Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής

1.1. *Ολοκληρώστε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων* 1.2.5, 1.3.8 *και* 1.5.1.

Υπόδειξη. Οι αποδείξεις όλων των ισχυρισμών των Θεωρημάτων 1.2.5 και 1.5.1 είναι απλές. Για το Θεώρημα 1.3.8 αν θέλετε κοιτάξτε και την Άσκηση 1.3.

1.2. *Δείξτε την εξής μορφή της ταυτότητας της διαίρεσης: αν* $a, b \in \mathbb{Z}$ *και* $b \neq 0$, *υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι* q *και* r *τέτοιοι ώστε* $a = bq + r$ *και* $-|b|/2 < r \leqslant |b|/2$.

Υπόδειξη. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $b \neq 0$. Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q_1 και r_1 τέτοιοι ώστε $a = |b|q_1 + r_1$ και $0 \leqslant r_1 < |b|$. Αν $r_1 \leqslant |b|/2$, παίρνουμε $q = \varepsilon q_1$ και $r = r_1$ όπου ε το πρόσημο του b. Τότε $a = bq + r$ και $-|b|/2 < 0 \leqslant r \leqslant |b|/2$.

Έστω ότι $|b|/2 < r_1 < |b|$. Τότε $-|b|/2 = |b|/2 - |b| < r_1 - |b| < 0$ και $a = |b|(q_1+1) + (r_1 - |b|)$, οπότε αν πάρουμε $q = \varepsilon(q_1 + 1)$ και $r = r_1 - |b|$ έχουμε $a = bq + r$ και $-|b|/2 < r < 0 \leqslant |b|/2$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Z}$ με $-|b|/2 < r \leqslant |b|/2$ και $a = bq + r$. Για τη μοναδικότητα εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του αλγορίθμου της διαίρεσης.

1.3. *Ο ορισμός του μέγιστου κοινού διαιρέτη γενικεύεται ως εξής: αν* $k \geqslant 2$ *και* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ *και τουλάχιστον ένας από τους* $a_1, \ldots, a_k$ *δεν είναι μηδέν, ορίζουμε* $(a_1, \ldots, a_k)$ *εκείνον τον θετικό ακέραιο* d *που ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $d \mid a_j$ *για κάθε* $j = 1, \ldots, k$.

(ii) *Αν* $s \in \mathbb{Z}$ *και* $s \mid a_j$ *για κάθε* j, *τότε* $s \leqslant d$.

(α) *Αποδείξτε ότι* $(a_1, \ldots, a_k) = (|a_1|, \ldots, |a_k|)$ *και ότι υπάρχουν ακέραιοι* $x_1, \ldots, x_k$ *τέτοιοι ώστε* $(a_1, \ldots, a_k) = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$.

(β) *Αποδείξτε ότι* $((a_1, \ldots, a_{k-1}), a_k) = (a_1, \ldots, a_k)$.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα την ύπαρξη του $(|a_1|,\dots,|a_k|)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$I = \{|a_1|u_1 + \cdots + |a_k|u_k : u_i \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}.$$

Αφού οι a_i δεν είναι όλοι μηδέν, κάποιος $|a_{i_0}| \in \mathbb{N}$. Όμως $|a_{i_0}| \in I$ (γιατί;) άρα το I είναι μη κενό. Από την αρχή του ελαχίστου, το I έχει ελάχιστο στοιχείο d το οποίο γράφεται στη μορφή $d = |a_1|x_1 + \cdots + |a_k|x_k$ για κάποιους $x_i \in \mathbb{Z}$.

Θα δείξουμε ότι ο d διαιρεί κάθε στοιχείο του I. Ας υποθέσουμε ότι $z = |a_1|u_1+\cdots+|a_k|u_k \in I$. Υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Z}$ με $0 \leqslant r < d$ και $z = dq + r$. Παρατηρούμε ότι

$$r = z - dq = |a_1|(u_1 - qx_1) + \cdots + |a_k|(u_k - qx_k) \in I.$$

Αν ήταν $0 < r < d$ τότε ο r θα ήταν στοιχείο του I μικρότερο από τον d, άτοπο από τον τρόπο ορισμού του d. Άρα $r = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι ο d διαιρεί τον z.

Αν $a_i \neq 0$ τότε $|a_i| \in I$, επομένως $d \mid |a_i|$ για κάθε $i = 1,\dots,k$. Αν $s \in \mathbb{N}$ και $s \mid |a_i|$ για κάθε i, τότε

$$s \mid |a_1|x_1 + \cdots + |a_k|x_k = d.$$

Ειδικότερα, $s \leqslant d$. Η μοναδικότητα του d αποδεικνύεται εύκολα.

Για να δείξουμε ότι $(a_1,\dots,a_k) = (|a_1|,\dots,|a_k|)$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι γενικά $a \mid b$ αν και μόνο αν $a \mid |b|$, οπότε το σύνολο των κοινών θετικών διαιρετών των $a_1,\dots,a_k$ συμπίπτει με το σύνολο των κοινών θετικών διαιρετών των $|a_1|,\dots,|a_k|$.

(β) Θέτουμε $d_1 = ((a_1,\dots,a_{k-1}), a_k)$ και $d = (a_1,\dots,a_k)$. Τότε $d_1 \mid (a_1,\dots,a_{k-1})$ και $d_1 \mid a_k$, άρα $d \mid |a_i|$ για κάθε $i \leqslant k$. Από το (α),

$$d_1 \mid (|a_1|,\dots,|a_k|) = (a_1,\dots,a_k) = d.$$

Αντίστροφα, $d \mid |a_i|$ για κάθε $i \leqslant k-1$, άρα $d \mid (|a_1|,\dots,|a_{k-1}|) = (a_1,\dots,a_{k-1})$. Επίσης, $d \mid |a_k|$, άρα

$$d \mid (|(a_1,\dots,a_{k-1})|, |a_k|) = ((a_1,\dots,a_{k-1}), a_k) = d_1.$$

Αφού $d, d_1 \in \mathbb{N}$ και $d_1 \mid d$, $d \mid d_1$, παίρνουμε $d_1 = d$.

1.4. *Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Αν a, b και c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και $(a,b) = (a,c) = 1$ τότε $(a, bc) = 1$.*

(β) *Αν $a, b \in \mathbb{N}$ και $d = (a,b)$ τότε έχουμε $a = du$ και $b = dv$ για ακεραίους $u, v \in \mathbb{N}$ με $(u,v) = 1$.*

(γ) *Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ με $(r_1, r_2) = 1$ και $r_1 \mid r_2 m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $r_1 \mid m$.*

(δ) *Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ με $(r_1, r_2) = 1$ και $r_1 \mid m$, $r_2 \mid m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $r_1 r_2 \mid m$.*

(ε) *Αν $a, b, w \in \mathbb{N}$ με $(a,b) = 1$ και $w \mid ab$ τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί u, v τέτοιοι ώστε $w = uv$ και $u \mid a$, $v \mid b$. Επιπλέον έχουμε $(u,v) = 1$.*

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $d=(a,bc)$. Αφού $(a,b)=1$, υπάρχουν $x,y\in\mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $ax+by=1$ άρα $acx+bcy=c$. Έχουμε $d\mid a$ και $d\mid bc$, άρα $d\mid (acx+bcy)=c$. Τώρα, $d\mid a$ και $d\mid c$, άρα $d\mid (a,c)=1$. Δηλαδή, $d=1$.

(β) Εφόσον $d\mid a$ και $d\mid b$ μπορούμε να γράφουμε $a=du$ και $b=dv$ για κάποιους $u,v\in\mathbb{N}$. Υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $d=ax+by$ και συνεπώς $d=dux+dvy$ δηλαδή $1=ux+vy$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι κάθε κοινός διαιρέτης των u και v θα πρέπει να διαιρεί το 1, επομένως $(u,v)=1$.

(γ) Υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $r_1x+r_2y=1$. Άρα

$$r_1mx+r_2my=m.$$

Όμως $r_1\mid r_1mx$ και $r_1\mid r_2m\Longrightarrow r_1\mid r_2my$. Άρα $r_1\mid (r_1mx+r_2my)=m$.

(δ) Υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $r_1x+r_2y=1$. Άρα

$$r_1mx+r_2my=m.$$

Αφού $r_2\mid m$ έχουμε $r_1r_2\mid r_1mx$ και αφού $r_1\mid m$ έχουμε $r_1r_2\mid r_2my$. Άρα $r_1r_2\mid (r_1mx+r_2my)=m$.

(ε) Έστω $u=(w,a)$. Από το (β) μπορούμε να γράφουμε $w=uv$ και $a=uv'$ για φυσικούς αριθμούς v και v' με $(v,v')=1$. Έχουμε $uv=w\mid ab=uv'b$ και συνεπώς $v\mid v'b$. Εφόσον $(v,v')=1$ από το (γ) προκύπτει ότι $v\mid b$. Ας δούμε γιατί $(u,v)=1$: ο (u,v) διαιρεί τον u, άρα διαιρεί τον a. Ομοίως ο (u,v) διαιρεί τον v, άρα διαιρεί τον b. Έπεται ότι $(u,v)\mid (a,b)=1$, οπότε $(u,v)=1$.

Για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι $w=u_1v_1$, όπου $u_1\mid a$ και $v_1\mid b$. Από τις $u_1\mid w$ και $u_1\mid a$ βλέπουμε ότι $u_1\mid (w,a)=u$. Επίσης από τις $u\mid a$, $v_1\mid b$ και $(a,b)=1$ συμπεραίνουμε όπως παραπάνω ότι $(u,v_1)=1$. Επομένως από τη σχέση $u\mid w=u_1v_1$ και το (γ) προκύπτει ότι $u\mid u_1$. Άρα $u_1=u$ και συνεπώς $v_1=v$.

1.5. *Έστω a,b,c και n φυσικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι αν $(a,b)=1$ και $ab=c^n$, τότε $a=x^n$ και $b=y^n$ για κάποιους φυσικούς x και y.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a,b>1$ αλλιώς δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Θεωρούμε τις αναλύσεις $a=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$ και $b=q_1^{b_1}\cdots q_s^{b_s}$ των a και b σε γινόμενα πρώτων. Αφού $(a,b)=1$, οι p_i και q_j είναι διακεκριμένοι. Από την $ab=c^n$ έπεται ότι $p_i\mid c$ και $q_j\mid c$, άρα $c=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}q_1^{t_1}\cdots q_s^{t_s}$ για κάποιους $r_1,\dots,r_k,t_1,\dots,t_s\geqslant 1$. Τότε,

$$p_1^{nr_1}\cdots p_k^{nr_k}q_1^{nt_1}\cdots q_s^{nt_s}=c^n=ab=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}q_1^{b_1}\cdots q_s^{b_s},$$

άρα $nr_i=a_i$ και $nt_j=b_j$. Τώρα,

$$a=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}=(p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k})^n=x^n$$

όπου $x=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$, και

$$b=q_1^{b_1}\cdots q_s^{b_s}=(q_1^{t_1}\cdots q_s^{t_s})^n=y^n$$

όπου $y=q_1^{t_1}\cdots q_s^{t_s}$.

1.6. *Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο μη μηδενικών ακεραίων a, b ορίζεται μέσω της*

$$[a,b] = |ab|/(a,b).$$

Αποδείξτε ότι

$$(a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)].$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $b = b_1 d$ και $c = c_1 d$, όπου $d = (b,c)$. Τότε, λόγω της $\left(\frac{d}{(a,d)}, \frac{a}{(a,d)}\right) = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}(a,[b,c]) &= \left(a, \frac{bc}{d}\right) = (a, b_1c_1d) = (a,d)\left(\frac{a}{(d,a)}, b_1c_1\frac{d}{(a,d)}\right) \\ &= (a,b,c)\left(\frac{a}{(a,b,c)}, b_1\right)\left(\frac{a}{(a,b,c)}, c_1\right).\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, πάλι χρησιμοποιώντας την $\left(\frac{d}{(a,d)}, \frac{a}{(a,d)}\right) = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}[(a,b),(a,c)] &= \frac{(a,b)(a,c)}{((a,b),(a,c))} = \frac{(a,b_1d)(a,c_1d)}{(a,b,c)} \\ &= (a,b,c)\left(\frac{a}{(a,b,c)}, b_1\frac{d}{(a,b,c)}\right)\left(\frac{a}{(a,b,c)}, c_1\frac{d}{(a,b,c)}\right) \\ &= (a,b,c)\left(\frac{a}{(a,b,c)}, b_1\right)\left(\frac{a}{(a,b,c)}, c_1\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς, $(a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)]$.

1.7. *Έστω a, b ακέραιοι. Αποδείξτε ότι αν $(a,b) = 1$ τότε ο $(a+b, a^2-ab+b^2)$ είναι ίσος με 1 ή 3.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $d = (a+b, a^2-ab+b^2)$. Έχουμε $d \mid (a+b)$, άρα $d \mid (a+b)^2$, και $d \mid (a^2-ab+b^2)$. Συνεπώς,

$$d \mid (a+b)^2 - (a^2-ab+b^2) = 3ab.$$

Παρατηρούμε ότι $(d,ab) = 1$. Πράγματι, αν $(d,ab) > 1$ τότε υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p \mid d$ και $p \mid ab$. Από το λήμμα του Ευκλείδη έχουμε είτε $p \mid a$ ή $p \mid b$. Αν $p \mid a$ τότε από την $p \mid d \mid (a+b)$ έχουμε $p \mid (a+b) - a = b$, το οποίο είναι άτοπο αφού $(a,b) = 1$. Ομοίως, αν $p \mid b$ βλέπουμε ότι $p \mid (a+b) - b = a$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Αφού $d \mid 3ab$ και όπως είδαμε $(d,ab) = 1$, συμπεραίνουμε ότι $d \mid 3$. Άρα, ο d είναι ίσος με 1 ή 3.

1.8. *Έστω a, m και n θετικοί ακέραιοι και $m \neq n$. Να βρείτε τον (A_m, A_n) όπου $A_m = a^{2^m} + 1$.*

Υπόδειξη. Έστω $m > n$. Γράφουμε

$$A_m - 2 = a^{2^m} - 1 = (a^{2^n})^{2^{n-m}} - 1 = (a^{2^n}+1)\left((a^{2^n})^{2^{m-n}-1} - (a^{2^n})^{2^{m-n}-2} + \cdots - a^{2^n} + 1\right),$$

δηλαδή $A_n = a^{2^n} + 1 \mid A_m - 2$. Αν τώρα $d = (A_m, A_n)$ έχουμε $d \mid A_m$ και $d \mid A_n \implies d \mid A_m - 2$, συνεπώς $d \mid 2$, άρα $d = 1$ ή $d = 2$. Τέλος παρατηρούμε ότι αν ο a είναι άρτιος τότε όλοι οι A_k είναι περιττοί, οπότε $d \neq 2$ και αναγκαστικά $d = 1$, ενώ αν ο a είναι περιττός τότε όλοι οι A_k είναι άρτιοι, άρα $2 \mid (A_m, A_n) = d$ και αναγκαστικά $d = 2$.

1.9. *Έστω n και k θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι αν $(n-1)^2 \mid (n^k - 1)$ τότε $(n-1) \mid k$. Από αυτό, ή με άλλον τρόπο, αποδείξτε ότι αν ο p είναι πρώτος τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(α) *Ο* $(p-1)!+1$ *είναι δύναμη του* p.

(β) $p = 2, 3$ ή 5.

Υπόδειξη. Γράφουμε $n^k - 1 = (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1)$, οπότε η υπόθεση μας δίνει ότι $(n-1) \mid (n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1)$. Τώρα, θέτοντας $m = n - 1$ έχουμε ότι

$$m \mid (m+1)^{k-1} + (m+1)^{k-2} + \cdots + (m+1) + 1$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $s \geqslant 1$ ισχύει ότι $m \mid [(m+1)^s - 1]$, δηλαδή $(m+1)^s = a_s m + 1$ για κάποιον $a_s \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$(m+1)^{k-1} + (m+1)^{k-2} + \cdots + (m+1) + 1 = am + k$$

για κάποιον $a \in \mathbb{N}$. Αφού $m \mid am$, συμπεραίνουμε ότι

$$m \mid [((m+1)^{k-1} + (m+1)^{k-2} + \cdots + (m+1) + 1) - am] = k.$$

Δηλαδή, $n - 1 = m \mid k$.

1.10. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $0 \leqslant k \leqslant n$, *ορίζουμε τον διωνυμικό συντελεστή*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(α) *Συμφωνούμε ότι* $0! = 1$ *και* $\binom{0}{0} = 1$. *Αποδείξτε ότι, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

και

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

(β) *Αποδείξτε ότι το γινόμενο* k *διαδοχικών φυσικών διαιρείται με* $k!$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Παίρνοντας αυτόν σαν ορισμό του $\binom{n}{k}$ στην περίπτωση $k = 0$, έχουμε

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \text{ και } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

αφού $0! = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Αν $n \geqslant 2$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$, τότε

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)k}{k!} \\ &= \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)[(n-k)+k]}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, δείχνουμε με επαγωγή ως προς $n \geqslant 2$ την εξής πρόταση $P(n)$: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο $\binom{n}{k}$ είναι ακέραιος.

Αν τώρα μας δώσουν k διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ($k \geqslant 2$) και αν n είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς, τότε το γινόμενό τους ισούται με $Q = n \cdot (n-1)\cdots(n-k+1)$. Αφού ο

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{Q}{k!}$$

είναι ακέραιος, συμπεραίνουμε ότι $k! \mid Q$.

1.11. (α) *Αν ο n είναι πρώτος και ο k είναι ακέραιος με $1 \leqslant k \leqslant n-1$, αποδείξτε ότι ο n διαιρεί τον*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(β) *Ισχύει το* (α) *χωρίς να υποθέσουμε ότι ο n είναι πρώτος;*

Υπόδειξη. (α) Από την Άσκηση 1.10 έχουμε $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $k!(n-k)! \mid n! = n\cdot(n-1)!$. Αφού ο n είναι πρώτος, οι $k!(n-k)!$ και n είναι σχετικώς πρώτοι. Άρα, $k!(n-k)! \mid (n-1)!$, δηλαδή $\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{Z}$. Με άλλα λόγια, $n \mid \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

(β) Όχι, π.χ. αν $n = 4$ και $k = 2$, αφού $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = 6$.

1.12. *Έστω $a, m, n \in \mathbb{N}$ με $a > 1$. Αποδείξτε ότι $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.*

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $m = qn + r$ όπου $m \geqslant n$, $q, r \in \mathbb{Z}$ και $0 \leqslant r < n$ τότε

$$(a^m - 1, a^n - 1) = (a^n - 1, a^r - 1).$$

Αν $d = (a^n - 1, a^r - 1)$, τότε χρησιμοποιώντας την $a^n - 1 \mid a^{qn} - 1$ βλέπουμε ότι

$$d \mid a^r(a^{qn} - 1) + (a^r - 1) = a^{qn+r} - 1 = a^m - 1,$$

άρα $d \mid (a^m - 1, a^r - 1)$. Αντίστροφα, αν $d_1 = (a^m - 1, a^n - 1)$, έχουμε $d_1 \mid a^n - 1 \mid a^{qn} - 1$, άρα

$$d_1 \mid a^m - 1 - a^r(a^{qn} - 1) = a^r - 1.$$

Επομένως $d_1 \mid (a^n - 1, a^r - 1) = d$.

Τώρα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη. Υποθέτουμε ότι $m \geqslant n$. Αν $n \mid m$ το συμπέρασμα είναι προφανές, αλλιώς μπορούμε να βρούμε $q_1, \ldots, q_{n+1} \in \mathbb{N}$ και $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$ με $0 < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < n$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, \\ n &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ \vdots &= \quad \vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1}, \end{aligned}$$

και $(m, n) = r_n$. Ο προηγούμενος συλλογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned} (a^m - 1, a^n - 1) &= (a^n - 1, a^{r_1} - 1) = (a^{r_1} - 1, a^{r_2} - 1) = \cdots = (a^{r_{n-1}} - 1, a^{r_n} - 1) \\ &= a^{r_n} - 1 = a^{(m,n)} - 1. \end{aligned}$$

1.13. *Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής* $4n - 1$.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος πρώτοι της μορφής $4n - 1$, οι $q_1, q_2, \ldots, q_N$ (υπάρχει τουλάχιστον ένας τέτοιος πρώτος, ο 3). Θεωρούμε τον αριθμό

$$S = 4q_1 q_2 \ldots q_N - 1.$$

Ο S είναι μεγαλύτερος από 1, άρα έχει ανάλυση $S = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ σε γινόμενο πρώτων διαιρετών, όπου $r_j \geqslant 1$ και όλοι οι p_j είναι περιττοί αφού ο S είναι περιττός. Αν όλοι οι p_j ήταν της μορφής $4k + 1$, τότε το γινόμενό τους θα ήταν κι αυτό της μορφής $4k + 1$, ενώ ο S είναι της μορφής $4k - 1$. Άρα ο S έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη p της μορφής $4n - 1$.

