακολουθία στον $BV[0,1]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $s, m \geqslant m_0$ τότε

$$V(f_s - f_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|f_s - f_m\|_\infty \leqslant V(f_s - f_m). \tag{2}$$

Πράγματι, αν $g \in BV[0,1]$ και αν $t \in (0,1]$, θεωρώντας τη διαμέριση $\{0 < t \leqslant 1\}$ βλέπουμε ότι $|g(t)| = |g(t) - g(0)| + |g(1) - g(t)| \leqslant V(g)$, άρα $\|g\|_\infty \leqslant V(g)$.

Από την (2) έπεται ότι η (f_m) είναι βασική ακολουθία στον $B[0,1]$ άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in B[0,1]$ (επίσης, η f είναι συνεχής από δεξιά ως ομοιόμορφο όριο συναρτήσεων που είναι συνεχείς από δεξιά). Σταθεροποιώντας $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, $m \geqslant m_0$ και αφήνοντας το $s \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |(f - f_m)(t_i) - (f - f_m)(t_{i-1})| &= \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^n |(f_s - f_m)(t_i) - (f_s - f_m)(t_{i-1})| \\ &\leqslant \liminf_{s\to\infty} V(f_s - f_m) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $V(f - f_m) \to 0$ όταν το $m \to \infty$. Ειδικότερα, $V(f) \leqslant V(f - f_{m_0}) + V(f_{m_0}) < \infty$, δηλαδή $f \in BV[0,1]$.

16. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει*

$$\sum_{k=n}^\infty |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το K είναι ολικά φραγμένο, μπορούμε να βρούμε $x^1, \ldots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leqslant N$ με την ιδιότητα

$$\|x - x^j\|_p^p = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k - \xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε

$$\sum_{k=n_j}^\infty |\xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leqslant N$ ώστε $\|x - x_j\|_p^p < (\varepsilon/2)^p$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$\left(\sum_{k=n}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=n}^\infty |\xi_k - \xi_k^j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n}^\infty |\xi_k^j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι ολικά φραγμένο (ως κλειστό υποσύνολο του ℓ_p θα είναι και πλήρες, άρα συμπαγές). Θα μιμηθούμε το επιχείρημα της προηγούμενης άσκησης. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^\infty |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_p \leqslant M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots) : y_k \in \{t_0, t_1, \ldots, t_m) \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του ℓ_p: κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον ℓ_p, και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_p < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $x = (\xi_k)$ στο K. Γνωρίζουμε ότι $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p$. Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n_0$ έχουμε $|\xi_k| \leqslant M$, άρα υπάρχει $i_k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ τέτοιος ώστε $|\xi_k - t_{i_n}|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$. Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n_0}}, 0, \ldots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$\|x - y\|_p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - t_{i_k}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

17. *Ξέρουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Αποδείξτε ότι αν $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, τότε $d(x, c_0) = \limsup_k |\xi_k|$.*

Υπόδειξη. Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, και $\alpha = \limsup_k |\xi_k|$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|x - y\|_\infty \geqslant \alpha$ για κάθε $y \in c_0$. Έστω $y = (\eta_k) \in c_0$, και έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\eta_k \to 0$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$, $|\eta_k| < \varepsilon$. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει υπακολουθία της $(|\xi_k|)$ που συγκλίνει στο α. Άρα, υπάρχει $k \geqslant k_0$ ώστε $|\,|\xi_k| - \alpha| < \varepsilon$. Τότε,

$$|\xi_k - \eta_k| \geqslant |\xi_k| - |\eta_k| > \alpha - \varepsilon - \varepsilon = \alpha - 2\varepsilon,$$

άρα $\|x - y\|_\infty > \alpha - 2\varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|x - y\|_\infty \geqslant \alpha$. Αφού το $y \in c_0$ ήταν τυχόν, $d(x, c_0) = \inf\{\|x - y\|_\infty : y \in c_0\} \geqslant \alpha$.

Κεφάλαιο 5

Χώροι L_p

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(A)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_A |f(x)|^p(x) \geqslant \int_{\{|f| \geqslant \alpha\}} \alpha^p(x) = \alpha^p \lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}.$$

2. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(A)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = \{x \in A : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \lambda(A_n) \leqslant \int_{A_n} |f|^p \leqslant n^p \lambda(A_n).$$

Επίσης, αφού τα A_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{A_n} |f|^p = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n} |f|^p \leqslant \int_A |f|^p$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L_p(A)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(A_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(A_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(A_n) \\ &\leqslant 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{A_n} |f|^p \leqslant 2^p \int_A |f|^p < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(A_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A |f|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty,\end{aligned}$$

άρα $f \in L_p(A)$.

3. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(A)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 24 του 3ου Κεφαλαίου. Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L_1(A)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L_1(A)$) και

$$\int_A |g_n| = 2^p\left(\int_A |f_n|^p + \int_A |f|^p\right) \to 2^{p+1}\int_A |f|^p = \int_A g,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 24 του Κεφαλαίου 3 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_A |f_n - f|^p \to 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(A)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(A)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(A)$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Holder. Επίσης, αφού

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p\|g\|_q \to 0.$$

5. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.*

(α) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q[\lambda(A)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(A) \subseteq L_p(A)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q[0,1] \neq L_p[0,1]$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L_q(A)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_A |f|^p \cdot \mathbf{1} &\leqslant \left(\int_A |f|^q\right)^{p/q}\left(\int_A \mathbf{1}\right)^{1-p/q}\\ &= \|f\|_q^p(\lambda(A))^{1-p/q},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p(\lambda(A))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ¨ όπου έπεται ότι $f \in L^p(A)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q[\lambda(A)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.
(γ) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^{-\frac{1}{q}}$.

6. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(A)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(A)$ και $h \in L_r(A)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_A |g|^p &= \int_A |f|^p\chi_B = \int_B |f|^p \leqslant \int_B |f|^q\\ &\leqslant \int_A |f|^q = \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(A)$. Άρα, $g \in L_p(A)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{A\setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in A \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in A \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_A |h|^r &= \int_A |f|^r \chi_{A\setminus B} = \int_{A\setminus B} |f|^r \leqslant \int_{A\setminus B} |f|^q \\ &\leqslant \int_A |f|^q = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(A)$. Άρα, $h \in L_r(A)$.

7. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(A) \cap L_r(A)$ τότε $f \in L_q(A)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_A |f|^q &= \int_A |f|^{(1-t)p}|f|^{tr} \leqslant \left(\int_A \left(|f|^{(1-t)p}\right)^{\frac{1}{1-t}}\right)^{1-t} \left(\int_A \left(|f|^{tr}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^t \\ &= \left(\int_A |f|^p\right)^{1-t} \left(\int_A |f|^r\right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p}\|f\|_r^{tr} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_q(A)$.

8. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) = 1$ και έστω $f \in L_p(A)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι*

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_A \ln |f|.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln\left[\left(\int_A |f|^p\right)^{1/p}\right] = \frac{1}{p}\ln\left(\int_A |f|^p\right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln\left(\int_A |f|^p\right) \geqslant p\int_A \ln|f| = \int_A p\ln|f| = \int_A \ln(|f|^p).$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L_1(A)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_A g\right) \geqslant \int_A \ln g,.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_A e^h\right) \geqslant \int_A h.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \int_A h.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leqslant g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο A). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geqslant u'(t)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geqslant e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο A και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(A) = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_A e^{h(x)}\,(x) - \int_A e^{t_0}\,(x) &\geqslant e^{t_0}\left[\int_A h(x)\,(x) - \int_A t_0\,(x)\right]\\ &= e^{t_0}\,[t_0 - t_0\lambda(A)] = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_A e^{h(x)}\,(x) \geqslant \int_A e^{t_0}\,(x) = e^{t_0},$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_A e^{h(x)}\,(x)\right) \geqslant t_0 = \int_A h\,.$$

9. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \dots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_A \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_A |f_i|\right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_A |f_i| = 0$ για κάποιο $i = 1, \dots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_A |f_i| > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_A |f_i|} f_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Τότε, $\int_A |g_i| = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned}\ln(|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m}) &= c_1\ln(|g_1(x)|) + c_2\ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m\ln(|g_m(x)|)\\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_A \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i}\right) \leqslant c_1 \int_A |g_1| + \cdots + c_m \int_A |g_m| = c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Αφού
$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_A |f_i|\right)^{c_i}},$$
έπεται ότι
$$\int_A \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_A |f_i|\right)^{c_i}.$$

10. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: Αν $f \in L_p(A)$ και $g \in L_q(A)$, τότε $fg \in L_r(A)$ και*
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^r, |g|^r$ με τους συζυγείς εκθέτες $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}$.

11. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει*
$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp} \|f\|_q^{(1-t)q}.$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα αποδείχθηκε για την Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^{tp}$ και $|f|^{(1-t)q}$ με εκθέτες $\frac{1}{t}$ και $\frac{1}{1-t}$ αντίστοιχα, γράφουμε
$$\begin{aligned}\int_A |f|^r &= \int_A |f|^{tp}|f|^{(1-t)q} \leqslant \left(\int_A \left(|f|^{tp}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^t \left(\int_A \left(|f|^{(1-t)q}\right)^{\frac{1}{1-t}}\right)^{1-t} \\ &= \left(\int_A |f|^p\right)^t \left(\int_A |f|^q\right)^{1-t} = \|f\|_p^{tp} \|f\|_r^{(1-t)q}.\end{aligned}$$

12. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(A)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι $f \in L_p(A)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο A, από το λήμμα του Fatou έχουμε
$$\|f\|_p^p = \int_A |f|^p = \int_A \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A |f_n|^p \leqslant 1,$$
διότι
$$\int_A |f_n|^p = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

Κεφάλαιο 6

Τελεστές και συναρτησοειδή

1. *Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ τον τελεστή της αριστερής μετατόπισης ως εξής: για κάθε $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.*

(α) *Αποδείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

(β) *Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.*

(γ) *Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.*

Υπόδειξη. (α) Ο T ορίζεται καλά, γιατί

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty,$$

δηλαδή $Tx \in \ell_2$. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(β) Επαγωγικά δείχνουμε ότι $T_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$. Για τη νόρμα του T_n έχουμε $\|T_n\| \leqslant \|T\| \cdots \|T\| = \|T\|^n \leqslant 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί

$$\|T_n\| \geqslant \frac{\|T_n e_{n+1}\|_2}{\|e_{n+1}\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ειδικότερα, $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, τότε $\|T_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2} \to 0$ όταν $n \to \infty$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς). Δηλαδή, $T_n x \to \vec{0}$ για κάθε $x \in \ell_2$.

2. *Ορίζουμε $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Αποδείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;*

Υπόδειξη. Αν $x \in \ell_1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το F είναι καλά ορισμένο. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα:

$$F(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} (a\xi_k + b\eta_k) = a \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k + b \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = aF(x) + bF(y).$$

Έχουμε

$$|F(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1,$$

άρα το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί αν $\xi_k \geqslant 0$ τότε

$$|F(x)| = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1.$$

3. *Έστω* $T : C[0,1] \to C[0,1]$, *με* $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) *Αποδείξτε ότι ο* T *είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.*

(β) *Βρείτε την εικόνα* $\mathrm{Im}(T)$ *του* T.

(γ) *Είναι ο* $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to C[0,1]$ *φραγμένος;*

(δ) *Βρείτε την* $\|T\|$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|(Tf)(t)| = \left| \int_0^t f(s)ds \right| \leqslant \int_0^t |f(s)|ds \leqslant \|f\| \int_0^t ds = \|f\| \cdot t \leqslant \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |(Tf)(t)| \leqslant \|f\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Για την γραμμικότητα του T παρατηρούμε ότι αν $f, g \in C[0,1]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}[T(af + bg)](t) &= \int_0^t (af(s) + bg(s))ds = a \int_0^t f(s)ds + b \int_0^t g(s)ds \\ &= a(Tf)(t) + b(Tg)(t) = [a(Tf) + b(Tg)](t),\end{aligned}$$

άρα $T(af + bg) = a(Tf) + b(Tg)$. Η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού $(Tf)' = f$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι καλά ορισμένος, αλλά και ότι είναι ένα προς ένα:

$$Tf = Tg \Longrightarrow (Tf)' = (Tg)' \Longrightarrow f = g.$$

(β) Όπως παρατηρήσαμε στο (α) η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(Tf)(0) = 0$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που ανήκουν στην εικόνα $\mathrm{Im}(T)$ του T. Πράγματι, αν $g \in C^1[0,1]$ και $g(0) = 0$, θεωρούμε την $f = g' \in C[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t g'(s)ds = g(t) - g(0) = g(t),$$

δηλαδή, $Tf = g$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $f_n(0) = 0$. Από το (β), $f_n \in \mathrm{Im}(T)$ και $[T^{-1}(f_n)](t) = f_n'(t) = nt^{n-1}$. Άρα,

$$\frac{\|T^{-1}(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1} = n$$

(γιατί;). Έπεται ότι ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος: αν ήταν, θα είχαμε $\|T^{-1}\| \geqslant n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί;).

