

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Νικόλαος Αλικάκος

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Μάιος 2006

Περιεχόμενα

1	Το Κεντρικό Θεώρημα	3
1.1	Θεώρημα Πεπλεγμένης συναρτήσης	3
1.2	Μικρή (ομαλή) διαταραχή Χαμιλτονιανού Συστήματος	8
1.3	Εφαρμογή: Ταλαντωτής Van der Pol [ηλεκτρικά κυκλώματα].	13
2	Αλγεβρικές Εξισώσεις	15
2.1	Κλίμακες και το πολύγωνο του Νεύτωνα	15
3	Σύνηθεις Διαφορικές Εξισώσεις	28
3.1	Η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - η ομαλή περίπτωση	29
3.2	Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων Poincare - Linstedt (Ιδιόμορφη διαταραχή)	41
3.3	Ανάλυση οριακού στρώματος - Ιδιόμορφη διαταραχή	45
4	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις	54
4.1	Προέλευση της θεωρίας ιδιομόρφων διαταραχών και οριακού στρώματος: Το σύστημα Prandtl στη Ρευστοδυναμική.	54
4.1.1	Εξισώσεις Navier - Stokes	54
4.1.2	Το φυσικό φαινόμενο	56
4.1.3	Το πάχος της λεπίδας: το φυσικό επιχείρημα.	57
4.2	Εσωτερική κλίμακα - Εσωτερικά αναπτύγματα και σύστημα Prandtl.	58
4.3	Ο ρόλος της πίεσης στη δημιουργία οριακού στρώματος.	68
5	Ο Μετασχηματισμός του Liouville - Η Μέθοδος WKB	85

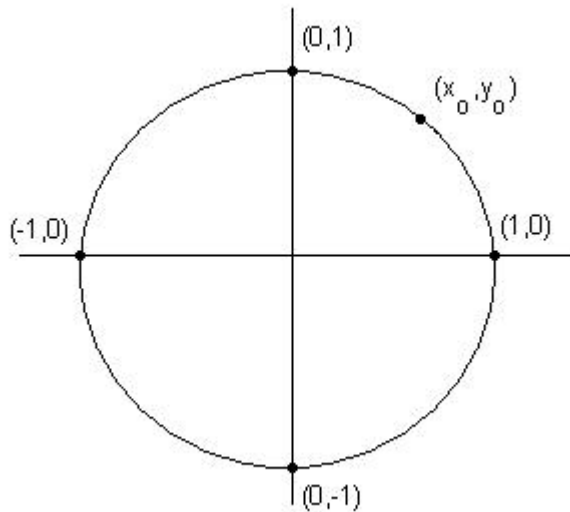
1 Το Κεντρικό Θεώρημα

1.1 Θεώρημα Πεπλεγμένης συναρτήσης

Η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

συσχετίζει τις μεταβλητές x και y και ορίζει τη μια σαν συνάρτηση της άλλης.



Σχ. 1

Έστω (x_0, y_0) όπως στο σχήμα 1. Τότε τοπικά σε περιοχή του σημείου η (1) ορίζει

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad y_0 = f(x_0)$$

και ανάλογα

$$x = g(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad x_0 = g(y_0)$$

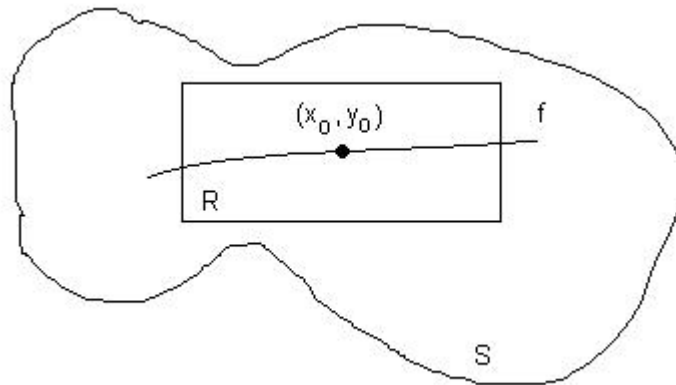
Για (x_0, y_0) επί των αξόνων, έχουμε μόνο μια επιλογή. Για παράδειγμα, αν $(x_0, y_0) = (1, 0)$ αναγκαστικά επιλέγουμε το x σαν συνάρτηση του y .

Όταν δωθεί μια γενική εξίσωση της μορφής

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

είναι εν γένει σπάνιο να μπορούμε να εκφράσουμε σε λυμένη μορφή τη μια μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης. Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων εγγυάται, κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, ότι η (2) ορίζει τη μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης, τουλάχιστον τοπικά περί το (x_0, y_0) που ικανοποιεί την (2) και επιτρέπει τον υπολογισμό της συνάρτησης με όση ακρίβεια επιθυμούμε.

Θεώρημα 1.1 Έστω $F(.,.)$ C^1 -συνάρτηση ορισμένη σε ανοιχτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in S$.



Σχ. 2

Υποθέτουμε ότι

$$(I) F(x_0, y_0) = 0$$

$$(II) F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Τότε υπάρχουν $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε στο ορθογώνιο $R = \{(x, y) / |x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2\} \subseteq S$ ισχύουν τα ακόλουθα

(i) $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $\exists ! y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει καλώς ορισμένη $y=f(x)$ που ικανοποιεί

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \tag{4}$$

και όλες οι λύσεις της (3) μέσα στο R βρίσκονται πάνω στο γράφημα της $f(x)$.

(ii) $Hf(x)$ είναι C^1 , $f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \rightarrow (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $f(x_0) = y_0$, και ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1). \quad (5)$$

Παρατηρήσεις

(1) Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα με παραγωγή από την (4):

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)$$

(2) θεωρούμε την $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Για (x_0, y_0) εκτός των αξόνων ισχύει $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ και το ΘΠΣ μπορεί να εφαρμοστεί και στις δύο κατευθύνσεις και δίνει $y=f(x)$ και $x=g(y)$. Αυτό δεν ισχύει για (x_0, y_0) επί των αξόνων: π.χ, $F_y(x, y) = 2y = 0$ στο $(1,0)$, και κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εγγυάται $4y = f(x)$ σε περιοχή του $(1,0)$ (ευτυχώς!).

(3) Θεωρίστε το παράδειγμα $F(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ που σε περιοχή του $(0,0)$ η $F(x,y)=0$ ορίζει δύο διαφορετικές συναρτήσεις $y = f_1(x) = x^2$ και $y = f_2(x) = x^3$ γεγονός που φαινομενικά αντίκειται στη μοναδικότητα του $f(x)$. Παρατηρούμε όμως ότι $F_y(x, y) = 2y - x^2 - x^3$ και $F_y(0, 0) = 0$, άρα η υπόθεση (II) δεν ισχύει και κατά συνέπεια δεν υπάρχει αντίφαση.

Απόδειξη. (1) Έστω $F_y(x_0, y_0) > 0$ (η άλλη περίπτωση $F_y(x_0, y_0) < 0$ είναι ανάλογη). Επιλέγουμε $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$F_y(x_0, y) > 0, \quad |y - y_0| \leq \delta_2 \quad (6)$$

το οποίο είναι δυνατόν λόγω συνέχειας. Κατά συνέπεια, η $y \mapsto F(x_0, y)$ είναι αυστηρά αύξουσα, και δεδομένου ότι $F(x_0, y_0) = 0$ έχουμε

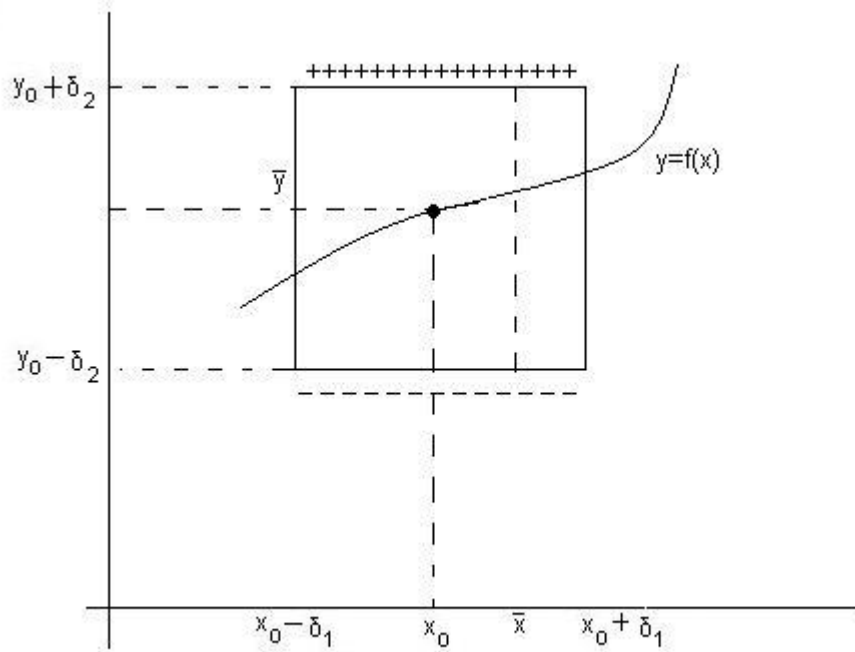
$$F(x_0, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \delta_2) > 0. \quad (7)$$

Κάνοντας χρήση τώρα της συνέχειας $x \mapsto F(x, y_0 \pm \delta_2)$ με δ_1 αρκετά μικρό, έχουμε

$$F(x, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta_2) > 0, \quad |x - x_0| \leq \delta_1. \quad (8)$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει ένα ορθογώνιο $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ στην πάνω πλευρά του οποίου η F είναι θετική, στην κάτω αρνητική. Επιλέγοντας τα δ_1, δ_2 μικρότερα ενδεχομένως μπορούμε να εγγυηθούμε ότι εντός του ορθογωνίου ισχύει

$$F_y > 0 \tag{9}$$



Σχ. 3

(2) Εάν δοθεί τώρα $\bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $y \mapsto F(\bar{x}, y)$, $y \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ η οποία αλλάζει πρόσημο ακριβώς μια φορά λόγω (8) και (9). Κατά συνέπεια, λόγω συνέχειας υπάρχει $\bar{y} \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ τέτοιο ώστε

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{10}$$

Το \bar{y} είναι μοναδικό (λόγω (9)). Ορίζουμε λοιπόν

$$f(\bar{x}) := \bar{y}, \quad \bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]. \tag{11}$$

3. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = x_0$. Δοθέντος $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $F(x, y_0 + \epsilon) > 0$, $F(x, y_0 - \epsilon) < 0$

για $|x - x_0| < \delta$. Κατά συνέπεια, λόγω συνέχειας, υπάρχει $y^* = y^*(x)$ με $y^* \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ τέτοιο ώστε $F(x, y^*(x)) = 0$.

Λόγω της μοναδικότητας της $f(x)$, συμπεραίνουμε ότι $y^*(x) = f(x)$ και κατά συνέπεια $|f(x) - f(x_0)| = |y^*(x) - y_0| < \epsilon$ για $|x - x_0| < \delta$ που αποδεικνύει τη συνέχεια.

Για $x^* \neq x_0$, $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ θεωρούμε το σημείο $(x^*, f(x^*)) \in R$. Οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν για το (x^*, y^*) στη θέση του (x_0, y_0) . Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω κατασκευή οδηγούμαστε σε μια f^* που συμπίπτει αναγκαστικά με την f λόγω του ορισμού της τελευταίας ως μοναδικής λύσης της εξίσωσης $F(x, y) = 0$. Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο x^* για κάθε $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

4. Τέλος θα δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \quad (12)$$

από όπου έπεται ότι $f \in C^1$.

Έστω λοιπόν x φιξαρισμένο σημείο και $y = f(x)$. Για Δx τέτοιο ώστε $x + \Delta x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, ορίζουμε

$$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + \Delta x) - y.$$

Από τον ορισμό της f έχουμε

$$F(x, y) = 0 = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F_x(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + F_y(\bar{x}, \bar{y})\Delta y$$

όπου $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$, $\bar{y} \in (y, y + \Delta y)$ και κάναμε χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Έπεται ότι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x}, \bar{y})}{F_y(\bar{x}, \bar{y})} \quad (13)$$

όπου κάναμε χρήση του $F_y > 0$ στο R . Παίρνοντας το όριο $\Delta x \rightarrow 0$, κάνοντας χρήση της συνέχειας έχουμε $\Delta y \rightarrow 0$, και κατά συνέπεια $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$ και από την (13) έχουμε

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

□

Ισχύει η εξής γενική μορφή του ΘΠΣ:

Θεώρημα 1.2 Έστω $\Lambda, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ χώροι Banach και $F \in C(\Lambda \times \mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Έστω $F(\lambda_0, u_0) = 0$ για κάποιο $(\lambda_0, u_0) \in \Lambda \times \mathbf{X}$. Εάν η μετρική παράγωγος $F_u(\lambda, u)$ υπάρχει σε περιοχή του (λ_0, u_0) και εάν

$$(a) \quad (\lambda, u) \longrightarrow F_u(\lambda, u),$$

$$(b) \quad F_u(\lambda_0, u_0) \text{ ισομορφισμός από } \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}.$$

Τότε, υπάρχει συνεχής καμπύλη $\lambda \longrightarrow u(\lambda)$ που ορίζεται για λ σε περιοχή του $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοια ώστε

$$u(\lambda_0) = u_0, \quad F(\lambda, u(\lambda)) = 0.$$

Επίσης, οποιαδήποτε λύση της $F(\lambda, u) = 0$ σε περιοχή του (λ_0, u_0) είναι της μορφής $(\lambda, u(\lambda))$.

1.2 Μικρή (ομαλή) διαταραχή Χαμιλτονιανού Συστήματος

([A], σελ. 149)

Θεωρούμε το σύστημα

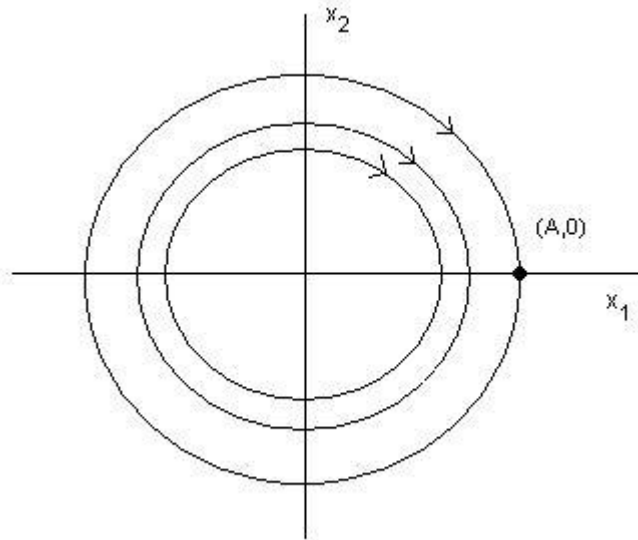
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (14)$$

(όπου $f_i \in C^1$ συναρτήσεις)

που διαφέρει ελαφρώς από τον γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \quad (15)$$

του οποίου όλες οι λύσεις είναι περιοδικές:

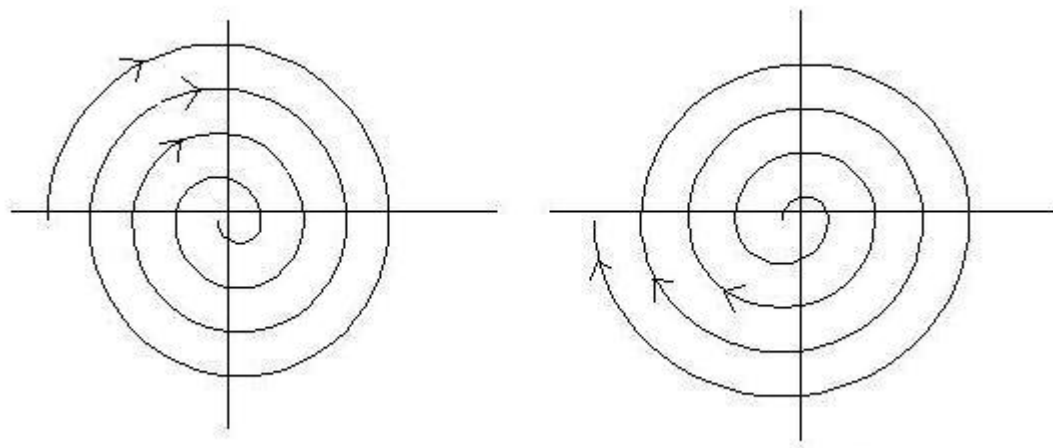


Σχ. 4Α

$$x_1^0(t) = A \cos(t - t_0)$$

$$x_2^0(t) = A \sin(t - t_0)$$

Οι τροχιές του (14) εν γένει δεν είναι κλειστές και ενδέχεται να έχουμε τη μορφή ελικοειδούς με απόκλιση της τάξης του ϵ μεταξύ 2 διαδοχικών στροφών:



Σχ. 4Β

Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η ελικοειδής λύση πλησιάζει ή απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, θεωρούμε την ποσότητα (μηχανική ενέργεια)

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

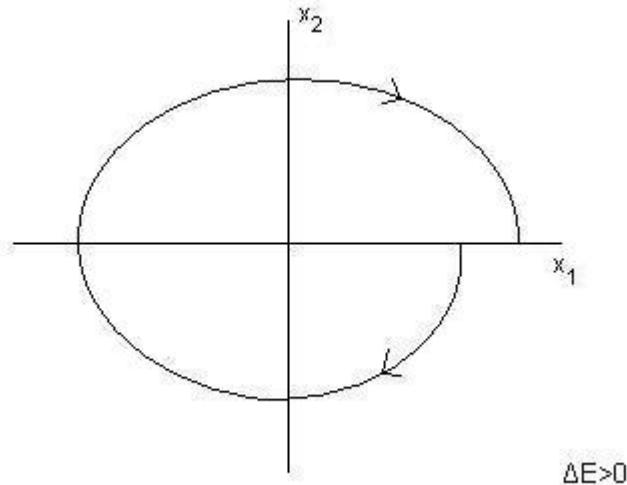
της οποίας τη μεταβολή κατά μήκος των λύσεων υπολογίζουμε

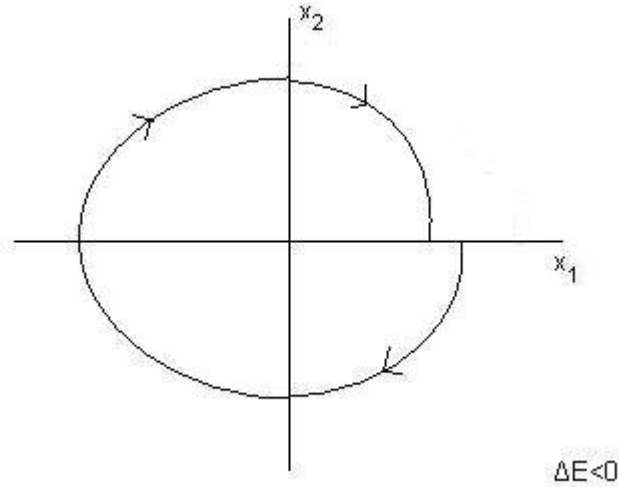
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2)) + x_2(-x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2)) \\ &= \varepsilon(x_1 f_1(x_1, x_2) + x_2 f_2(x_1, x_2)) =: \varepsilon \dot{E}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Ζητάμε πληροφορία για το πρόσημο της ποσότητας

$$\int_0^{T(\varepsilon)} \varepsilon \dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) dt =: \Delta E \quad (16)$$

που αντιστοιχεί στη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της $(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t))$ κατά μια πλήρη "περιστροφή": $x_2^\varepsilon(0) = x_2^\varepsilon(T(\varepsilon)) = 0$





Σχ. 5

Λήμμα 1.3

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A \cos(t - t_0), A \sin(t - t_0)) dt + o(\varepsilon). \quad (17)$$

Συμβολισμός: Εξ' ορισμού, $o(\varepsilon)$ είναι ποσότητα που εξαρτάται από το ε και

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης από παραμέτρους των Σ.Δ.Ε., προκύπτει ότι $(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) \rightarrow (x_1^0(t), x_2^0(t))$ καθώς $t \rightarrow 0$, ομοιόμορφα στα συμπαγή του t . Κατά συνέπεια, $T(\varepsilon) \rightarrow 2\pi$.