Αφού οι $q_1, q_2, \ldots, q_N$ είναι όλοι οι πρώτοι της μορφής $4n - 1$, συμπεραίνουμε ότι $p = q_i$ για κάποιον $i \leqslant N$. Όμως τότε, $p \mid 4q_1 q_2 \ldots q_N$ και $p \mid S$, άρα $p \mid (S - 4q_1 q_2 \ldots q_N) = 1$, το οποίο είναι άτοπο. Το άτοπο δείχνει ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4n - 1$.

1.14. *Υποθέτουμε ότι ο* $2^n + 1$ *είναι πρώτος για κάποιον* $n \geqslant 2$ *(οι πρώτοι αυτής της μορφής λέγονται πρώτοι του Fermat). Αποδείξτε ότι ο* n *είναι δύναμη του* 2.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $2^n + 1$ είναι πρώτος για κάποιον $n \geqslant 2$. Αν ο n δεν είναι δύναμη του 2, τότε γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $n = 2^k s$, όπου $s > 1$ περιττός φυσικός. Αν $x = 2^{2^k}$ τότε

$$2^n + 1 = x^s + 1 = (x + 1)(x^{s-1} - x^{s-2} + \cdots - x + 1).$$

Αφού $1 < x + 1 < x^s + 1$, ο $2^n + 1$ είναι σύνθετος. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο n είναι δύναμη του 2.

1.15. *Υποθέτουμε ότι ο* $2^n - 1$ *είναι πρώτος για κάποιον* $n \in \mathbb{N}$ *(οι πρώτοι αυτής της μορφής λέγονται πρώτοι του Mersenne). Αποδείξτε ότι ο* n *είναι πρώτος.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $2^n - 1$ είναι πρώτος για κάποιον $n \geqslant 2$. Αν ο n δεν είναι πρώτος, τότε υπάρχουν $d, k > 1$ τέτοιοι ώστε $n = dk$. Από την ταυτότητα

$$2^n - 1 = (2^d)^k - 1 = (2^d - 1)(2^{d(k-1)} + \cdots + 2^d + 1)$$

βλέπουμε ότι

$$2^d - 1 \mid 2^n - 1.$$

Αφού $1 < 2^d - 1 < 2^n - 1$, ο $2^n - 1$ είναι σύνθετος. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο n είναι πρώτος.

Σημείωση: Δεν ισχύει το αντίστροφο. Ο $p = 11$ είναι πρώτος, αλλά ο $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ είναι σύνθετος.

1.16. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{p}$ είναι άρρητος.*

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{p} = m/n$ για κάποιους $m, n \in \mathbb{N}$. Αν $r = m/(m,n)$ και $s = n/(m,n)$, έχουμε $\sqrt{p} = r/s$ και $(r,s) = 1$. Τότε, $p = r^2/s^2$ δηλαδή $p \mid ps^2 = r^2$. Αφού ο p είναι πρώτος, παίρνουμε $p \mid r$, άρα $r = px$ για κάποιον $x \in \mathbb{N}$. Επιστρέφοντας στην $ps^2 = r^2$ έχουμε $ps^2 = p^2x^2 \implies px^2 = s^2$. Όπως πριν, $p \mid px^2 = s^2$, άρα $p \mid s$. Όμως τότε $p \mid (r,s) = 1$, άτοπο. Άρα ο $\sqrt{p}$ είναι άρρητος.

1.17. *Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_2x + \cdots + a_kx^k$, $k \geqslant 1$, $a_k \neq 0$, με συντελεστές ακεραίους, για το οποίο όλοι οι αριθμοί $|f(n)|$, $n \geqslant 0$ να είναι πρώτοι.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι για το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$, $k \geqslant 1$, $a_k \neq 0$, έχουμε $|f(n)|$ =πρώτος για κάθε n. Ειδικότερα,

$$|f(1)| = p$$

όπου p πρώτος. Παρατηρούμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{N}$,

$$f(1 + sp) = a_0 + a_1(1 + sp) + \cdots + a_k(1 + sp)^k = a_0 + a_1 \cdot 1 + \cdots + a_k \cdot 1^k + Bp = f(1) + Bp,$$

όπου $B \in \mathbb{Z}$. Άρα $p \mid f(1) + Bp = f(1 + sp) \mid |f(1 + sp)|$. Όμως ο $|f(1 + sp)| = q$ είναι πρώτος από την υπόθεση, και αφού $p \mid q$ έπεται ότι $p = q$. Δηλαδή,

$$|f(1 + sp)| = p$$

για κάθε $s \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $\lim_{s\to\infty} |f(1 + sp)| = \infty$ (η f είναι πολυώνυμο βαθμού $k \geqslant 1$, άρα $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$).

1.18. *Έστω $n \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι ο $(n + 1)! + k$ είναι σύνθετος για κάθε $k = 2, \ldots, n + 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχουν οσοδήποτε μακριά διαστήματα διαδοχικών σύνθετων αριθμών.*

Υπόδειξη. Για κάθε $k = 2, \ldots, n + 1$ έχουμε $k \mid (n + 1)!$ και $k \mid k$, άρα $k \mid (n + 1)! + k$. Δηλαδή ο $(n + 1)! + k$ είναι σύνθετος για κάθε $k = 2, \ldots, n + 1$.

Οι $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \ldots, (n + 1)! + (n + 1)$ είναι n διαδοχικοί σύνθετοι φυσικοί αριθμοί.

1.19. *Έστω $n \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι ο $n!$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο: δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n! = m^2$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο n είναι άρτιος. Τότε $n/2 \in \mathbb{N}$ και από το αίτημα του Bertrand υπάρχει πρώτος p με $n/2 < p < n$. Παρατηρούμε ότι ο p δεν διαιρεί κανέναν $x \leqslant n$ εκτός από τον εαυτό του: τα πολλαπλάσια του p είναι οι αριθμοί $p, 2p, 3p, \ldots$, και έχουμε $kp > n$ για κάθε $k \geqslant 2$.

Άρα στην ανάλυση του $n! = 2 \cdot 3 \cdots n$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ο p θα εμφανίζεται με εκθέτη 1, δηλαδή με περιττό εκθέτη. Τότε, ο $n!$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο: αν ήταν, όλοι οι πρώτοι διαιρέτες του θα είχαν άρτιο εκθέτη, άρα και ο p.

Αν $n = 2s+1$, βρίσκουμε πρώτο p με $s < p < 2s$. Πάλι, $p \geqslant s+1$ άρα $2p \geqslant 2s+2 > n$, οπότε εφαρμόζεται το προηγούμενο επιχείρημα: ο p δεν διαιρεί κανέναν $x \leqslant n$ εκτός από τον εαυτό του, άρα ο εκθέτης του είναι 1 στην ανάλυση του $n!$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

1.20. *Αν $n \geqslant 2$ αποδείξτε ότι το άθροισμα*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

δεν είναι ακέραιος.

Υπόδειξη. Έστω $n \geqslant 2$. Υπάρχει μοναδικός $s \geqslant 1$ τέτοιος ώστε $2^s \leqslant n < 2^{s+1}$. Ορίζουμε B να είναι το γινόμενο όλων των περιττών φυσικών $m \leqslant n$. Παρατηρήστε ότι ο B είναι περιττός. Ας υποθέσουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{s-1}B}{k} = 2^{s-1}B \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \in \mathbb{N}.$$

Αν $k \leqslant n$ και $k \neq 2^s$, τότε ο k γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $k = 2^{\ell}m$, όπου $0 \leqslant \ell < s$ και ο m είναι περιττός μικρότερος ή ίσος από n, άρα $2^{\ell} \mid 2^s$ και $m \mid B$. Συνεπώς, $k \mid 2^{s-1}B$ και έπεται ότι

$$\frac{B}{2} = \frac{2^{s-1}B}{2^s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{s-1}B}{k} - \sum_{k \neq 2^s} \frac{2^{s-1}B}{k} \in \mathbb{N}.$$

Αυτό είναι άτοπο αφού ο B είναι περιττός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αριθμητικές συναρτήσεις και γινόμενο **Dirichlet**

2.1. (Η συνάρτηση $\Lambda(n)$ του von Mangoldt). *Για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$ ορίζουμε*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & , \text{ αν } n = p^m \text{ για κάποιον } p \text{ και κάποιον } m \geqslant 1 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

(α) *Είναι η $\Lambda(n)$ πολλαπλασιαστική;*

(β) *Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n,*

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Υπόδειξη. (α) Η $\Lambda(n)$ δεν είναι πολλαπλασιαστική, διότι $\Lambda(1) = 0$.

(β) Η ισότητα ισχύει για $n = 1$, διότι και τα δύο μέλη της $\ln 1 = \Lambda(1)$ είναι ίσα με 0. Έστω $n > 1$. Γράφουμε τον n στη μορφή $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ και έχουμε

$$\ln n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln p_i.$$

Στο άθροισμα $\sum\limits_{d|n} \Lambda(d)$ οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι αυτοί που αντιστοιχούν σε διαιρέτες της μορφής $p_i^{s_i}$ όπου $1 \leqslant s_i \leqslant \alpha_i$. Για κάθε τέτοιον διαιρέτη έχουμε $\Lambda(p_i^{s_i}) = \ln p_i$, συνεπώς

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s_i=1}^{\alpha_i} \Lambda(p_i^{s_i}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s_i=1}^{\alpha_i} \ln p_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln p_i.$$

Έπεται το ζητούμενο.

2.2. *Μια αριθμητική συνάρτηση $f(n)$ λέγεται πλήρως πολλαπλασιαστική αν για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους m και n,*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

(α) *Αποδείξτε ότι αν η $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, τότε η Dirichlet αντίστροφη της $f(n)$ είναι η $\mu(n)f(n)$.*

(β) *Αποδείξτε ότι αν η $f(n)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση και $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ για κάθε θετικό ακέραιο n, τότε η $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.*

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $g(n) = \mu(n)f(n)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική έχουμε

$$(g * f)(n) = \sum_{d|n} g(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d)f(n) = f(n)\sum_{d|n} \mu(d) = f(n)I(n).$$

Για $n = 1$ έχουμε $f(1)I(1) = I(1)$ διότι $f(1) = 1$, ενώ για $n > 1$ έχουμε $f(n)I(n) = I(n)$ διότι $I(n) = 0$.

Δηλαδή, $(g * f)(n) = I(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $g * f = I$, το οποίο σημαίνει ότι $f^{-1}(n) = g(n) = \mu(n)f(n)$.

(β) Αφού η f είναι πολλαπλασιαστική, για να δείξουμε ότι είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αρκεί να δείξουμε ότι $f(p^s) = f(p)^s$ για κάθε πρώτο p και κάθε $s > 1$ (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση ότι $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ παίρνουμε

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = I(n) = 0$$

για κάθε $n > 1$. Για $n = p^s$, οι διαιρέτες του n είναι οι p^t, $0 \leqslant t \leqslant s$ και $\mu(p^t) = 0$ αν $t > 1$, άρα η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$\mu(1)f(1)f(p^s) + \mu(p)f(p)f(p^{s-1}) = 0$$

δηλαδή

$$f(p^s) - f(p)f(p^{s-1}) = 0$$

αφού $\mu(1) = f(1) = 1$ και $\mu(p) = -1$. Άρα, $f(p^s) = f(p)f(p^{s-1})$. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι $f(p^s) = f(p)^s$.

2.3. *Αποδείξτε ότι*

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Και τα δύο μέλη της προτεινόμενης ισότητας είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις του n και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι ταυτίζονται όταν ο n είναι δύναμη πρώτου. Αν $n = p^r$ τότε

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = 1 + \frac{(-1)^2}{p-1} = \frac{p}{p-1} = \frac{n}{\varphi(n)}.$$

2.4. *Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n,*

$$\sum_{d^2 | n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

Υπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων τότε ο μόνος d με την ιδιότητα $d^2 \mid n$ είναι ο 1, άρα

$$\sum_{d^2 | n} \mu(d) = \mu(1) = 1 = \mu^2(n).$$

Αλλιώς, έχουμε $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} m$, όπου $\alpha_i \geqslant 2$ και ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων. Οι φυσικοί d για τους οποίους $d^2 \mid n$ και $\mu(d) \neq 0$ είναι ακριβώς οι διαιρέτες του $p_1 \cdots p_r$. Συνεπώς,

$$\sum_{d^2 | n} \mu(d) = \sum_{d | p_1 \cdots p_r} \mu(d) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^r = 0 = \mu^2(n).$$

2.5. (Άθροισμα Ramanujan). *Το άθροισμα Ramanujan ορίζεται μέσω της*

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} n}.$$

(α) *Αποδείξτε ότι*

$$c_q(n) = \sum_{d | (q,n)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

(β) *Να βρείτε τη συνάρτηση $c_q(n)$ όταν $n = 0$.*

(γ) *Να βρείτε τη συνάρτηση $c_q(n)$ όταν $q = 1$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι αν $d \mid q$ τότε η απεικόνιση $a \mapsto b := aq/d$ είναι 1-1 και επί από το σύνολο των $a < d$ με $(a,d) = 1$ στο σύνολο των $b < q$ με $(b,q) = q/d$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\sum_{d|q} c_d(n) &= \sum_{d|q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,d)=1}}^{d} e^{2\pi i \frac{a}{d} n} = \sum_{d|q} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,d)=q/d}}^{q} e^{2\pi i \frac{b}{q} n} \\ &= \sum_{b=1}^{q} e^{2\pi i \frac{b}{q} n}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $t_{q,n} = e^{2\pi i \frac{n}{q}}$. Αν $q \mid n$ τότε $t_{q,n} = 1$, συνεπώς

$$\sum_{d|q} c_d(n) = \sum_{b=1}^{q} t_{q,n}^b = q.$$

Αν $q \nmid n$ τότε $t_{q,n} \neq 1$, συνεπώς

$$\sum_{d|q} c_d(n) = t_{q,n} \frac{t_{q,n}^q - 1}{t_{q,n} - 1} = 0$$

αφού $t_{q,n}^q = e^{2\pi i n} = 1$. Δηλαδή, αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g(q) = 0$ αν $q \nmid n$ και $g(q) = q$ αν $q \mid n$, και αν θέσουμε $f(q) = c_q(n)$, έχουμε

$$\sum_{d|q} f(d) = g(q).$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Möbius έπεται ότι

$$c_q(n) = f(q) = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) g(d) = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) g(d) = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d,$$

όπου η προτελευταία ισότητα εξηγείται από το γεγονός ότι για έναν $d \mid q$ έχουμε $g(d) \neq 0$ αν και μόνο αν $d \mid n$, δηλαδή αν και μόνο αν $d \mid (q, n)$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$c_q(0) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \mathbf{1} = \varphi(q).$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $c_1(n) = e^{2\pi i n} = 1$.

2.6. *Για πραγματικό ή μιγαδικό α και για κάθε θετικό ακέραιο n, ορίζουμε*

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha,$$

το άθροισμα των α-οστών δυνάμεων των διαιρετών του n.

(α) *Αποδείξτε ότι η $\sigma_\alpha(n)$ είναι πολλαπλασιαστική.*

(β) *Αποδείξτε ότι*

$$\sigma_\alpha(p^k) = \begin{cases} \frac{p^{\alpha(k+1)}-1}{p^\alpha - 1} & , \text{ αν } \alpha \neq 0 \\ k+1 & , \text{ αν } \alpha = 0 \end{cases}.$$

(γ) *Να βρείτε την Dirichlet αντίστροφη της $\sigma_\alpha(n)$.*

(δ) *Ένας θετικός ακέραιος n λέγεται τέλειος αν ισούται με το άθροισμα των θετικών διαιρετών του που είναι μικρότεροι από n. Με άλλα λόγια, ο n είναι τέλειος αν*

$$\sigma(n) := \sigma_1(n) = 2n.$$

Αποδείξτε ότι αν ο $2^p - 1$ είναι πρώτος, τότε ο $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ είναι τέλειος.

(ε) *Αποδείξτε ότι αν ο n είναι άρτιος τέλειος αριθμός, τότε ο n πρέπει να είναι της μορφής*

$$2^{k-1}(2^k - 1),$$

όπου ο $2^k - 1$ είναι πρώτος.

Υπόδειξη. (α) Αν $N^\alpha(n) = n^\alpha$ τότε η N^α είναι πλήρως πολλαπλασιαστική και $\sigma_\alpha = N^\alpha * u$. Συνεπώς, η σ_α είναι πολλαπλασιαστική.

(β) Έστω $\alpha \neq 0$. Έχουμε

$$\sigma_\alpha(p^k) = \sum_{j=0}^{k} p^{\alpha j} = \sum_{j=0}^{k} (p^\alpha)^j = \frac{p^{\alpha(k+1)} - 1}{p^\alpha - 1}.$$

Αν $\alpha = 0$ τότε, προφανώς, $p^{\alpha j} = 1$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$, άρα

$$\sigma_\alpha(p^k) = \sum_{j=0}^{k} p^{\alpha j} = k + 1.$$

(γ) Έχουμε $\sigma_\alpha = N^\alpha * u$ και $(N^\alpha)^{-1} = \mu \cdot N^\alpha$ αφού η N^α είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, άρα

$$\sigma_\alpha^{-1} = u^{-1} * (N^\alpha)^{-1} = \mu * (\mu N^{|alpha}).$$

Δηλαδή,

$$\sigma_\alpha^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \mu(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

(δ) Έστω $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, όπου ο $2^p - 1$ είναι πρώτος. Παρατηρούμε ότι $(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σ είναι πολλαπλασιαστική παίρνουμε

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \cdot 2^p$$

αφού $\sigma(q) = q + 1$ για κάθε πρώτο q. Άρα,

$$\sigma(n) = 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1) = 2n,$$

το οποίο δείχνει ότι ο n είναι τέλειος.

(ε) Έστω n ένας άρτιος τέλειος αριθμός. Τότε ο n γράφεται στη μορφή $n = 2^{k-1}m$, όπου $k > 1$ και ο m είναι περιττός. Θα δείξουμε ότι $m = 2^k - 1$ και ότι ο m είναι πρώτος. Αφού ο n είναι τέλειος και $(2^{k-1}, m) = 1$, έχουμε

$$2n = \sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(m) = (2^k - 1)\sigma(m),$$

δηλαδή

$$\sigma(m) = \frac{2^k m}{2^k - 1} = m + \frac{m}{2^k - 1}.$$

Αφού $\sigma(m) \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι ο $m/(2^k - 1)$ είναι φυσικός και βέβαια διαιρεί τον m. Στο δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας έχουμε το άθροισμα δύο θετικών διαιρετών του m ενώ στο αριστερό μέλος έχουμε το άθροισμα όλων των θετικών διαιρετών του m. Αναγκαστικά, οι m και $m/(2^k - 1)$ είναι οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του m, δηλαδή ο m είναι πρώτος και $m/(2^k - 1) = 1$, το οποίο δείχνει ότι $m = 2^k - 1$. Έπεται ότι $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ με τον $2^k - 1$ πρώτο.