(δ) Αν πάρουμε $f \equiv 1$ στο $[0,1]$, τότε $\|f\| = 1$ και $(Tf)(t) = \int_0^t ds = t$. Άρα,

$$\|T\| \geqslant \|Tf\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |t| = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\|T\| = 1$.

4. *Στον $C[-1,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : C[-1,1] \to \mathbb{R}$:*

(α) $F(g) = \int_{-1}^1 g(s)ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2)+g(-1/2)-2g(0)}{2}$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $g \in C[0,1]$ έχουμε

$$|F(g)| = \left| \int_{-1}^1 g(s)ds - g(0) \right| \leqslant \int_{-1}^1 |g(s)|ds + |g(0)| \leqslant 2\|g\| + \|g\| = 3\|g\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 3$. Για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon \in C[-1,1]$ θέτοντας $g_\varepsilon \equiv 1$ στα $[-1,-\varepsilon]$ και $[\varepsilon,1]$, $g_\varepsilon(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-\varepsilon,0]$ και $[0,\varepsilon]$. Τότε $\|g_\varepsilon\| = 1$ και

$$\begin{aligned}\|F\| \geqslant |F(g_\varepsilon)| &= |\int_{-1}^1 g_\varepsilon(s)ds + 1| \\ &= \left| \int_{-1}^{-\varepsilon} ds + \int_{-\varepsilon}^0 g_\varepsilon(s)ds + \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(s)ds + \int_\varepsilon^1 ds + 1 \right| \\ &= |(1-\varepsilon) + 0 + 0 + (1-\varepsilon) + 1| = 3 - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι

$$\|F\| \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0^+} (3 - 2\varepsilon) = 3.$$

Άρα, $\|F\| = 3$.

(β) Για κάθε $g \in C[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}|F(g)| &= \left| \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0) \right| \leqslant \frac{|g(1/2)|}{2} + \frac{|g(-1/2)|}{2} + |g(0)| \\ &\leqslant \frac{\|g\|}{2} + \frac{\|g\|}{2} + \|g\| = 2\|g\|.\end{aligned}$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 2$. Ορίζουμε $g \in C[-1,1]$ θέτοντας $g \equiv 1$ στα $[-1,-1/2]$ και $[1/2,1]$, $g(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-1/2,0]$ και $[0,1/2]$. Τότε $\|g\| = 1$ και

$$\|F\| \geqslant |F(g)| = \left| \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) \right| = 2.$$

Άρα, $\|F\| = 2$.

5. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : c_0 \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, όπου $x = (x_k) \in c_0$. Αποδείξτε ότι $f \in c_0^*$ και υπολογίστε την $\|f\|$.*

Υπόδειξη. Έστω $x = (x_k) \in c_0$. Παρατηρούμε ότι, αφού $|x_k| \leqslant \|x\|_\infty$ για κάθε k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leqslant \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\|x\|_\infty < \infty,$$

άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ συγκλίνει απολύτως και

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_\infty.$$

Έπεται ότι $f \in c_0^*$ και $\|f\| \leqslant \frac{1}{2}$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ (οι πρώτες N συντεταγμένες του x_N είναι ίσες με 1 και οι υπόλοιπες ίσες με 0). Έχουμε $\|x_N\|_\infty = 1$, άρα

$$\|f\| \geqslant |f(x_N)| = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^N}{1 - \frac{1}{3}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Έπεται ότι $\|f\| \geqslant \frac{1}{2}$. Άρα, τελικά, $\|f\| = \frac{1}{2}$.

5. *Έστω X ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Ορίζουμε $T : X \to X$, με $(Tf)(t) = f(t-a)$, όπου $a > 0$ δοσμένη σταθερά. Είναι ο T γραμμικός; Φραγμένος;*

Υπόδειξη. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}[T(\lambda f + \mu g)](t) &= (\lambda f + \mu g)(t-a) = \lambda f(t-a) + \mu g(t-a)\\ &= \lambda(Tf)(t) + \mu(Tg)(t) = [\lambda Tf + \mu Tg](t),\end{aligned}$$

άρα $T(\lambda f + \mu g) = \lambda Tf + \mu Tg$, δηλαδή ο T είναι γραμμικός. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = |f(t-a)| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| = \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(Tf)(t)| \leqslant \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος.

6. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \to X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $T : X \to T(X)$ είναι 1-1. Αν $x, z \in X$ και $T(x) = T(z)$, τότε

$$0 = \|T(x) - T(z)\| = \|T(x-z)\| \geqslant m\|x - z\|,$$

άρα $\|x - z\| = 0$ και έπεται ότι $x = z$. Άρα, ο $T : X \to T(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Έστω $y \in T(X)$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$

ώστε $T(x) = y$, και $x = T^{-1}(y)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για το $y = T(x)$, έχουμε

$$\|y\| = \|T(x)\| \geqslant m\|x\| = m\|T^{-1}(y)\|.$$

Δηλαδή,

$$\|T^{-1}(y)\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$$

για κάθε $y \in T(X)$. Έπεται ότι ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$.

7. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή γραμμικός, ένα προς ένα και επί, με την ιδιότητα $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Αν $x \in B_X$, τότε $\|Tx\| = \|x\| \leqslant 1$ άρα $Tx \in B_Y$. Άρα, $T(B_X) \subseteq B_Y$.