Από την

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \varepsilon \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) dt \\
 &= \varepsilon \left[\int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \right. \\
 &\quad + \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt - \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \\
 &\quad \left. + \int_0^{T(\varepsilon)} \left(\dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) - \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) \right) dt \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

λόγω ότι του $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ των δύο παρενθέσεων είναι μηδέν, από συνχή εξάρτηση προκύπτει η (17). □

Θέτουμε

$$F(A) := \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \tag{19}$$

και γράφουμε την (17) ως

$$\Delta E = \varepsilon \left[F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right]. \tag{20}$$

Θεώρημα 1.4 Έστω ότι η F έχει απλή ρίζα στο A_0 .

$$F(A_0) = 0 \quad F'(A_0) \neq 0$$

Τότε το (14) έχει περιοδική λύση πλάτους $A_0 + O(\varepsilon)$ για $|\varepsilon| \ll 1$.

Συμβολισμός: Το $O(\varepsilon)$ είναι παράσταση που εξαρτάται από το ε και για την οποία ισχύει η εκτίμηση $|O(\varepsilon)| < C|\varepsilon|$ όπου C σταθερά ανεξάρτητη από το ε , για $|\varepsilon| \ll 1$, όπου C μια σταθερά ανεξάρτητη του ε .

Απόδειξη. Θέτουμε

$$Q(\varepsilon, A) := F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Η Q είναι C^1 (εδώ κάνουμε χρήση από Σ.Δ.Ε. της ομαλής εξάρτησης ως προς ε) και

$$Q(0, A_0) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A}(0, A_0) \neq 0.$$

Μέσω του ΘΠΣ, υπάρχει $A(\varepsilon)$, $A(0) = A_0$, τέτοια ώστε

$$Q(\varepsilon, A(\varepsilon)) = 0.$$

Άρα το (14) έχει λύση που είναι κλειστή καμπύλη, άρα περιοδική. \square

Σχόλιο: Το Λήμμα 1.3 θα ήταν τετριμμένο αν αντί για $o(\varepsilon)$ είχαμε $O(\varepsilon)$.

1.3 Εφαρμογή: Ταλαντωτής Van der Pol [ηλεκτρικά κυκλώματα].

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) \quad (\text{Van der Pol})$$

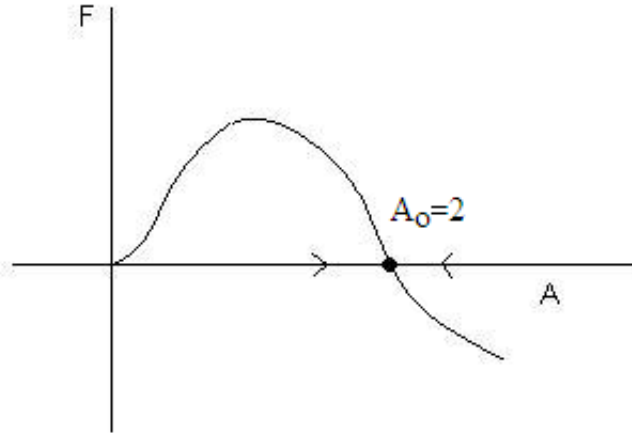
την οποία γράφουμε σε μορφή συστήματος θέτοντας $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2(1 - x_1^2).$$

$$\dot{E}(x_1, x_2) = x_2^2(1 - x_1^2)$$

$$\begin{aligned} F(A) &= \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t - t_0)(1 - A^2 \cos^2(t - t_0))dt = \\ &= \pi\left(A^2 - \frac{A^4}{4}\right). \end{aligned}$$



Σχ. 6

Κατά συνέπεια η εξίσωση Van der Pol έχει περιοδική λύση για $|\varepsilon| \ll 1$ κοντά στην περιφέρεια $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Άσκηση 1.5 Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση Duffing: $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$. Παίρνετε καμία πληροφορία;

Άσκηση 1.6 Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση:

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon |\dot{x}|^p \dot{x} (1 - x^{2q}).$$

όπου $p, q > 0$.

(i) (X. Ιοακίμ) Για $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και άρτιο $q \in \mathbb{N}$, εξίσωση έχει μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους

$$x_1^2 + x_2^2 = \left[\frac{2 \cdot 4 \dots 2q}{1 \cdot 3 \dots (2q-1)} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2q+p+2)}{2 \cdot 4 \dots p(p+2)} \right]^{\frac{1}{q}} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

(ii) (X. Ιοακίμ) Για p, q όπως στο (i), και επίσης $p+2 = 2q$ έχουμε μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$.

(iii) (Μπερκέτης) Για p, q όπως στο ένα και $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{4}{q} = 2$ έχουμε μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Άσκηση 1.7 Θεωρείστε την εξίσωση τύπου Van der Pol

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2)$$

Επιλέξτε f κατάλληλο πολυώνυμο έτσι ώστε να υπάρχουν ακριβώς 3 περιοδικές λύσεις για $\varepsilon \ll 1$. Για το παράδειγμα που θα κατασκευάσετε ερευνηίστε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.

Άσκηση 1.8 (X. Ιοακίμ) Θεωρείστε την εξίσωση τύπου Van der Pol

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon[16\dot{x}^5 - 80\dot{x}^3 + 175\dot{x}](1 - x^2)$$

Δειξτε ότι για $\varepsilon \ll 1$ (π.χ. $\varepsilon=0.001$) έχουμε 3 οριακούς κύκλους, 2 ευσταθείς με πλάτη $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$ και $x_1^2 + x_2^2 = 7 + O(\varepsilon)$ και έναν ευσταθή με πλάτος $x_1^2 + x_2^2 = 5 + O(\varepsilon)$.

2 Αλγεβρικές Εξισώσεις

2.1 Κλίμακες και το πολύγωνο του Νεύτωνα

Το ΘΠΣ δίνει ύπαρξη λύσεων της

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{ή } F(z, w) = 0) \tag{21}$$

κάτω από υποθέσεις σε περιοχή σημείου $(x_0, y_0) (= (0, 0)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας) που ικανοποιεί την εξίσωση, $F(x_0, y_0) = 0$. Στην περίπτωση που η F είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών, ή γενικότερα

$$\left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ αναλυτική ως προς 2 μεταβλητές} \\ \text{σε περιοχή του } (0, 0) \text{ της μορφής (βλ. υπόμνημα} \\ \text{θεώρημα προπαρασκευής του Weierstrass)} \\ F(z, w) = w^k + a_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + a_0(z) \\ a_j(z) = a_j^{(p_j)}z^{p_j} + a_j^{(p_j+1)}z^{p_j+1} + \dots \\ a_0^{(p_0)} \neq 0 \\ \text{όπου } a_j(z) \text{ αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις } j = 0, 1, \dots, k-1 \end{array} \right. \tag{22}$$

Οι υποθέσεις του ΘΠΣ πραφανώς δεν ικανοποιούνται διότι $F_w(0, 0) = 0$. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε όλες τις λύσεις $w = f_l(z)$ σε περιοχή του $(0,0)$, $l = 1, \dots, K_n$.

Παρατήρηση 2.1 *Εν γένει ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις όταν η (21) είναι της μορφής $F(\varepsilon, y) = 0$ (ή $F(\lambda, y) = 0$) όπου ε, λ πραγματικές παράμετροι. Ως γνωστόν όμως από την περίπτωση του τριωνύμου, η μιγαδοποίηση του προβλήματος είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος μελέτης των πραγματικών ριζών.*

Παρατήρηση 2.2 *Το ΘΠΣ ισχύει για $x, y \in \mathbb{C}$ με αντίστοιχες υποθέσεις και αντίστοιχα συμπεράσματα (η συνθήκη $F_y \neq 0$ αντικαθίσταται από $F_w \neq 0$ όπου $\frac{\partial F}{\partial w}$ η μιγαδική παράγωγος) και θα το πάρουμε ως δεδομένο.*

Εάν η F έχει περισσότερη ομαλότητα, αντίστοιχη ομαλότητα έχει και η f . Ειδικά, εάν η F είναι αναλυτική, τότε η f είναι επίσης αναλυτική.

Παράδειγμα 2.3 *Να μελετηθούν οι λύσεις της*

$$w^2 + a_0^{(1)}z + a_0^{(3)}z^3 = 0, \quad a_0^{(1)} \neq 0 \quad (23)$$

σε περιοχή του $(0, 0)$.

Προφανώς, $(z, w) = (0, 0)$ είναι λύση. Θέτουμε $w = f(z)$. Παρατηρούμε ότι για $|z| \ll 1$, η (23) προσεγγίζεται από στην

$$w^2 + a_0^{(1)}z = 0, \quad a_0^{(1)} \neq 0 \quad (24)$$

που έχει λύσεις

$$w = \pm \left(-a_0^{(1)} \right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}.$$

Αναζητάμε λοιπόν για την (23) λύσεις της μορφής

$$w = v(z)z^{\frac{1}{2}}, \quad v(0) \neq 0 \quad (25)$$

όπου $v(z)$ συνάρτηση υπό προσδιορισμό, δηλαδή εισάγουμε την αλλαγή μεταβλητών $w = uz^{\frac{1}{2}}$.

Αντικατάσταση της (25) στην (23) δίνει κατόπιν απλοποίησης

$$v^2 + a_0^{(1)} + a_0^{(3)}z^2 = 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$v_{\pm}(z) = \pm \left(-a_0^{(1)} - a_0^{(3)}z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

και κατά συνέπεια η

$$w_{\pm}(z) = v_{\pm}(z)z^{\frac{1}{2}}$$

δίνει τις λύσεις της (23).

Σχόλιο 2.4 Η βασική ιδέα του Παραδείγματος είναι η εισαγωγή της κλίμακας $z^{\frac{1}{2}}$.

(iii) Αναμένουμε ότι οι λύσεις της (21) με F όπως στην (22), είναι δυναμοσειρές με κλασματικές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει να ισχύει και μάλιστα η κλάση της \overline{F} που είναι δυναμοσειρές με κλασματικές δυνάμεις (πεπερασμένο αριθμό αρνητικών) είναι αλγεβρικά κλειστή κάτω από αυτή τη διαδικασία ([W], σελ. 98).

Παράδειγμα 2.5 Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^3 + a_2^{(1)}zw^2 + a_1^{(3)}z^3w + a_0^{(4)}z^4 = 0, \quad a_i^{(j)} \neq 0 \quad (26)$$

σε περιοχή του $(0,0)$, $i = 0, 1, 2, j = 1, 3, 4$.

Υποκινούμενοι από την (25) αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$w = v(z)z^{\alpha} \quad (27)$$

όπου α υπό προσδιορισμό. Αντικατάσταση της (27) στην (26) δίνει

$$z^{3\alpha}v^3 + a_2^{(1)}z^{2\alpha+1}v^2 + a_1^{(3)}z^{3+\alpha}v + a_0^{(4)}z^4 = 0, \quad |z| \leq \delta \quad (28)$$

Προφανώς χρειαζόμαστε το α να είναι τέτοιο ώστε τουλάχιστον δύο όροι να έχουν την ίδια δύναμη για να αλληλοαναιρούνται.

Έχουμε λοιπόν τη μέθοδο εξισορρόπησης:

$$(1) 3\alpha = 2\alpha + 1 \quad (4) 2\alpha + 1 = \alpha + 3$$

$$(2) 3\alpha = \alpha + 3 \quad (5) 2\alpha + 1 = 4$$

$$(3) 3\alpha = 4 \quad (6) 3 + \alpha = 4$$

Η (1) δίνει $\alpha=1$, με εκθέτες $(3,3,4,4)$ και η (31) παίρνει τη μορφή

$$z^3v^3 + a_2^{(1)}z^3v^2 + a_1^{(3)}z^4 + a_0^{(4)}z^4 = 0,$$

που μετά από απλοποίηση δίνει

$$v^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}z + a_0^{(4)}z = 0. \quad (29)$$

Η (29) για $z = 0$ δίνει $v = -a_2^{(1)}$. Τώρα κάνουμε χρήση του ΘΠΣ : Θέτουμε

$$F(z, v) = v^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}z + a_0^{(4)}z$$

$$F(0, -a_2^{(1)}) = 0$$

$$F_v(0, -a_2^{(1)}) = (a_2^{(1)})^2$$

Από τις υποθέσεις μας ότι $F_u(0, -a_2^{(1)}) \neq 0$, παίρνουμε $v_1(z)$ αναλυτική να επιλύει την (29) με $v_1(0) = -a_2^{(1)}$.

Εν συνεχεία θεωρούμε την (2) που δίνει $\alpha = \frac{3}{2}$ και αντίστοιχους εκθέτες $(\frac{9}{2}, 4, \frac{9}{2}, 4)$ και η (28) παίρνει τη μορφή

$$z^{\frac{9}{2}}v^3 + a_2^{(1)}z^4v^2 + a_1^{(3)}z^{\frac{9}{2}}v + a_0^{(4)}z^4 = 0,$$

που μετά από απλοποίηση δίνει

$$z^{\frac{1}{2}}v^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}z^{\frac{1}{2}}v + a_0^{(4)} = 0. \quad (30)$$

Τώρα θα κάνουμε χρήση του ΘΠΣ.

Θέτουμε $s = z^{\frac{1}{2}}$, οπότε η (30) παίρνει τη μορφή

$$F(s, v) = sv^3 + a_2^{(1)}v^2 + a_1^{(3)}sv + a_0^{(4)} = 0. \quad (31)$$

Για $s=0$, η (31) δίνει

$$a_2^{(1)}v^2 + a_0^{(4)} = 0 \Rightarrow v = \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

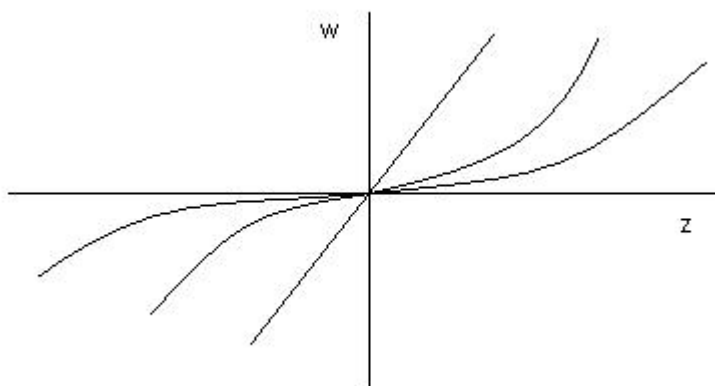
με

$$F_v \left(0, \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \pm 2a_2^{(1)} \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Υποθέτοντας ότι $F_v \left(0, \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \neq 0$, παίρνουμε μέσω του ΘΠΣ τις $v_2(s)$, $v_3(s)$ αναλυτικές συναρτήσεις, να επιλύουν την (31), με $v_{2,3}(0) = \pm \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$. Δηλαδή παίρνουμε μέχρι τούδε 3 λύσεις για την (26):

$$\begin{cases} w = v_1(z)z, & v_1(0) = -a_2^{(1)}, \\ w = v_2(z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{3}{2}}, & v_2(0) = \left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ w = v_3(z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{3}{2}}, & v_3(0) = -\left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (32)$$

όπου $v_i(s)$ αναλυτικές σε μεριοχή του $s=0$.



Σχ. 7: Οι λύσεις της (26) σε περιοχή του $(0,0)$.