2.7. (Η συνάρτηση $\lambda(n)$ του Liouville). *Έστω* $\lambda(1) = 1$. *Έστω* n *τυχών θετικός ακέραιος που δίνεται από την* $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. *Ορίζουμε*

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}.$$

Αποδείξτε ότι η λ *είναι πλήρως πολλαπλασιαστική και ότι για κάθε* $n \geqslant 1$,

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν ο } n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο} \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η λ *είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, να βρείτε την* λ^{-1}.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda(n) = (-1)^{\sum_p \alpha_p(n)}$$

όπου $n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}$, το γινόμενο είναι πάνω από όλους τους πρώτους και $\alpha_p(n) = 0$ αν $p \mid n$ ενώ $\alpha_p(n)$ είναι ο εκθέτης του p στην ανάλυση του n αν $p \mid n$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$mn = \prod_p p^{\alpha_p(m)} \prod_p p^{\alpha_p(n)} = \prod_p p^{\alpha_p(m)+\alpha_p(n)},$$

δηλαδή $\alpha_p(mn) = \alpha_p(m) + \alpha_p(n)$, απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda(mn) &= (-1)^{\sum_p \alpha_p(mn)} = (-1)^{\sum_p (\alpha_p(m)+\alpha_p(n))} = (-1)^{\sum_p \alpha_p(m) + \sum_p \alpha_p(n)} \\ &= (-1)^{\sum_p \alpha_p(n)} \cdot (-1)^{\sum_p \alpha_p(n)} = \lambda(m)\lambda(n). \end{aligned}$$

Άρα, η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

Θέτουμε $f(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$. Η f είναι πολλαπλασιαστική, άρα αν $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ έχουμε

$$f(n) = \prod_{i=1}^{k} f(p_i^{\alpha_i}).$$

Παρατηρούμε ότι ο n είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνο αν όλοι οι α_i είναι άρτιοι. Θα έχουμε λοιπόν

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν ο } n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο} \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases},$$

αν δείξουμε ότι για κάθε πρώτο p και $s \geqslant 1$ ισχύει $f(p^s) = 1$ αν ο s είναι άρτιος και $f(p^s) = 0$ αν ο s είναι περιττός. Αυτό ελέγχεται εύκολα, αφού

$$f(p^s) = \lambda(1) + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \cdots + \lambda(p^s) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j.$$

Τέλος, αφού η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, έχουμε

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n).$$

Δηλαδή, $\lambda^{-1}(n) = 0$ αν ο n δεν είναι ελεύθερος τετραγώνων, $\lambda^{-1}(1) = 1$ και $\lambda(n) = 1$ αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων, αφού αν $n = p_1 \vdots p_k$ έχουμε $\mu(n) = \lambda(n) = (-1)^k$.

2.8. *Έστω $d(n)$ ο πλήθος των θετικών διαιρετών του n. Με άλλα λόγια,*

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = (u * u)(n).$$

Αποδείξτε ότι

$$\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}.$$

Υπόδειξη. Όταν ο k διατρέχει τους θετικούς διαιρέτες του n, τότε ο n/k διατρέχει κι αυτός τους θετικούς διαιρέτες του n. Άρα

$$\left(\prod_{k|n} k\right)^2 = \prod_{k|n} k \cdot \prod_{k|n} \frac{n}{k} = \prod_{k|n} n = n^{d(n)},$$

αφού το πλήθος των θετικών διαιρετών του n ισούται με $d(n)$. Έπεται το ζητούμενο.

2.9. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{k|n} d(k)^3 = \left(\sum_{k|n} d(k)\right)^2.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε τις αριθμητικές συναρτήσεις

$$A(n) = \sum_{k|n} d(k)^3 \quad \text{και} \quad B(n) = \sum_{k|n} d(k).$$

Δείχνουμε πρώτα ότι οι A και B είναι πολλαπλασιαστικές: αν $(m, n) = 1$, τότε για $r = 1, 3$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k|mn} d(k)^r &= \sum_{k_1|m} \sum_{k_2|n} d(k_1k_2)^r = \sum_{k_1|m} \sum_{k_2|n} d(k_1)^r d(k_2)^r \\ &= \left(\sum_{k_1|m} d(k_1)^r\right) \left(\sum_{k_2|n} d(k_2)^r\right),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι η d είναι πολλαπλασιαστική και το ότι όταν οι k_1, k_2 διατρέχουν τους θετικούς διαιρέτες των m, n αντίστοιχα, τότε ο k_1k_2 διατρέχει τους θετικούς διαιρέτες του mn, και $(k_1, k_2) = 1$ αφού $(m, n) = 1$.

Αφού η B είναι πολλαπλασιαστική, το ίδιο ισχύει και για την B^2. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $A(p^k) = B^2(p^k)$. Έχουμε:

$$A(p^k) = d(1)^3 + d(p)^3 + \cdots + d(p^k)^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3$$

και

$$B^2(p^k) = \big(d(1) + d(p) + \cdots + d(p^k)\big)^2 = (1 + 2 + \cdots + (k+1))^2.$$

Όμως,

$$1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left(1+2+\cdots+(k+1)\right)^2,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

2.10. (α) *Αποδείξτε ότι ο $d(n)$ είναι περιττός αν και μόνο αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο.*

(β) *Αποδείξτε ότι $d(n)\leqslant d(2^n-1)$ για κάθε φυσικό n.*

(γ) *Αποδείξτε ότι $d(n)<2\sqrt{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

(δ) *Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους ισχύει $d(2n)=n$.*

Υπόδειξη. (α) Αν $n=1$, τότε $d(n)=1$ και το ζητούμενο ισχύει: ο 1 είναι τέλειο τετράγωνο και ο $d(1)$ περιττός. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n\geqslant 2$ και ότι $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ είναι η κανονική αναπαράσταση του n. Τότε,

$$d(n)=(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1),$$

άρα ο $d(n)$ είναι περιττός αν και μόνο αν όλοι οι k_j είναι άρτιοι (αν κάποιος k_j είναι περιττός τότε ο $d(n)$ διαιρείται με τον άρτιο k_j+1, δηλαδή είναι άρτιος). Από την άλλη πλευρά, όλοι οι k_j είναι άρτιοι αν και μόνο αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο. Πράγματι, αν $k_j=2s_j$ τότε $n=m^2$ όπου $m=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_r^{s_r}$. Το αντίστροφο ελέγχεται εντελώς ανάλογα.

(β) Έστω A το σύνολο των θετικών διαιρετών του n και B το σύνολο των θετικών διαιρετών του 2^n-1. Ορίζουμε μια απεικόνιση $g:A\to B$ με $g(k)=2^k-1$. Η g είναι καλά ορισμένη: αν $k\mid n$ τότε $(2^k-1)\mid(2^n-1)$. Η g είναι προφανώς ένα προς ένα, άρα το A έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα έχει το B. Με άλλα λόγια, $d(n)\leqslant d(2^n-1)$.

(γ) Παρατηρούμε ότι αν $d\mid n$ τότε $d\leq\sqrt{n}$ ή $n/d\leq\sqrt{n}$ (διαφορετικά θα είχαμε $n=\sqrt{n}\sqrt{n}<d\cdot(n/d)=n$) και συνεπώς $d\in\{1,2,\ldots,[\sqrt{n}]\}$ ή $n/d\in\{1,2,\ldots,[\sqrt{n}]\}$. Προκύπτει ότι το πλήθος $d(n)$ των θετικών διαιρετών του n δεν ξεπερνά το διπλάσιο του πλήθους των στοιχείων του $\{1,2,\ldots,[\sqrt{n}]\}$, επομένως $d(n)\leq 2\sqrt{n}$. Εύκολα βλέπουμε από τα παραπάνω ότι η περίπτωση της ισότητας δεν υφίσταται.

(δ) Αν $d(2n)=n$, από το (γ) έχουμε $n=d(2n)<2\sqrt{2n}$, άρα $\sqrt{n}<2\sqrt{2}$ ή $n<8$. Οι λύσεις με $n<8$ είναι οι $n=4$ και $n=6$.

2.11. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{k\mid n}\mu(k)d\left(\frac{n}{k}\right)=1\qquad \textit{και}\qquad \sum_{k\mid n}\mu(k)\sigma\left(\frac{n}{k}\right)=n$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Έχουμε $d(n)=\sum_{k\mid n}u(k)$, όπου $u(k)=1$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Από τον τύπο αντιστροφής του Möbius παίρνουμε

$$1=u(n)=\sum_{k\mid n}\mu(k)d\left(\frac{n}{k}\right).$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο η σχέση $\sigma(n) = \sum_{k|n} N(k)$, όπου $N(k) = k$, δίνει

$$n = N(n) = \sum_{k|n} \mu(k)\sigma\left(\frac{n}{k}\right).$$

2.12. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $f(n) = (-1)^{n-1}$ *είναι πολλαπλασιαστική και υπολογίστε το άθροισμα*

$$h(n) = \sum_{k|n} (-1)^{k-1}\mu\left(\frac{n}{k}\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $(m,n) = 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(-1)^{mn-1} = (-1)^{m-1}(-1)^{n-1}$$

δηλαδή ότι ο $mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$ είναι άρτιος. Αυτό δεν θα μπορούσε να ισχύει μόνο αν οι m, n ήταν και οι δύο άρτιοι, το οποίο αποκλείεται αφού υποθέσαμε ότι $(m,n) = 1$. Άρα η $f(n) = (-1)^{n-1}$ είναι πολλαπλασιαστική. Η συνάρτηση

$$h(n) = \sum_{k|n} (-1)^{k-1}\mu\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k|n} f(k)\mu\left(\frac{n}{k}\right)$$

είναι πολλαπλασιαστική γιατί οι f, μ είναι πολλαπλασιαστικές. Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή $h(p^k)$, όπου p πρώτος και $k \geqslant 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} h(p^k) &= \mu(p^k) + (-1)^{p-1}\mu(p^{k-1}) + \cdots + (-1)^{p^{k-1}-1}\mu(p) + (-1)^{p^k-1}\mu(1) \\ &= (-1)^{p^{k-1}-1}(-1) + (-1)^{p^k-1} = (-1)^{p^{k-1}} + (-1)^{p^k-1}. \end{aligned}$$

Όμως αν ο p είναι περιττός πρώτος τότε ο p^{k-1} είναι περιττός και ο $p^k - 1$ είναι άρτιος, ενώ αν $p = 2$ και $k > 1$ έχουμε το αντίθετο. Συνεπώς $h(p^k) = 0$ εκτός αν $p = 2$ και $k = 1$, οπότε $h(2) = -2$. Αφού η h είναι πολλαπλασιαστική, για κάθε $n \geqslant 3$ έχουμε $h(n) = 0$. Τέλος $h(1) = (-1)^0\mu(1) = 1$.

2.13. *Να βρείτε μια αριθμητική συνάρτηση* $f(n)$ *τέτοια ώστε, για κάθε θετικό ακέραιο* n,

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Υπόδειξη. Στην Άσκηση 2.3 είδαμε ότι

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}.$$

Συνεπώς, ζητάμε $f(n)$ τέτοια ώστε

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{d|n} \frac{n}{d} f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} df(d).$$

Είναι τώρα φανερό ότι αρκεί να θεωρήσουμε την

$$f(n) = \frac{1}{n}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}.$$

Χωρίς να καταφύγουμε στην Άσκηση 2.3, παρατηρούμε ότι η ζητούμενη f πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{N} * f.$$

Η $\frac{1}{N}$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, άρα έχει αντίστροφη την $\frac{\mu}{N}$, από την Άσκηση 2.2. Έπεται ότι

$$f = \left(\frac{\mu}{N} * \frac{1}{N}\right) * f = \frac{\mu}{N} * \left(\frac{1}{N} * f\right) = \frac{\mu}{N} * \frac{1}{\varphi}.$$

2.14. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$$

για κάθε $n \geqslant 2$.

Υπόδειξη. Έστω $n \geqslant 2$. Παρατηρούμε ότι αν $1 \leqslant k < n$ τότε $(k,n) = 1$ αν και μόνο αν $(n-k,n) = 1$. Άρα

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} k = \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} (n-k).$$

Έπεται ότι

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} k + \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} (n-k)\right) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} n = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

2.15. *Αποδείξτε ότι* $\varphi(n)d(n) \geqslant n$ *για* $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι αν ο p είναι πρώτος και $k \geqslant 1$ τότε

$$\varphi(p^k)d(p^k) = p^{k-1}(p-1)(k+1) \geqslant p^k$$

διότι $(p-1)(k+1) \geqslant 2p-2 \geqslant p$. Τώρα, αφού οι φ και d είναι πολλαπλασιαστικές, αν $n = p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s} \geqslant 2$ έχουμε

$$\varphi(n)d(n) = \prod_{i=1}^{s}\varphi(p_i^{k_i}) \cdot \prod_{i=1}^{s} d(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^{s}\varphi(p_i^{k_i})d(p_i^{k_i}) \geqslant \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i} = n.$$

Τέλος, είναι φανερό ότι $\varphi(1)d(1) = 1$.

2.16. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *με την ιδιότητα* $\varphi(n) \mid n$. *Αποδείξτε ότι* $n = 2^a3^b$ *για κάποιους* $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Υπόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $n = 2^a3^bp_3^{k_3}\cdots p_r^{k_r}$, όπου $a, b \geqslant 0$ και $k_i > 0$, είναι η κανονική αναπαράσταση του n, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αν $a, b > 0$, έχουμε

$$\varphi(n) = 2^{a-1}3^{b-1} \cdot 2 \cdot p_3^{k_3-1}(p_3-1)\cdots p_r^{k_r-1}(p_r-1),$$

και από την υπόθεση,

$$2^a 3^{b-1}(p_3-1)\cdots(p_r-1) \mid 2^a 3^b p_3\cdots p_r.$$

Όμως, η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί το δεξιό μέλος είναι 2^a ενώ το αριστερό μέλος διαιρείται με 2^{a+1} αφού οι $p_3-1,\dots,p_r-1$ είναι άρτιοι.

Έστω ότι $n=2^a p_3^{k_3}\cdots p_r^{k_r}$, όπου $a>0$, $p_i\geqslant 5$ και $k_i>0$. Όπως πριν, παίρνουμε

$$2^{a-1}(p_3-1)\cdots(p_r-1) \mid 2^a p_3\cdots p_r \Longrightarrow (p_3-1)\cdots(p_r-1) \mid 2p_3\cdots p_r.$$

Όμως τότε $(p_3-1) \mid 2p_2\cdots p_r$, το οποίο είναι άτοπο γιατί θα είχαμε $(p_3-1)\mid 2$ ή $(p_3-1)\mid p_j$ για κάποιον j, άτοπο αφού ο p_3-1 είναι άρτιος και μεγαλύτερος ή ίσος του 4.

2.17. *Υποθέτουμε ότι $p_1<p_2<\cdots<p_N$ είναι όλοι οι πρώτοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι*

$$\varphi(p_1p_2\cdots p_N)=1$$

και καταλήξτε σε άτοπο (έτσι, παίρνετε άλλη μια απόδειξη για την απειρία των πρώτων αριθμών).

Υπόδειξη. Έστω $1<x<p_1p_2\cdots p_N$. Τότε ο x έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη, ο οποίος είναι κάποιος από τους p_i, $i=1,\dots,N$ (έχουμε υποθέσει ότι αυτοί είναι όλοι οι πρώτοι). Άρα $(x,p_1p_2\dots p_N)>1$. Έπεται ότι

$$\varphi(p_1p_2\dots p_N)=1$$

(από όλους τους $1\leqslant x\leqslant p_1p_2\dots p_N$, μόνο ο 1 είναι σχετικά πρώτος προς τον $p_1p_2\dots p_N$). Από την άλλη πλευρά, η φ είναι πολλαπλασιαστική, άρα

$$\varphi(p_1p_2\dots p_N)=\varphi(p_1)\varphi(p_2)\dots\varphi(p_N)\geqslant\varphi(2)\varphi(3)=1\cdot 2=2$$

(οι πρώτοι δύο από τους $p_1,\dots,p_N$ είναι οι $p_1=2$ και $p_2=3$). Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

2.18. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{k\mid n}\sigma(k)\varphi\left(\frac{n}{k}\right)=nd(n)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι φ,σ και d είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις, ελέγχουμε ότι οι $nd(n)$ και $h(n)=\sum_{k\mid n}\sigma(k)\varphi\left(\frac{n}{k}\right)$ είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $h(p^r)=p^r d(p^r)$. Έχουμε $\sigma(p^r)=\sum_{k=0}^r p^k$, άρα

$$\begin{aligned}
h(p^r)&=\sigma(p^r)\varphi(1)+\sum_{k=0}^{r-1}\sigma(p^k)\varphi(p^{r-k})=\sum_{k=0}^{r}p^k+\sum_{k=1}^{r-1}\frac{p^{k+1}-1}{p-1}\,p^{r-k-1}(p-1)\\
&=\sum_{k=0}^{r}p^k+\sum_{k=0}^{r-1}(p^{k+1}-1)\,p^{r-k-1}=\sum_{k=0}^{r}p^k+\sum_{k=0}^{r-1}(p^r-p^{r-k-1})\\
&=p^r+\sum_{k=0}^{r-1}p^k+(r+1)p^r-\sum_{k=0}^{r-1}p^{r-k-1}=(r+1)p^r=p^r d(p^r),
\end{aligned}$$

αφού $\sum_{k=0}^{r-1}p^k=\sum_{k=0}^{r-1}p^{r-k-1}$.

2.19. *Έστω $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ πολλαπλασιαστική αριθμητική συνάρτηση. Αν $m,n\in\mathbb{N}$, $d=(m,n)$ και $D=mn/d$ αποδείξτε ότι*

$$f(m)f(n)=f(d)f(D).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $m=\prod_{i=1}^t p_i^{r_i}$ και $n=\prod_{i=1}^t p_i^{r_i}$ όπου $p_1,p_2,\dots,p_t$ είναι διακεκριμένοι πρώτοι και r_i,s_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Τότε $d=(m,n)=\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$ και $D=mn/d=\prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i}$ όπου $\alpha_i=\min\{r_i,s_i\}$ και $\beta_i=(r_i+s_i)-\min\{r_i,s_i\}$. Παρατηρώντας ότι $r_i+s_i=\alpha_i+\beta_i$ για κάθε i, από την πολλαπλασιαστικότητα της f έχουμε

$$f(m)f(n)=\prod_{i=1}^t f(p_i^{r_i})\prod_{i=1}^t f(p_i^{s_i})=\prod_{i=1}^t f(p_i^{\alpha_i})\prod_{i=1}^t f(p_i^{\beta_i})=f(d)f(D).$$

2.20. *Ορίζουμε $\nu(1)=0$ και για $n>1$ ορίζουμε $\nu(n)$ να είναι το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων παραγόντων του n. Αποδείξτε ότι αν $f=\mu*\nu$ τότε $f(n)=0$ ή $f(n)=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Έστω $g(n)$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου των πρώτων, δηλαδή $g(n)=1$ αν ο n είναι πρώτος και $g(n)=0$ αν ο n δεν είναι πρώτος. Παρατηρούμε ότι

$$(g*u)(n)=\sum_{d|n}g(d)=\sum_{p|n}\mathbf{1}=\nu(n),$$

δηλαδλη $\nu=g*u$. Έπεται ότι $g=\mu*\nu=f$. Δηλαδή, η f είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου των πρώτων. Ειδικότερα, $f(n)=0$ ή $f(n)=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

2.21. *Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x>0$ ορίζουμε $\varphi(x,n)$ να είναι το πλήθος των θετικών ακεραίων $k\leqslant x$ που είναι σχετικώς πρώτοι προς τον n. Παρατηρήστε ότι $\varphi(n,n)=\varphi(n)$. Αποδείξτε ότι*

$$\varphi(x,n)=\sum_{d|n}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]\qquad\text{και}\qquad\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{x}{d},\frac{n}{d}\right)=[x].$$

Υπόδειξη. Ξεκινώντας από το δεξιό μέλος γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]&=\sum_{d|n}\sum_{q=1}^{[x/d]}\mu(d)=\sum_{k=1}^{[x]}\sum_{d|(n,k)}\mu(d)=\sum_{k=1}^{[x]}I((n,k))\\&=\varphi(x,n).\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα θεωρούμε τη διαμέριση του $S=\{1,\dots,[x]\}$ στα $S_d=\{k\in S:(k,n)=d\}$, όπου $d\mid n$. Αν r_d είναι ο πληθλαριθμος του S_d, έχουμε

$$r_d=|\{k\leqslant x:(k,n)=d\}|=|\{q\leqslant x/d:(q,n/d)=1\}|=\varphi\left(\frac{x}{d},\frac{n}{d}\right).$$

Άρα,

$$\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{x}{d},\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}r_d=\sum_{d|n}|S_d|=|S|=[x].$$

2.22. *Αν* $f(n), g(n) > 0$ *για κάθε* n *και* $a(n) \in \mathbb{R}$, $a(1) \neq 0$, *αποδείξτε ότι*

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{a(n/d)} \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad f(n) = \prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)},$$

όπου $b = a^{-1}$ *είναι η αντίστροφη Dirichlet της* a.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(n) > 0$ και $g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{a(n/d)}$. Τότε, η g παίρνει θετικές τιμές και παίρνοντας λογαρίθμους έχουμε

$$\ln g(n) = \sum_{d|n} a(n/d) \ln f(d) = (a * (\ln f))(n).$$

Αφού $b = a^{-1}$ έχουμε

$$b * (\ln g) = b * (a * (\ln f)) = (b * a) * (\ln f) = I * (\ln f) = \ln f.$$

Δηλαδή,

$$\ln f(n) = \sum_{d|n} b(n/d) \ln g(d) = \ln \left(\prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)} \right),$$

άρα

$$f(n) = \prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)}.$$

Για το αντίστροφο χρειάζεται η υπόθεση ότι $g(n) > 0$. Κατά τα άλλα, η απόδειξη είναι εντελώς παρόμοια με την παραπάνω.