Αν $y \in B_Y$, αφού ο T είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $Tx = y$, και $\|x\| = \|Tx\| = \|y\| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in B_X$. Άρα, $B_Y \subseteq T(B_X)$.

Επομένως, $T(B_X) = B_Y$.

($\Longleftarrow$) Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι επί: αν $y \in Y$, $y \neq 0$, τότε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y = T(B_X)$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $Tx = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε,

$$y = T(\|y\|x) \in T(X).$$

Προφανώς, $0 = T(0) \in T(X)$. Άρα, $T(X) = Y$.

Ο T είναι ισομετρία: αν είχαμε $\|Tx\| > \|x\|$ για κάποιο $x \in X$, τότε θα είχαμε

$$\|T(x/\|x\|)\| > 1 \Longrightarrow T(x/\|x\|) \notin B_Y,$$

ενώ $x/\|x\| \in B_X$. Αυτό είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $T(B_X) = B_Y$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $\|Tx\| < \|x\|$.

Αφού ο T είναι ισομετρία, πρέπει να είναι και ένα προς ένα. Άρα, είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

8. *Ορίζουμε $T, S : C[0,1] \to C[0,1]$ με*

$$(Tf)(t) = t\int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) *Αποδείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.*
(β) *Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;*
(γ) *Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.*

Υπόδειξη. (α) Η γραμμικότητα των T και S ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = \left|t\int_0^1 f(s)ds\right| \leqslant t\int_0^1 |f(s)|ds \leqslant t\|f\|\int_0^1 ds = t\|f\| \leqslant \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leqslant \|f\|$. Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Όμοια,

$$|(Sf)(t)| = |tf(t)| = t|f(t)| \leqslant 1 \cdot \|f\| = \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Sf\| \leqslant \|f\|$. Δηλαδή, ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leqslant 1$.

(β) Έχουμε
$$[(T \circ S)(f)](t) = t \int_0^1 (Sf)(s)ds = t \int_0^1 sf(s)ds,$$
και
$$[(S \circ T)(f)](t) = t(Tf)(t) = t^2 \int_0^1 f(s)ds.$$
Δεν ισχύει ότι $T \circ S = S \circ T$. Αν ίσχυε, για την $f \equiv 1$ θα παίρναμε
$$[(T \circ S)(f)](t) = [(S \circ T)(f)](t) \Longrightarrow t \int_0^1 sds = t^2 \int_0^1 ds \Longrightarrow \frac{t}{2} = t^2$$
για κάθε $t \in [0, 1]$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

(γ) Όπως στο (α), ελέγχουμε ότι $\|T \circ S\| \leqslant 1/2$ και $\|S \circ T\| \leqslant 1$. Παίρνοντας $f \equiv 1$, βλέπουμε ότι ισχύουν ισότητες:
$$\|T\| = \|S\| = \|S \circ T\| = 1, \quad \|T \circ S\| = \frac{1}{2}.$$
Επαληθεύστε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς.

9. *Θεωρούμε το τρίγωνο* $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant x\}$, *και μια συνεχή συνάρτηση* $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$. *Ορίζουμε* $T : C[a, b] \to C[a, b]$ *με*
$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x, y)f(y)dy.$$
Αποδείξτε ότι ο T *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και*
$$\|T\| \leqslant (b - a) \max\{|\phi(x, y)| : (x, y) \in \Delta\}.$$

Υπόδειξη. Η Tf είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ο T ορίζεται καλά: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta < \varepsilon$) τέτοιος ώστε αν $(x, y), (x_1, y_1) \in \Delta$ και $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \delta$ να έχουμε $|\phi(x, y) - \phi(x_1, y_1)| < \varepsilon$.

Ειδικότερα, αν $x < x_1$ και $x_1 - x < \delta$ και $(x, y), (x_1, y) \in \Delta$, τότε $|\phi(x, y) - \phi(x_1, y)| < \varepsilon$. Έστω $x < x_1$ στο $[a, b]$ με $x_1 - x < \delta$. Τότε,
$$\begin{aligned}
|(Tf)(x_1) - (Tf)(x)| &= \left| \int_a^{x_1} \phi(x_1, y)f(y)dy - \int_a^x \phi(x, y)f(y)dy \right| \\
&\leqslant \left| \int_x^{x_1} \phi(x_1, y)f(y)dy \right| + \left| \int_a^x [\phi(x_1, y) - \phi(x, y)]f(y)dy \right| \\
&\leqslant \int_x^{x_1} |\phi(x_1, y)| \cdot |f(y)|dy + \int_a^x |\phi(x_1, y) - \phi(x, y)| \cdot |f(y)|dy \\
&\leqslant \left(\max_\Delta |\phi| \right) \|f\|(x_1 - x) + \|f\|\varepsilon(x - a) \\
&< \left[\left(\max_\Delta |\phi| \right) + b - a \right] \varepsilon \|f\|.
\end{aligned}$$
Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η Tf είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Τέλος, για κάθε $x \in [a, b]$

$$
\begin{aligned}
|(Tf)(x)| = \left| \int_a^x \phi(x, y) f(y) dy \right| &\leqslant \int_a^x |\phi(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\
&\leqslant \left(\max_\Delta |\phi| \right) \|f\| (x - a) \leqslant \left[(b - a) \max_\Delta |\phi| \right] \|f\|.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\| \leqslant \left[(b - a) \max_\Delta |\phi| \right] \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant (b - a) \max_\Delta |\phi|$.

10. *Θεωρούμε τον χώρο $C^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $C^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2 \right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Αποδείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \| \cdot \|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \| \cdot \|_2)$ είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Έστω $f \in C^1[0,1]$ με $f(0) = 0$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 \left| \int_0^t f'(s) ds \right|^2 dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds \right) \left(\int_0^t 1^2 ds \right) dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s)|^2 ds \right) t dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f'(s)|^2 ds \\
&\leqslant \|f\|_{1,2}^2.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_{1,2}$ σε αυτήν την περίπτωση. Έστω τώρα τυχούσα $f \in C^1[0,1]$. Τότε, η $g(t) = f(t) - f(0)$ ικανοποιεί την $g(0) = 0$, άρα $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_{1,2}$. Όμως, $g' = f'$ άρα

$$\|g\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |g'|^2 \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f'|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{1,2} - |f(0)|,$$

επομένως

$$\|f\|_2 = \|g + f(0)\|_2 \leqslant \|g\|_2 + |f(0)| \leqslant \|g\|_{1,2} + |f(0)| = \|f\|_{1,2}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \| \cdot \|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \| \cdot \|_2)$ είναι φραγμένος και $\|I\| \leqslant 1$.

11. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $x_n, x \in X$. Αποδείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to T x$.*

Υπόδειξη. Οι (T_n) και (x_n) είναι φραγμένες ακολουθίες στους $B(X, Y)$ και X αντίστοιχα, ως συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leqslant M, \quad \|x_n\| \leqslant M, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|T_nx_n - Tx\| &= \|T_nx_n - Tx_n + Tx_n - Tx\|\\ &\leqslant \|(T_n - T)(x_n)\| + \|T(x_n - x)\|\\ &\leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x_n\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\|\\ &\leqslant M\|T_n - T\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $T_nx_n \to Tx$.

12. *Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω ότι το F είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $x \in B(0,1)$ έχουμε

$$|F(x)| \leqslant \|F\| \cdot \|x\| \leqslant \|F\|,$$

δηλαδή, $F(B(0,1)) \subseteq [-\|F\|, \|F\|]$. Άρα, για $\delta = 1$ έχουμε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$ για κάποιο $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F(B(0,\delta))$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (από τη γραμμικότητα του F - εξηγήστε). Αφού είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα με κέντρο το 0. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leqslant \delta \Longrightarrow |F(x)| \leqslant M.$$

Έπεται ότι το F είναι φραγμένο: αν $x \neq 0$, τότε

$$\left|F\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right| \leqslant M \Longrightarrow |F(x)| \leqslant \frac{2M}{\delta}\|x\|.$$

13. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

Υπόδειξη. Αν $F(x) = 1$, τότε $1 = F(x) \leqslant \|F\| \cdot \|x\|$, άρα $\|x\| \geqslant \frac{1}{\|F\|}$. Δηλαδή,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \geqslant \frac{1}{\|F\|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $0 < \varepsilon < \|F\|$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $\|x_\varepsilon\| = 1$ τέτοιο ώστε $F(x_\varepsilon) = a_\varepsilon > \|F\| - \varepsilon$ (γιατί;). Τότε, $F(x_\varepsilon/a_\varepsilon) = 1$ και

$$\left\|\frac{x_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right\| = \frac{1}{a_\varepsilon} < \frac{1}{\|F\| - \varepsilon}.$$

Άρα,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leqslant \frac{1}{\|F\| - \varepsilon},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leqslant \frac{1}{\|F\|}.$$

14. *Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.*

Υπόδειξη. Έστω ότι ο T δεν είναι φραγμένος. Τότε, ο T δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in X$ με $\|z_n\| < 1/n$ και $\|Tz_n\| \geqslant \varepsilon$.

Ορίζουμε $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{\|z_n\|}}$ (αφού $\|Tz_n\| \geqslant \varepsilon$ έχουμε $Tz_n \neq 0$ άρα $z_n \neq 0$). Τότε,

$$\|x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} = \sqrt{\|z_n\|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

άρα $x_n \to 0$. Όμως,

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Tz_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} \geqslant \varepsilon\sqrt{n} \to +\infty,$$

δηλαδή η $(\|Tx_n\|)$ δεν είναι φραγμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο T είναι φραγμένος.

15. Έστω X χώρος με νόρμα και $\emptyset \neq M \subseteq X$. Ο *μηδενιστής* $\mathrm{Ann}(M)$ του M ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X που μηδενίζονται στο M. Έτσι ισχύει $\mathrm{Ann}(M) \subseteq X^*$. Αποδείξτε ότι ο $\mathrm{Ann}(M)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^*. Ποιοί είναι οι $\mathrm{Ann}(0)$ και $\mathrm{Ann}(X)$;

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $\mathrm{Ann}(M)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X^*. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστός, θεωρούμε ακολουθία (x_n^*) στον $\mathrm{Ann}(M)$ με $x_n^* \to x^*$, για κάποιο $x^* \in X^*$. Έστω $x \in M$. Τότε $x_n^*(x) \to x^*(x)$. Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι $x_n^*(x) = 0$, άρα $x^*(x) = 0$. Αφού το $x \in M$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $x^* \in \mathrm{Ann}(M)$. Άρα ο $\mathrm{Ann}(M)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.

Είναι φανερό ότι $\mathrm{Ann}(0) = X^*$ και $\mathrm{Ann}(X) = \{0\}$.

16. Έστω X χώρος με νόρμα, και $M^* \subseteq X^*$. Ορίζουμε

$$N(M^*) = \{x \in X : \forall F \in M^*, \ \ F(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι το $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X.

Υπόδειξη: Έστω $x, y \in N(M^*)$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Για κάθε $F \in M^*$ έχουμε

$$F(ax + by) = aF(x) + bF(y) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

άρα $ax + by \in N(M^*)$. Δηλαδή, ο $N(M^*)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Έστω τώρα ότι $x_n \in N(M^*)$ και $x_n \to x \in X$. Για κάθε $F \in M^*$ έχουμε

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

άρα $x \in N(M^*)$. Επομένως, ο $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X. □

17. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια βάση Hamel του X. Ο X είναι απειροδιάστατος, επομένως μπορούμε να γράψουμε αυτή τη βάση στη μορφή

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in I\}.$$

[Ξεχωρίζουμε δηλαδή ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο μιάς βάσης του X και το αριθμούμε.] Αφού τα x_n, y_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κάθε x_n είναι μη μηδενικό. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$ πρώτα στα στοιχεία της βάσης του X, θέτοντας

$$F(x_n) = n\|x_n\|, \quad F(y_i) = 0.$$

Κατόπιν επεκτείνουμε γραμμικά σε ολόκληρο το χώρο X (κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός κάποιων x_n και κάποιων y_i - εξηγήστε). Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, όμως δεν είναι φραγμένο γιατί τότε θα είχαμε

$$\|F\| \geqslant \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|} = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο.