Άσκηση 2.6 Έστω $F(x, \lambda) \in C^1$ συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Καλούμε την λ παράμετρο και την x άγνωστη και θεωρούμε την εξίσωση ως προς x

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (33)$$

Υποθέτουμε ότι $F(x_0, \lambda_0) = 0$.

Για κάθε λ (σε περιοχή του λ_0) έστω $n(\lambda)$ ο αριθμός των λύσεων της (??) εντός της περιοχής. Καλούμε (x_0, λ_0) σημείο διακλάδωσης αν ο $n(\lambda)$ αλλάζει καθώς η λ μεταβάλλεται περίξ του λ_0 .

Δείξατε ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι το (x_0, λ_0) σημείο διακλάδωσης είναι $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$, δηλαδή οι υποθέσεις του ΘΠΣ δεν ικανοποιούνται.

Άσκηση 2.7 (i) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της $F(x, \lambda) = \lambda x - x^3$ και να σχεδιαστεί το σύνολο των λύσεων της $F(x, \lambda) = 0$ στο x - λ επίπεδο.

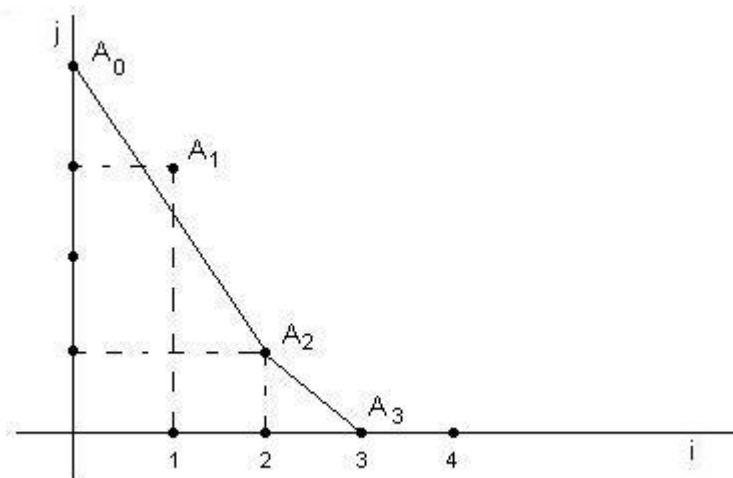
(ii) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της

$$F(y, \lambda) := y^2 + 3y + \lambda = 0$$

και να σχεδιαστεί το σύνολο λύσεων της $F(y, \lambda) = 0$ στο y - λ επίπεδο.

Το πολύγωνο του Νεύτωνα συστηματοποιεί την επίλυση εξισώσεων όπως της (26) και γενικότερα της (21) για F όπως στην (22).

Εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες (i, j) $i, j = 1, 2, \dots$ και θεωρούμε τα σημεία $A = (i, p_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, k$ όπου p_i μικρότερος εκθέτης του z στον συντελεστή του w^i .



Σχ. 8 : Πολύγωνο Νεύτωνα για το Παράδειγμα 2.

Επί παραδείγματι, για το Παράδειγμα 2.5 έχουμε

$$A_0 = (0, 4), A_1 = (1, 3), A_2 = (2, 1), A_3 = (3, 0) \tag{34}$$

Θεωρούμε τώρα την κυρτή πολυγωνική γραμμή L που περνάει μέσω κάποιων σημείων A_i που ενώνει τα $(0, p_0)$ και $(k, 0)$ και είναι τέτοια ώστε να έχει όλα τα A_i ή επί ή από πάνω. Στο σχήμα 8 έχουμε την κυρτή πολυγωνική γραμμή (Πολύγωνο του Νεύτωνα) για το Παράδειγμα 2.

Το Πολύγωνο του Νεύτωνα συνίσταται από τον πεπερασμένο αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων $L_j (= \overline{A_{i_{j-1}}A_{i_j}})$ αντίστοιχων κλίσεων $-\alpha_j$, $j=1, \dots, r$. Θέτουμε $n_j = i_j - i_{j-1}$. Για το Παράδειγμα 2.5 έχουμε τα ευθύγραμμα τμήματα

$$L_1 = \overline{A_0A_2} \quad \text{και} \quad L_2 = \overline{A_2A_3}$$

με κλίσεις

$$-\alpha_1 = \frac{4-1}{0-2} = -\frac{3}{2}, \quad -\alpha_2 = \frac{1-0}{2-3} = -1$$

και

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1$$

Θα αποδείξουμε ότι αντιστοιχούν σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα L_j , n_j λύσεις της $F(z,w)=0$ (βλ. (21), (22)) της μορφής $a_j v_{jl}(z^{\sigma_{jl}})$, $l=1,2,\dots,n_j$ όπου κάθε v_{jl} είναι αναλυτική συνάρτηση του z σε περιοχή του $z=0$ και σ_{jl} κλασματικός εν γένει εκθέτης που προκύπτει από τη διαδικασία. Από την προφανή σχέση δε $\sum_{j=1}^r n_j = k$ προκύπτει όπως θα δείξουμε, ότι η διαδικασία αυτή δίνει όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του $z=0, w=0$.

Για το Παράδειγμα 2, η μέθοδος προβλέπει δύο λύσεις της μορφής $z^{3/2}v_{11}(\cdot)$, $z^{3/2}v_{12}(\cdot)$ και μία λύση της μορφής $z^{3/2}v_{21}(\cdot)$ που συμφωνεί με την (32).

Εάν τώρα $-\alpha_j$ η κλίση που αντιστοιχεί στο $L_j = \overline{A_{i_{j-1}}A_{i_j}}$, $A_{i_{j-1}} = (i_{j-1}, p_{i_{j-1}})$, $A_{i_j} = (i_j, p_{i_j})$

Έχουμε ότι

$$p_{i_{j-1}} + \alpha_j i_{j-1} = p_{i_j} + \alpha_j i_j \leq p_j + \alpha_j i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k \quad (35)$$

Η σχέση (35) γεωμετρικά αντιστοιχεί στο ότι τα $A_{i_{j-1}}$ ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα L_j που κείται επί της ευθείας η οποία ευρίσκεται κάτω από τα άλλα σημεία A_i . Η σχέση (35) αλγεβρικά είναι αναμενόμενη και προκύπτει από την απαίτηση ότι η $F(z,w)=0$ έχει λύση της μορφής $w = z^{\alpha_j}v(\cdot)$, διότι σε τέτοια περίπτωση η αντικατάσταση της w στην $F(z,w)$ θα πρέπει να δώσει τουλάχιστον όρους $\alpha(z)^m$ που έχουν την ίδια δύναμη ως προς z ώστε να αλληλοαναιρούνται. Η (35) εκφράζει την ισότητα των δύο χαμηλότερων (εκθέτικα) όρων.

Αντικαθιστώντας την

$$w = z^{\alpha_j}v(\cdot) \quad (36)$$

στην εξίσωση (21) με τις υποθέσεις (22) και μετά από απλοποίηση που προκύπτει διαιρώντας την εξίσωση με $w = z^{p_{i_j} + \alpha_j i_j}$ (χρήση της ανισότητας στην (35)) έχουμε

$$a_{i_j}^{p_{i_j}} v^{i_j} + a_{i_{j-1}}^{p_{i_{j-1}}} v^{i_{j-1}} + g_{i_j}(z, v) = 0, \quad (37)$$

όπου $g_{i_j}(z, w)$ είναι αναλυτική ως προς v και ως προς κάποια κλασματική δύναμη του z , κοντά στο $(0,0)$, $g_{i_j}(0, v) = 0$.

Θέτοντας $z=0$ στην (37) παίρνουμε

$$a_{i_j}^{p_{i_j}} v^{n_j} + a_{i_{j-1}}^{p_{i_{j-1}}} = 0 \quad (38)$$

διότι $n_j = i_j - i_{j-1}$. Αυτή η εξίσωση έχει n_j διακεκριμένες λύσεις. Μέσω του ΘΠΣ (βλ. παρατήρηση 2.2) προκύπτει ότι η (38) έχει ισάριθμες λύσεις $v = v(z^\sigma)$, όπου σ κλασματικός εκθέτης και v αναλυτική συνάρτηση. Κατά συνέπεια, η (21) έχει n_j λύσεις αυτής της μορφής. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του $(0,0)$.

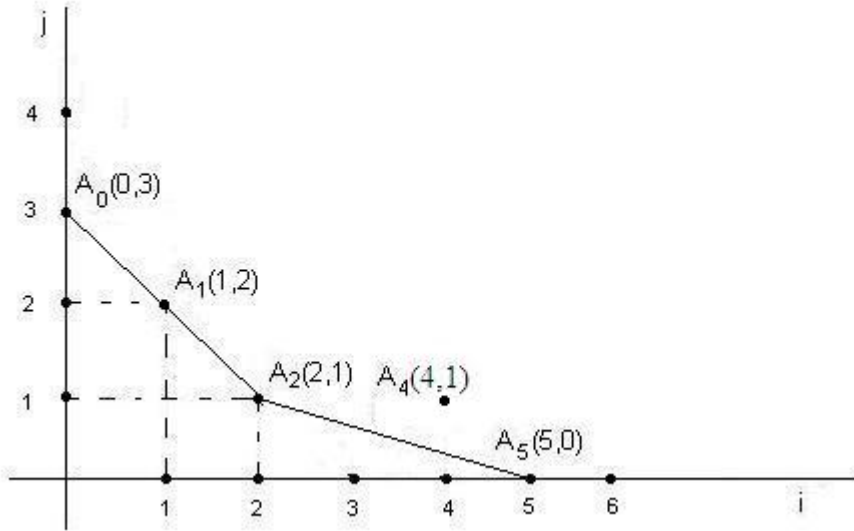
Στην περίπτωση που στην (35) περισσότεροι των δύο αριθμοί $p_j + a_j j$ είναι ίσοι τότε η αντίστοιχη (39) εμπλέκει περισσότερες δυνάμεις του v με ενδεχομένως πολλαπλές ρίζες. Το παρακάτω παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό και βοηθάει στην κατανόηση αυτής της περίπτωσης.

Παράδειγμα 2.8 *Να μελετηθούν οι λύσεις της*

$$w^5 + 2zw^4 - zw^2 - 2z^2w - z^4 - z^3 = 0 \quad (39)$$

σε περιοχή του $(0,0)$.

Ξεκινάμε με την κατασκευή του πολυγώνου του Νεύτωνα:



Σχ. 9

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = (0, 3), \quad A_1 = (1, 2), \quad A_2 = (2, 1), \quad A_3 = \text{απων} \\ A_4 = (4, 1), \quad A_5 = (5, 0) \\ L_1 = \overline{A_0A_2}, \quad L_2 = \overline{A_2A_5} \\ -\alpha_1 = \frac{3-1}{0-2} = -1, \quad -\alpha_2 = \frac{1-0}{2-5} = -\frac{1}{3} \\ n_1 = 2, \quad n_2 = 3 \end{array} \right. \quad (40)$$

Κατά συνέπεια αναμένουμε

3 λύσεις της μορφής $z^{\frac{1}{3}}v_k(z^{\sigma_1})$

2 λύσεις της μορφής $zv_l(z^{\sigma_2})$

v_k, v_l αναλυτικές συναρτήσεις, σ_1, σ_2 κλασματικοί (εν γένει) εκθέτες.

Ξεκινάμε με τη λύση της μορφής $z^{\frac{1}{3}}v$, $v(0) \neq 0$. Αντικατάσταση στην (39) δίνει

$$(z^{\frac{1}{3}}v)^5 + 2z(z^{\frac{1}{3}}v)^4 - z(z^{\frac{1}{3}})^2 - 2z^2(z^{\frac{1}{3}}v) - z^4 - z^3 = 0 \quad (41)$$

Διαιρούμε με $z^{\frac{5}{3}}$ και παίρνουμε

$$v^5 + 2z^{\frac{2}{3}}v^4 - v^2 - 2z^{\frac{2}{3}}v - z^{\frac{7}{3}} - z^{\frac{4}{5}} = 0 \quad (42)$$

Θέτουμε $x = z^{\frac{1}{3}}$ οπότε η (42) γράφεται στη μορφή

$$F(x, v) = v^5 + 2x^2v^4 - v^2 - 2x^2v - x^7 - x^4$$

$$F(0, v_*) = v_*^5 - v_*^2 = v_*^2(v_*^3 - 1) = 0$$

$\Rightarrow v_*$ κυβική ρίζα της μονάδας = $\{e^{\frac{2\pi ki}{3}}, k = 0, 1, 2\}$ (μη μηδενική ρίζα)

Από εδώ προκύπτει εύκολα ότι έχουμε 3 λύσεις

$$w = z^{\frac{1}{3}}v_k(z^{\frac{1}{3}}), \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{Άσκηση 2.9}) \quad (43)$$

Στην συνέχεια εξετάζουμε λύσεις της μορφής zv .

Άσκηση 2.9 Δείξτε πως προκύπτει η (43).

Άσκηση 2.10 (i) Αντικαταστήσατε την zv στην (39). Πόσοι όροι εξισορροπούν (χαμηλότερης τάξης);

(ii) Μετά από απλοποίηση δείξτε ότι η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$(*) \quad F(z, v) = z^2v^5 + 2z^2v^4 - v^2 - 2v - z - 1 = 0,$$

$$F(0, v_*) = (1 + v_*)^2 = 0.$$

Εφόσον η v_* είναι διπλή ρίζα δεν εφαρμόζεται στο το ΘΠΣ

(iii) Θέσατε $\bar{v} = v + 1$ και γράψτε την (*) ως προς τη μεταβλητή \bar{v} . Αναζητείστε λύσεις κοντά στο $\bar{v} = 0, z = 0$ εφαρμόζοντας το πολύγωνο του Νεύτωνα. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 λύσεις της μορφής $\bar{v} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$.

Άσκηση 2.11 Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^7 - 3zw^5 + 3zw^3 - z^3w + z^4 = 0$$

σε περιοχή του $(0, 0)$.

Άσκηση 2.12 Να μελετηθεί η εξίσωση στην άσκηση (2.3) του Logan σ. 65 με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

Άσκηση 2.13 Να μελετηθεί η άσκηση (2.1) του Logan, σ. 65.

Άσκηση 2.14 Θεωρήστε την εξίσωση $\varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών και μιγαδικών), φραγμένων και μη, όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$.

(ii) Για την πραγματική φραγμένη ρίζα και την θετική μη φραγμένη ρίζα να προσδιοριστούν οι δύο πρώτοι όροι των αντίστοιχων αναπτυγμάτων.

Λύσεις ασκήσεων 1.4, 1.5, 2.6, 2.7

1) $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$

Μορφή συστήματος

$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon x_1^3 \end{cases}$$

$\dot{E}(x_1, x_2) = -\varepsilon x_1^3$

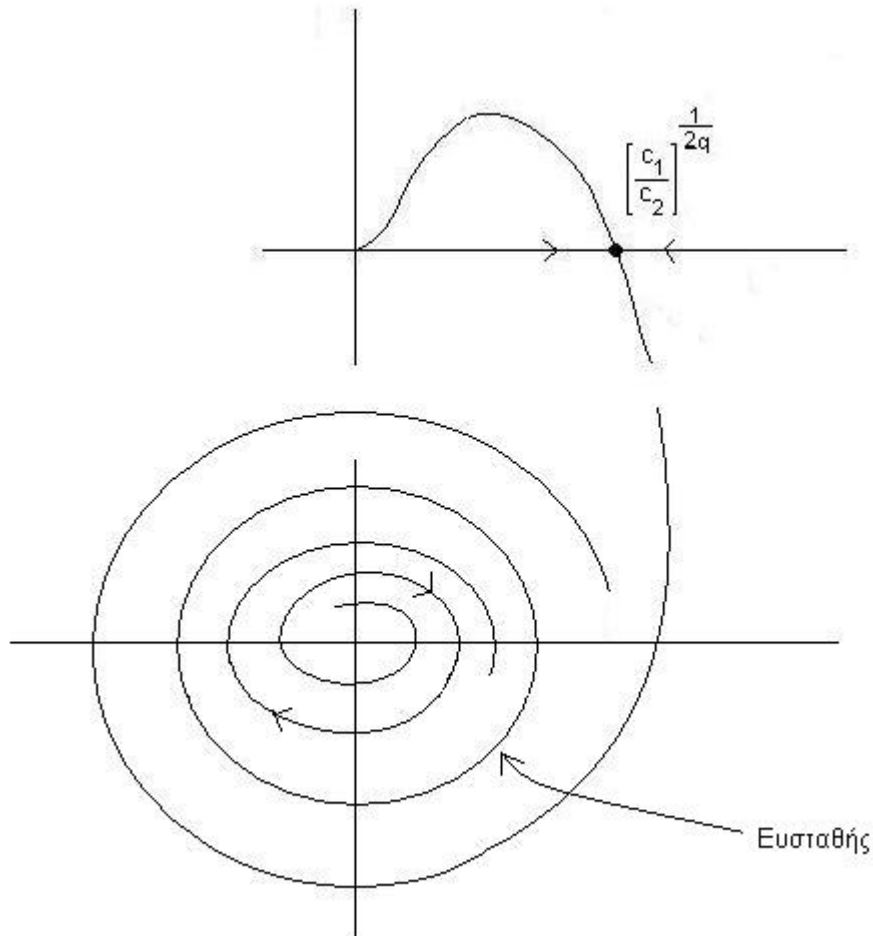
$$F(A) = - \int_0^{2\pi} A^2 \sin^3(t - t_0) dt \equiv 0$$

Ουδεμία πληροφορία παρέχεται από τη μέθοδο.