2.23. *Έστω* $P(n)$ *το γινόμενο των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι από* n *και σχετικώς πρώτοι προς τον* n. *Αποδείξτε ότι*

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d} \right)^{\mu(n/d)}.$$

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 2.22, αφού $\mu^{-1} = u$, έχουμε

$$\frac{P(n)}{n^{\varphi(n)}} = \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d} \right)^{\mu(n/d)} \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad \frac{n!}{n^n} = \prod_{d|n} \frac{P(d)}{d^{\varphi(d)}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \prod_{d|n} \frac{P(d)}{d^{\varphi(d)}} &= \prod_{d|n} \frac{1}{d^{\varphi(d)}} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^{d} k \\ &= \prod_{d|n} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^{d} \frac{k}{d} = \prod_{d|n} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^{d} \frac{kn/d}{n}. \end{aligned}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αν $A = \{kn/d : d \mid n, 1 \leqslant k \leqslant d, (k,d) = 1\}$ τότε κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή kn/d για κάποιους $d \mid n$ και $1 \leqslant k \leqslant d$ με $(k,d) = 1$. Αρκεί να πάρουμε $k = m/(m,n)$ και $d = n/(m,n)$ (ελέγξτε το μονοσήμαντο). Συνεπώς,

$$\prod_{d|n} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^{d} \frac{kn/d}{n} = \prod_{m=1}^{n} \frac{m}{n} = \frac{n!}{n^n}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{n!}{n^n} = \prod_{d|n} \frac{P(d)}{d^{\varphi(d)}}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

2.24. *Η συνάρτηση J_k του Jordan γενικεύει τη συνάρτηση φ του Euler και ορίζεται από την*

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

Αποδείξτε ότι

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k \qquad \text{και} \qquad n^k = \sum_{d|n} J_k(d).$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η J_k είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αν $(m,n) = 1$ τότε (αφού ένας πρώτος p διαιρεί τον mn αν και μόνο αν διαιρεί ακριβώς έναν από τους m και n)

$$\begin{aligned} J_k(mn) &= (mn)^k \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = m^k n^k \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \\ &= m^k \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = J_k(m) J_k(n). \end{aligned}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k = (\mu * N^k)(n).$$

Αφού οι J_k και $\mu * N^k$ είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $n = p^s$ για κάποιον πρώτο p και κάποιον $s \geqslant 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{d|p^s} \mu(d) \left(\frac{p^s}{d}\right)^k &= \mu(1)(p^s)^k + \mu(p)(p^{s-1})^k = p^{sk} - p^{(s-1)k} = p^{sk}(1 - p^{-k}) \\ &= (p^s)^k \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = J_k(p^s) \end{aligned}$$

και έπεται το ζητούμενο. Τώρα, από τον τύπο αντιστροφής του Möbius,

$$J_k = \mu * N^k \implies J_k * u = N^k,$$

δηλαδή
$$n^k = (J_k * u)(n) = \sum_{d|n} J_k(d).$$

2.25. *Έστω $f(n)$ πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι*
$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$$
για κάθε ελεύθερο τετραγώνων φυσικό αριθμό n και ότι
$$f^{-1}(p^2) = f(p)^2 - f(p^2)$$
για κάθε πρώτο p. Αποδείξτε επίσης ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αν και μόνο αν $f^{-1}(p^k) = 0$ για κάθε πρώτο p και κάθε ακέραιο $k \geqslant 2$.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι αν $n = p_1 \cdots p_k$ είναι φυσικός αριθμός που είναι ελεύθερος τετραγώνων τότε $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$. Γνωρίζουμε ότι $f^{-1}(1) = 1 = \mu(1)f(1)$ και ότι η f^{-1} προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την αναδρομική σχέση
$$f^{-1}(n) = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n/d)f^{-1}(d).$$
Ειδικότερα, αν $n = p =$πρώτος, έχουμε
$$f^{-1}(p) = -f(p)f^{-1}(1) = -f(p) = \mu(p)f(p).$$
Υποθέτουμε ότι $n > 1$ και $f^{-1}(m) = \mu(m)f(m)$ για κάθε $m < n$ που είναι ελεύθερος τετραγώνων. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων τότε οι $d, n/d$ είναι επίσης ελεύθεροι τετραγώνων και $(d, n/d) = 1$ αφού οι d και n/d έχουν διαφορετικούς πρώτους παράγοντες. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε
$$\begin{aligned} f^{-1}(n) &= -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n/d)f^{-1}(d) = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n/d)\mu(d)f(d) = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n/d)f(d)\mu(d) \\ &= -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n)\mu(d) = -f(n)\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \mu(d) = -f(n)(I(n) - \mu(n)) = f(n)\mu(n), \end{aligned}$$
δηλαδή $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$.

Με την ίδια λογική, αφού οι διαιρέτες του p^2 που είναι γνήσια μικρότεροι από p^2 είναι ο 1 και ο p, γράφουμε
$$f^{-1}(p^2) = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(n/d)f^{-1}(d) = -f(p^2)f^{-1}(1) - f(p)f^{-1}(p) = -f(p^2) + f(p)^2,$$
χρησιμοποιώντας την $f^{-1}(p) = -f(p)$ που ελέγξαμε προηγουμένως.

2.26. (α) *Έστω $f \neq 0$ πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι*

$$(*) \qquad (f \cdot g)^{-1} = f \cdot g^{-1}$$

για κάθε αριθμητική συνάρτηση g με $g(1) \neq 0$.

(β) *Αποδείξτε ότι αν η f είναι πολλαπλασιαστική και η $(*)$ ισχύει για την $g = \mu^{-1}$, τότε η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $g(1) \neq 0$, γνωρίζουμε (Θεώρημα 2.4.1) ότι η g^{-1} ορίζεται. Γράφουμε

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) * (f \cdot g^{-1}))(n) &= \sum_{d|n} f(d)g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= f(n)\sum_{d|n} g(d)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= f(n)(g * g^{-1})(n) = f(n)I(n) = I(n), \end{aligned}$$

αφού $I(n) = 0$ αν $n > 1$ και $f(1) = I(1) = 1$. Το γεγονός ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική μας επέτρεψε να γράψουμε $f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$ για κάθε $d \mid n$.

(β) Αν η f είναι πολλαπλασιαστική και υποθέσουμε ότι η $(*)$ ισχύει για $g = \mu^{-1} = u$, τότε $f^{-1} = (f \cdot u)^{-1} = f \cdot \mu$, οπότε η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική από την Άσκηση 2.2(β).

2.27. *Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\sigma(n) \leqslant n(1 + \ln n).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sigma(n) = \sum_{k|n} k = \sum_{k|n} \frac{n}{k} \leqslant n\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s},$$

χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι ο n/k διατρέχει τους θετικούς διαιρέτες του n όταν ο k διατρέχει τους θετικούς διαιρέτες του n. Όμως

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} \leqslant 1 + \int_1^2 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln n,$$

άρα $\sigma(n) \leqslant n(1 + \ln n)$.

2.28. *Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες*

$$\frac{1}{2} < \frac{\varphi(n)\sigma(n)}{n^2} \leqslant 1.$$

Αποδείξτε επίσης ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\varphi(n) > \frac{n}{2(1 + \ln n)}.$$

Υπόδειξη. Στην περίπτωση $n = 1$ είναι $\varphi(n) = \sigma(n) = 1$, οπότε έχουμε ισότητα στο δεξιό μέλος. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n \geqslant 2$ και θεωρούμε την ανάλυση $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ του n. Τότε,

$$\sigma(n) = \prod_{j=1}^{r} \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{p_j - 1}$$

και
$$\varphi(n)=\prod_{j=1}^{r} p_j^{k_j-1}(p_j-1),$$
άρα
$$\sigma(n)\varphi(n)=\prod_{j=1}^{r} p_j^{k_j-1}(p_j^{k_j+1}-1)=\prod_{j=1}^{r} p_j^{2k_j}\left(1-\frac{1}{p_j^{k_j+1}}\right),$$
δηλαδή
$$\sigma(n)\varphi(n)=n^2\prod_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_j^{k_j+1}}\right).$$
Το γινόμενο στο δεξιό μέλος είναι προφανώς μικρότερο ή ίσο από 1, άρα
$$\frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2}\leqslant 1.$$
Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_j^{k_j+1}}\right)&\geqslant\prod_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\geqslant\prod_{m=2}^{n}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\\&=\prod_{m=2}^{n}\frac{m+1}{m}\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{m-1}{m}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2n}>\frac{1}{2},\end{aligned}$$
απ' όπου προκύπτει η $\sigma(n)\varphi(n)/n^2>1/2$. Χρησιμοποιώντας και την Άσκηση 2.27 παίρνουμε
$$\varphi(n)>\frac{n^2}{2\sigma(n)}>\frac{n}{2(1+\ln n)}.$$

2.29. *Αποδείξτε ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και κάθε $C>0$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*
$$d(n)>C(\ln n)^k.$$

Υπόδειξη. Θέλουμε να κατασκευάσουμε φυσικούς n με μεγάλο (σε σχέση με το n) πλήθος διαιρετών. Θεωρούμε τους $(k+1)$ μικρότερους πρώτους αριθμούς $p_1<p_2<\cdots<p_k<p_{k+1}$ και δοκιμάζουμε φυσικούς n της μορφής
$$n=(p_1p_2\cdots p_kp_{k+1})^m,$$
όπου ο m θα επιλεγεί κατάλληλα. Έχουμε
$$d(n)=\prod_{j=1}^{k+1}(m+1)=(m+1)^{k+1}$$
και
$$C(\ln n)^k=Cm^k\big(\ln(p_1p_2\cdots p_{k+1})\big)^k.$$
Αν ικανοποιείται η
$$m^{k+1}>Cm^k\big(\ln(p_1p_2\cdots p_{k+1})\big)^k,$$

το οποίο εξασφαλίζεται αν επιλέξουμε $m > C\big(\ln(p_1p_2\cdots p_{k+1})\big)^k$, τότε θα έχουμε

$$d(n) = (m+1)^{k+1} > m^{k+1} > C(\ln n)^k.$$

2.30. *Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε*

$$d(n) \leqslant C(\varepsilon)n^{\varepsilon}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, το πλήθος των διαιρετών του n «φράσσεται» από n^{ε}.

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Για κάθε $n \geqslant 2$ με κανονική αναπαράσταση την $n = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$, έχουμε

$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon}} = \frac{1+k_1}{p_1^{\varepsilon k_1}}\cdots\frac{1+k_r}{p_r^{\varepsilon k_r}}.$$

Οι $p_1,\ldots,p_r$ χωρίζονται σε δύο ομάδες. Αν κάποιος p_j ικανοποιεί την $2 \leqslant p_j < 2^{1/\varepsilon}$, τότε (αφού $p_j \geqslant 2$) έχουμε

$$\frac{1+k_j}{p_j^{\varepsilon k_j}} \leqslant \frac{1+k_j}{2^{\varepsilon k_j}} = \frac{1+k_j}{e^{(\ln 2)\varepsilon k_j}} < \frac{1+k_j}{1+(\ln 2)\varepsilon k_j} < \frac{1}{(\ln 2)\varepsilon},$$

διότι $1+(\ln 2)\varepsilon k_j > (\ln 2)\varepsilon(1+k_j)$. Αν πάλι $p_j \geqslant 2^{1/\varepsilon}$, τότε

$$\frac{1+k_j}{p_j^{\varepsilon k_j}} \leqslant \frac{1+k_j}{2^{k_j}} \leqslant 1.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι

$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon}} \leqslant \prod_{p<2^{1/\varepsilon}}\frac{1}{(\ln 2)\varepsilon} =: C(\varepsilon),$$

όπου η σταθερά $C(\varepsilon)$ εξαρτάται μόνο από το ε: αν μας δοθεί το ε βρίσκουμε πόσοι πρώτοι δεν ξεπερνούν τον $2^{1/\varepsilon}$ και υψώνουμε τον $1/[\varepsilon(\ln 2)]$ σε αυτή τη δύναμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέσοι όροι αριθμητικών συναρτήσεων

3.1. *Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης Euler-Maclaurin αποδείξτε ότι για κάθε $x \geqslant 3$,*

$$\sum_{n\leqslant x}(\ln n)^2 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + O((\ln x)^2).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = (\ln t)^2$, $t \geqslant 1$. Έχουμε $f'(t) = 2\frac{\ln t}{t}$, άρα

$$\sum_{n\leqslant x}(\ln n)^2 = \int_1^x (\ln t)^2 dt + 2\int_1^x \{t\}\frac{\ln t}{t}dt - x(\ln x)^2.$$

Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}\int_1^x (\ln t)^2 dt &= \int_1^x (t)'(\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - \int_1^x t\frac{2\ln t}{t}dt \\ &= x(\ln x)^2 - 2\int_1^x \ln t\, dt = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$2\int_1^x \{t\}\frac{\ln t}{t}dt \leqslant 2\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = 2\int_0^{\ln x} y\,dy = (\ln x)^2.$$

Επίσης, $0 \leqslant x(\ln x)^2 \leqslant (\ln x)^2$. Άρα,

$$\left|2\int_1^x t\frac{\ln t}{t}dt - x(\ln x)^2\right| \leqslant 2(\ln x)^2.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n\leqslant x}(\ln n)^2 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + O((\ln x)^2).$$

3.2. *Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης Euler-Maclaurin αποδείξτε ότι για κάθε* $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

όπου A *είναι μια σταθερά, και*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n\ln n} = \ln(\ln x) + B + O\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$

όπου B *είναι μια σταθερά.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t \geqslant 1$. Έχουμε $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, άρα

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\ln n}{n} = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt + \int_1^x \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt - \{x\}\frac{\ln x}{x}.$$

Υπολογίζουμε το

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \int_0^{\ln x} y\,dy = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Στη συνέχεια γράφουμε

$$\int_1^x \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt = \int_1^\infty \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt - \int_x^\infty \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt,$$

και θέτουμε

$$A := \int_1^\infty \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει γιατί η συνάρτηση $t \mapsto \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας (τους φυσικούς) σε κάθε διάστημα $[1, M]$, όπου $M > 1$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, M]$, και για κάθε $N > M \geqslant e$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_M^N \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt\right| &\leqslant \int_M^N \frac{1+\ln t}{t^2}dt \leqslant 2\int_M^N \frac{\ln t}{t^2}dt = -2\frac{\ln t}{t}\Big|_M^N + 2\int_M^N \frac{1}{t^2}dt \\ &= 2\left(\frac{\ln M}{M} - \frac{\ln N}{N}\right) + 2\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

όταν $M, N \to \infty$, το οποίο δείχνει ότι υπάρχει το

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt$$

(εξηγήστε γιατί). Για $x \geqslant e$ φράσσουμε το

$$\left|\int_x^\infty \{t\}\frac{1-\ln t}{t^2}dt\right| \leqslant \int_x^\infty \frac{\ln t - 1}{t^2}dt = \frac{\ln x}{x}.$$

Τέλος, $0 \leqslant \{x\}\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln x}{x}$. Συνολικά,

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$, $t \geqslant 2$. Έχουμε $f'(t) = -\frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t}$, άρα

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n \ln n} &= \int_1^x \frac{1}{t \ln t} dt - \int_1^x \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + \{x\} \frac{1}{x \ln x} \\
&= \ln(\ln x) - \int_1^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + \int_x^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \\
&= \ln(\ln x) + B + \int_x^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right).
\end{aligned}$$

όπου

$$B = -\int_1^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_x^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt \right| \leqslant \int_x^\infty \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt = -\int_x^\infty f'(t) dt = f(x) = \frac{1}{x \ln x},$$

οπότε τελικά

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n \ln n} = \ln(\ln x) + B + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

3.3. *Αποδείξτε ότι για κάθε αριθμητική συνάρτηση $f(n)$,*

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d \leqslant x} f(d) \left[\frac{x}{d}\right].$$

Συμπεράνατε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Η πρώτη ταυτότητα έχει αποδειχθεί στη θεωρία (Θεώρημα 3.4.6). Δεδομένου ότι

$$d(n) = \sum_{d|n} 1,$$

γράφουμε

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leqslant x} 1 \cdot \left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{d \leqslant x} \frac{x}{d} + \sum_{d \leqslant x} \left\{\frac{x}{d}\right\}.$$

Έχουμε

$$\sum_{d \leqslant x} \frac{x}{d} = x \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{d} = x \left(\ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x \ln x + \gamma x + O(1)$$

και

$$\sum_{d \leqslant x} \left\{\frac{x}{d}\right\} \leqslant \sum_{d \leqslant x} 1 \leqslant x.$$

Άρα,

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \ln x + \gamma x + O(1) + O(x) = x \ln x + O(x).$$

3.4. *Χρησιμοποιήστε τον τύπο άθροισης κατά μέρη για να δείξετε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n}=\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\gamma(\ln x)+O(1)$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler.

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 3.2(α) γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{d\leqslant x}\frac{\ln d}{d}=\frac{1}{2}(\ln x)^2+A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

για κάποια σταθερά $A>0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n} &= \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\sum_{d|n}1=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}\frac{1}{n}\\
&=\sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant \frac{x}{d}}\frac{1}{dq}=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\left(\sum_{q\leqslant\frac{x}{d}}\frac{1}{q}\right)\\
&=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\left(\ln\frac{x}{d}+\gamma+O\left(\frac{d}{x}\right)\right)\\
&=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}(\ln x+\gamma)-\sum_{d\leqslant x}\frac{\ln d}{d}+\sum_{d\leqslant x}O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&=(\ln x+\gamma)\left(\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2+A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)+O(1)\\
&=(\ln x)^2+2\gamma\ln x+\gamma^2+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}(\ln x)^2+A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)+O(1)\\
&=\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\gamma\ln x+O(1),
\end{aligned}$$

αφού οι όροι $O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ και $O\left(\frac{1}{x}\right)$ και οι σταθερές γ^2 και A είναι $O(1)$.