18. *Αποδείξτε ότι ο $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.*

Υπόδειξη. Για κάθε $y \in \ell_1$, η απεικόνιση $f_y : c_0 \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) = \sum_n x_n y_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f_y\| \leqslant \|y\|_1$. Πράγματι,

$$|f_y(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \sup_n |x_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1 \|x\|_\infty.$$

Ορίζουμε $T : \ell_1 \to c_0^*$ με $T(y) = f_y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Για κάθε $y \in \ell_1$, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = \mathrm{sign}(y_k)$, $k \leqslant N$. Τότε $\|x(N)\|_\infty \leqslant 1$ και $f_y(x(N)) = \sum_{k=1}^N |y_k|$, οπότε $\|f_y\| \geqslant |f_y(x(N))| = \sum_{k=1}^N |y_k|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\|f_y\| \geqslant \|y\|_1$, άρα

$$\|T(y)\|_{c_0^*} = \|f_y\| = \|y\|_1.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f \in c_0^*$. Θέτουμε $y = (y_n)$ όπου $y_n = f(e_n)$. Θα δείξουμε ότι $y \in \ell_1$ και ότι $f_y = f$ (οπότε $T(y) = f$). Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = \mathrm{sign}(y_k)$, $k \leqslant N$. Τότε, $\|x(N)\|_\infty \leqslant 1$ και

$$f(x(N)) = \sum_{k=1}^N \mathrm{sign}(y_k) f(e_k) = \sum_{k=1}^N |y_k|,$$

άρα $\sum_{k=1}^N |y_k| = |f(x(N))| \leqslant \|f\|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $y \in \ell_1$ και $\|y\|_1 \leqslant \|f\|$.

Για να δείξουμε ότι $f_y = f$, παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά φραγμένα συναρτησοειδή συμφωνούν σε κάθε e_n από τον ορισμό του y. Λόγω γραμμικότητας συμφωνούν στον $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ ο οποίος είναι πυκνός στον c_0 και λόγω συνέχειας συμφωνούν σε ολόκληρο τον c_0.

19. *Ορίστε μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00} με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$ αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

Υπόδειξη. Έστω (e_n) η βάση του c_{00}. Ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ θέτοντας $T(e_n) = ne_n$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Ο T είναι 1-1 και επί. Ορίζουμε μια δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|_s$ στον c_{00}, θέτοντας $\|x\|_s = \|T(x)\|_\infty$. Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_s$ είναι νόρμα.

Οι $\|\cdot|_s$ και $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι ισοδύναμες: $\|e_n\|_s = \|ne_n\|_\infty = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, ο $T : (c_{00}, \|\cdot\|_s) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρία: αν $x \in c_{00}$ τότε $\|T(x)\|_\infty = \|x\|_s$.

20. (**Κριτήριο του Schur**) *Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geqslant 0$ για κάθε i, j. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε για κάθε i, j να ισχύουν οι*

$$\sum_{i=1}^\infty a_{ij}p_i \leqslant bp_j \quad \textit{και} \quad \sum_{j=1}^\infty a_{ij}p_j \leqslant cp_i.$$

Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T\left((\xi_i)_i\right) = \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij}\xi_j\right)_i$$

είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ταυτόχρονα ότι ο T ορίζεται καλά και $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$. Έστω $x = (\xi_i) \in \ell_2$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \sum_{i=1}^\infty \Big|\sum_{j=1}^\infty \xi_j a_{ij}\Big|^2 = \sum_{i=1}^\infty \Big|\sum_{j=1}^\infty \frac{\xi_j\sqrt{a_{ij}}}{\sqrt{p_j}}\sqrt{a_{ij}p_j}\Big|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{\xi_j^2 a_{ij}}{p_j}\right)\left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij}p_j\right),\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &\leqslant \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \frac{\xi_j^2 a_{ij}cp_i}{p_j} = c\sum_{j=1}^\infty \frac{\xi_j^2}{p_j}\sum_{i=1}^\infty a_{ij}p_i \\ &\leqslant bc\sum_{j=1}^\infty \frac{\xi_j^2}{p_j}p_j = bc\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Από την $\|Tx\|_2^2 \leqslant bc\|x\|_2^2$ έπεται ότι $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

21. (**Ανισότητα του Hilbert**) *Αν $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\left|\sum_{i,j=0}^n \frac{x_ix_j}{i+j+1}\right| \leqslant \pi \sum_{i=0}^n x_i^2.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $g_j(x) = 1/[(x + j + \frac{1}{2})\sqrt{x}]$ είναι κυρτή για κάθε $j = 0, 1, 2, \ldots$, οπότε, για $i = 0, 1, 2, \ldots$, έχουμε

$$\frac{1}{i + \frac{1}{2} + j + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i + \frac{1}{2}}} < \int_i^{i+1} \frac{dx}{(x + j + \frac{1}{2})\sqrt{x}}$$

(γιατί;). Έπεται ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}}<\sum_{i=0}^{\infty}\int_i^{i+1}\frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}$$

(υπολογίστε το). Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Schur, με

$$a_{ij}=\frac{1}{i+j+1}=\frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}},\quad p_i=\frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}},\quad b=c=\pi.$$

Θεωρούμε τον τελεστή $T:\ell_2\to\ell_2$, με

$$T(x_0,x_1,x_2,\dots)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{i+j+1}\right)_{i=0}^{\infty}.$$

Αν $x=(x_0,x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=0}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j+1}\right|=\langle Tx,x\rangle\leqslant\|Tx\|_2\|x\|_2\leqslant\|T\|\cdot\|x\|_2^2\leqslant\pi\sum_{i=0}^{n}x_i^2.$$

Κεφάλαιο 7

Χώροι Hilbert

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x, y \in X$. Δείξτε ότι

(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x - ay\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + \|ay\|^2 = \|x\|^2 - 2a\langle x, y\rangle + \|ay\|^2,$$

δηλαδή,

$$a\langle x, y\rangle = 0.$$

Παίρνοντας $a = 1$, βλέπουμε ότι $x \perp y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 = \|x - ay\|^2.$$

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 \geq \|x\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + a^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