2) $\ddot{x} = -x + \varepsilon |\dot{x}|^p \dot{x} (1 - x^{2q})$

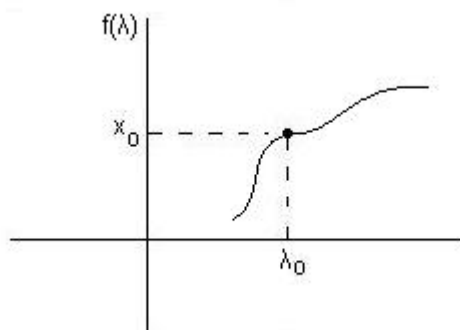
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon |x_2|^p x_2 (1 - x_1^{2q}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 F(A) &= A^{p+1} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^p(t - t_0) dt - A^{2q} \int_0^{2\pi} \sin^p(t - t_0) \cos^{2q}(t - t_0) dt \right\} = \\
 &= A^{p+1} \{ C_1 - C_2 A^{2q} \}
 \end{aligned}$$



Σχ. 10

3) Έστω $F_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$. Από το ΘΠΣ έπεται ότι υπάρχει $x=f(\lambda)$, $x_0 = f(\lambda_0)$ ορισμένη σε περιοχή $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ τέτοια ώστε όλες οι λύσεις της (1) σε περιοχή του (x_0, λ_0) ευρίσκονται στο $\{(f(\lambda), \lambda)/\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)\}$. Κατά συνέπεια, $n(\lambda)=1$ σε αυτή την περιοχή του (x_0, λ_0) .



Σχ. 11

4)(i) Από την Ασκ. 3 προκύπτει ότι τα σημεία διακλάδωσης δίδονται από τις εξισώσεις

$$F(x, \lambda) = 0$$

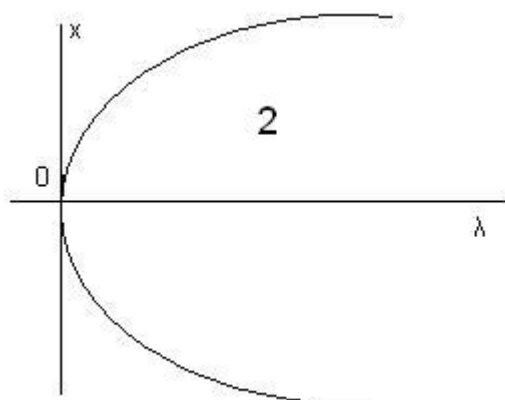
$$F_x(x, \lambda) = 0$$

Κατά συνέπεια

$$\lambda x - x^3 = 0$$

$$\lambda - 3x^2 = 0$$

Από όπου προκύπτει ότι $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό (ενδεχομένως) σημείο διακλάδωσης.



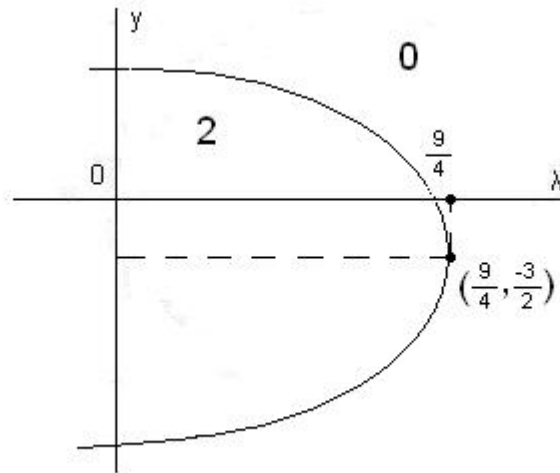
Σχ. 12: Το σύνολο λύσεων $\lambda x - x^3 = 0$.

Από το γράφημα (Σχ. 12) βλέπουμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο διακλάδωσης.

(ii)

$$F(y, \lambda) = y^2 + 3y + \lambda = 0$$

$$F_y(y, \lambda) = 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{9}{4}$$



Σχ. 13: $y^2 + 3y + \lambda = 0$

3 Σύνηθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Από την προηγούμενη μελέτη μας των αλγεβρικών εξισώσεων αποκομίσαμε ότι το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων εν γένει δεν επαρκεί για την κατασκευή όλων των λύσεων σε κάποια περιοχή δοθείσας λύσης. Εισαγάγαμε το πολύγωνο του Νεύτωνα, που είναι κατάλληλο εργαλείο στην περίπτωση που το ΘΠΣ δεν είναι εφαρμόσιμο, το οποίο υποδεικνύει λύσεις διαφορετικών κλιμάκων. Με λίγα λόγια, όταν η συνθήκη (II) του Θεωρήματος 1.1 δεν ισχύει τότε εν γένει έχουμε λύσεις διαφορετικών κλιμάκων.

Στην περίπτωση των Σ.Δ.Ε. έχουμε ένα ανάλογο φαινόμενο με την επιπλέον διαφορά ότι στην ίδια λύση (που είναι πλέον συνάρτηση), μπορεί να συνυπάρχουν διαφορετικές κλίμακες.

3.1 Η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - η ομαλή περίπτωση

Παράδειγμα 3.1

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (44)$$

Το Π.Α.Τ. (44) επιδέχεται λύση σε κλειστή μορφή γιατί η εξίσωση είναι τύπου Bernoulli.

Έχουμε

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon(e^{-t} - 1)} \quad (45)$$

Η (45) γράφεται επίσης σαν ανάπτυγμα Taylor περί το $\varepsilon=0$ ως εξής

$$y(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \dots$$

Προσποιούμενοι τώρα ότι δεν γνωρίζουμε την λύση (45) θα αποπειραθούμε να τη βρούμε σε μορφή ανάπτυγματος σε περιοχή του $\varepsilon=0$,

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (46)$$

προσδιορίζοντας διαδοχικά $y_0(t)$, $y_1(t)$, ...

Αντικαθιστώντας την (46) στην (44) έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) = \dot{y}_0(t) + \varepsilon \dot{y}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{y}_2(t) + \dots = -(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots) + \\ + \varepsilon (y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ε στα δυο μέλη παίρνουμε την ακολουθία γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{y}_0 + y_0 = 0 \\ \dot{y}_1 + y_1 = y_0^2 \\ \dot{y}_2 + y_2 = 2y_0 y_1 \\ \vdots \end{cases} \quad (48)$$

Αξιοσημείωτα είναι:

(α) Η (44) \Leftrightarrow Άπειρο σύστημα εξισώσεων

(β) Οι εξισώσεις είναι γραμμικές και το σύστημα μπορεί να λυθεί λύνοντας διαδοχικά τις εξισώσεις (Τριγωνική μορφή).

Για την αρχική συνθήκη εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία:

$$1 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \dots \quad (49)$$

Από όπου παίρνουμε

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(0) = 0, \dots \quad (50)$$

Επιλύοντας τώρα το σύστημα (48), (50) παίρνουμε

$$\begin{cases} y_0(t) = e^{-t} \\ y_1 = e^{-t} - e^{-2t} \\ y_2 = e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t} \\ \vdots \end{cases} \quad (51)$$

Ουδόλως περιέργως κατασκευάζουμε ξανά το ανάπτυγμα της $y(t)$ στην (45).

Παρατηρούμε ότι :

Εάν κρατήσουμε έναν αριθμό n όρων από την (49) παίρνουμε μια ομοιόμορφη προσέγγιση $O(\varepsilon^{n+1})$ της λύσης

Πχ για τρεις όρους

$$y_{\text{προσ}}(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \quad (*)$$

$$|y_{\text{ακρ}} - y_{\text{προσ}}| < C \varepsilon^3, \text{ ομοιομορφα για } t > 0.$$

όπου $y(t)$ η ακριβής λύση που δίνεται στην (45). Η ομοιομορφία προκύπτει από το ότι οι όροι της σειράς είναι ομοιόμορφα φραγμένοι για $t > 0$ και διότι η σειρά συγκλίνει.

Σχόλιο 3.2 Στην περίπτωση του Παραδείγματος 3.1 η ασυμπτωτική σειρά συγκλίνει, και η προσέγγιση ισχύει ομοιόμορφα. Όπως θα δούμε όταν το πρόβλημα δεν είναι ομαλό (δηλ. απλή εφαρμογή αντίστοιχου ΘΠΣ σε χώρο Banach) η ασυμπτωτική σειρά δεν θα συγκλίνει κατ' ανάγκη και η προσέγγιση δεν θα είναι αναγκαστικά ομοιόμορφη. Παρόλα αυτά η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων (που είναι ανάλογη της μεθόδου σειρών στις Σ.Δ.Ε.) κατάλληλα τροποποιημένη δίνει χρήσιμη πληροφορία και σε αυτές τις ιδιόμορφες περιπτώσεις.

Άσκηση 3.3 Δείξτε αυστηρά την εκτίμηση $|y_{\text{ακρ}}(t) - y_{\text{προσ}}(t)| < C\varepsilon^3$ στην (*), ομοιόμορφα για $t \in [\delta, \infty)$, $\delta > 0$.

Παράδειγμα 3.4 θεωρούμε την εξίσωση Duffing

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (52)$$

Αναζητούμε τη λύση για $\varepsilon \ll 1$ στη μορφή ασυμπτωτικού αναπτύγματος

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon (u_0^3 + 3u_0^2 \varepsilon u_1 + \dots) = 0$$

Και κατά συνέπεια εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε

$$\varepsilon^0 : \quad \ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0$$

$$\varepsilon^1 : \quad \ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0$$

$$\varepsilon^2 : \quad \ddot{u}_2 + u_2 + 3u_0^2 u_1 = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0$$

⋮

Επιλύοντας διαδοχικά τις εξισώσεις έχουμε

$$u_0(t) = \cos t$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 = -\cos^3 t \Rightarrow u_1(t) = \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8}t \sin t \quad (53)$$

⋮

Παρατήρηση 3.5 Η εξίσωση (53) επιλύεται με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών [AK]. Παρατηρήστε ότι

$$\cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4}$$

και ότι ο όρος $\cos t$ είναι επίσης λύση της ομοιογενούς εξίσωσης. Αυτό οδηγεί στον όρο $t \sin t$. Εδώ έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού που οδηγεί σε δυσκολίες ουσίας.

Η προσέγγιση

$$u_{\text{προσ}}(t) = \cos t + \varepsilon \left(\frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8}t \sin t \right) \quad (**)$$

θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιστοιχεί με την (*) του προηγούμενου παραδείγματος και συνεπώς αναμένουμε την εκτίμηση

$$|u_{\text{ακρ}} - u_{\text{προσ}}| < C\varepsilon^2 \quad (54)$$

Ευκολα όμως παρατηρούμε ότι η εκτίμηση (54) δεν είναι δυνατόν να ισχύει ομοιόμορφα για $t > 0$ διότι η $u_{\text{προσ}}$ δεν είναι καν φραγμένη, αντίθετα με την $u_{\text{ακρ}}$ (βλ. επιχείρημα ενέργειας (55), (56)).

Επίσης η $u_{\text{προσ}}$ είναι ανεπαρκής ποιοτικά διότι δεν είναι περιοδική συνάρτηση του t και αυτό οδηγεί στο (λανθασμένο) συμπέρασμα ότι ενδεχομένως η διαταραχή στην (52) με τον ε όρο καταστρέφει την περιοδικότητα των λύσεων του προβλήματος αναφοράς $\ddot{u} + u = 0$ ($\varepsilon = 0$).

Υπόδειξη Ασκ. 1.6

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2) \quad (*)$$

Επιλέγουμε $f(\dot{x}) = \dot{x}g(\dot{x})$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 g(x_2)(1 - x_1^2)$$

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon x_2^2 g(x_2)(1 - x_1^2), \quad x_1 = A \cos t, \quad x_2 = A \sin t$$

$$F(A) = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 g(A \sin t)(1 - A^2 \cos^2 t) dt$$

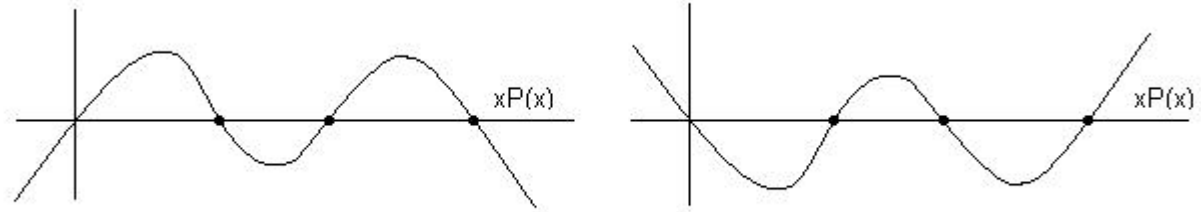
Έστω $g(x_1) = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1^4$, όπου a_0, a_1, a_2 θα επιλεγούν στην πορεία.

$$\begin{aligned} F(A) &= A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t (a_0 + a_1 A^2 \sin^2 t + a_2 A^4 \sin^4 t)(1 - A^2 \cos^2 t) dt \\ &= A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \{a_0 + A^2(a_1 \sin^2 t - a_0 \cos^2 t) + A^4(a_2 - a_1 \sin^2 t \cos^2 t) \\ &\quad + A^6(-a_2 \sin^4 t \cos^2 t)\} dt \\ &= A^2 [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 A^2 + \bar{a}_2 A^4 + \bar{a}_3 A^6] =: A^2 P(A^2), \quad \text{οπου} \end{aligned}$$

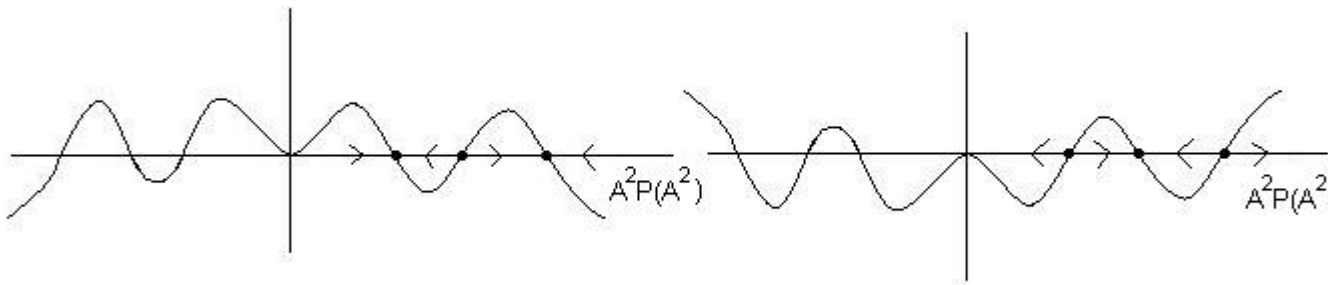
(α) Υπολογίστε τα $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_3$ συναρτήσει των a_0, a_1, a_2 .

(β) Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα a_0, a_1, a_2 έτσι ώστε η (*) να έχει ακριβώς 3 περιοδικές λύσεις.

(γ) Διερευνήστε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.



Σχ. 14



Σχ. 15

Άσκηση 3.6 Να λυθεί η άσκηση 2.1 στο βιβλίο του Logan.

Λύση άσκησης 2.10

$$(*) F(z, v) = z^2v^5 + 2z^2v^4 - (v + 1)^2 - z = 0$$

$$F(0, v_*) = -(v_* + 1)^2 = 0 \Rightarrow v_* = 1 \text{ διπλή ρίζα}$$

κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται.

Μεταφορά των αξόνων μέσω του μετασχηματισμού $\bar{v} := v + 1$ δίνει

$$(**) z^2(\bar{v} - 1)^5 + 2z^2(\bar{v} - 1)^4 - \bar{v}^2 - z = 0$$

Αναζήτηση λύσεων σε περιοχή του $\bar{v} = 0, z = 0$. Παρατηρούμε ότι στα αναπτύγματα

$$(\bar{v} - 1)^5 = \bar{v}^5 + \dots + 5\bar{v} - 1$$

$$(\bar{v} - 1)^4 = \bar{v}^4 + \dots - 4\bar{v} + 1$$

οι μόνοι όροι που έχουν σημασία είναι οι δύο τελευταίοι (διότι οι άλλοι είναι αμελητέοι σε σχέση με το \bar{v}^2). Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο βοηθητικό πρόβλημα:

Βοηθητικό Πρόβλημα

$$(***) \quad z^2(5\bar{v} - 1) + 2z^2(-4\bar{v} + 1) - \bar{v}^2 - z = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\bar{v}^2 + 3z^2\bar{v} - z^2 + z = 0$$

που μπορούμε να το μεταχειριστούμε μέσω του πολυγώνου του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1) \quad A_1 = (1, 2) \quad A_2 = (2, 0)$$

Συμπεραίνουμε ότι η (***) έχει 2 λύσεις της μορφής $z^{\frac{1}{2}}g$.

Τώρα επανερχόμαστε στην (**). Το βοηθητικό πρόβλημα μας οδηγεί στο μετασχηματισμό $(z, \bar{v}) \mapsto (z, g)$, όπου $\bar{v} = z^{\frac{1}{2}}g$. Η (**) μετασχηματίζεται στην

$$z^2(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^5 + 2z(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^4 - g^2z - z = 0,$$

και απλοποιώντας (\Leftrightarrow θεραπεία της πολλαπλότητας 2 του $v_* = 1$) έχουμε

$$R(z, g) := z(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^5 + 2(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το ΘΠΣ: θέτουμε $z^{\frac{1}{2}} =: s$. Τότε

$$\bar{R}(s, g) := s^2(sg - 1)^5 + 2(sg - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

$$\bar{R}(0, g_*) := -g^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_* = \pm 1.$$

$$\frac{\partial \bar{R}(0, g_*)}{\partial g} = -2g_* \neq 0$$

Κατά συνέπεια η $R(z, g) = 0$ έχει 2 λύσεις της μορφής $g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$ με $g_{\pm}(0) = \pm 1$.

Καταλήγουμε στο ότι $\bar{v}_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow v_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) - 1$. \square

Λύση άσκησης 2.14

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών, μιγαδικών, φραγμένων και μη) όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$.

A. Φραγμένες Ρίζες

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8) = 0$$

$$F(0, x) = -(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x_k = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$F_x(0, x) \Big|_{x=x_k} = -3x_k^2 \neq 0$$

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει 3 ρίζες $x_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2$ με $x_k(0) = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}$.