3.5. *Αν $x\geqslant 2$ και $\alpha>1$, αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}\ln x}{1-\alpha}+\zeta(\alpha)^2+O(x^{1-\alpha}).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n^\alpha}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{d|n}\mathbf{1}=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}\frac{1}{n^\alpha}=\sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant\frac{n}{d}}\frac{1}{(dq)^\alpha}=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d^\alpha}\left(\sum_{q\leqslant n/d}\frac{1}{q^\alpha}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\sum_{m\leqslant y}\frac{1}{m^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}+\zeta(\alpha)+O(y^{-\alpha})$$

και την

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{1}{m}=\ln x+\gamma+O(1/x)$$

πρώτα για $m=q$, $y=x/d$ και μετά για $m=d$, $y=x$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n^\alpha}&=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d^\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}(x/d)^{1-\alpha}+\zeta(\alpha)+O((x/d)^{-\alpha})\right)\\&=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}+\zeta(\alpha)\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d^\alpha}+O(x^{1-\alpha})\\&=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}(\ln x+\gamma+O(1/x))+\zeta(\alpha)\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\zeta(\alpha)+O(x^{-\alpha})\right)+O(x^{1-\alpha})\\&=\frac{x^{1-\alpha}\ln x}{1-\alpha}+\gamma\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}+O(x^{-\alpha})+\zeta(\alpha)\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\zeta(\alpha)^2+O(x^{-\alpha})+O(x^{1-\alpha})\\&=\frac{x^{1-\alpha}\ln x}{1-\alpha}+\zeta(\alpha)^2+O(x^{1-\alpha}).\end{aligned}$$

3.6. *Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n. Πιο συγκεκριμένα,*

$$\omega(n)=\begin{cases}0 & ,\ \text{αν } n=1\\ k & ,\ \text{αν } n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $x\geqslant 3$,

$$\sum_{n\leqslant x}2^{\omega(n)}=\frac{6}{\pi^2}x\ln x+O(x).$$

Υπόδειξη. Η $2^{\omega(n)}$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε πρώτο p και $m\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$2^{\omega(p^m)}=2=\sum_{d\mid p^m}|\mu(d)|=(|\mu|*u)(p^m).$$

Έπεται ότι

$$2^{\omega(n)}=\sum_{d\mid n}|\mu(d)|=\sum_{d\mid n}\mu^2(d).$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n}\mu^2(d)=\sum_{d\leqslant x}\mu^2(d)[x/d]=x\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu^2(d)}{d}+O\left(\sum_{d\leqslant x}\mu^2(d)\right)=x\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu^2(d)}{d}+O(x).$$

Από τις ιδιότητες του γινομένου Dirichlet και την $I=\mu*u$ παίρνουμε

$$\mu^2=\mu^2*I=\mu^2*(\mu*u)=u*(\mu^2*\mu).$$

Θέτουμε $g = \mu^2 * \mu$. Η g είναι πολλαπλασιαστική και για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$g(p^m) = \sum_{k=0}^{m} \mu^2(p^k)\mu(p^{m-k}) = \mu(p^m) + \mu(p^{m-1})$$

αφού $\mu(p^k) = 0$ αν $k \geqslant 2$ και $\mu^2(1) = \mu^2(p) = 1$. Έπεται ότι $g(p^m) = 0$ αν $m \neq 2$ και $g(p^2) = -1$. Από αυτές τις σχέσεις βλέπουμε εύκολα ότι $g(d) = 0$ εκτός αν $d = m^2$ για κάποιον m ο οποίος είναι ελεύθερος τετραγώνων, και σε αυτή την περίπτωση έχουμε $g(d) = \mu(m)$. Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{d\leqslant x}\mu^2(d) = \sum_{d\leqslant x}(u*g)(d) = \sum_{d\leqslant x} g(d)[x/d] &= \sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\mu(m)\left(\frac{x}{m^2} + O(1)\right)\\ &= x\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{\mu(m)}{m^2} + O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}|\mu(m)|\right)\\ &= x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^2} - x\sum_{m>\sqrt{x}}\frac{\mu(m)}{m^2} + O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Τώρα,

$$x\left|\sum_{m>\sqrt{x}}\frac{\mu(m)}{m^2}\right| = O\left(x\sum_{m>\sqrt{x}}\frac{1}{m^2}\right) = O\left(\sqrt{x}\right),$$

άρα τελικά

$$\sum_{d\leqslant x}\mu^2(d) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

Έπεται ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x}\mu^2(d) = \frac{6}{\pi^2},$$

και από την Άσκηση 3.20 συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu^2(d)}{d} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Τελικά,

$$\sum_{n\leqslant x}2^{\omega(n)} = x\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu^2(d)}{d} + O(x) = \frac{6}{\pi^2}x\ln x + O(x).$$

3.7. *Αν $x \geqslant 2$ αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x\ln x)$$

και

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\ln x).$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \geqslant 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2 &= \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}-\left\{\frac{x}{n}\right\}\right)^2\\ &= \left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2}\right)x^2 - 2x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\} + \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{\frac{x}{n}\right\}^2.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left|\sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^2}\right| \leqslant \sum_{n>x}\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

άρα

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Συνεπώς,

$$\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2}\right)x^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x).$$

Φράσσουμε τώρα τους άλλους δύο όρους. Έχουμε

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\}\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

άρα

$$x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\} = O(x\ln x),$$

και

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{\frac{x}{n}\right\}^2\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x}1 \leqslant x,$$

δηλαδή

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{\frac{x}{n}\right\}^2 = O(x).$$

Τελικά,

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x) + O(x\ln x) + O(x) = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x\ln x).$$

(β) Είναι παρόμοιο και απλούστερο. Έχουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left[\frac{x}{n}\right] = \left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2}\right)x - \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\}.$$

Όπως πριν, βλέπουμε ότι

$$\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2}\right)x=\left(\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)x=\frac{x}{\zeta(2)}+O(1).$$

Για τον δεύτερο όρο έχουμε δει ότι

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\}=O(\ln x).$$

Συνολικά,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left[\frac{x}{n}\right]=\frac{x}{\zeta(2)}+O(1)+O(\ln x)=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\ln x).$$

3.8. *Έστω $x\geqslant 1$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2+\frac{1}{2}.$$

Από αυτή τη σχέση συμπεράνατε ότι για κάθε $x\geqslant 2$

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{1}{2}\frac{x^2}{\zeta(2)}+O(x\ln x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)&=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{\{(q,d):qd\leqslant x\}}\mu(d)q\\&=\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\sum_{q\leqslant\frac{x}{d}}q=\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\frac{1}{2}\left[\frac{x}{d}\right]\cdot\left(\left[\frac{x}{d}\right]+1\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]^2+\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]^2+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

διότι

$$\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]=1$$

από το Θεώρημα 3.4.7. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ταυτότητα. Στη συνέχεια, από την Άσκηση 3.7(α) παίρνουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\zeta(2)}+O(x\ln x)\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2\zeta(2)}x^2+O(x\ln x).$$

3.9. *Έστω $x \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left[\frac{x}{n}\right].$$

Από αυτή τη σχέση συμπεράνατε ότι για κάθε $x \geqslant 2$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\ln x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{\{(q,d):qd\leqslant x\}}\frac{\mu(d)}{d}$$
$$=\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{q\leqslant \frac{x}{d}}1=\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d}\left[\frac{x}{d}\right].$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ταυτότητα. Στη συνέχεια, από την Άσκηση 3.7(β) παίρνουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\ln x).$$

3.10 *Αν $x \geqslant 2$ αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}\ln x+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler και

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\ln n}{n^2}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την $\varphi=\mu * u$ γράφουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^2}\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/d}\frac{1}{(qd)^2}\mu(d)\frac{qd}{d}$$
$$=\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{q\leqslant x/d}\frac{1}{q}=\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(\ln x-\ln d+\gamma+O(d/x)\right)$$
$$=(\ln x+\gamma)\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}+\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d}\cdot O(1/x).$$

Από το Θεώρημα 3.4.9 έχουμε

$$\left|\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d}\right|\leqslant 1.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\left|\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leqslant \sum_{d>x}\frac{1}{d^2} = O(1/x)$$

άρα

$$(\ln x+\gamma)\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2} = (\ln x+\gamma)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} - (\ln x+\gamma)\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}(\ln x+\gamma) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

και

$$\left|\sum_{d>x}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}\right| \leqslant \sum_{d>x}\frac{\ln d}{d^2} = O\left(\int_x^{\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt\right) = O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

άρα

$$\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2} + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) = A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}(\ln x+\gamma) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + O(1/x),$$

δηλαδή

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}\ln x + \frac{\gamma}{\zeta(2)} - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

3.11. *Έστω n τυχών θετικός ακέραιος και*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Υποθέτουμε γνωστή την

$$\zeta(2) = \pi^2/6.$$

(α) *Αποδείξτε ότι αν $n \geqslant 2$ τότε*

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6}\frac{\sigma(n)}{n}.$$

(β) *Έστω $x \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{\varphi(n)} = O(x).$$

Υπόδειξη. (α) Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα (βλέπε Κεφάλαιο 5)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \prod_p (1-p^{-2})^{-1}$$

και το γεγονός ότι $\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-p^{-1})$. Έστω $n = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{n}{\varphi(n)} &= \prod_{p|n}\frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p|n}\frac{1+p^{-1}}{1-p^{-2}} < \prod_{p}(1-p^{-2})^{-1}\prod_{p|n}(1+p^{-1})\\ &= \frac{\pi^2}{6}\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{k}(p_i^{a_i}+p_i^{a_i-1}) \leqslant \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{a_i}-1}{p_i-1}\\ &= \frac{\pi^2}{6}\frac{\sigma(n)}{n}.\end{aligned}$$

Για το κάτω φράγμα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{n}{\varphi(n)} &= \prod_{p|n}\frac{1}{1-1/p} = \prod_{i=1}^{K}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m} > \prod_{i=1}^{k}(1+p_i^{-1}+\cdots+p_i^{-a_i})\\ &= \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{k}(p_i^{a_i}+\cdots+p_i+1) = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{a_i}-1}{p_i-1} = \frac{\sigma(n)}{n}.\end{aligned}$$

(β) Από το (α) αρκεί να εκτιμήσουμε το

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{n} &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}\frac{d}{n} = \sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/d}\frac{d}{qd} = \sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/d}\frac{1}{q}\\ &= \sum_{d\leqslant x}\left(\ln x - \ln d + \gamma + \frac{1}{x}O(d)\right) = (\ln x+\gamma)[x] - \sum_{d\leqslant x}\ln d + \frac{1}{x}O(x^2)\\ &= x\ln x + \gamma x - \{x\}(\ln x+\gamma) - (x\ln x + O(x)) + O(x)\\ &= \gamma x + O(\ln x) + O(x) = O(x).\end{aligned}$$

3.12. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n) \sim c_1x^2$$

για κάποια σταθερά $c_1 > 0$.

Υπόδειξη. Έχουμε $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, άρα

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\sigma(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} d = \sum_{d\leqslant x}\sum_{k\leqslant \frac{x}{d}} d = \sum_{k\leqslant x}\sum_{d\leqslant\frac{x}{k}} d\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\left[\frac{x}{k}\right]\left(\left[\frac{x}{k}\right]+1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\left(\frac{x}{k}-\left\{\frac{x}{k}\right\}\right)\left(\frac{x}{k}+1-\left\{\frac{x}{k}\right\}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\frac{x^2}{k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\frac{x}{k}\left\{\frac{x}{k}\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\frac{x}{k}\left(1-\left\{\frac{x}{k}\right\}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\left\{\frac{x}{k}\right\}\left(1-\left\{\frac{x}{k}\right\}\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

- $\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\frac{x}{k}\left\{\frac{x}{k}\right\} = xO\left(\sum_{k\leqslant x}\frac{1}{k}\right) = O(x\ln x)$.

- $\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\frac{x}{k}\left(1-\left\{\frac{x}{k}\right\}\right)=xO\left(\sum_{k\leqslant x}\frac{1}{k}\right)=O(x\ln x)$.
- $\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\left\{\frac{x}{k}\right\}\left(1-\left\{\frac{x}{k}\right\}\right)=O\left(\sum_{k\leqslant x}\mathbf{1}\right)=O(x)$.

Επίσης,

$$\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant x}\frac{x^2}{k^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{k^2}-\frac{1}{2}\sum_{k>x}\frac{x^2}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}x^2+O(x)$$

διότι $\sum_{k>x}\frac{1}{k^2}=O(1/x)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{12}x^2+O(x\ln x),$$

άρα

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)\sim\frac{\pi^2}{12}x^2.$$

3.13. *Αν $x\geqslant 2$ αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}=O(\ln x).$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.11 (α) γράφουμε

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{n^2}=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}\frac{d}{n^2}=\sum_{d\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/d}\frac{d}{(qd)^2}=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\sum_{q\leqslant x/d}\frac{1}{q^2}.$$

Από το Θεώρημα 3.3.3 (β) βλέπουμε ότι

$$\sum_{q\leqslant x/d}\frac{1}{q^2}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}-\sum_{q>x/d}\frac{1}{q^2}=\zeta(2)-\frac{d}{x}+O((d/x)^2).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{6}{\pi^2}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}&=\zeta(2)\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}-\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{x}+\sum_{d\leqslant x}\frac{O(d)}{x^2}\\&=\zeta(2)O(\ln x)+O(1)=O(\ln x).\end{aligned}$$

3.14. *Έστω $k\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}}\frac{1}{n}\sim\frac{\varphi(k)}{k}\ln x.$$

Γενικότερα, αν $s>0$ να βρείτε ασυμπτωτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}}\frac{1}{n^s}.$$

Υπόδειξη. Έστω $x \geqslant k$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} \frac{1}{n} &= \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} I((n,k)) = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} \sum_{d\mid(n,k)} \mu(d)\\ &= \sum_{d\mid k} \mu(d) \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\mid n}} \frac{1}{n} = \sum_{d\mid k} \mu(d) \sum_{q\leqslant \frac{x}{d}} \frac{1}{qd}\\ &= \sum_{d\mid k} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{q\leqslant\frac{x}{d}} \frac{1}{q} = \sum_{d\mid k} \frac{\mu(d)}{d}\left(\ln\frac{x}{d} + \gamma + O\left(\frac{d}{x}\right)\right)\\ &= \sum_{d\mid k} \frac{\mu(d)}{d}\Big(\ln\frac{x}{d} + O(1)\Big).\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} \frac{1}{n} = \left(\sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)}{d}\right)\ln x - \sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)\ln d}{d} + O\left(\sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)}{d}\right).$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)}{d} = \frac{1}{k}\sum_{d\mid k}\mu(d)\frac{k}{d} = \frac{\varphi(k)}{k}$ και ότι η ποσότητα $C_k := \sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)\ln d}{d}$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το k. Άρα,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} \frac{1}{n} = \frac{\varphi(k)}{k}\ln x + O\left(C_k + \frac{\varphi(k)}{k}\right),$$

απ' όπου έπεται άμεσα ότι

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} \frac{1}{n} \sim \frac{\varphi(k)}{k}\ln x.$$

3.15. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} n = \frac{\varphi(k)}{2k}x^2 + O(d(k)x),$$

όπου $d(k)$ είναι το πλήθος των θετικών διαιρετών του k.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} n &= \sum_{n\leqslant x} nI((n,k)) = \sum_{n\leqslant x} n\sum_{d\mid n}\mu(d) = \sum_{d\mid k}\mu(d)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\mid n}} n = \sum_{d\mid k}\mu(d)\sum_{q\leqslant x/d} qd\\ &= \sum_{d\mid k}\mu(d)d\sum_{q\leqslant x/d} q = \sum_{d\mid k}\mu(d)d\left(\frac{x^2}{2d^2} + O\left(\frac{x}{d}\right)\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{d\mid k}\mu(d)d\cdot\frac{x^2}{2d^2} = \frac{x^2}{2k}\sum_{d\mid k}\mu(d)\frac{k}{d} = \frac{\varphi(k)}{2k}x^2.$$

Επίσης,

$$\sum_{d|k} \mu(d)d \cdot O\left(\frac{x}{d}\right) = x\left(\sum_{d|k} \mu(d)\right) O(1)$$

και

$$\left|\sum_{d|k} \mu(d)\right| \leqslant \sum_{d|k} \mathbf{1} = d(k).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} n = \frac{\varphi(k)}{2k}x^2 + O(d(k)x).$$

3.16. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = [\sqrt{x}].$$

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $\lambda(1) = 1$ και $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$ αν $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d).$$

Ο ισχυρισμός είναι ότι $g(n) = 1$ αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο και $g(n) = 0$ αλλιώς. Κατ' αρχάς, η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, άρα η $g = \lambda * u$ είναι πολλαπλασιαστική. Προφανώς, $g(1) = 1$. Έστω $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k} \geqslant 2$. Έχουμε $g(n) = g(p_1^{\alpha_1})\cdots g(p_k^{\alpha_k})$. Όμως,

$$g(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{k=0}^{\alpha_i} \lambda(p^k) = \sum_{k=0}^{\alpha_i} (-1)^k,$$

άρα $g(p_i^{\alpha_i}) = 1$ αν ο α_i είναι άρτιος και $g(p_i^{\alpha_i}) = 0$ αν ο α_i είναι περιττός. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $g(n) = 1$ αν και μόνο αν όλοι οι α_i είναι άρτιοι, δηλαδή αν και μόνο αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ $g(n) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος από τους α_i που είναι περιττός, δηλαδή αν και μόνο αν ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.4.6 γράφουμε

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} \lambda(d) = \sum_{n\leqslant x} g(n) = \sum_{m^2\leqslant x} g(m^2) = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} 1 = [\sqrt{x}].$$

3.17. *Έστω $k \geqslant 2$. Ορίζουμε $q_k(n) = 1$ αν ο n δεν διαιρείται με k-οστή δύναμη πρώτου και $q_k(n) = 0$ αλλιώς. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x} q_k(n) = c_k x + O(x^{1/k}),$$

όπου

$$c_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k}.$$

Υπόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι η $q_k(n)$ είναι πολλαπλασιαστική και ότι αν $n = p^m$ τότε

$$q_k(p^m) = \sum_{d^k|p^m} \mu(d).$$

Η συνάρτηση $\sum_{d^k|n} \mu(d)$ είναι επίσης πολλαπλασιαστική, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$q_k(n) = \sum_{d^k|n} \mu(d).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} q_k(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{d^k|n} \mu(d) = \sum_{d^k\leqslant x} \mu(d) \sum_{q\leqslant x/d^k} \mathbf{1} = \sum_{d\leqslant x^{1/k}} \mu(d) \left[\frac{x}{d^k}\right] = \sum_{d\leqslant x^{1/k}} \mu(d)\frac{x}{d^k} + O(x^{1/k}) \\ &= x\sum_{d\leqslant x^{1/k}} \frac{\mu(d)}{d^k} + O(x^{1/k}).\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $c_k = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$ και παρατηρήσουμε ότι

$$\left|\sum_{d>x^{1/k}} \frac{\mu(d)}{d^k}\right| \leqslant \sum_{d>x^{1/k}} \frac{1}{d^k} = O(x^{\frac{1-k}{k}})$$

από το Θεώρημα 3.3.3 (γ), καταλήγουμε στην

$$\sum_{n\leqslant x} q_k(n) = c_k x + xO(x^{\frac{1}{k}-1}) + O(x^{1/k}) = c_k x + O(x^{1/k}).$$

3.18. *Ορίζουμε* $M(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n)$. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x} M\left(\frac{x}{n}\right) = 1.$$

Υπόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.6 έχουμε

$$\sum_{n\leqslant x} M\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{n\leqslant x} I(n) = 1.$$

3.19. *Αποδείξτε ότι, για κάθε* $x \geqslant 2$,

$$\sum_{p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p = x\ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p = \sum_{p\leqslant x} x\frac{\ln p}{p} - \sum_{p\leqslant x} \left\{\frac{x}{p}\right\} \ln p = x\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} + O\left(\sum_{p\leqslant x} \ln p\right) = x\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} + O(x),$$

αφού
$$\sum_{p\leqslant x}\ln p=\vartheta(x)=O(x).$$
Από τις εκτιμήσεις του Mertens (Θεώρημα 4.4.1 (β)) έχουμε $\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln}{p}=\ln x+O(1)$, άρα
$$\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p=x\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}+O(x)=x\ln x+O(x)+O(x)=x\ln x+O(x).$$

3.20. *Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε*
$$M(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}a_n\qquad \text{και}\qquad L(x)=\frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}.$$

(α) *Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty}M(x)=\ell$, αποδείξτε ότι υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to\infty}L(x)$ και είναι επίσης ίσο με ℓ.*

(β) *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $a_n\in[0,1]$ για την οποία υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty}L(x)$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty}M(x)$.*

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $S(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n$ και $T(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n/n$. Από την υπόθεση έχουμε $S(x)/x\to\ell$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $T(x)/\ln x\to\ell$. Γράφουμε
$$T(x)=\frac{S(x)}{x}+\int_1^x\frac{S(t)}{t^2}dt=:\frac{S(x)}{x}+R(x).$$
Διαιρώντας με $\ln x$ και παρατηρώντας ότι $\frac{1}{x\ln x}S(x)\to$, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι
$$\frac{1}{\ln x}R(x)=\frac{1}{\ln x}\int_1^x\frac{S(t)}{t^2}dt\to\ell.$$
Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $t_0\geqslant 1$ τέτοιος ώστε $|S(t)/t-\ell|\leqslant\varepsilon$ για κάθε $t\geqslant t_0$. Για $1\leqslant t\leqslant t_0$ έχουμε $|S(t)/t-\ell|\leqslant\sum_{n\leqslant t_0}|a_n|+|\ell|\leqslant M(t_0)$. Συνεπώς,
$$\begin{aligned}\left|\int_1^x\frac{S(t)}{t^2}dt-\ell\ln x\right|&=\left|\int_1^x\frac{1}{t}\left(\frac{S(t)}{t}-\ell\right)dt\right|\leqslant\int_1^{t_0}\frac{M}{t}dt+\int_{t_0}^x\frac{\varepsilon}{t}dt\\&\leqslant M\ln t_0+\varepsilon\ln(x/t_0)\leqslant M\ln t_0+\varepsilon\ln x.\end{aligned}$$
Συνεπώς,
$$\left|\frac{1}{\ln x}\int_1^x\frac{S(t)}{t^2}dt-\ell\right|\leqslant M\frac{\ln t_0}{\ln x}+\varepsilon.$$
Αφήνοντας το $x\to\infty$ βλέπουμε ότι
$$\limsup_{x\to\infty}\left|\frac{1}{\ln x}\int_1^x\frac{S(t)}{t^2}dt-\ell\right|\leqslant\varepsilon,$$
και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έπεται το ζητούμενο.