δηλαδή,

$$2a\langle x, y\rangle + a^2\|x\|^2 \geq 0.$$

Διαιρώντας με a και παίρνοντας $a \to 0^+$, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle \geq 0$, ενώ παίρνοντας $a \to 0^-$, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle \leq 0$. Άρα, $\langle x, y\rangle = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 \geq \|x\|^2. \quad \square$$

2. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H, και $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Υπόδειξη: Υψώνουμε την $\|x_n - y_n\|$ στο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - y_n\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \\ &\leq 2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - y_n\| \to 0$. □

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

Υπόδειξη: Υψώνουμε την $\|x_n - x\|$ στο τετράγωνο, και εφαρμόζουμε την υπόθεση για $y = x$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle \\ &\to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - x\| \to 0$. □

4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι
(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

Υπόδειξη: (α) Έστω $x \in A$. Από τον ορισμό του $A^{\perp}$, για κάθε $y \in A^{\perp}$ έχουμε $\langle x, y\rangle = 0$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$x \in (A^{\perp})^{\perp} =: A^{\perp\perp}.$$

Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, έχουμε $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(β) Αν $x \in B^{\perp}$, τότε $x \perp y$ για κάθε $y \in B$. Αφού $A \subseteq B$, αυτό σημαίνει ότι $x \perp y$ για κάθε $y \in A$, άρα $x \in A^{\perp}$.

(γ) Εφαρμόζοντας το (α) για το $A^{\perp}$ στη θέση του A, έχουμε

$$A^{\perp} \subseteq (A^{\perp})^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A \subseteq A^{\perp\perp}$, το (β) μάς δίνει

$$A^{\perp\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^{\perp} \subseteq A^{\perp}.$$

Επομένως, $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$. □

5. Έστω H χώρος Hilbert, και Y υπόχωρος του H. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

Υπόδειξη: Ο $Y^{\perp\perp}$ είναι (πάντα) κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, άρα, αν $Y = Y^{\perp\perp}$ τότε ο Y είναι κλειστός.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: ξέρουμε ότι $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$. Έστω $x \in Y^{\perp\perp}$. Αφού ο H είναι χώρος Hilbert και ο Y κλειστός υπόχωρός του, το x γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$, όπου $y \in Y$ και $z \in Y^{\perp}$. Όμως, $x \in Y^{\perp\perp}$ και $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, άρα

$$z = x - y \in Y^{\perp\perp}.$$

Αφού $z \in Y^{\perp\perp} \cap Y^{\perp}$, έχουμε $z \perp z$. Άρα, $z = o$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y \in Y$, και αφού το $x \in Y^{\perp\perp}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y = Y^{\perp\perp}$. □

6. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

Υπόδειξη: Αφού $M, N \subseteq M+N$, έχουμε $(M+N)^\perp \subseteq M^\perp, N^\perp$, άρα

$$(M+N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in M^\perp \cap N^\perp$ και $w \in M+N$. Τότε, $w = m+n$ για κάποια $m \in M$ και $n \in N$, και αφού $x \perp m, n$ παίρνουμε

$$\langle x, w\rangle = \langle x, m\rangle + \langle x, n\rangle = 0,$$

δηλαδή, $x \perp w$. Έπεται ότι $x \in (M+N)^\perp$, δηλαδή

$$M^\perp \cap N^\perp \subseteq (M+N)^\perp.$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα. Για τη δεύτερη, βάζουμε στην πρώτη τους $M^\perp, N^\perp$ στη θέση των M, N: έχουμε

$$M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = (M^\perp + N^\perp)^\perp,$$

και αφού οι M, N είναι κλειστοί, παίρνουμε

$$M \cap N = (M^\perp + N^\perp)^\perp.$$

Παίρνοντας ορθογώνια συμπληρώματα, βλέπουμε ότι

$$(*) \qquad (M \cap N)^\perp = (M^\perp + N^\perp)^{\perp\perp}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν F είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του H, τότε $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ (σημειώστε ότι ο $M^\perp + N^\perp$ μπορεί να μην είναι κλειστός υπόχωρος του H). Στην 'σκηση 7 είδαμε ότι $F \subseteq F^{\perp\perp}$ και αφού ο $F^{\perp\perp}$ είναι κλειστός έπεται ότι $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$. Αν υπήρχε $z \in F^{\perp\perp} \setminus \overline{F}$, τότε το μη μηδενικό διάνυσμα $z - P_F(z)$ θα ανήκε στον $F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{o\}$ (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο. Άρα, έχουμε ισότητα, και θέτοντας $F = M^\perp + N^\perp$ στην $(*)$ έχουμε το ζητούμενο. □

7. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^\perp$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε τον $H = \ell_2$, και σαν F παίρνουμε τον υπόχωρο c_{00} που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες. Προφανώς $F \neq H$, γιατί

$$(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in \ell_2 \setminus c_{00}.$$

Από την άλλη πλευρά, $e_n \in c_{00}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν $y \in c_{00}^\perp$, το $y = (\eta_n)$ πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\eta_n = \langle y, e_n\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή $y = 0$. Άρα, $c_{00}^\perp = \{o\}$. Τότε,

$$c_{00} + c_{00}^\perp = c_{00} \neq \ell_2. \quad \square$$

8. Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

Υπόδειξη: Έστω $x_n = w_n + z_n$ ακολουθία στον $W + Z$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = w + z$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H (γιατί;).

Η (x_n) συγκλίνει, άρα είναι ακολουθία Cauchy: έχουμε $\|x_n - x_m\| \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Όμως, από την καθετότητα των W και Z, και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε

$$\|w_n - w_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2,$$

και αυτό δείχνει ότι οι (w_n), (z_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους W, Z αντίστοιχα. Οι W, Z είναι κλειστοί υπόχωροι του H, άρα είναι πλήρεις σαν μετρικοί χώροι. Επομένως, υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $w_n \to w$ και $z_n \to z$. Έπεται ότι $x_n = w_n + z_n \to w + z$, και από μοναδικότητα του ορίου, $x = w + z \in W + Z$. □

9. Σε έναν χώρο Hilbert H, θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους M, N, και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές P_M, P_N. Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.

Υπόδειξη: Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τους $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $N = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε,

$$(P_M \circ P_N)(1, 1) = P_M(1, 1) = (1, 0),$$

ενώ

$$(P_N \circ P_M)(1, 1) = P_N(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα, $P_M \circ P_N \neq P_N \circ P_M$.