Χρειαζόμαστε άλλες 2 ρίζες (5ου βαθμού).

B. Μη Φραγμένες Ρίζες

Εισάγουμε το μετασχηματισμό $x =: \frac{1}{w}$. Η (*) παίρνει τη μορφή

$$(**) \quad 8w^5 - w^2 - \varepsilon w + \varepsilon = 0.$$

Εφαρμόζουμε το πολύγωνο του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1), \quad A_1 = (1, 1), \quad A_2 = (2, 0), \quad A_5 = (5, 0)$$

Έχουμε 2 λύσεις $w = z^{\frac{1}{2}}v$, 3 λύσεις $w = z^0v$ (όπου $z = \varepsilon$). Αγνοούμε τις 3 λύσεις (διότι συμπίπτουν με τις φραγμένες). Άρα έχουμε

$$8z^{\frac{5}{2}}v^5 - zv^2 - z^{\frac{3}{2}}v + z = 0 \Rightarrow 1 - z^{\frac{1}{2}}v - v^2 + 8z^{\frac{3}{2}}v^5 = 0$$

$$F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$$

$$F(0, v) = 1 - v^2 \Rightarrow v = \pm 1.$$

$$\Theta\Pi\Sigma \Rightarrow w_{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}v_{\pm}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots].$$

Κατά συνέπεια οι 2 μη φραγμένες ρίζες είναι

$$x_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots]} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots]$$

(ii) Για την πραγματική φραγμένη ρίζα και την αρνητική μη φραγμένη ρίζα να προσδιοριστούν οι 2 πρώτοι όροι των αντίστοιχων αναπτυγμάτων

A. $\varepsilon x^5(\varepsilon) - \varepsilon x^4(\varepsilon) = (x(\varepsilon))^2 - 8$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^5(\varepsilon) + 5\varepsilon x^4(\varepsilon)x'(\varepsilon) - x^4(\varepsilon) - 4\varepsilon x^3(\varepsilon)x'(\varepsilon) &= \\ &= 2x^2(\varepsilon)x'(\varepsilon) \end{aligned}$$

Για $\varepsilon=0$: $x^5(0) - x^4(0) = 3x^2(0)x'(0) \Leftrightarrow$

$$x^4(0) - x^3(0) = 2x'(0)$$

$$\Rightarrow x'(0) = 4 \quad (\text{αφού } x(0) = 2)$$

Κατά συνέπεια,

$$x_0(\varepsilon) = 2 + 4\varepsilon + \dots$$

B. $F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$, όπου $v = v(s)$. Διαφορίζοντας ως προς s έχουμε

$$v'(0) = -\frac{F_s(0, u(0))}{F_v(0, v(0))}$$

Κάνοντας χρήση του $v(0) = +1$ βρίσκουμε $v'(0) = -\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow v(s) = 1 - \frac{1}{2}s + \dots \Leftrightarrow$$

$$v(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots \Leftrightarrow w(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow x(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \dots} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots\right]$$

$$= \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

□

Υποδείξεις Ασκ. 2.14

Οι ασκήσεις αυτές δεν είναι της μορφής (22), $F(z,w)=0$, όπου $z=\varepsilon$, $w=x$, και κατά συνέπεια η θεωρία δεν εφαρμόζεται άμεσα. Όπως θα δούμε όμως ανάγονται¹ εύκολα στην (22). Για παράδειγμα, θεωρείστε την

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^2 + 2x + 1 = 0$$

Θέτοντας $\varepsilon=0$ έχουμε το πρόβλημα αναφοράς

$$F(0, x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$F_x(0, -\frac{1}{2}) = -1 \neq 0$$

Το ΘΠΣ δίνει λύση $x_1(\varepsilon)$, $x_1(0) = -1$. Επίσης εγγυάται ότι όλες οι λύσεις με $\varepsilon x^2 \ll 1$ καλύπτονται από την $x_1(\varepsilon)$. Ενδεχομένως υπάρχουν και άλλες λύσεις με εx^2 όχι μικρό. Για να τις μελετήσουμε ένας τρόπος είναι να αλλάξουμε μεταβλητές $x = \varepsilon^{-\sigma} y$ (εx^2 όχι μικρό συνεπάγεται x μεγάλο όπως $\varepsilon \rightarrow 0$).

Αντικατάσταση δίνει

$$\varepsilon^{1-2\sigma} y^2 + 2\varepsilon^{-\sigma} y + 1 = 0$$

Εξισορρόπηση συνεπάγεται $1 - 2\sigma = -\sigma \Leftrightarrow \sigma = 1$. Κατά συνέπεια

$$\varepsilon^{-1} y^2 + 2\varepsilon^{-1} y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + \varepsilon = 0$$

που είναι της μορφής που εξετάσαμε:

$$G(\varepsilon, y) = y^2 + 2y + \varepsilon = 0,$$

$$G(0, y) = y^2 + 2y = y(y + 2) = 0 \Rightarrow y = 0, y = -2,$$

¹Υπάρχουν 2 ειδών λύσεις: (I) φραγμένες όπως $\varepsilon \rightarrow 0$, (II) μη φραγμένες όπως $\varepsilon \rightarrow 0$. Τις (I) τις μελετάμε με το ΘΠΣ. Τις (II) μέσω του μετασχηματισμού $x = \frac{1}{w}$ ($x \approx \infty \Leftrightarrow w \approx 0$) που τις αναγάγει στην μορφή (22) όπου εφαρμόζεται το πολύγωνο του Νεύτωνα.

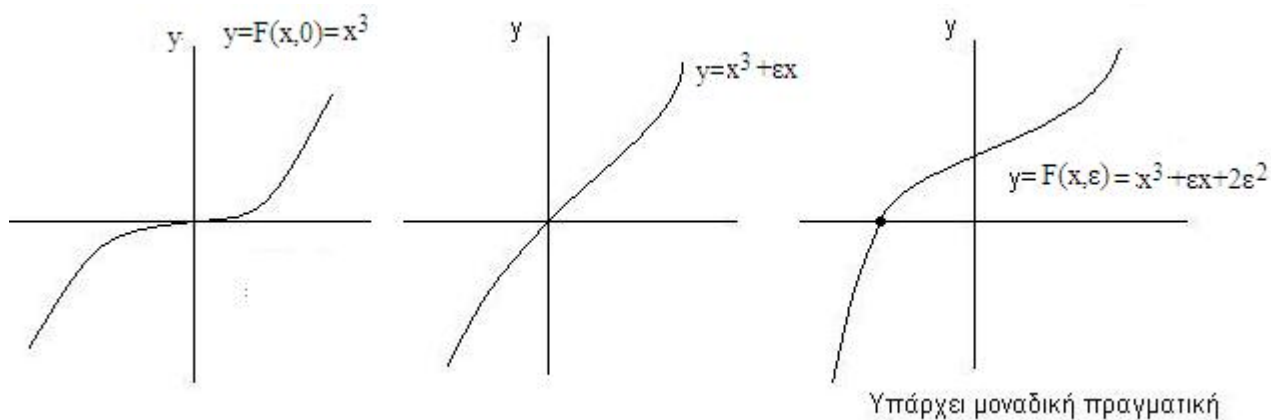
$$G_y(0, y) = 2y + 2, \quad G_y(0, 0) = 2, \quad G_y(0, -2) = -2.$$

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει ακόμα 2 λύσεις $y_2(\varepsilon), y_3(\varepsilon), x_2(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}y_3(\varepsilon), x_3(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}y_3(\varepsilon)$

Λύση Άσκησης 2.12

(a) Στοιχειώσης λύση

$$F(\varepsilon, x) = x^3 + \varepsilon x + 2\varepsilon^2 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$



Σχ. 16

$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots$$

$$(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots)^3 + \varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots) + 2\varepsilon^2 = 0$$

$$\varepsilon^0 \text{ όροι: } x_0^3 = 0$$

$$\varepsilon^1 \text{ όροι: } 3x_0^2x_1 + x_0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (ουδεμία πληροφορία),}$$

$$\varepsilon^2 \text{ όροι: } x_0(\dots) + x_1 + 2 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$\varepsilon^3 \text{ όροι: } x_1^3 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$$

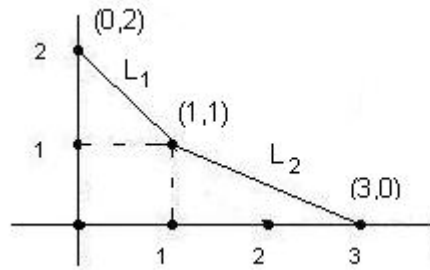
$$x(\varepsilon) = -2\varepsilon + 8\varepsilon^2 + \dots$$

(b) Μέσω του Πολυγώνου του Νεύτωνα (που θα μας δώσει και τις μιγαδικές)

$$F(z, w) = w^3 + zw + 2z^2 = 0$$

$$F(0, w) = w^3 = 0 \Rightarrow w = 0$$

$F_w(0, 0) = 0$; Κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται. Καταφεύγουμε στο Π.Ν.:



Σχ. 17

$$(0,2), (1,1), (3,0), \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

1 λύση της μορφής $zv(z^{\sigma_1})$, δύο λύσεις της μορφής $z^{\frac{1}{2}}v(z^{\sigma_2})$

α) Αντικατάσταση $w = zv(z^{\sigma_1})$ δίνει

$$z^3v^3 + zv + 2z^2 = 0, \quad \bar{F}(z, v) = zv^3 + v + 2$$

$\bar{F}(0, 0) = 2, \quad \bar{F}_v(0, 0) = 1$. Το ΘΠΣ δίνει $v(z) = -2 + \dots$ ($\sigma_1 = 1$) και κατά συνέπεια $w(z) = z(-z + \dots)$.

β) Εκ νέου αντικατάσταση της $z^{\frac{1}{2}}v(z^{\sigma_2})$ δίνει $v^3 + v + 2z^{\frac{1}{2}} = 0$. Θέτουμε $s = z^{\frac{1}{2}}$.

$$\bar{\bar{F}}(s, v) = v^3 + v + 2s = 0$$

$$\bar{\bar{F}}(0, v) = v^3 + v = v(v^2 + 1) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

$v = \pm i$. $\bar{\bar{F}}_v(0, \pm i) = -2 \neq 0$. Κατά συνέπεια το ΘΠΣ δίνει δύο λύσεις $v^{\pm}(s) = \pm i + s + \dots$, και σε αρχικές μεταβλητές $w^{\pm}(z) = z^{\frac{1}{2}}v(z^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}}(\pm i + z^{\frac{1}{2}} \pm \dots)$

$$(\sigma_2 = \frac{1}{2})$$

Σημείωση (Υπολογισμός διαδοχικών παραγώγων μέσω ΘΠΣ)

$$F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow F_x + F_y f'(x) = 0 \Rightarrow F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) f'(0) = 0$$

Για την 2η παράγωγο διαφορίζουμε:

$$\frac{d}{dx} (F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_{xx} + F_{yx} f'(x) + F_{xy} f'(x) + F_{yy} (f'(x))^2 + F_y f''(x) = 0,$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε την $f''(y_0)$, θέτοντας $x = x_0$.

3.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων Poincare - Linstedt (Ιδιόμορφη διαταραχή)

Παράδειγμα 3.4 (Συνέχεια) ²

Όπως είδαμε στην άσκηση 1.4 η μέθοδος του Θ.2 για την εξίσωση Duffing οδηγεί σε εκφυλισμένη μορφή $F(A) \equiv 0$. Αυτό ενδεχομένως να οδηγεί στο συμπέρασμα ότι (σε αντίθεση με την Van der Pol) όλες οι περιοδικές τροχιές του προβλήματος αναφοράς $\ddot{u} + u = 0$ επιβιώνουν κάτω από τη διαταραχή της εξίσωσης με τον εu^3 όρο. Αυτό τελικά είναι σωστό και αποδεικνύεται με το ακόλουθο επιχειρήμα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (βλ. [AK], σελ. 60):

Η ποσότητα

$$H(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{4} u^4 \quad (\text{Χαμιλτονιανη})$$

διατηρείται από την εξίσωση στην (52):

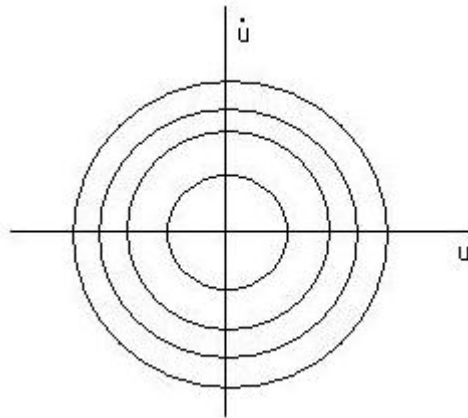
$$\frac{d}{dt} [H(u, \dot{u})] = \dot{u} \ddot{u} + u \dot{u} + \varepsilon u^3 \dot{u} = \dot{u} [\ddot{u} + u + \varepsilon u^3] \stackrel{(52)}{=} 0. \quad (55)$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις ικανοποιούν την σχέση

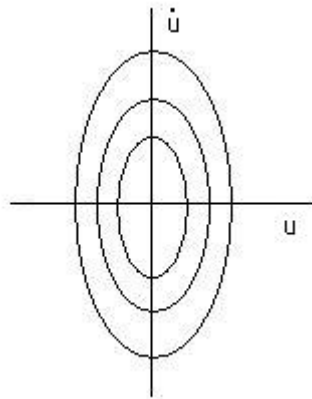
²Ο Poincaré είναι γνωστός βέβαια σε όλους. Ο Lindstedt ήταν διάσημος αστρονόμος.

$$H(u, \dot{u}) = C \tag{56}$$

που στο επίπεδο φάσης, τουλάχιστον για $0 < \varepsilon \ll 1$, είναι σχεδόν περιφέρειες



Σχ. 18



Σχ. 19: Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=0$.

Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=1$ (βλ. [BO], σελ. 547)

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την Poincaré Lindstedt μέθοδο η οποία παράγει περιοδικές προσεγγίσεις που προσεγγίζουν τις λύσεις της Duffing ομοιόμορφα για $t \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \\ u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (57)$$

Εισάγουμε τη νέα κλίμακα χρόνου

$$t = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)\tau, \quad \omega_1, \omega_2, \dots \text{ παράμετροι υπό προσδιορισμό} \quad (58)$$

Ως προς τη νέα κλίμακα χρόνου, το (57) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2[u + \varepsilon u^3] = 0. \quad (59)$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \dots = 1, \quad \frac{du_0}{d\tau}(0) + \varepsilon \frac{du_1}{d\tau}(0) + \dots = 0,$$

και ομαδοποιώντας τους όρους στην (59) ως προς τις δυνάμεις του ε παίρνουμε

$$\frac{d^2u_0}{d\tau^2}(0) + \varepsilon u_0 = 0 \quad (\varepsilon^0 \text{ όροι}),$$

που δίνει $u_0(\tau) = \cos \tau$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_1}{d\tau^2} + u_1 &= -u_0^3 - 2\omega_1 u_0 = -(\cos \tau)^3 - 2\omega_1 \cos \tau \\ &= -\left(\frac{3}{4} + 2\omega_1\right) \cos \tau - \frac{1}{4} \cos 3\tau \quad (\varepsilon^1 \text{ όροι}). \end{aligned} \quad (60)$$

Η ιδέα τώρα είναι να επιλέξουμε το ω_1 ώστε να αποφύγουμε το συντονισμό στην εξίσωση (60). Επιλέγουμε λοιπόν

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}, \quad (61)$$

και επιλύοντας την (60) παίρνουμε

$$u_1 = \frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos \tau) \quad (62)$$

Κατά συνέπεια, η προσέγγιση που παίρνουμε από τους πρώτους δύο όρους είναι

$$\begin{aligned} u_{\text{προσ}} &= \cos \tau + \frac{\varepsilon}{32}(\cos 3\tau - \cos \tau) \\ &= \cos\left[t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right] + \frac{\varepsilon}{32}\left[\cos 3\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right)\right], \end{aligned} \quad (63)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\tau = (1 + \varepsilon\omega_1 + \dots)^{-1}t \simeq (1 - \varepsilon\omega_1)t = \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t.$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι η προσέγγιση $u_{\text{προσ}}(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση του t . Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχουν σαφώς 2 κλίμακες χρόνου, η t και η εt . Αν και δεν αποδεικνύουμε εδώ την αντίστοιχη εκτίμηση της (54), $|u_{\text{ακρ}}(t) - u_{\text{προσ}}(t)| < C\varepsilon^2$ (βλ. [N]), βλέπουμε καθαρά την υπεροχή της (63) σε σχέση με την (**) στη σελ. 31.

Η μέθοδος Poincaré - Lindstedt λέγεται επίσης και μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων.

Παρατήρηση 3.7 Βλέπουμε την αναλογία με τις αλγεβρικές εξισώσεις και την παρουσία πολλαπλών κλιμάκων όταν το $\Theta\Pi\Sigma$ δεν εφαρμόζεται. Και εδώ έχουμε αδυναμία εφαρμογής του $\Theta\Pi\Sigma$ οφείλεται στην μη αντιστρεψιμότητα του γραμμικού μέρους:

Ο τελεστής $Lu = \ddot{u} + u$ δεν είναι αντιστρέψιμος στο χώρο των 2π -περιοδικών συναρτήσεων. Το νέο στοιχείο στην περίπτωση των $\Sigma\Delta E$ είναι ότι οι πολλαπλές κλίμακες εμφανίζονται στην ίδια λύση.

Άσκηση 3.8 Θεωρείστε την Ασκ. 1.4, σ. 56 Logan και λύστε την ακολουθώντας τη σημείωση στη σελ. 40.