(β) Ορίζουμε $a_n = n$ αν $n = 2^k$, $k \geqslant 0$ και $a_n = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2^k}\sum_{n\leqslant 2^k} a_n = \frac{1}{2^k}(1+2+2^2+\cdots+2^k) = 2-\frac{1}{2^k},$$

ενώ αν $2^{k-1} \leqslant x < 2^k$ έχουμε

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n = \frac{1}{x}(2^k-1) \longrightarrow 1-\frac{1}{2^k}$$

καθώς το $x \to 2^k$ από αριστερά. Δηλαδή, η συνάρτηση $x \mapsto \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n$ παρουσιάζει άλμα ίσο με 1 σε όλους τους $x = 2^k$. Άρα, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n$.

Από την άλλη πλευρά,

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n} = \frac{1}{\ln x}\sum_{\{k:2^k\leqslant x\}}\frac{2^k}{2^k} = \frac{1}{\ln x}\left(\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]+1\right) = \frac{1}{\ln 2} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

άρα $\frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n} \to \frac{1}{\ln 2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στοιχειώδη αποτελέσματα για την κατανομή των πρώτων

4.1. *Αποδείξτε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο* $[1,2,\ldots,n]$ *των* $1,2,\ldots n$ *είναι ίσο με*

$$[1,2,\ldots,n]=e^{\psi(n)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $k=\prod_{p\leqslant n}p^{a_p(k)}$ για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$ και $[1,2,\ldots,n]=\prod_{p\leqslant n}p^{a_p}$. Παρατηρήστε ότι

$$a_p=\max_{1\leqslant k\leqslant n}a_p(k)$$

για κάθε πρώτο $p\leqslant n$. Τώρα, έστω $p\leqslant n$. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$ έχουμε $p^{a_p(k)}\leqslant k\leqslant n$, άρα $a_p(k)\leqslant[\ln n/\ln p]$. Έπεται ότι

$$a_p\leqslant[\ln n/\ln p].$$

Όμως, αν ορίσουμε $k_p:=p^{[\ln n/\ln p]}$ έχουμε $k_p\leqslant p^{\ln n/\ln p}=n$, άρα

$$a_p\geqslant a_p(k_p)=[\ln n/\ln p].$$

Τελικά, για κάθε $p\leqslant n$ έχουμε $a_p=[\ln n/\ln p]$, άρα

$$\begin{aligned}\ln[1,2,\ldots,n]&=\sum_{p\leqslant n}a_p\ln p=\sum_{p\leqslant n}\ln p\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]\\&=\sum_{p\leqslant n}\ln p\sum_{p^m\leqslant n}\mathbf{1}=\sum_{p^m\leqslant n}\Lambda(p^m)=\sum_{d\leqslant n}\Lambda(d)=\psi(n),\end{aligned}$$

και έπεται ότι $[1,2,\ldots,n]=e^{\psi(n)}$.

4.2. *Αποδείξτε ότι οι παρακάτω δύο σχέσεις είναι ισοδύναμες.*

(α) $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$.

(β) $\vartheta(x) = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

Υπόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι

$$\pi(x) = \frac{1}{\ln x}\vartheta(x) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

(α) $\Longrightarrow$ (β) Υποθέτοντας το (α) και χρησιμοποιώντας τη σχέση των π και ϑ έχουμε

$$\vartheta(x) = \ln x\pi(x) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

(β) $\Longrightarrow$ (α) Υποθέτοντας το (β) και χρησιμοποιώντας τη σχέση των π και ϑ έχουμε

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{1}{\ln x}\left(x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\\ &= \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

4.3. *Θεωρώντας γνωστό το θεώρημα των πρώτων αριθμών αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $\frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} \sim \frac{a}{b}$ καθώς το $x \to \infty$.*

(β) *Αν $0 < a < b$ τότε υπάρχει x_0 τέτοιος ώστε $\pi(ax) < \pi(bx)$ για κάθε $x \geqslant x_0$.*

(γ) *Αν $0 < a < b$ τότε υπάρχει x_0 τέτοιος ώστε για κάθε $x \geqslant x_0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος ανάμεσα στον ax και τον bx.*

(δ) *Κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < b$ περιέχει ρητό αριθμό της μορφής p/q όπου οι p και q είναι πρώτοι.*

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε τον λόγο των δύο ποσοτήτων ως

$$\frac{\pi(ax)}{a}\frac{b}{\pi(bx)} = \frac{\pi(ax)\ln(ax)}{ax}\frac{bx}{\pi(bx)\ln(bx)}\frac{\ln(bx)}{\ln(ax)}.$$

Από το θεώρημα των πρώτων αριθμών έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(ax)\ln(ax)}{ax} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{bx}{\pi(bx)\ln(bx)} = 1.$$

Έχουμε επίσης,

$$\frac{\ln(bx)}{\ln(ax)} = \frac{\ln(b)+\ln(x)}{\ln(a)+\ln(x)} \longrightarrow 1$$

καθώς το $x \to \infty$. Έπεται το ζητούμενο.

(β) Θεωρούμε c τέτοιον ώστε $a/b < c < 1$. Από το (α) έχουμε $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} < c$, άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \geqslant x_0$ να ισχύει

$$\frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} < c < 1 \implies \pi(ax) < \cdot\pi(bx).$$

(γ) Θεωρούμε b_1 τέτοιον ώστε $a < b_1 < b$. Εφαρμόζοντας το (β) για τους $a < b_1$ βρίσκουμε $x_0 > 0$ τέτοιον ώστε, για κάθε $x \geqslant x_0$,

$$|\{p : p \leqslant ax\}| < |\{p : p \leqslant b_1 x\}|$$

και αφού προφανώς $\{p : p \leqslant ax\} \subseteq \{p : p \leqslant b_1 x\}$, έπεται ότι υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $ax < p \leqslant b_1 x < bx$.

(δ) Για τον x_0 του (γ) μπορούμε να βρούμε πρώτο $q > x_0$ αφού υπάρχουν άπειροι πρώτοι. Εφαρμόζοντας το (γ) βρίσκουμε πρώτο p ώστε $aq < p < bq$. Τότε για τους πρώτους p και q έχουμε $p/q \in (a, b)$.

4.4. *Ορίζουμε $P(x) = \prod_{p \leqslant x} p$. Αποδείξτε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την*

$$\lim_{x\to\infty} P(x)^{1/x} = e.$$

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln P(x)}{x} = 1 \qquad \text{ή ισοδύναμα με την} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} \ln p = 1.$$

Όμως,

$$\sum_{p \leqslant x} \ln p =: \vartheta(x)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την $\vartheta(x) \sim x$, και αυτή η ισοδυναμία έχει αποδειχθεί στο μάθημα.

4.5. *Έστω $a(n)$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_p a(p)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(n)}{\ln n}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $a(0) = a(1)$, οπότε η ακολουθία $(a(n))_{n \geqslant 0}$ εξακολουθεί να είναι φθίνουσα. Έστω $c > 0$ και $b_n = [cn \ln n]$, $n \geqslant 1$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty \iff \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} < +\infty.$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $b_{n+1} - b_n \to \infty$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $b_n < b_{n+1}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} \frac{a(k)}{\ln k} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_n) \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} \frac{1}{\ln k} \\ &\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_n) \frac{b_{n+1} - b_n}{\ln b_n}. \end{aligned}$$

Με απλούς υπολογισμούς βλέπουμε ότι $\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_n} \to c$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_n} \leqslant M$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} \leqslant M \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_n) < \infty,$$

και έχουμε δείξει τη μία κατεύθυνση της ισοδυναμίας.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty}\frac{a(k)}{\ln k}<+\infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty}\frac{a(k)}{\ln k}&=\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}\frac{a(k)}{\ln k}\geqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}a(b_{n+1})\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}\frac{1}{\ln k}\\&\geqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}a(b_{n+1})\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_{n+1}}.\end{aligned}$$

Με απλούς υπολογισμούς βλέπουμε ότι $\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_{n+1}}\to c$, άρα υπάρχει $m>0$ τέτοιος ώστε $\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_{n+1}}\geqslant m$ για κάθε $n\geqslant n_0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty}\frac{a(k)}{\ln k}\geqslant m\sum_{n=n_0}^{\infty}a(b_{n+1}),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}a(b_n)<+\infty$.

Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.3.8. Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{6}n\ln n<p_n<15n\ln n,$$

όπου $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία των πρώτων σε αύξουσα διάταξη. Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία που δείξαμε με $b_n=\left[\frac{1}{6}n\ln n\right]$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(p_n)<\infty\implies\sum_{n=1}^{\infty}a(b_n)<+\infty\implies\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a(k)}{\ln k}<+\infty.$$

Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία που δείξαμε με $b_n=[15n\ln n]$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a(k)}{\ln k}<+\infty\implies\sum_{n=1}^{\infty}a(b_n)<+\infty\implies\sum_{n=1}^{\infty}a(p_n)<\infty.$$

4.6. *Για $x\geqslant 2$ ορίζουμε*

$$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}.$$

(α) *Αποδείξτε ότι*

$$\mathrm{Li}(x)=\frac{x}{\ln x}+\int_2^x\frac{dt}{(\ln t)^2}-\frac{2}{\ln 2}.$$

Πιο γενικά, αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Li}(x)=\frac{x}{\ln x}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right)+n!\int_2^x\frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}+C_n,$$

όπου C_n είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από το x.

(β) *Για $x\geqslant 2$ αποδείξτε ότι*

$$\int_2^x\frac{dt}{(\ln t)^n}=O\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right).$$

Υπόδειξη. (α) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt = \int_2^x (t)'\frac{1}{\ln t}dt = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Γενικότερα, χρησιμοποιώντας την

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} = \frac{x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+1}} + (n+1)\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}},$$

η οποία προκύπτει πάλι με ολοκλήρωση κατά μέρη, επαγωγικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}(x) &= \frac{x}{\ln x}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + n!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + C_n \\
&= \frac{x}{\ln x}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + n!\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+1}} + (n+1)\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}}\right) \\
&= \frac{x}{\ln x}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + (n+1)\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}} + C_{n+1},
\end{aligned}$$

όπου η σταθερά C_{n+1} είναι ανεξάρτητη από το x.

(β) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hôpital βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_2^x dt/(\ln t)^n}{x/(\ln x)^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/(\ln x)^n}{1/(\ln x)^n - n/(\ln x)^{n+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1 - n/\ln x} = 1.$$

Άρα,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} \sim \frac{x}{(\ln x)^n},$$

και συνεπώς

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right).$$

4.7. *Έστω $f(n)$ μια αριθμητική συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln p = (ax+b)\ln x + cx + O(1)$$

για $x \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά A, που εξαρτάται από την f, τέτοια ώστε, για $x \geqslant 2$,

$$\sum_{p\leqslant x} f(p) = ax + (a+c)\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}\right) + b\ln\ln x + A + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $a(n)$ με $a(n) = f(n)\ln n$ αν ο n είναι ρώτος και $a(n) = 0$ αλλιώς, και τη συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{\ln t}$, $t \geqslant 2$. Έχουμε

$$\sum_{p\leqslant x} f(p) = \sum_{2\leqslant n\leqslant x} a(n)g(n) = \frac{A(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t\ln^2 t}dt,$$

όπου
$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n) = \sum_{p \leqslant x} f(p) \ln p.$$
Από την υπόθεση έχουμε
$$\frac{A(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \sum_{p \leqslant x} f(p) \ln p = ax + b + c\frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$
Επίσης,
$$\int_2^x \frac{A(t)}{t \ln^2 t} dt = a \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt + b \int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt + c \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt + \int_2^x \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt,$$
όπου R φραγμένη συνάρτηση. Υπολογίζουμε χωριστά τα ολοκληρώματα
$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt - \frac{2}{\ln 2},$$
$$\int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt = \ln \ln x - \ln \ln 2,$$
$$\int_2^x \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt = \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt = C_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$
Από τα παραπάνω έπεται ότι
$$\begin{aligned}\sum_{p \leqslant x} f(p) &= ax + b + c\frac{x}{\ln x} + a\frac{x}{\ln x} + a\int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt + b \ln \ln x + c \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt \\ &\quad + C_1 - \frac{2a}{\ln 2} + O(\left(\frac{1}{\ln x}\right) \\ &= ax + (a+c)\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right) + b \ln \ln x + A + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\end{aligned}$$
όπου $A = C_1 - \frac{2a}{\ln 2}$.

4.8. *Έστω $S(x)$ και $T(x)$ πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε*
$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} S\left(\frac{x}{n}\right)$$
για κάθε $x \geqslant 1$. Αν $S(x) = O(x)$ και c είναι μια θετική σταθερά, αποδείξτε ότι η σχέση
$$S(x) \sim cx \ \text{ καθώς το } x \to \infty$$
συνεπάγεται την
$$T(x) \sim cx \ln x \ \text{ καθώς το } x \to \infty.$$

Υπόδειξη. Αφού $S(x) \sim cx$, μπορούμε να γράψουμε $S(x) = cx + xf(x)$, όπου $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Τότε,
$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} S\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leqslant x} \left(\frac{cx}{n} + \frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right)\right) = cx \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} + \sum_{n \leqslant x} \frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+O(1/x)$, άρα

$$cx\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=cx\ln x+c\gamma x+O(1).$$

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $\lim_{t\to\infty}f(t)=0$, υπάρχει $t_0>1$ τέτοιος ώστε $|f(t)|<\varepsilon$ για κάθε $t>t_0$. Θεωρούμε $x>t_0$ και γράφουμε

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{x}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leqslant\sum_{n<\frac{x}{t_0}}\frac{x}{n}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|+\sum_{\frac{x}{t_0}\leqslant n\leqslant x}\frac{x}{n}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|.$$

Αν $n<x/t_0$ τότε $x/n>t_0$ άρα $|f(x/n)|<\varepsilon$. Συνεπώς,

$$\sum_{n<\frac{x}{t_0}}\frac{x}{n}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leqslant\varepsilon\sum_{n<\frac{x}{t_0}}\frac{x}{n}=\varepsilon x\left(\ln(x/t_0)+O(1)\right).$$

Στο $[1,t_0]$ η $f(x)=S(x)-cx$ είναι φραγμένη από κάποιον $M>0$. Άρα,

$$\sum_{\frac{x}{t_0}\leqslant n\leqslant x}\frac{x}{n}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leqslant M\sum_{\frac{x}{t_0}\leqslant n\leqslant x}\frac{x}{n}\leqslant Mt_0\left(x-\frac{x}{t_0}\right)\leqslant Mt_0x.$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{x}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leqslant\varepsilon x\ln x+g(x)$$

όπου $g(x)=O(x)$. Τελικά,

$$T(x)=cx\ln x+u(x)$$

όπου $u(x)\leqslant\varepsilon x\ln x+O(x)$, άρα

$$\left|\frac{T(x)}{cx\ln x}-1\right|\leqslant\varepsilon+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

καθώς $x\to\infty$. Αυτό δείχνει ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{T(x)}{cx\ln x}=1$, δηλαδή $T(x)\sim cx\ln x$.

4.9. *Έστω $f(n)$ αριθμητική συνάρτηση και*

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n).$$

Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=\ell>0,$$

τότε

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}=\ell\ln x+o(\ln x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}=\frac{S(x)}{x}+\int_1^x\frac{S(t)}{t^2}dt.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x} = \ell$, υπάρχει $t_0 > 1$ τέτοιος ώστε: αν $t \geqslant t_0$ τότε $\left|\frac{S(t)}{t} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|S(x)| \leqslant Mx$ για κάθε $x \geqslant 1$.

Θεωρούμε x αρκετά μεγάλο ώστε αν θέσουμε $y = \ln x$ να ισχύει $y \geqslant t_0$. Έχουμε

$$\left|\int_y^x \frac{S(t)}{t^2}dt - \ell\int_y^x \frac{1}{t}dt\right| \leqslant \varepsilon\int_y^x \frac{1}{t}dt = \varepsilon\ln(x/y).$$

Επίσης,

$$\left|\int_1^y \frac{S(t)}{t^2}dt\right| \leqslant M\int_1^y \frac{1}{t}dt = M\ln y.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, διαιρώντας με $\ell\ln x$ και θέτοντας $y = \ln x$, παίρνουμε

$$\left|\frac{1}{\ell\ln x}\int_1^x \frac{S(t)}{t^2}dt - \frac{\ln x - \ln\ln x}{\ln x}\right| \leqslant \frac{M\ln\ln x}{\ell\ln x} + \varepsilon\frac{\ln x - \ln\ln x}{\ell\ln x}.$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{1}{\ell\ln x}\frac{S(x)}{x} \to 0, \qquad \frac{\ln x - \ln\ln x}{\ln x} \to 1, \qquad \frac{M\ln\ln x}{\ell\ln x} \to 0$$

όταν $x \to \infty$, και δεδομένου ότι το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{\ell\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n} \to 1$$

όταν $x \to \infty$, δηλαδή

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n} = \ell\ln x + o(\ln x).$$

4.10. *Αποδείξτε ότι αν οι p, q είναι πρώτοι, τότε*

$$\sum_{pq\leqslant x}\frac{1}{pq} = (\ln\ln x)^2 + O(\ln\ln x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{pq\leqslant x}\frac{1}{pq} = \sum_{p,q\leqslant x}\frac{1}{pq} - \sum_{\substack{p,q\leqslant x\\ pq>x}}\frac{1}{pq}.$$

Από τις εκτιμήσεις του Mertens έχουμε

$$\sum_{p,q\leqslant x}\frac{1}{pq} = \left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^2 = (\ln\ln x + O(1))^2 = (\ln\ln x)^2 + O(\ln\ln x).$$

Επίσης,

$$\sum_{\substack{p,q\leqslant x\\ pq>x}}\frac{1}{pq} \leqslant \sum_{p\leqslant x}\sum_{\sqrt{x}<q\leqslant x}\frac{1}{pq} + \sum_{q\leqslant x}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{pq} = 2\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)\left(\sum_{\sqrt{x}<q\leqslant x}\frac{1}{q}\right).$$

Έχουμε
$$\sum_{\sqrt{x}<q\leqslant x}\frac{1}{q}=\frac{\pi(x)}{x}-\frac{\pi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\pi(t)}{t^2}dt$$
και, από τις εκτιμήσεις του Chebyshev,
$$\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\pi(t)}{t^2}dt\leqslant c_1\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t\ln t}dt=c_1\int_{\ln(\sqrt{x})}^{\ln x}\frac{1}{y}dy$$
$$=c_1[\ln(\ln x)-\ln(\ln(\sqrt{x}))]=c_1\ln\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{2}\ln x}\right)=c_1\ln 2.$$
Συνολικά,
$$\sum_{\sqrt{x}<q\leqslant x}\frac{1}{q}=O(1),$$
·αρα
$$\sum_{\substack{p,q\leqslant x\\ pq>x}}\frac{1}{pq}=O(\ln\ln x)\cdot O(1)=O(\ln\ln x).$$
Έπεται ότι
$$\sum_{p,q\leqslant x}\frac{1}{pq}=(\ln\ln x)^2+O(\ln\ln x).$$

4.11. *Έστω $\omega(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 3.6. Αποδείξτε ότι*
$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=x\ln\ln x+O(x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $\omega(n)=\sum_{p|n}\mathbf{1}$. Τότε,
$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{n\leqslant x}\sum_{p|n}\mathbf{1}=\sum_{p\leqslant x}\sum_{d\leqslant\frac{x}{p}}\mathbf{1}=\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]=\sum_{p\leqslant x}\frac{x}{p}-\sum_{p\leqslant x}\left\{\frac{x}{p}\right\}.$$
Από το Θεώρημα 4.4.1 (εκτιμήσεις του Mertens) έχουμε
$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+O(1).$$
Η απόδειξη αυτής της ασθενέστερης σχέσης μπορεί να γίνει με τις γνώσεις αυτού του κεφαλαίου αν γράψουμε
$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\sum_{n\leqslant x}a(n)f(n),$$
όπου $f(t)=\frac{1}{\ln t}$, $t\geqslant 2$ και $a(n)=\frac{\ln n}{n}$ αν ο n είναι πρώτος και 0 αλλιώς, και χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.2.1. Έπεται ότι
$$\sum_{p\leqslant x}\frac{x}{p}=x\ln\ln x+O(x).$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\left|\sum_{p\leqslant x}\left\{\frac{x}{p}\right\}\right| \leqslant \sum_{p\leqslant x}\mathbf{1} = \pi(x) \leqslant x.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

4.12. *Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 2$,*

$$\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{d\leqslant \frac{x}{n}}\Lambda(d) = \sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)\sum_{n\leqslant x/d}\mathbf{1} = \sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right]\\ &= \sum_{d\leqslant x}\sum_{m\mid d}\Lambda(m) = \sum_{d\leqslant x}\ln d = \ln([x]!) = x\ln x + O(x)\end{aligned}$$

από το Θεώρημα 3.4.8. Μάλιστα εκεί αποδεικνύεται η ακριβέστερη εκτίμηση $x\ln x - x + O(\ln x)$.