Ισχύει όμως ισότητα αν $M \perp N$: για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$(P_M \circ P_N)(x) = (P_N \circ P_M)(x) = o,$$

δηλαδή $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M \equiv 0$.

10. Θεωρούμε τον $C[-1, 1]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το

$$\int_{-1}^{1} (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

Υπόδειξη: Οι τρείς πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν από την ορθοκανονικοποίηση είναι οι εξής:

(α) $f_1(t) = \frac{1}{\|1\|} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(β) $f_2(t) = \frac{t - \langle t, f_1\rangle f_1(t)}{\|t - \langle t, f_1\rangle f_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$.

(γ) $f_3(t) = \frac{t^2 - \langle t^2, f_1\rangle f_1(t) - \langle t^2, f_2\rangle f_2(t)}{\|t^2 - \langle t^2, f_1\rangle f_1 - \langle t^2, f_2\rangle f_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})$.

Παρατηρούμε ότι

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |t^4 - a - bt - ct^2|^2 dt = d^2(t^4, \langle 1, t, t^2\rangle),$$

επομένως μπορούμε να βρούμε τα βέλτιστα a, b, c βρίσκοντας το πλησιέστερο σημείο του $\langle 1, t, t^2\rangle$ προς την t^4. Όμως, οι f_1, f_2, f_3 είναι ορθοκανονική βάση του $\langle 1, t, t^2\rangle$, άρα η λύση δίνεται από την

$$g(t) = \langle t^1, f_1\rangle f_1(t) + \langle t^4, f_2\rangle f_2(t) + \langle t^4, f_3\rangle f_3(t) = \ldots = \frac{6}{7}t^2 - \frac{3}{35},$$

το οποίο δίνει

$$a = -\frac{3}{35}, \quad b = 0, \quad c = \frac{6}{7}. \quad \square$$

11. Έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

Υπόδειξη: Υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι $R(T) = \mathrm{span}\{v\}$ για κάποιο $v \neq o$. Τότε, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$T(x) = \lambda_x v,$$

όπου ο $\lambda_x \in \mathbb{R}$ εξαρτάται από το x. Μπορούμε να υπολογίσουμε το λ_x μέσω του T ως εξής:

$$\langle Tx, v\rangle = \lambda_x\langle v, v\rangle \Longrightarrow \lambda_x = \langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι το $f : H \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x) = \langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\rangle,$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$|f(x)| = |\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|\frac{v}{\|v\|^2}\| \leq \frac{\|T\|}{\|v\|}\|x\|.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_x = f(x) = \langle x, u\rangle, \quad x \in H.$$

Άρα, $T(x) = \lambda_x v = \langle x, u\rangle v$ για κάθε $x \in H$. $\square$

12. Έστω W κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in W^*$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$.

Υπόδειξη: Ο W είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μάς δίνει μοναδικό $w \in W$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle w, x\rangle, \quad x \in W.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = \langle w, x\rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, επεκτείνει το f, και

$$\|f\|_{W^*} = \|w\| = \|\tilde{f}\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = \langle u, x \rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle w - u, x \rangle = 0$ για κάθε $x \in W$, οπότε $w - u = z \in W^{\perp}$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα (εξηγήστε), και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|\tilde{f}\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = o \Longrightarrow w = u$. Έπεται ότι $g = \tilde{f}$. □

13. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και κατόπιν την ανισότητα του Bessel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle y, e_k \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad \square \end{aligned}$$

14. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Υπόδειξη: Έστω y το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x. Αφού $y \in Y$ και η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του Y, το y γράφεται στη μορφή

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

Όμως ξέρουμε ότι $x - y \perp Y$ και $e_n \in Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n. \quad \square$$

15. Δείξτε ότι αν η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$\forall f \in H^*, \quad f(e_n) \to 0.$$

Υπόδειξη: Έστω $f \in H^*$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $y \in H$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle y, x \rangle, \qquad x \in H.$$

Ειδικότερα, $f(e_n) = \langle y, e_n \rangle$. Όμως, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle^2 = \|y\|^2 < +\infty,$$

άρα, $\langle y, e_n \rangle^2 \to 0$, δηλαδή $f(e_n) \to 0$. □

16. Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Τότε, η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Ο H είναι πλήρης, άρα η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_m = \sum_{n=1}^m x_n$ είναι Cauchy. Όμως, αν $l > m$ έχουμε

$$\|s_l - s_m\|^2 = \|x_{m+1} + \ldots + x_l\|^2 = \sum_{n=m+1}^{l} \|x_n\|^2,$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα, η (s_m) είναι Cauchy αν και μόνο αν η

$$t_m = \sum_{n=1}^{m} \|x_n\|^2$$

είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ συγκλίνει. □

17. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

Υπόδειξη: Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 \quad + \quad \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 &= \sum_{i \neq j} (\|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j \rangle + \|x_j\|^2) + \langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \rangle \\
&= (n-1) \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - 2 \sum_{i<j} \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i<j} \langle x_i, x_j \rangle \\
&= n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ όταν $i \neq j$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε

$$i \neq j \Longrightarrow \|(x_i - y) - (x_j - y)\| \geq 2.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\|y - x_i\| \leq r$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 &\leq \sum_{i \neq j} \|(x_i - y) - (x_j - y)\|^2 \\
&= n \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i - ny\|^2 \\
&\leq n \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y\|^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} r^2 \\
&= n^2 r^2.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$r^2 \geq \frac{2(n-1)}{n} \Longrightarrow r \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}. \quad \square$$

18. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

Υπόδειξη: Αν $n = 1$, έχουμε $\|x\|^2 + \|-x\|^2 = 2\|x\|^2$.

Για το επαγωγικό βήμα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left(\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i + x_{k+1}\Big\|^2 + \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i - x_{k+1}\Big\|^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left(\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\
&= 2 \cdot 2^k \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\
&= 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά: τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i$ και x_{k+1} (για κάθε επιλογή των $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$), την επαγωγική υπόθεση για τα $x_1, \ldots, x_k$, και το γεγονός ότι το $\{-1, 1\}^k$ έχει 2^k στοιχεία. $\square$