Άσκηση 3.9 Ασκ. 1.5, Logan σ. 56, μέρος γ). Πώς συγκρίνεται αυτή η εξίσωση με την εξίσωση Van der Pol; Είναι όλες οι λύσεις τις περιοδικές;

Άσκηση 3.10 * Μια σημαντική διαφορά μεταξύ της Duffing ($\varepsilon > 0$) και της γραμμής ($\varepsilon=0$) είναι ότι η περίοδος των λύσεων εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Τι μπορείτε να συνάγετε επ' αυτού μέσω της μεθόδου Poincaré - Lindstedt;

3.3 Ανάλυση οριακού στρώματος - Ιδιόμορφη διαταραχή

Παράδειγμα 3.11 (*[BO]*) Θεωρούμε το πρόβλημα Σ.Τ.

$$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (64)$$

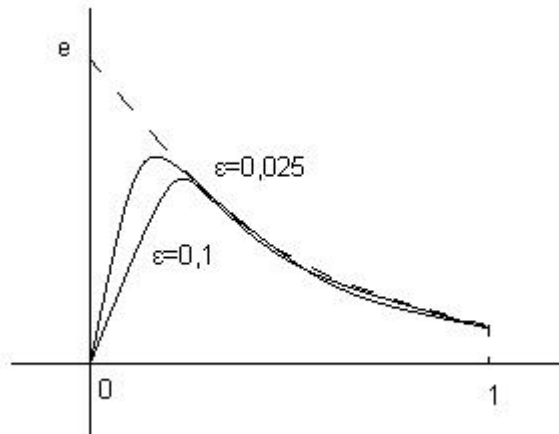
Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις οι οποίες να προσεγγίζουν την ακριβή λύση σε όλο το διάστημα $[0,1]$. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μέθοδος του (ομαλού) ασυμπτωτικού αναπτύγματος (46) οδηγεί στην εξής δυσκολία: Το πρόβλημα τάξης ε^0 είναι

$$y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (65)$$

το οποίο είναι υπερπροσδιορισμένο (εξίσωση 1ης τάξης με δύο συνοριακές συνθήκες).

Ξεκινάμε με παρατηρήσεις επάνω στον τύπο της λύσης που σε αυτή την περίπτωση να γραφτεί σε κλειστή μορφή

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (66)$$



Σχ. 20: Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=0$.

Γραφήματα της $y(x)$ για $\varepsilon=0,1$ και $0,025$.

Παρατηρούμε 2 κλίμακες: x και $\frac{x}{\varepsilon}$, και δύο αντίστοιχα διακεκριμένα όρια. Πρώτον

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = e^{1-x} =: y_{\varepsilon\xi}(x)$$

το γράφημα της οποίας δίνεται από την διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 20.

Για να μελετήσουμε το όριο ως προς την κλίμακα $\frac{x}{\varepsilon}$ θέτουμε $\eta = \frac{x}{\varepsilon}$ και εκφράζουμε την y συναρτήσεως της η (κλίμακα μεγέθυνσης):

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-\varepsilon\eta} - e^{-\eta}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} =: V(\eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e - e^{1-\eta} =: V_{\varepsilon\sigma}(\eta), \quad (67)$$

που περιγράφει το όριο κοντά στο $\varepsilon = 0$. Στη συνέχεια επισημαίνουμε τις εξισώσεις που αυτά τα δύο διακεκριμένα όρια ικανοποιούν. Κατ' αρχήν, η $y_{\varepsilon\xi}(x)$ ικανοποιεί την (65) και τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 1$, που προκύπτει θέτοντας $\varepsilon = 0$ στην (64). Για να ανακαλύψουμε την εξίσωση για την $V_{\varepsilon\sigma}(\eta)$, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{d}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\eta}, \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2}{d\eta^2}, \end{aligned}$$

και γράφουμε το (64) σε ισοδύναμη μορφή

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \frac{dV}{d\eta} + V = 0, \\ V(0) = 0, \quad V\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1. \end{cases} \quad (68)$$

Πολλαπλασιάζοντας με ε και θέτοντας $\varepsilon = 0$ παίρνουμε

$$\begin{cases} \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{dV}{d\eta} = 0, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (69)$$

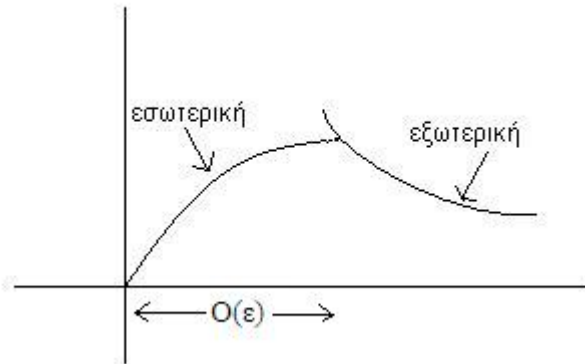
Παρατηρούμε ότι η $V_{\varepsilon\sigma}(\eta)$ στην (67) ικανοποιεί την εξίσωση (69) και τη συνοριακή συνθήκη στο $\eta = 0$ ($\Leftrightarrow x = 0$).

Η κατανόηση ανωτέρω συνοψίζεται ως εξής: Υπάρχουν δύο διαφορετικά οριακά προβλήματα (ή προβλήματα αναφοράς), το (65) με μια συνοριακή συνθήκη, και

το (69), με την άλλη συνοριακή συνθήκη. Μακριά από το συνοριακό στρώμα η μεταβολή της λύσης είναι αργή και οι παράγωγοι φραγμένες ως προς ε , και κατά συνέπεια ο όρος $\varepsilon y''$ στην (64) είναι αμελητέος. Αντίθετα εντός του συνοριακού στρώματος η μεταβολή της λύσης είναι γρήγορη, και η παράγωγος εκρήγνυται όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$ με αποτέλεσμα ο όρος $\varepsilon y''$ στην (64) να είναι σημαντικός. Η e^{1-x} δίνει την εξωτερική προσέγγιση, ενώ η $e^{-e^{1-\eta}}$ δίνει την εσωτερική προσέγγιση.

Τέλος παρατηρούμε ότι συσχετίζονται η $y_{\varepsilon\xi}(x)$ και η $V_{\varepsilon\sigma}(x)$ ως εξής:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} y_{\varepsilon\xi}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} V_{\varepsilon\sigma}(x). \tag{70}$$



Σχ. 21: Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=0$.

Κάνοντας τώρα χρήση της $y_{\varepsilon\xi}$, $V_{\varepsilon\sigma}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια προσέγγιση $y_{o\mu}$ που προσεγγίζει ομοιόμορφα την $y_{\varepsilon\xi}$ στο διάστημα $[0, 1]$ ως εξής:

$$\left\{ \begin{aligned} y_{o\mu}(x) &= y_{\varepsilon\xi}(x) + V_{\varepsilon\sigma}(\eta) - [\text{κοινό όριο}] \\ &= e^{1-x} + (e - e^{1-\eta}) - e \\ &= e^{1-x} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned} \right. \tag{71}$$

η οποία διαφέρει από την $y_{\varepsilon}(x)$ στην (66) κατά τον όρο $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ στον παρονομαστή.

Παρατήρηση:

Γενικά περιμένουμε ότι θα ισχύει η εκτίμηση

$$|y_\varepsilon(x) - y_{ομ}(x)| = O(\varepsilon), \quad \text{ομοιόμορφα στο } [0, 1].$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση εύκολα επαληθεύεται η πολύ ισχυρότερη εκτίμηση:

$$|y_\varepsilon(x) - y_{ομ}(x)| = O\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right).$$

Περιγράφουμε τώρα πιο συστηματικά τη μέθοδο. Ξεκινάμε με ένα πλήρες εξωτερικό ανάπτυγμα:

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n, \quad (72)$$

$$y_0(1) = 1, \quad y_1(1) = y_2(1) = \dots = 0.$$

Σημειώνουμε ότι *a priori* το $y_{\varepsilon\xi}(x)$ στην σελ. 45 δεν συμπίπτει με το $y_{\varepsilon\xi}(x)$ στην (71), αλλά με το $y_0(x)$, τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα.

Αντικαθιστώντας την (72) στην (65) και μαζεύοντας δυνάμεις του ε , παίρνουμε

$$\begin{cases} y'_0 + y_0 = 0, & y_0(1) = 1 \\ y'_n + y_n = -y''_{n-1} - y'_{n-1}, & y_n(1) = 0, \quad n \geq 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \quad (73)$$

Η λύση είναι

$$y_0(x) = e^{1-x}, \quad y_n(x) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Κατά συνέπεια η $y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x}$ είναι η εξωτερική προσέγγιση όλων των τάξεων του ε . Αυτός είναι ο λόγος που στην περιοχή $x \gg \varepsilon$ η διαφορά της $y(x)$ από την $y_{\varepsilon\xi}(x)$ είναι το πολύ εκθετικά μικρή: $|y - y_{\varepsilon\xi}| = O(\varepsilon^n) \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Πριν θεωρήσουμε το εσωτερικό ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, αναλύουμε την επιλογή της κλίμακας η : Θέτουμε $\eta = \frac{x}{\varepsilon^\gamma}$, $\gamma > 0$ θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Θέτουμε $V_\eta := y(\varepsilon^\gamma \eta)$ οπότε η (64) παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon^{1-2\gamma} + (1 + \varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}\dot{Y} + Y = 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\ddot{Y} = O(1)$, $\dot{Y} = O(1)$, $Y = O(1)$ και εφαρμόζουμε την αρχή της εξισορρόπησης: επιλογή του γ έτσι ώστε να έχουμε όσο περισσότερους όρους γίνεται της ίδιας τάξης, με τους υπόλοιπους αμελητέους (σύγκρινε με το πολύγωνο του Νεύτωνα). Απαριθμούμε τις διάφορες περιπτώσεις:

- (a) $1 - 2\gamma = -\gamma$ (1ος = 2ος)
- (b) $1 - 2\gamma = 0$ (1ος = 3ος)
- (c) $-\gamma = -\gamma$ (2ος = 2ος)

Η περίπτωση (c) δίνει την κλίμακα του x και συνεπώς τίποτα καινούριο, άρα απορρίπτεται. Η περίπτωση (b) δίνει $\gamma = \frac{1}{2}$ που κάνει το δεύτερο όρο καθόλου αμελητέο. Αναγκαστικά ποιόν επιλέγουμε την (a) που οδηγεί σε $\gamma = 1$ και $\eta = \frac{x}{\varepsilon}$.

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\eta)\varepsilon^n, \quad (74)$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(0) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Αντικατάσταση στην (69) και μάζεμα των όρων δίνει

$$\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 = 0, \quad Y_0(0) = 0$$

$$\ddot{Y}_n + \dot{Y}_n = -Y'_{n-1} - Y_{n-1}, \quad Y_n(0) = 0$$

Η πρώτη σχέση δίνει

$$Y_0(\eta) = A_0(1 - e^{-\eta})$$

με A_0 αυθαίρετη σταθερά. Ολοκληρώνοντας τις άλλες έχουμε

$$Y_n(\eta) = \int_0^\eta [A_n e^{-z} - Y_{n-1}(z)] dz, \quad n \geq 1$$

όπου A_n αυθαίρετες σταθερές.

Τώρα ταιριάζουμε ασυμπτωτικά το εσωτερικό με το εξωτερικό ανάπτυγμα, συναρμόζοντας όρο προς όρο.

Αντικατάσταση του $x = \eta\varepsilon$ στο $y_{\varepsilon\xi}(x)$ και ανάπτυξη ως προς ε δίνει

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x} = e\left(1 - \varepsilon\eta + \frac{\varepsilon^2\eta^2}{2!} - \frac{\varepsilon^3\eta^3}{3!} + \dots\right)$$

Συγκρίνουμε όρους αντίστοιχων δυνάμεων του ε των δυναμοσειρών για $\eta \rightarrow \infty$. Για $\eta \rightarrow \infty$ έχουμε $Y_0(\eta) \sim A_0$ που πρέπει να ταιριάζει με τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα, δηλαδή

$$A_0 = e.$$

Γυρίζουμε πίσω και υπολογίζουμε

$$Y_1(\eta) = (A_0 + A_1)(1 - e^{-\eta}) - e\eta$$

Για $\eta \rightarrow \infty$, $Y_1(\eta) \sim (A_0 + A_1) - e\eta$ που πρέπει να ταιριάζει με το δεύτερο όρο, από όπου συμπεραίνουμε ότι $A_1 = -A_0 = -e$.

Έτσι εξάγουμε ότι $Y_n(\eta) = e \left[\frac{(-1)^n}{n!} \right] \eta^n$, και καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) &\sim \sum \varepsilon^n \frac{(-1)^n \eta^n}{n!} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-\varepsilon\eta} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Τώρα κατασκευάζουμε την ομοιόμορφη προσέγγιση $y_{\sigma\mu}(x)$ κάνοντας χρήση της συνταγής στην (??):

$$\begin{aligned} y_{\sigma\mu}(x) &= y_{\varepsilon\xi}(x) + Y_{\varepsilon\sigma}(x) - [\text{κοινή τιμή τους}] \\ &= e^{1-x} + (e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}) - e^{1-x} \\ &= e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $y_{\sigma\mu}$, παρόλο που είναι η προσέγγιση απείρου τάξης εξακολουθεί να διαφέρει από την ακριβή λύση. Τούτο οφείλεται στο ότι η δυναμοσειρά ως προς ε , ε^2, \dots δεν πιάνει τον όρο $\varepsilon^{-\frac{1}{\varepsilon}}$. Αυτό παρόλο ότι η δυναμοσειρές των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων, σε αυτή την περίπτωση συγκλίνουν.

$$\varepsilon \ll x \ll 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Άσκηση 3.12 Εφαρμόστε τη μέθοδο του παραδείγματος 3.1 στο Παράδειγμα 3.4. Οδηγήστε σε αποτέλεσμα;

Άσκηση 3.13 Δείξτε την εκτίμηση στην (71). Μήπως ισχύει η ισχυρότερη εκτίμηση

$$|y_{\alpha\sigma}(x) - y_{\sigma\mu}(x)| = O(\varepsilon^n)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$;

Συνοψίζουμε τώρα τη μέθοδο, στην απλούστερη μορφή της όπως εφαρμόζεται στην (65) αγνοώντας ότι σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε τη λύση (67) και εστιάζουμε στην προσέγγιση ε -τάξης.

A. Εξωτερικό Ανάπτυγμα

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Αντικατάσταση στην (64) και μάζεμα δυνάμεων του ε δίνει

$$\varepsilon \left[y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \dots \right] + (1+\varepsilon) \left[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \dots \right] + \left[y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \right] = 0, \quad (75)$$

$$y_{\varepsilon\xi}(1) = 0.$$

ε^0 όροι

$$y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(1) = 1$$

$$\Rightarrow y_0(x) = e^{1-x}.$$

B. Εσωτερικό Ανάπτυγμα

Προσδιορισμός κλίμακας

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^\gamma}, \quad Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) := y(\varepsilon^\gamma \eta) \Leftrightarrow y(x) = Y_{\varepsilon\sigma}\left(\frac{x}{\varepsilon^\gamma}\right)$$

Αντικατάσταση στην (64) δίνει

$$\varepsilon^{1-2\gamma}\ddot{Y} + (1+\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}\dot{Y} + Y = 0, \quad Y(0) = 0.$$

Εξισορρόπηση όρων δίνει

$$1 - 2\gamma = -\gamma \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

Συνεπώς η εξίσωση (64) γράφεται ως

$$\varepsilon^{-1}\ddot{Y}_{\varepsilon\sigma} + (1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}\dot{Y}_{\varepsilon\sigma} + Y_{\varepsilon\sigma} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ddot{Y}_{\varepsilon\sigma} + (1+\varepsilon)\dot{Y}_{\varepsilon\sigma} + \varepsilon Y_{\varepsilon\sigma} = 0$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + \varepsilon^2 Y_2(\eta) + \dots$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει

$$\left(\ddot{Y}_0(\eta) + \varepsilon\dot{Y}_1(\eta) + \dots\right) + (1+\varepsilon)\left(\dot{Y}_0(\eta) + \varepsilon\dot{Y}_1(\eta) + \dots\right) + \varepsilon\left(Y_0(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + \dots\right) = 0.$$

ε^0 όροι

$$\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 = 0, \quad Y_0(0) = 0$$

$$\Rightarrow Y_0(\eta) = C(1 - e^{-\eta}), \quad C \text{ σταθερά υπό προσδιορισμό.}$$

Γ. Ασυμπτωτικό Ταίριασμα - Συναρμογή

$$y_0(x) = e^{1-x}$$

$$Y_0(\eta) = C(1 - \varepsilon^{-\eta})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0(\eta) \Leftrightarrow e = C$$

Δ. Ομοιόμορφη Προσέγγιση (1ης τάξης)

$$y_{o\mu}(x) = y_0(x) + V_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - e = e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}$$

$$|y_\varepsilon(x) - y_{o\mu}(x)| = O(\varepsilon), \quad x \in [0, 1].$$

Παρατήρηση: Η συναρμογή γίνεται πιο καταληπτή με την εισαγωγή ενδιάμεσων κλιμάκων. Επί παραδείγματι, θεωρήστε τις $y_0(x) = e^{1-x}$, $Y_0(\eta) = C(1 - e^{-\eta}) = C(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})$. Αναμένουμε ότι για $\eta^* = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\eta^* \sim 1$, οι δύο προσεγγίσεις επικαλύπτονται, δηλαδή

$$e^{1-\sqrt{\varepsilon}\eta^*} = C\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}\eta^*}{\varepsilon}}\right), \quad \text{για } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Άσκηση 3.14 3.2 Logan, σελ. 76

Άσκηση 3.15 3.3 Logan, σελ. 77

Άσκηση 3.16 3.4 Logan, σελ. 77

Άσκηση 3.17 3.5 Logan, σελ. 77

Άσκηση 3.18 3.6 Logan, σελ. 77

Άσκηση 3.19 * Θεωρείστε το ιδιόμορφο πρόβλημα

$$\varepsilon y'' - x^2 y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

το οποίο έχει δύο οριακά στρώματα, ένα στο $x = 1$ πάχους $O(\varepsilon)$ και ένα στο $x = 0$ πάχους $O(\sqrt{\varepsilon})$ (βλέπε Β. προηγουμένως). Βρείτε ομοιόμορφη προσέγγιση ε τάξης.