4.13. *Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 1$,*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\vartheta(n)}{n^2} = \ln x + O(1).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\vartheta(n)}{n^2} &= \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^2}\sum_{p\leqslant n}\ln p = \sum_{p\leqslant x}\ln p\cdot\sum_{p\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n^2} = \sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2} + \sum_{p\leqslant x}\ln p\cdot\sum_{p<n\leqslant x}\frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{p\leqslant x}\ln p\cdot\sum_{p<n\leqslant x}\frac{1}{n^2} + O(1),\end{aligned}$$

αφού $\sum\frac{\ln p}{p^2} < \infty$. Από το Θεώρημα 3.3.3 (β) παίρνουμε

$$\sum_{p<n\leqslant x}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Άρα,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\vartheta(n)}{n^2} = \sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} - \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\ln p + O\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\sum_{p\leqslant x}\ln p\right).$$

Αφού $\sum\frac{\ln p}{p^2} < \infty$, έχουμε $O\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}\right) = O(1)$. Αφού $\sum_{p\leqslant x}\ln p = \vartheta(x) = O(x)$, έχουμε $O\left(\frac{1}{x^2}\sum_{p\leqslant x}\ln p\right) = O(1/x)$. Άρα,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\vartheta(n)}{n^2} = \sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} - \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\ln p + O(1) = \sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} + O(1).$$

Τέλος, από τις εκτιμήσεις του Mertens (Θεώρημα 4.4.1 (β)) έχουμε

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1),$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

4.14. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p-1}=\ln x+O(1).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p-1}=\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}+\sum_{p\leqslant x}\ln p\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)=\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}+\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p(p-1)}$$

και παρατηρούμε ότι $\sum_p \frac{\ln p}{p(p-1)}<\infty$ άρα $\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p(p-1)}=O(1)$, ενώ από τις εκτιμήσεις του Mertens (Θεώρημα 4.4.1 (β)) έχουμε

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1).$$

Συνδυάζοντας αυτά τα δύο παίρνουμε το ζητούμενο.

4.15. *Έστω x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling επαληθεύστε ότι*

$$\ln[x]!-2\ln[x/2]!<\frac{3x}{4}\qquad \text{αν } x>0.$$

Υπόδειξη.

4.16. *Συμπληρώστε την απόδειξη του αιτήματος του Bertrand που έδωσε ο Erdős εξηγώντας τα ακόλουθα βήματα:*

(α) *Έστω $r(p)$ τέτοιος ώστε*

$$p^{r(p)}\leqslant 2n<p^{r(p)+1}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\binom{2n}{n}\;\Big|\;\prod_{p\leqslant 2n}p^{r(p)}.$$

(β) *Αποδείξτε ότι αν $p>2$ και $\frac{2n}{3}<p\leqslant n$ τότε*

$$p\nmid\binom{2n}{n}.$$

(γ) *Αποδείξτε ότι*

$$\prod_{p\leqslant n}p<4^n.$$

(δ) *Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα αποδείξτε το αίτημα του Bertrand.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε πρώτο p ορίζουμε $t(p,n)$ τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό t για τον οποίο ο p^t διαιρεί τον $\binom{2n}{n}$. Από την ταυτότητα του Legendre, ο εκθέτης του p στην ανάλυση του $n!$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ισούται με

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^j}\right\rfloor,$$

άρα

$$t(p,2n)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{2n}{p^j}\right\rfloor-2\sum_{j=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^j}\right\rfloor=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^j}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^j}\right\rfloor\right).$$

Όμως, κάθε όρος στο τελευταίο άθροισμα είναι είτε ίσος με μηδέν ή 1, και όλοι οι όροι για $j>\log_p(2n)$ μηδενίζονται. Συνεπώς, $t(p,n)\leqslant\log_p(2n)$, το οποίο δείχνει ότι $t(p,n)\leqslant r(p)$. Έπεται ότι

$$\binom{2n}{n}=\prod_{p\leqslant 2n}p^{t(p,n)}\ \Big|\ \prod_{p\leqslant 2n}p^{r(p)}.$$

(β) Υπάρχουν ακριβώς δύο παράγοντες του p στον αριθμητή του κλάσματος $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, οι οποίοι προέρχονται από τους δύο όρους p και $2p$ στο $(2n)!$, και ομοίως υπάρχουν δύο παράγοντες του p στον παρονομαστή, οι οποίοι οφείλονται στα δύο αντίτυπα του όρου p στο $n!$. Οι παράγοντες αυτοί διαγράφονται, και έτσι δεν υπάρχουν παράγοντες του p στον $\binom{2n}{n}$.

Η υπόθεση $p\geqslant\frac{2n}{3}$ εξασφαλίζει ότι $3p>2n$ και έτσι ο $3p$ δεν είναι όρος του αριθμητή, και η υπόθεση ότι ο p είναι περιττός εξασφαλίζει ότι ο $2p$ συνεισφέρει μόνο έναν παράγοντα του p στον αριθμητή.

(γ) Θέτουμε $G(n)=\prod_{p\leqslant n}p$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n\geqslant 3$ ισχύει

$$G(n)<2^{2n-3}.$$

Αφού ο $\binom{2m-1}{m}$ είναι φυσικός και όλοι οι πρώτοι $m+1\leqslant p\leqslant 2m-1$ εμφανίζονται στον αριθμητή του αλλά δεν εμφανίζονται στον παρονομαστή του, έχουμε

$$\frac{G(2m-1)}{G(m)}\leqslant\binom{2m-1}{m}=\frac{1}{2}\left(\binom{2m-1}{m-1}+\binom{2m-1}{m}\right)<\frac{1}{2}(1+1)^{2m-1}=2^{2m-2}.$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς n.

(i) Αν $n=3$, τότε $G(n)=6<8=2^{2n-3}$.

(ii) Αν $n=4$, τότε $G(n)=6<32=2^{2n-3}$.

(iii) Αν ο $n\geqslant 5$ είναι περιττός, δηλαδή $n=2m-1$, τότε από την προηγούμενη ανισότητα και την επαγωγική υπόθεση, αφού $m\geqslant 3$ και $m<n$ παίρνουμε

$$G(n)=G(2m-1)<G(m)\cdot 2^{2m-2}<2^{2m-3}2^{2m-2}=2^{4m-5}=2^{2n-3}.$$

(iv) Αν ο $n=2m$ είναι άρτιος και $n\geqslant 6$, τότε από την προηγούμενη ανισότητα και την επαγωγική υπόθεση, αφού $m\geqslant 3$ και $n-1<n$ παίρνουμε

$$G(n)=G(2m)=G(2m-1)=G(n-1)<2^{2(n-1)-3}<2^{2n-3}.$$

(δ) Υποθέτουμε ότι για κάποιον φυσικό $n \geqslant 2$ δεν υπάρχουν πρώτοι που να ικανοποιούν την $n < p \leqslant 2n$. Από τα προηγούμενα ερωτήματα βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν πρώτοι παράγοντες p του $\binom{2n}{n}$ τέτοιοι ώστε:

- $2n < p$, διότι κάθε τέτοιος παράγοντας πρέπει να διαιρεί τον $(2n)!$.
- $p = 2n$, διότι ο $2n$ δεν είναι πρώτος.
- $n < p < 2n$, διότι υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι πρώτοι αριθμοί.
- $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$, λόγω του (β).

Συνεπώς, κάθε πρώτος παράγοντας p του $\binom{2n}{n}$ ικανοποιεί την

$$p \leqslant \frac{2n}{3}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $p > \sqrt{2n}$ τότε ο φυσικός $\binom{2n}{n}$ έχει το πολύ έναν παράγοντα p. Από το (α) για κάθε πρώτο p έχουμε $p^{t(p,n)} \leqslant 2n$, άρα το γινόμενο των $p^{t(p,n)}$ πάνω από τους πρώτους που είναι μικρότεροι ή ίσοι από $\sqrt{2n}$ είναι το πολύ ίσο με $(2n)^{\sqrt{2n}}$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} &= \Bigg(\prod_{p\leqslant\sqrt{2n}} p^{t(p,n)}\Bigg)\Bigg(\prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2n}{3}} p^{t(p,n)}\Bigg) < (2n)^{\sqrt{2n}}\prod_{1<p\leqslant\frac{2n}{3}} p\\ &= (2n)^{\sqrt{2n}} G\Big(\frac{2n}{3}\Big) \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{2n/3}.\end{aligned}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους καταλήγουμε στην

$$\frac{\ln 4}{3} n \leqslant (\sqrt{2n}+1)\ln(2n).$$

Αφού το δεξιό μέλος είναι κοίλη συνάρτηση του n, η τελευταία αυτή ανισότητα ισχύει σε κάποιο διάστημα τιμών του n. Εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει για $n = 467$ και δεν ισχύει για $n = 468$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $n < 468$.

Τώρα όμως μπορούμε να αποκλείσουμε και αυτό το ενδεχόμενο ως εξής: Για οποιονδήποτε $2 \leqslant n < 468$, επιλέγοντας ως p κάποιον από τους πρώτους αριθμούς $3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$ (καθένας από τους οποίους είναι μικρότερος από το διπλάσιο του προηγούμενου του) μπορούμε να έχουμε $n < p < 2n$.

4.17. *Αποδείξτε ότι αν n είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος από 1, τότε ο $n!$ δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο.*

Υπόδειξη. Από την ταυτότητα του Legendre (Θεώρημα 3.4.10) έχουμε

$$n! = \prod_{p\leqslant n} p^{a(p)},$$

όπου

$$a(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m}\right].$$

Αν ο $n!$ είναι τέλειο τετράγωνο θα πρέπει ο $a(p)$ να είναι άρτιος για κάθε πρώτο $p \leqslant n$. Αν όμως θεωρήσουμε $p \leqslant n$ με $p > \sqrt{n}$ τότε $[n/p^m] = 0$ για κάθε $m \geqslant 2$, άρα $a(p) = 1$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Τώρα, χρησιμοποιώντας το αίτημα του Bertrand ελέγχουμε εύκολα ότι για κάθε $n > 1$ υπάρχει πρώτος $p \leqslant n$ με $p > \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

4.18. *Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $m > 20$ υπάρχει πρώτος ανάμεσα στον $m/2$ και τον $m - 6$. Αποδείξτε ότι ο n μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διακεκριμένων πρώτων όταν $n > 6$.*

Υπόδειξη.

4.19. *Χρησιμοποιώντας το αίτημα του Bertrand αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n > 1$, ο αριθμός*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι ποτέ ακέραιος.

Υπόδειξη. Από το αίτημα του Bertrand υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $\frac{n}{2} < p \leqslant n$. Αν $1 \leqslant k \leqslant n$ με $k \neq p$, τότε ο k δεν διαιρείται με τον p (αφού $sp > n$ για κάθε $s \geqslant 2$). Συνεπώς,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} \frac{1}{k} = \frac{t}{s}$$

για κάποιους $t, s \in \mathbb{N}$ τέτοιους ώστε $p \nmid s$. Υποθέτοντας ότι ο

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

είναι ακέραιος, έχουμε

$$\frac{t}{s} + \frac{1}{p} \in \mathbb{N} \implies \frac{s}{p} \in \mathbb{N},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $p \nmid s$.

4.20. *Χρησιμοποιώντας επαγωγή και το αίτημα του Bertrand αποδείξτε ότι, συμβολίζοντας με p_n τον n-οστό πρώτο, για κάθε $n > 3$,*

$$p_n < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}.$$

Υπόδειξη. Για $n = 4$ ζητάμε $p_4 < p_1 + p_2 + p_3$ δηλαδή $7 < 2 + 3 + 5$ που ισχύει. Έστω ότι για κάποιον $n > 3$ έχουμε

$$p_n < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}.$$

Από το αίτημα του Bertrand υπάρχει πρώτος q τέτοιος ώστε $p_n < q < 2p_n$, συνεπώς $p_{n+1} < 2p_n$. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$p_{n+1} < 2p_n = p_n + p_n < (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + p_n = p_1 + p_2 + \cdot + p_n.$$

4.21. *Ξεκινώντας από την*

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d)$$

αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Υπόδειξη. Ακολουθώντας την υπόδειξη γράφουμε

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{(dm)^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \zeta(2) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

4.22. (α) *Έστω f, f_0, g αριθμητικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = f_0 * g$. Αν $F(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$ και $F_0(x) = \sum_{n\leqslant x} f_0(n)$, αποδείξτε ότι*

$$F(x) = \sum_{d\leqslant x} g(d) F_0(x/d).$$

(β) *Γράφοντας $\mu^2 = u * (\mu^2 * \mu)$ και χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

Με την υπόθεση ότι ισχύει το θεώρημα των πρώτων αριθμών, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x}).$$

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $f(n) = \sum_{d|n} g(d) f_0(n/d)$, άρα

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{d|n} g(d) f_0(x/n) = \sum_{d\leqslant x} g(d) \sum_{\substack{n\leqslant x \\ d|n}} f_0(n/d) \\ &= \sum_{d\leqslant x} g(d) \sum_{m\leqslant x/d} f_0(m) = \sum_{d\leqslant x} F_0(x/d). \end{aligned}$$

(β) Από τις ιδιότητες του γινομένου Dirichlet και την $I = \mu * u$ παίρνουμε

$$\mu^2 = \mu^2 * I = \mu^2 * (\mu * u) = u * (\mu^2 * \mu).$$

Θέτουμε $g = \mu^2 * \mu$. Η g είναι πολλαπλασιαστική και για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$g(p^m) = \sum_{k=0}^{m} \mu^2(p^k) \mu(p^{m-k}) = \mu(p^m) + \mu(p^{m-1})$$

αφού $\mu(p^k) = 0$ αν $k \geqslant 2$ και $\mu^2(1) = \mu^2(p) = 1$. Έπεται ότι $g(p^m) = 0$ αν $m \neq 2$ και $g(p^2) = -1$. Από αυτές τις σχέσεις βλέπουμε εύκολα ότι $g(n) = 0$ εκτός αν $n = m^2$ για κάποιον m ο οποίος είναι ελεύθερος τετραγώνων, και σε αυτή την περίπτωση έχουμε $g(n) = \mu(m)$.

Εφαρμόζοντας το (α) με $f_0 = u$, οπότε $F_0(x) = \sum_{n \leqslant x} u(n) = [x]$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \mu^2(n) = \sum_{n \leqslant x} (u * g)(n) = \sum_{d \leqslant x} g(d)[x/d] &= \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \mu(m) \left(\frac{x}{m^2} + O(1) \right) \\ &= x \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} + O\left(\sum_{m \leqslant \sqrt{x}} |\mu(m)| \right) \\ &= x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} - x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Τώρα,

$$x \left| \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} \right| = O\left(x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{1}{m^2} \right) = O\left(\sqrt{x}\right),$$

άρα τελικά

$$\sum_{n \leqslant x} \mu^2(n) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το θεώρημα των πρώτων αριθμών

5.1. *Για δοσμένο $A > 0$ αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε: για $|t| \geqslant 2$, $\sigma \geqslant \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{A}{\ln|t|}\right)$,*

$$|\zeta'(s)| \leqslant M \ln^2|t|.$$

Υπόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο για $A = \frac{1}{12}$. Θεωρούμε γνωστό (έχει γίνει στη θεωρία) ότι αν $|t| \geqslant 2$ και $\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{4\ln|t|}$ τότε $|\zeta(s)| \leqslant M_1 \ln|t|$.

Αν $\sigma \geqslant 2$ τότε από την $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}$ βλέπουμε ότι

$$|\zeta'(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\sigma}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} =: C_1$$

Αφού $|t| \geqslant 2$ έπεται προφανώς ότι $C_1 \leqslant M \ln^2|t|$, όπου $M := C_1/(\ln 2)^2$.

Στην ένωση των δύο ορθογωνίων $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $2 \leqslant |t| \leqslant 3$ η $\zeta'(s)$ είναι αναλυτική, άρα συνεχής. Λόγω συμπάγειας έχουμε $|\zeta'(s)| \leqslant C_2$ για κάποια σταθερά $C_2 > 0$, άρα όπως πριν παίρνουμε $|\zeta'(s)| \leqslant M \ln^2|t|$ αν επιλέξουμε κατάλληλα την απόλυτη σταθερά $M > 0$.

Ζητάμε λοιπόν την ανισότητα $|\zeta'(s)| \leqslant M_2 \ln^2|t|$ για κάποια απόλυτη σταθερά $M_2 > 0$, με τις υποθέσεις

$$1 - \frac{1}{12\ln|t|} \leqslant \sigma \leqslant 2 \quad \text{και} \quad |t| \geqslant 3.$$

Έστω $s = \sigma + it$ που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{12\ln|t|}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $s_1 = \sigma_1 + it_1$ στον κύκλο $C(s, \delta) = \{s_1 \in \mathbb{C} : |s - s_1| = \delta\}$ ισχύουν τα εξής:

- $|t_1| \leqslant |t| - \delta \geqslant 3 - 1 = 3$, και
- $|t_1| \leqslant |t| + \delta \leqslant |t| + \frac{1}{12\ln e} \leqslant |t| + \frac{1}{12}|t| = \frac{13}{12}|t| \leqslant |t|^{3/2}$, διότι $|t| \geqslant 2 \geqslant (13/12)^2$, άρα

$$|\sigma_1| \geqslant |\sigma| - \frac{1}{12\ln|t|} \geqslant 1 - \frac{1}{5\ln|t|} \geqslant 1 - \frac{1}{4\ln|t_1|}.$$

Δηλαδή, για κάθε $s \in C(s,\delta)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του (β), και συνεπώς,

$$|\zeta(s_1)| \leqslant M_1 \ln |t_1|.$$

Τώρα, από τον τύπο του Cauchy παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\zeta'(s)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(s,\delta)} \frac{\zeta'(s_1)}{(s_1-s)^2}ds_1\right| \leqslant \delta\cdot\frac{1}{\delta^2}M_1 \max_{s_1\in C(s,\delta)} \ln|t_1| \\ &= 12M_1\ln|t|\cdot\frac{3}{2}\ln|t| = 18M_1\ln^2|t|,\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο με $M := 18M_1$. Συνδυάζοντας τις τρεις περιπτώσεις που εξετάσουμε παραπάνω, επιλέγουμε κατάλληλα τη σταθερά $M_2 > 0$ ώστε το φράγμα να ισχύει για όλους τους s που θεωρήσαμε.

5.2. *Γράφοντας $b(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{b(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Συμπεράνατε ότι το δεξιό μέλος είναι μια αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στο $\sigma > -1$ και ότι

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Υπόδειξη.

5.3. *Έστω $b > 0$, $T \geqslant 1$ και $0 < y < 1$. Αποδείξτε ότι*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s}ds = O\left(\frac{y^b}{T|\ln y|}\right).$$

Υπόδειξη.