Άσκηση 3.20 * Θεωρείστε το ιδιόμορφο πρόβλημα

$$\varepsilon y'' - x^4 y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$$

Βρείτε την ομοιόμορφη προσέγγιση ε τάξης (βλέπε προηγούμενη άσκηση).

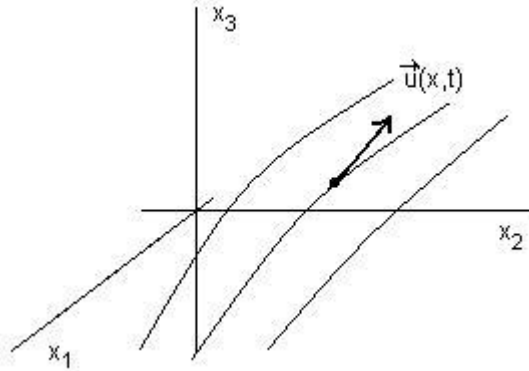
Άσκηση 3.21 Θεωρείστε το πρόβλημα $\varepsilon y'' + x^\alpha y' + y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Για ποιές τιμές του α υπάρχει οριακό στρώμα στο $x = 0$; Ποιό είναι το πάχος του στρώματος;

4 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

4.1 Προέλευση της θεωρίας ιδιομόρφων διαταραχών και οριακού στρώματος: Το σύστημα Prandtl στη Ρευστοδυναμική.

4.1.1 Εξισώσεις Navier - Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{Re} (\Delta \vec{u} - \nabla p) \\ \text{div}(\vec{u}) = 0 \end{cases} \quad (76)$$



Σχ. 22

Συμβολισμός

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{u} = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$

Το πεδίο ταχυτήτων \vec{u} δίνει την ταχύτητα στο σημείο x , που ενδεχομένως μεταβάλλεται με το χρόνο.

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= \left[u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] (u_1, u_2, u_3) \\ &= \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \right. \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{u} = \left(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3 \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$div(\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Το "Re" είναι αδιάστατος θετικός αριθμός και λέγεται αριθμός του Reynolds. Ο Re δίνει το πηλίκο της τάξεως μεγέθους της αδράνειας προς το ιζώδες

$$Re \sim \frac{\text{'Οροι Αδράνειας}}{\text{'Οροι ιζώδους}} \quad (77)$$

Για παράδειγμα, μεγάλη μάζα σημαίνει μεγάλη αδράνεια. Το μέλι έχει περισσότερο ιζώδες από το νερό.

$$p = p(x, t), \quad \text{πίεση.}$$

Το σύστημα (76) ως προς 4 αγνώστους u_1, u_2, u_3, p είναι η μαθηματική διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα στο πλαίσιο των ρευστών. Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (76)(i) είναι η επιτάχυνση ενώ το δεξιό μέλος αναπαριστά τις δυνάμεις. Αντίθετα με την περίπτωση της κλασσικής μηχανικής, $F=ma$, η πίεση δεν είναι γνωστή δεδομένη συνάρτηση της θέσης. Η πίεση είναι δύναμη που ασκεί το ρευστό στον εαυτό του και είναι μια από τις άγνωστες ποσότητες.

Η (76)(ii) είναι η μαθηματική διατύπωση της ασυμπιεστότητας που διαχωρίζει τα υγρά από τα αέρια.

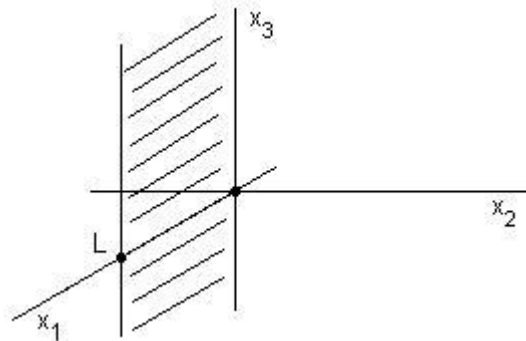
Το σύστημα Prandtl προκύπτει κατά την ανάλυση της (76) για $Re \gg 1$, δηλαδή στη μελέτη του ιδιόμορφου ορίου $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\varepsilon = \frac{1}{Re}$. Το σύστημα που προκύπτει αν θέσουμε $\varepsilon=0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \tilde{p} \\ div(\vec{u}) = 0 \end{cases} \quad (78)$$

όπου ορίζουμε $\tilde{p} := \frac{p}{Re}$ και εξακολουθούμε να καλούμε την \tilde{p} πίεση. Οι (78) είναι οι εξισώσεις Euler, που είναι 1ης τάξης. Κατά συνέπεια η διαταραχή ως προς ε είναι ιδιόμορφη διαταραχή, γιατί η εξίσωση για $\varepsilon=0$ αλλάζει τάξη.

4.1.2 Το φυσικό φαινόμενο

Θεωρούμε αρχικά ότι έχουμε μια ροή σταθερής ταχύτητας (ως προς x και t) στην κατεύθυνση του x_1 άξονα, $V\vec{e}_1$. Στη συνέχεια εισάγουμε μια λεπίδα απειροελάχιστα λεπτή και απείρου μήκους, παράλληλη στον x_3 άξονα και πλάτους L .



Σχ. 23

Η διατομή της λεπίδας J στο (x_1, x_2) επίπεδο είναι το διάστημα $\{0 < x < L, y = 0\}$ έτσι ώστε η αρχική ροή να είναι παράλληλη στη λεπίδα. Αυξάνουμε στη συνέχεια την ταχύτητα V και υποθέτουμε ότι ο αριθμός Reynolds είναι πολύ μεγάλος:

$$Re \gg 1$$

Για τον αριθμό Reynolds ισχύει

$$Re \sim \frac{VL}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

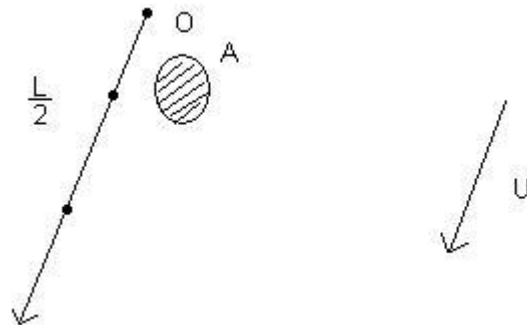
Η σταθερά μ χαρακτηρίζει το ιξώδες, το δε ρ την πυκνότητα.

Θεωρούμε ότι το υγρό “κολλάει” στο τοίχωμα της λεπίδας, κατά συνέπεια η ταχύτητα του μηδενίζεται στο J . Αυτό είναι θεμιτή παραδοχή γιατί σε όλα τα πειράματα που έχουν γίνει [[Fe], p. 41] η ταχύτητα του υγρού στην επιφάνεια της λεπίδας φέρεται να μηδενίζεται.

Για να πάρουμε μια ιδέα για την επίδραση της λεπίδας στη ροή ας συγκεντρωθούμε στο μέσο της λεπίδας, $x_1 = \frac{L}{2}$. Καθώς κινούμεθα από το J, στην κάθετη κατεύθυνση αυξανόμενου x_2 , η u αλλάζει από μηδέν σε τιμή κοντά στο V. Έστω ότι η τάξη μεγέθους (χαρακτηριστική κλίμακα) του διαστήματος αυτού είναι δ . Το στρώμα του υγρού κατά το σύνολο πάχους δ θα ονομάζεται συνοριακό στρώμα.

Η πρώτη μας ερώτηση είναι ο συσχετισμός του δ με τις διάφορες παραμέτρους του συστήματος. Υποθέτουμε ότι $\delta < L$. Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι η ροή δεν μεταβάλλεται ως προς x_3 , δηλαδή ουσιαστικά έχουμε μια ροή στο (x_1, x_2) επίπεδο.

4.1.3 Το πάχος της λεπίδας: το φυσικό επιχείρημα.



Σχ. 24

Θεωρείστε τώρα μια μικρή μάζα υγρού (επίπεδη) εμβαδού A που ξεκινάει από την ακινησία κοντά στο άκρο 0 του L και ακολουθεί τη ροή πλησίον του τοιχώματος. Στο σημείο $\frac{L}{2}$ έχουμε

1. Η μεταβολή της ταχύτητας είναι της τάξης του U
2. Η μεταβολή της ορμής είναι της τάξης $(\rho A)U$
3. Ο χρόνος είναι της τάξης $\frac{L}{2U}$

Κατά συνέπεια επειδή $\frac{d}{dt}mu = F$ συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή στο χρόνο της ορμής που είναι $\frac{(\rho A)U}{\frac{L}{2U}}$ δίνει δύναμη της τάξης $\frac{(\rho A)U^2}{L}$ (το 2 δεν έχει σημασία όσον αφορά την τάξη).

Τώρα η δύναμη που εξασκείται στη μάζα οφείλεται μόνο στο ιξώδες (δυνάμεις τριβής λόγω της παρουσίας της λεπίδας). Αν δεν υπήρχε λεπίδα η ταχύτητα θα ήταν σταθερή και άρα η δύναμη ίση με το μηδέν. Η πυκνότητα της δύναμης του ιξώδους δίνεται από τον όρο $\mu[u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}]$, άρα η δύναμη του ιξώδους από τον όρο $\mu[u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}]A$.

Παρατηρούμε τα εξής:

$$\mu[u_{x_2x_2}]A \text{ είναι της τάξης } \mu \frac{UA}{\delta^2}, \text{ διότι } u_{x_2} \sim \frac{U}{\delta} \text{ και } u_{x_2x_2} \sim \frac{U/\delta}{\delta} = \frac{U}{\delta^2}$$

$$\mu[u_{x_1x_1}]A \sim \mu \frac{U}{L^2}, \text{ διότι } u_{x_1} \sim \frac{U}{L} \text{ και } u_{x_1x_1} \sim \frac{U}{L^2}$$

Κατά συνέπεια αυτός ο όρος είναι μικρότερος (λόγω της παραδοχής $\delta < L$).

Συμπέρασμα:

$$\frac{(\rho A)U^2}{L} \sim \mu \frac{UA}{\delta^2} \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{L^2} \sim \frac{\mu}{L\rho U} \sim \frac{1}{Re}$$

δηλαδή το οριακό στρώμα συρρικνώνεται καθώς ο αριθμός Reynolds τείνει στο άπειρο.

4.2 Εσωτερική κλίμακα - Εσωτερικά αναπτύγματα και σύστημα Prandtl.

Θεωρούμε μόνιμες ροές (\vec{u} ανεξάρτητο του χρόνου) και σε δύο διαστάσεις, οπότε το σύστημα (76) παίρνει τη μορφή για $\vec{u} = (u, v)$ (αντί του (u_1, u_2))

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{Re} [u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - p_{x_1}] \\ u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{1}{Re} [v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} - p_{x_2}] \\ u_{x_1} + v_{x_2} = 0 \end{cases} \quad (79)$$

Θέλουμε να ανακαλύψουμε κάποιες κλίμακες στην περιοχή του οριακού στρώματος. Για αυτό το σκοπό θα σκεφτούμε κατά αναλογία με τις αλγεβρικές εξισώσεις (βλ. (30)) και παρόμοια με την (64)

$$\begin{cases} \text{Ανεξάρτητες μεταβλητές: } x_1, x_2 \\ \text{Εξαρτημένες μεταβλητές: } (u, v) \text{ και } p \end{cases} \quad (80)$$

Ανεξάρτητες: Την οριζόντια κλίμακα μήκους x_1 που είναι L δεν την αλλάζουμε. Στην x_2 κατεύθυνση εισάγουμε την κλίμακα του πάχους του στρώματος, $\beta = \frac{\delta}{L}$.

$$\eta = \frac{x_2}{\beta} \quad (81)$$

Εξαρτημένες: Την x_1 συνιστώσα της ταχύτητας δεν την αγγίζουμε διότι εδώ η U δίνει την κατάλληλη κλίμακα. Η x_2 συνιστώσα πρέπει να αλλάξει. Δεν την γνωρίζουμε και εισάγουμε την άγνωστη χαρακτηριστική ποσότητα γ :

$$v = \gamma \bar{v}. \quad (82)$$

Ομοίως για την πίεση εισάγουμε την άγνωστη κλίμακα

$$p = \alpha \bar{p}.$$

Εν περιλήψει:

$$\begin{cases} u, x \text{ όπως είχαν,} \\ \eta = \frac{x_2}{\beta}, \quad v = \gamma \bar{v}, \quad p = \alpha \bar{p}. \end{cases} \quad (83)$$

Εκφράζουμε τώρα το σύστημα (79) ως προς τις καινούριες μεταβλητές:

$$\begin{cases} v \frac{\partial u}{\partial x_2} = \gamma \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{\beta} \\ u_{x_2 x_2} = \frac{1}{\beta^2} u_{\eta \eta} \end{cases} \quad (84)$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$\begin{cases} uu_{x_1} + \frac{\gamma}{\beta} \bar{v} u_{\eta} = \frac{1}{Re} \left(u_{x_1 x_1} + \frac{1}{\beta^2} u_{\eta \eta} - \alpha \bar{p}_{x_1} \right), \\ \gamma u \bar{v}_{x_1} + \frac{\gamma^2}{\beta} v \bar{v}_{\eta} = \frac{\gamma}{\beta^2 Re} \bar{v}_{\eta \eta} + \frac{1}{Re} \gamma \bar{v}_{xx} + \frac{\alpha}{\beta Re} \bar{p}_{\eta}, \end{cases} \quad (85)$$

$$u_{x_1} + \frac{\gamma}{\beta} \bar{v}_\eta = 0. \quad (86)$$

Ορμώμενοι τώρα από τις αλγεβρικές εξισώσεις §3 θα επιλέξουμε τα $\alpha, \beta,$ γ έτσι ώστε μέσω της μεθόδου της εξισορρόπησης να εξισορροπήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερους όρους της εξίσωσης, με τους δε υπόλοιπους όρους μικρότερους, τους οποίους και τους αγνοούμε.

Ξεκινάμε από την (86) εφαρμόζοντας αυτή την αρχή:

$$\beta = \gamma. \quad (87)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την (85)(i):

$$uu_{x_1} + \bar{v}u_\eta = \frac{1}{Re} \left(u_{x_1x_1} + \frac{1}{\beta^2} v_{\eta\eta} - \alpha \bar{p}_{x_1} \right)$$

Εφόσον $\beta < 1 \Rightarrow u_{x_1x_1}$ μικρός όρος σε σχέση με τον $\frac{1}{\beta^2} u_{\eta\eta}$

Υπόλοιπες τάξεις όρων:

$$1 \quad 1 \quad \frac{1}{\beta^2 Re} \quad \frac{\alpha}{Re}. \quad (88)$$

Επιλέγουμε

$$1 = \frac{1}{\beta^2 Re} = \frac{\alpha}{Re} \Rightarrow \alpha = Re, \beta = (Re)^{-\frac{1}{2}}. \quad (89)$$

Αγνοώντας τον $u_{x_1x_1}$ η (85)(i) δίνει τη θέση της στην

$$uu_{x_1} + \bar{v}u_\eta = u_{\eta\eta} - \bar{p}_{x_1} \quad (90)$$

Τέλος έχουμε την (85)(ii):

$$\begin{aligned} \gamma u \bar{v}_{x_1} + \frac{\gamma^2}{\beta} \bar{v} \bar{v}_\eta &= \frac{\gamma}{\beta^2 Re} \bar{v}_{\eta\eta} + \frac{1}{Re} \gamma \bar{v}_{x_1x_1} + \frac{\alpha}{\beta Re} \bar{p}_\eta \\ \beta & \quad \beta & \quad \beta & \quad \beta^3 & \quad \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

($\beta < 1, Re \gg 1$)

Κατά συνέπεια ο μεγαλύτερος όρος είναι ο $\frac{1}{\beta}$ και η (85)(ii) δίνει τη θέση της στην

$$\bar{p}_\eta = 0 \quad (91)$$

Συμπέρασμα:

Η Navier - Stokes εντός του στρώματος προσεγγίζεται από το σύστημα Prandtl:

$$\begin{cases} uu_{x_1} + \bar{v}u_\eta = u_{\eta\eta} - \bar{p}_{x_1} \\ \bar{p}_\eta = 0 \\ u_{x_1} + \bar{v}_\eta = 0. \end{cases} \quad (92)$$

Επίσης συνάγουμε ότι $\beta = (Re)^{-\frac{1}{2}}$ που συμφωνεί πλήρως με το φυσικό επιχείρημα.

Σχολιο: Το σύστημα Prandtl είναι για την Navier - Stokes ότι η (75) για την (65). Το σύστημα Euler (78) αντιστοιχεί με την (66).

Σχολιο: Το σύστημα (76) συνοδεύεται από αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = u_0(x)$ με $\operatorname{div}u_0(x) = 0$ και από συνοριακές συνθήκες $u = 0$ στο ∂V , όπου V το χωρίο όπου λαμβάνει χώρα η ροή. Εάν η ροή είναι σε όλο τον \mathbb{R}^3 τότε δεν έχουμε συνοριακές συνθήκες.