5.4. *Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{s\to 1}(1-s)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = 1.$$

Υπόδειξη. Στο $H_0 = \{s : \sigma > 0\}$ η $\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $G(s)$, ολόμορφη στο H_0, τέτοια ώστε $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + G(s)$ στο $H_0 \setminus \{1\}$. Αυτό σημαίνει ότι $\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + G'(s)$ στο $H_0 \setminus \{0\}$. Άρα,

$$(1-s)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-(s-1)^2\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} = \frac{1 = (s-1)^2G'(s)}{1+(s-1)G(s)} \to 1$$

καθώς το $s \to 1$.

5.5. *Αποδείξτε ότι για $0 < \sigma < 1$,*

$$-\frac{1}{1-\sigma} < \zeta(\sigma) < 0.$$

Υπόδειξη.

5.6. *Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$,*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $\psi(x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$ και, για $\sigma > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Θεωρούμε το μερικό άθροισμα

$$\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(N)}{N^s} + s\int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Έχουμε

$$\left|\frac{\psi(N)}{N^s}\right| = \frac{\psi(N)}{N^\sigma} \leqslant \frac{cN}{N^\sigma} \to 0$$

καθώς το $N \to \infty$. Επίσης, $|\psi(x)/x^{s+1}| \leqslant c/x^\sigma$ για κάθε $x \geqslant 1$, άρα

$$\int_1^\infty \left|\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\right| dx \leqslant c\int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma}dx < \infty,$$

απ' όπου έπεται ότι το

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx$$

υπάρχει. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\psi(N)}{N^s} + s\int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx\right)\\ &= s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx.\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σειρές Dirichlet

6.1. *Έστω $\omega(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 3.6. Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $\omega(n)$ μετράει το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n και είναι πολλαπλασιαστική. Παρατηρούμε ότι για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$2^{\omega(p^m)} = 2 = \sum_{d|p^m} |\mu(d)| = (|\mu| * u)(p^m).$$

Έπεται ότι

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$|2^{\omega(n)}| = \sum_{d|n} |\mu(d)| \leqslant d(n).$$

Έστω $\sigma > 1$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\sigma - \varepsilon > 1$. Στην Άσκηση 2.30 είδαμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε $d(n) \leqslant C(\varepsilon) n^{\varepsilon}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{|2^{\omega(n)}|}{n^{\sigma}} \leqslant C(\varepsilon) \frac{1}{n^{\sigma - \varepsilon}},$$

και έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^{\sigma}}$ συγκλίνει απολύτως. Άρα, για $\sigma > 1$, από το Θεώρημα 5.3.2

έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\omega(n)}}{n^s}&=\prod_p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{\omega(p^m)}}{p^{ms}}=\prod_p\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{p^{ms}}\right)=\prod_p\left(1+\frac{2p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)\\&=\prod_p\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}=\prod_p\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2}=\prod_p(1-p^{-s})^{-2}\Big/\prod_p(1-p^{-2s})^{-1}\\&=\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.\end{aligned}$$

6.2. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{(m,n)=1}\frac{1}{m^2n^2}=\frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)=1}\frac{1}{m^2n^2}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I((m,n))}{m^2n^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\mid(m,n)}\frac{1}{m^2n^2}\\&=\sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(dr)^2(dt)^2}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^4}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^2}\\&=\zeta^2(2)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^4}=\frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}.\end{aligned}$$

6.3. *Αποδείξτε ότι αν $\kappa(1)=1$ και $\kappa(n)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ όταν $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, τότε για $s>1$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}.$$

Υπόδειξη. Η κ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση και για κάθε $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\kappa(n)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\leqslant(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)=d(n).$$

Έστω $\sigma>1$ και $\varepsilon>0$ τέτοιος ώστε $\sigma-\varepsilon>1$. Στην Άσκηση 2.30 είδαμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon)>0$ τέτοια ώστε $d(n)\leqslant C(\varepsilon)n^{\varepsilon}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{|\kappa(n)|}{n^{\sigma}}\leqslant C(\varepsilon)\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}},$$

και έπεται ότι για κάθε $s\in\mathbb{C}$ με $\sigma>1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa(n)}{n^s}$ συγκλίνει απολύτως. Θα χρειαστούμε την ταυτότητα

$$\sum_{m=1}^{\infty}mx^m=\frac{x}{(x-1)^2}$$

η οποία ισχύει για $|x| < 1$. Τώρα, για κάθε s με $\sigma > 1$, από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} &= \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa(p^m)}{p^{ms}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{p^{ms}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{p^{-s}}{(1-p^{-s})^2}\right) \\
&= \prod_p \frac{1 - p^{-s} + p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2} = \prod_p \frac{1 + p^{-3s}}{(1+p^{-s})(1-p^{-s})^2} \\
&= \prod_p \frac{1 - p^{-6s}}{(1-p^{-3s})(1-p^{-2s})(1-p^{-s})} \\
&= \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} \prod_p (1-p^{-3s})^{-1} \Big/ \prod_p (1-p^{-6s})^{-1} \\
&= \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}.
\end{aligned}$$

6.4. *Έστω f μια πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση τέτοια ώστε $f(p) = f(p)^2$ για κάθε πρώτο p. Αν η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

συγκλίνει απολύτως για $\sigma > \sigma_a$ και έχει άθροισμα $F(s)$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\lambda(n)}{n^s} = \frac{F(2s)}{F(s)} \quad \text{αν } \sigma > \sigma_a,$$

και $F(s) \neq 0$.

Υπόδειξη. Για $\sigma > \sigma_a$ οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mu(n)}{n^s}$ συγκλίνουν και οι δύο απολύτως, και αφού η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mu(n)}{n^s}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} f(d)\mu(d)f(n/d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{d|n} \mu(d) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)I(n)}{n^s} = f(1) = 1 \neq 0,
\end{aligned}$$

άρα

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \neq 0.$$

Αφού $f(p) = f(p^2)$ και η $f(n)\lambda(n)$ είναι πολλαπλασιαστική, από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\lambda(n)}{n^s} &= \prod_p \frac{1}{1 - f(p)\lambda(p)p^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1 + f(p)p^{-s}} = \prod_p \frac{1 - f(p)p^{-s}}{1 - f(p)^2 p^{-2s}} \\
&= \prod_p \frac{1 - f(p)p^{-s}}{1 - f(p)p^{-2s}} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-2s}} \Big/ \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}} = \frac{F(2s)}{F(s)}.
\end{aligned}$$

6.5. *Ορίζουμε*

$$F(\sigma,t)=3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)+\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it).$$

Αν $\sigma>1$, αποδείξτε ότι η $F(\sigma,t)$ έχει πραγματικό μέρος ίσο με

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\mathrm{Re}\{3+4n^{-it}+n^{-2it}\}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\mathrm{Re}F(\sigma,t)\leqslant 0.$$

Υπόδειξη. Από το Λήμμα 5.8.2 έχουμε

$$\begin{aligned}3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)+\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)&=-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+2it}}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\left(3+4n^{-it}+n^{-2it}\right).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathrm{Re}F(\sigma,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\mathrm{Re}\left(3+4n^{-it}+n^{-2it}\right).$$

Αν $\vartheta=t\ln n$ τότε $n^{-it}=\exp(-i\vartheta)=\cos\vartheta-i\sin\vartheta$ και $n^{-2it}=\exp(-i2\vartheta)=\cos 2\vartheta-i\sin 2\vartheta$, άρα

$$\mathrm{Re}\left(3+4n^{-it}+n^{-2it}\right)=3+4\cos\vartheta+\cos 2\vartheta\geqslant 0$$

από το Λήμμα 5.5.2. Έπεται ότι $\mathrm{Re}F(\sigma,t)\leqslant 0$.

6.6. *Έστω $c_q(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 2.5. Αποδείξτε ότι*

$$c_q(n)=\sum_{d|(n,q)}d\mu\left(\frac{q}{d}\right),$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{c_q(n)}{q^2}.$$

Υπόδειξη. Η πρώτη ισότητα αποδείχθηκε στην Άσκηση 2.5. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{c_q(n)}{q^2}&=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\sum_{d|(n,q)}d\mu\left(\frac{q}{d}\right)=\sum_{d|n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(dm)^2}d\mu(m)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^2}\sum_{d|n}\frac{1}{d}=\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{n}{d}\\&=\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{n}\sum_{d|n}d=\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\sigma(n)}{n},\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

6.7. *Αποδείξτε ότι για* $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

Από αυτή τη σχέση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, δείξτε ότι

$$\mu^2 * d = \mu * d^2.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $(m,n) = 1$ τότε $(m^2, n^2) = 1$ και, αφού η d είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση, έπεται ότι η $n \mapsto d(n^2)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Το γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως για $\sigma > 1$ εξηγείται όπως στην Άσκηση 6.1 (με βάση το φράγμα της Άσκησης 2.30 για την $d(n^2)$). Από το Θεώρημα 5.3.2, για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d(p^{2m})}{p^{ms}} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}}.$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x^m = \frac{x}{(x-1)^2}$$

η οποία ισχύει για $|x| < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}} &= 2\sum_{m=0}^{\infty} m(p^{-s})^m + \sum_{m=0}^{\infty} (p^{-s})^m = \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1}{1-p^{-s}} \\ &= \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3}.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} = \prod_p (1-p^{-s})^{-3} \Big/ \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

6.8. *Αποδείξτε ότι για* $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m,n]^\sigma} = \frac{\zeta^3(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $D(k) = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : [a,b] = k\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m,n]^\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s},$$

όπου $f(k) = |D(k)|$ είναι ο πληθάριθμος του $D(k)$. Αν $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ τότε

$$|D(k)| \leqslant (\alpha_1 \cdots \alpha_s)^2 \leqslant d^2(k).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2.30 όπως στην Άσκηση 6.3 βλέπουμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s}$ συγκλίνει απολύτως.

Παρατηρούμε ότι

$$D(p^m) = \{(1,p^m),(p^m,1),(p,p^m),(p^m,p),\dots,(p^m,p^m)\},$$

άρα

$$f(p^m) = |D(p^m)| = 2m+1.$$

Από το Θεώρημα 5.3.2, για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}}.$$

Όπως στην Άσκηση 6.7 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}} &= 2\sum_{m=0}^{\infty} m(p^{-s})^m + \sum_{m=0}^{\infty} (p^{-s})^m = \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1}{1-p^{-s}}\\ &= \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3},\end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} = \prod_p (1-p^{-s})^{-3} \Big/ \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

6.9. *Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}\lambda(n)}{n^\sigma} = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta^2(\sigma)}.$$

Υπόδειξη. Η $2^{\omega(n)}\lambda(n)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$2^{\omega(p^m)} = 2 = \sum_{d|p^m} |\mu(d)| = (|\mu| * u)(p^m).$$

Έπεται ότι

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$|2^{\omega(n)}\lambda(n)| = \sum_{d|n} |\mu(d)| \leqslant d(n).$$

Έστω $\sigma > 1$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\sigma - \varepsilon > 1$. Στην Άσκηση 2.30 είδαμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε $d(n) \leqslant C(\varepsilon)n^\varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{|2^{\omega(n)}\lambda(n)|}{n^\sigma} \leqslant C(\varepsilon)\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}},$$

και έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}\lambda(n)}{n^\sigma}$ συγκλίνει απολύτως. Τώρα, για κάθε $\sigma > 1$, από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}\lambda(n)}{n^\sigma} &= \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{\omega(p^m)}\lambda(p^m)}{p^{m\sigma}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{p^{m\sigma}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{-2p^{-\sigma}}{1+p^{-\sigma}}\right) \\
&= \prod_p \frac{1-p^{-\sigma}}{1+p^{-\sigma}} = \prod_p \frac{(1-p^{-\sigma})^2}{1-p^{-2\sigma}} = \prod_p (1-p^{-2\sigma})^{-1} \Big/ \prod_p (1-p^{-\sigma})^{-2} \\
&= \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta^2(\sigma)}.
\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Πρώτοι σε αριθμητικές προόδους

7.1. *Αποδείξτε ότι κάθε αριθμητική συνάρτηση f που είναι περιοδική* $(\mathrm{mod}\ k)$ *και ικανοποιεί την* $f(n)=0$ *αν* $(n,k)>1$ *εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτήρων* $(\mathrm{mod}\ k)$.

Υπόδειξη. Ζητάμε t_χ ώστε $f=\sum_{\chi} t_\chi \chi$, όπου χ οι $\varphi(k)$ το πλήθος χαρακτήρες $(\mathrm{mod}\ k)$. Αν υπάρχουν τέτοιοι συντελεστές τότε για κάθε χαρακτήρα χ $(\mathrm{mod}\ k)$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{k} f(n)\overline{\chi(n)} = \sum_{n}\sum_{\psi} t_\psi \psi(n)\overline{\chi(n)} = \sum_{\psi} t_\psi \sum_{n=1}^{k} \psi(n)\overline{\chi(n)} = \varphi(k) t_\chi$$

λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας

$$\sum_{n=1}^{k} \psi(n)\overline{\chi(n)} = \begin{cases} \varphi(k) & , \text{ αν } \psi=\chi \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

Δηλαδή, θα πρέπει να ορίσουμε

$$t_\chi := \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^{k} f(n)\overline{\chi(n)}.$$

Με αυτόν τον ορισμό βλέπουμε εύκολα ότι

$$\sum_{\chi} t_\chi \chi(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{m=1}^{k} f(m) \sum_{\chi} \chi(n)\overline{\chi(m)} = f(n)$$

για κάθε $1 \leqslant n \leqslant k$ με $(n,k)=1$, λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(n)\overline{\chi(m)} = \delta_{n,m}.$$

Αφού $f(n)=0$ αν $(n,k)>1$, έπεται ότι $\sum_{\chi} t_\chi \chi(n) = f(n)$ και στην περίπτωση που $(n,k)>1$.

7.2. *Έστω $k > 1$ ένας ακέραιος. Έστω χ ένας όχι-κύριος χαρακτήρας* $(\mathrm{mod}\ k)$. *Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε ακεραίους $a < b$ έχουμε*

$$\left|\sum_{n=a}^{b}\chi(n)\right| \leqslant \frac{\varphi(k)}{2}.$$

Υπόδειξη. Αφού ο χαρακτήρας χ έχει περίοδο k, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 \leqslant a < b \leqslant k$. Θέτουμε s το πλήθος των $a \leqslant n \leqslant b$ για τους οποίους $(n,k) = 1$. Αν $s \leqslant \varphi(k)/2$ τότε

$$\left|\sum_{n=a}^{b}\chi(n)\right| \leqslant \sum_{n=a}^{b}|\chi(n)| = s \leqslant \frac{\varphi(k)}{2}.$$

Αν $s > \varphi(k)/2$ τότε το πλήθος των $n \in \{1,\dots,a-1\} \cup \{b+1,\dots,k\}$ με $(n,k) = 1$ είναι $\varphi(k) - s < \varphi(k)/2$. Αφού ο χ δεν είναι κύριος, έχουμε $\sum_{n=1}^{k}\chi(n) = 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=a}^{b}\chi(n)\right| &= \left|-\sum_{n=1}^{a-1}\chi(n) - \sum_{n=b+1}^{k}\chi(n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{a-1}\chi(n)\right| + \left|\sum_{n=b+1}^{k}\chi(n)\right|\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{a-1}|\chi(n)| + \sum_{n=b+1}^{k}|\chi(n)| \leqslant \varphi(k) - s < \frac{\varphi(k)}{2}.\end{aligned}$$

7.3. *Κατασκευάστε ένα άπειρο σύνολο S πρώτων με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $p \in S$ και $q \in S$ τότε*

$$\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right) = (p, q-1) = (p-1, q) = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε $p_1 > 2$ και επαγωγικά ορίζουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία πρώτων ως εξής: αν έχουν οριστεί οι $p_1 < \cdots < p_n$ τότε από το θεώρημα του Dirichlet υπάρχει πρώτος

$$p_{n+1} = a_n \cdot 2\prod_{p \leqslant p_n} p - 1$$

όπου $a_n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το άπειρο σύνολο $S = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, τότε:

(α) Έχουμε $p_m \mid p_n + 1$. Αφού $p_m > 2$ δεν μπορούμε να έχουμε $p_m \mid p_n - 1$, άρα $(p_m, p_n - 1) = 1$.

(β) Έχουμε $p_n > p_m - 1$, άρα δεν μπορούμε να έχουμε $p_n \mid p_m - 1$, συνεπώς $(p_n, p_m - 1) = 1$.

(γ) Έστω q ένας πρώτος διαιρέτης του $\frac{p_n-1}{2}$. Τότε, ο q δεν διαιρεί τον $\frac{p_n+1}{2} = a_n\prod_{p\leqslant p_{n-1}} p$, άρα $q > p_{n-1}$. Όμως $\frac{p_m-1}{2} < p_m \leqslant p_{n-1}$, άρα ο q δεν διαιρεί τον $\frac{p_m-1}{2}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right) = 1$.

7.4. *Έστω $c_q(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 2.3. Ορίζουμε*

$$\langle f, g\rangle = \lim_{x\to\infty}\sum_{n\leqslant x} f(n)\overline{g(n)}.$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2.3, αποδείξτε ότι

$$\langle c_q, c_{q'} \rangle = \begin{cases} \varphi(q) & , \text{ αν } q = q' \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

Υπόδειξη.

7.5. (α) *Έστω $f(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geqslant 1$ με ακέραιους συντελεστές και ας υποθέσουμε ότι για κάθε πρώτο p, υπάρχουν φυσικός m και πρώτος q τέτοιοι ώστε $f(p) = q^m$. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό t,*

$$q^{m+1} \mid (f(p + tq^{m+1}) - f(p)).$$

(β) *Συμπεράνατε από το* (α) *ότι αν $p \neq q$ και ο $p + tq^{m+1}$ είναι πρώτος, τότε*

$$f(p + tq^{m+1}) = q^m.$$

(γ) *Καταλήξτε σε άτοπο από το* (β) *χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Dirichlet για τους πρώτους σε αριθμητικές προόδους και συμπεράνατε ότι $p = q$, ή ισοδύναμα ότι για κάθε πρώτο p υπάρχει ακέραιος m_p τέτοιος ώστε*

$$f(p) = p^{m_p}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $f(p) = q^m$ για κάποιον πρώτο q και κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$ με απλές πράξεις έχουμε

$$q^{m+1} \mid f(p + \ell q^{m+1}) - f(p).$$

(β) Έστω ότι $q \neq p$. Αφού $(p, q^{m+1}) = 1$, υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $p + \ell q^{m+1}$. Αν λοιπόν ο $p + \ell q^{m+1}$ είναι πρώτος, τότε υπάρχουν πρώτος d και $s \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d^s = f(p + \ell q^{m+1}) = f(p) + aq^{m+1} = q^m(aq + 1)$$

για κάποιον ακέραιο a. Τότε, $q \mid d^s$, άρα τελικά $q = d$ και αναγκαστικά $a = 0$ και $s = m$. Δηλαδή,

$$f(p + \ell q^{m+1}) = q^m.$$

(γ) Αφού αυτό συμβαίνει για άπειρες τιμές του ℓ, το πολυώνυμο $f(x)$ είναι σταθερό και ίσο με q^m, το οποίο είναι άτοπο αφού έχει βαθμό $n \geqslant 1$. Έπεται ότι $q = p$. Δηλαδή, για κάθε πρώτο p υπάρχει φυσικός m_p τέτοιος ώστε $f(p) = p^{m_p}$.

Σημείωση: Δεδομένου ότι $\lim_{p \to \infty} \frac{f(p)}{p^n} = a_n$, όπου a_n είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(x)$, συμπεραίνουμε ότι $m_p = n$ για όλους τελικά τους πρώτους p, δηλαδή $f(p) = p^n$ για όλους τελικά τους πρώτους. Αφού το $f(x)$ είναι πολυώνυμο, αναγκαστικά είναι το $f(x) = x^n$.

7.6. (α) *Έστω m και k θετικοί ακέραιοι και f ένας χαρακτήρας Dirichlet* $(\mathrm{mod}\ k)$. *Λέμε ότι ο m είναι περίοδος της f αν $f(n + m) = f(n)$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Αν ο k είναι ελεύθερος τετραγώνων, αποδείξτε ότι ο k είναι η μικρότερη θετική περίοδος της f.*

(β) *Δώστε παράδειγμα ενός χαρακτήρα Dirichlet* $(\mathrm{mod}\ k)$ *για τον οποίο ο k δεν είναι η μικρότερη θετική περίοδος της f.*

Υπόδειξη.