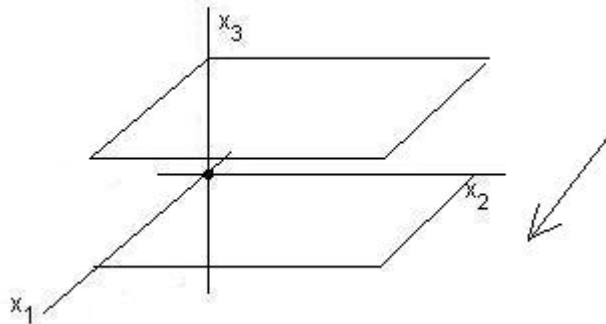
Το πρόβλημα (76) με τις ανωτέρω συνθήκες είναι ένα Π.Α.Τ. (πρόβλημα αρχικών τιμών). Το ερώτημα που προκύπτει είναι είναι κατά πόσο δοθείσης $u_0(x)$ η $u(x, t)$ προσδιορίζεται για $t \geq 0$. Στη μελέτη του Π.Α.Τ. οδηγείται κανείς φυσιολογικά στην έννοια της “ασθενούς λύσης”. Οι ασθενείς λύσεις δεν είναι αναγκαστικά “κλασσικές”, δηλαδή δεν έχουν αναγκαστικά όλες τις παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση αλλά είναι συναρτήσεις που ικανοποιούν ολοκληρωτικές σχέσεις που προκύπτουν όταν πολλαπλασιάσει κανείς την (76) με συναρτήσεις δοκιμής μηδενικής απόκλισης και ολοκληρώσει κατά μέρη. Οι κλασσικές λύσεις είναι ασθενείς, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Θα ήταν σημαντικό αν υπήρχε μια θεωρία ύπαρξης / μοναδικότητας που για ομαλή αρχική συνθήκη να δίνει ολική ύπαρξη ομαλής $u(x, t)$. Αυτό είναι γνωστό μόνο για τις 2 διαστάσεις (πχ. στον \mathbb{R}^2).

Στις 3 διαστάσεις ένα τοπικό θεώρημα έχει αποδειχθεί (η λύση υπάρχει³ για $t \in [0, T)$, όπου το T εξαρτάται από την $u_0(x)$ και το Re). Επίσης ολική

³δες [H], σελ. 79

ύπαρξη ασθενών λύσεων είναι γνωστή (αλλά όχι μοναδικότητα). Από όσα μέχρι τώρα είναι γνωστά σε ορισμένες περιπτώσεις μια ασθενής λύση μπορεί να μην είναι κλασσική, ή ενδεχομένως να υπάρχουν πολλές ασθενείς λύσεις. Αυτό είναι ένα φημισμένο ανοικτό πρόβλημα από την αρχή του 20ου αιώνα, πρόβλημα επιπέδου μεταλλίου Fields.

Άσκηση 4.1 Θεωρείστε μια μόνιμη ροή μεταξύ δύο ακίνητων επιπέδων απείρων πλακών $x_3 = -d, x_3 = d$. Θεωρείστε ότι η ροή προκύπτει από πίεση p με $\nabla p = (-C, 0, 0), c > 0$. Τέλος θεωρείστε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται πάνω στις πλάκες. Βρείτε την ταχύτητα του ρευστού.



Σχ. 25

Υπόδειξη: Η δύναμη της πίεσης είναι $-\nabla p = (-C, 0, 0), u_2 = u_3 = 0, u_1 = u_1(x_3)$.

Άσκηση 4.2 Βρείτε την ομοιόμορφη προσέγγιση πρώτης τάξης για το Π.Σ.Τ.

$$\varepsilon y'' + (1+x)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$$

Λύση: Το πρόβλημα εμπίπτει στην κατηγορία του θεωρήματος 3.1 του Logan, με $p(x) = 1 + x$. Εφόσον $p(x) > 0$ στο $[0,1]$, αναμένουμε οριακό στρώμα στο $x=0$.

Εξωτερικό ανάπτυγμα

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

$$y_{\varepsilon\xi}(1) = 1, \text{ από όπου προκύπτει ότι } y_0(1) = 1, y_n(1) = 0, n \geq 1.$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει:

$$\varepsilon[y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \dots] + (1+x)[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \dots] + [y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots] = 0$$

ε^0 όροι:

$$(1+x)y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(1) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = 2(1+x)^{-1}.$$

Εσωτερικό ανάπτυγμα

$y(x) = Y\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $Y = Y(\eta)$. Η εξίσωση ως προς Y γράφεται

$$\frac{1}{\varepsilon}\ddot{Y} + \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\dot{Y} + Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{Y} + (1+\varepsilon)\dot{Y} + \varepsilon Y = 0$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_0(0) = 1, \quad Y_1(0) = 0, \quad \dots$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει:

$$(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots)'' + (Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots)' + \varepsilon(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots) = 0.$$

ε^0 όροι:

$$Y_0'' + Y_0 = 0, \quad Y_0(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y_0(\eta) = 1 + A_0(e^\eta - 1).$$

Συναρμογή

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = 2(1+x)^{-1}, \quad Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = 1 + A_0(e^\eta - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_{\varepsilon\xi}(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1 - A_0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0 = -1$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση πρώτης τάξης

$$y_{ομ}(x) = y_{εξ}(x) + Y_{εσ}\left(\frac{x}{ε}\right) - 2 = \frac{2}{1+x} + e^{-\frac{x}{ε}}.$$

Σημείωση:

$$εy'' + (2x+1)y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

Εδώ έχουμε $p(x) = -(2x+1) < 0$ και κατά σιγήπεια το οριακό στρώμα αναμένεται στο $x = 1$. Οπότε η $η = \frac{1-x}{ε}$, και $Y = Y(η)$. Κατά τα άλλα πανομοιότυπη ανάλυση.

Λύση Άσκησης 3.14(β) (Μη γραμμική)

$$εy'' + y' + y^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

A. Εξωτερικό ανάπτυγμα

ε⁰ όροι

$$y'_0 + y_0^2 = 0, \quad y_0(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{x+1}$$

B. Εσωτερικό ανάπτυγμα

$$Y(η), \quad η = \frac{x}{ε^\alpha}$$

$$ε^{1-2\alpha}\dot{Y} + ε^{-\alpha}\dot{Y} + Y^2 = 0.$$

$$1 - 2\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = -1 : \text{η εξίσωση παίρνει τη μορφή}$$

$$\ddot{Y} + \dot{Y} + εY^2 = 0.$$

ε⁰ όροι

$$\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 = 0, \quad Y_0(0) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Y_0(\eta) = C_1[1 - e^{-\eta}] + \frac{1}{4}$$

Γ. Συναρμογή

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0(\eta) \Leftrightarrow C^1 = \frac{3}{4}$$

Δ. Ομοιόμορφη Προσέγγιση

$$y_{o\mu}(x) = y_{o\mu}(x) + Y_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1 = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

□

Λύση Άσκησης 3.20 (Εκφυλισμένη $p(x)$, 2 οριακά στρώματα)

$$\varepsilon y'' - x^4 y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι δεν εμπίπτει στην κατηγορία προβλημάτων $\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $0 < x < 1$ διότι το $p(x)$ μηδενίζεται στο $[0,1]$. Παρά ταύτα από το θεώρημα (από την παραλλαγή του για $p(x) < 0$) αναμένεται ότι στο $x=1$ θα έχουμε οριακό στρώμα κλίμακας ε .

Είναι όμως ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι έχουμε οριακό στρώμα και στο $x=0$. Αυτό είναι εμφανές διότι θέτοντας $\varepsilon=0$ παίρνουμε $-x^4 y' - y = 0$ που (αν δεν είχαμε οριακό στρώμα στο $x=0$) θα έπρεπε να συνοδεύεται από τη συνθήκη $y(0)=1$. Εάν λοιπόν το $y'(0)$ οριζότανε θα καταλήγαμε σε αντίφαση. Ξεκινάμε με ένα a priori φράγμα.

Λήμμα 4.3 Για όλα τα x στο $[0,1]$,

$$0 \leq y(x) \leq 1$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\max y = y(x_M) > 1$. Έπεται ότι $x_M \in (0,1) \Rightarrow y'(x_M) = 0$, $y''(x_M) \leq 0$. Η εξίσωση $\varepsilon y'' + x^4 y' - y = 0$ υπολογισμένη στο $x = x_M$ οδηγεί σε άτοπο. Παρόμοια επιχειρηματολογούμε για $\min y = y(x_m) < 0$.

□

Α. Εξωτερική προσέγγιση

$$-x^4 y_0' - y_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = C_0 e^{\frac{1}{3x^3}}$$

Από το Λήμμα έπεται ότι η $y_0(x)$ πρέπει να είναι φραγμένη $\Rightarrow C_0 = 0$.

B. Εσωτερική προσέγγιση στο $x = 1$

$$\eta = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad y(x) = Y^1(\eta) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \ddot{Y}^1 - (1-\varepsilon\eta)^4 \frac{1}{\varepsilon} \dot{Y}^1 - Y_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_0^1 - \dot{Y}^1(1-\varepsilon\eta)^4 - \varepsilon Y^1 = 0, \text{ από όπου προκύπτει ότι}$$

$$\ddot{Y}_0^1 + \dot{Y}_0^1 = 0 \Rightarrow Y_0^1(\eta) = A_0 + B_0 e^{-\eta}$$

$$Y_0^1(0) = 1 \Rightarrow A_0 + B_0 = 1$$

Γ. Συναρμογή στο $x=1$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0^1(\eta) \quad \therefore A_0 = 0$$

$$\Rightarrow B_0 = 1$$

Δ. Εσωτερική προσέγγιση στο $x=0$

Η κλίμακα είναι το πρώτο που χρειάζεται να αποφασίσουμε.

$$\eta = \frac{x}{\delta}, \quad y(x) = Y^0(\eta); \quad Y_0(0) = 1$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \ddot{Y}^0 - \delta^3 \eta^4 \dot{Y}^0 - Y^0 = 0.$$

Εξισορρόπηση δίνει τις δυνατότητες

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \delta^3, \quad \frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim 1, \quad \delta^3 \sim 1.$$

Η πρώτη δυνατότητα δίνει

$$\delta^3 \ddot{Y}^0 - \delta^3 \eta^4 \dot{Y}^0 - Y^0 = 0.$$

Θέτουμε $\delta = 0$ ($\Leftrightarrow \varepsilon = 0$) και παίρνουμε $Y_0^0 = 0$, μη αποδεκτό. Η τρίτη δυνατότητα δίνει

$$\varepsilon \ddot{Y}^0 - \eta^4 \dot{Y}^0 - Y^0 = 0$$

και κατά συνέπεια $-\eta^4 \dot{Y}_0^0 - Y_0^0 = 0$, που συμπίπτει με την εξίσωση για την εξωτερική προσέγγιση και οδηγεί στην $Y_0^0(\eta) \equiv 0$ που δεν ικανοποιεί την $Y_0^0(0) = 1$. Συνεπώς η μόνη επιλογή είναι η δεύτερη, $\varepsilon \sim \delta^2$ δηλαδή $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$, που δίνει

$$\ddot{Y}^0 - \varepsilon^{\frac{3}{2}} Y^0 \eta^4 Y^0 - Y^0 = 0, \quad Y^0(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Y}_0^0 - Y_0^0 = 0, \quad Y_0^0(0) = 1$$

$$Y_0^0(\eta) = D_0 e^\eta + E_0 e^{-\eta}, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$D_0 + E_0 = 1.$$

Από το Λήμμα έπεται ότι η Y_0^0 πρέπει να είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια,

$$D_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = 1.$$

E. Συναρμογή στο $x=0$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0^0(\eta) = 0$$

που ισχύει.

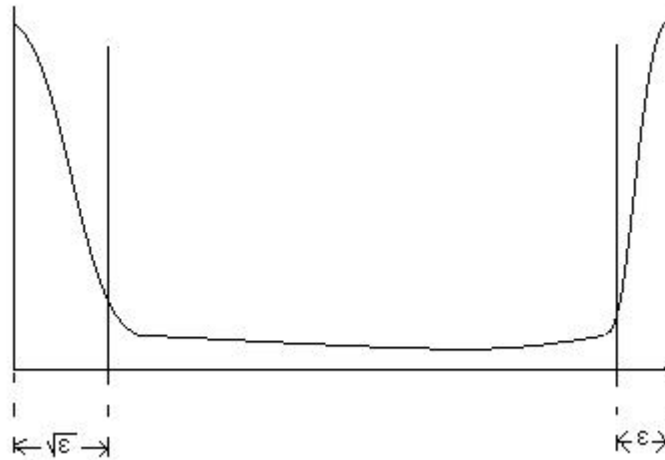
F. Ομοιόμορφη προσέγγιση πρώτης τάξης

Μαζεύουμε ότι έχουμε:

$$y_0(x) \equiv 0, \quad Y_0^0(\eta) = e^{-\eta}, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad Y_0^1(\eta) = e^{-\eta}, \quad \eta = \frac{1-x}{\varepsilon}$$

$$y_{\pi\rho}(x) = y_0(x) + Y_0^0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + Y_0^1\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) - \lim_{x \rightarrow 1} y_0(x)$$

$$= e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}}.$$



Σχ. 26

Σχόλιο: Η απάντηση της άσκησης 3.19 είναι πανομοιότυπη με αυτή της 3.20. Γενικότερα ο M. Μπερκέτης παρατήρησε ότι απάντηση για την εξίσωση $\varepsilon y'' + x^{k+1}y' - y = 0$, $y(0) = y(1) = 1$ είναι επίσης η ίδια, ανεξάρτητα του $k \geq 1$, k ακέραιος. Πώς το εξηγείτε;

4.3 Ο ρόλος της πίεσης στη δημιουργία οριακού στρώματος.

Υπευθυμίζουμε το Θεώρημα 3.1 του Logan [L].

Θεώρημα 3.1 ([L], σελ. 74 - 76) *Θεωρείστε το Π.Σ.Τ.*

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(0) = a \quad y(1) = b \end{cases} \quad (93)$$

όπου p, q συνεχείς στο $[0, 1]$.

(i) Εάν $p(x) > 0$ στο $0 \leq x \leq 1$, τότε υπάρχει οριακό στρώμα στο $x=1$

(ii) Εάν $p(x) < 0$ στο $0 \leq x \leq 1$, τότε υπάρχει οριακό στρώμα στο $x=0$

Καταρχήν για να διακρίνουμε αυτές τις περιπτώσεις από φυσικής άποψης βοηθάει να θεωρήσουμε το x σαν χρόνο οπότε η εξίσωση (93) αντιστοιχεί με

έναν ταλαντωτή που εάν μεν $p > 0$ αντιμετωπίζει αντίσταση στην κίνηση, ενώ αντίθετα εάν $p < 0$ τότε η κίνηση επιταχύνεται.

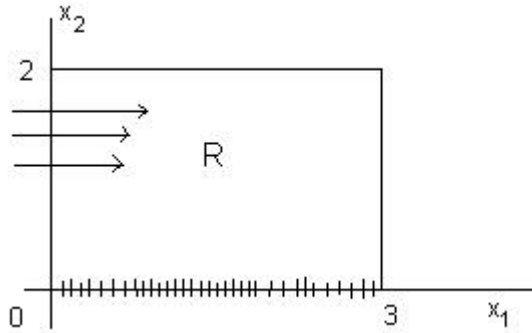
Στην πρώτη περίπτωση η εξίσωση του οριακού στρώματος θα έχει ως λύση ένα αρνητικό εκθετικό ενώ στη δεύτερη ένα θετικό εκθετικό.

Σε κάθε περίπτωση ένα μόνο από το δύο όρια $\lim_{\eta \rightarrow \infty}$ υπάρχουν.

Είναι φανερό λοιπόν ότι στην πρώτη περίπτωση το οριακό στρώμα πρέπει αναγκαστικά να είναι αριστερά (στο παρελθόν) ώστε η συναρμογή να γίνει στο $+\infty$. Αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση το όριο που υπάρχει είναι το $\lim_{\eta \rightarrow -\infty}$ οπότε αναγκαστικά στο οριακό στρώμα θα βρίσκεται δεξιά (στο μέλλον).

Θα δείξουμε ότι κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με την εξίσωση Navier - Stokes, όπου τώρα ο ρόλος της πίεσης παίζει το ρόλο του p στην (93).

Θεωρούμε το σενάριο της λεπίδας που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύστημα (79) στο χωρίο $R = \{0 < x_1 < 3, 0 < x_2 < 2\}$.



Σχ. 27

που περιγράφει μια μόνιμη ροή από αριστερά προς τα δεξιά. Θεωρούμε ότι η κάτω πλευρά του ορθογωνίου είναι το μόνο φυσικό σύνορο της ροής, όπου η ταχύτητα μηδενίζεται:

$$u(x_1, 0) = v(x_1, 0) = 0, \quad \vec{u}(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \quad (94)$$

Θεώρημα 4.4 ([F], σελ. 54 - 56) Έστω ότι ισχύουν οι εξής υποθέσεις

(i) $0 \leq u(x_1, x_2) \leq 1$ στο R

(ii) $|u_{x_1}| \leq M$ στο R

(iii) H (94)

(iv) $Re \gg 1$.

Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

A. Εάν το p_{x_1} είναι αρκετά αρνητικό⁴, τότε υπάρχει οριακό στρώμα,

B. Εάν το p_{x_1} είναι αρκετά θετικό, τότε δεν υπάρχει οριακό στρώμα.

Σχόλιο

Αυτό το μαθηματικό αποτέλεσμα συμβιβάζεται απόλυτα με τη φυσική. Πράγματι, από το νόμο του Bernoulli,

$$\frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + p = const.,$$

έχουμε ότι όσο η πίεση μικραίνει, τόσο η ταχύτητα αυξάνεται. Κατά συνέπεια, εάν $p_{x_1} < 0$ έπεται ότι η ταχύτητα αυξάνεται ως προς x_1 . Αναμένουμε λοιπόν τη δημιουργία οριακού στρώματος σε αυτή την περίπτωση διότι η ταχύτητα μηδενίζεται στην κάτω πλευρά (και διότι υποθέτουμε ότι η x_1 συνιστώσα της είναι θετική). Αντίθετα, αν η πίεση επιβραδύνει τη ροή τότε δεν αναμένεται οριακό στρώμα.

Απόδειξη.

Θα δουλέψουμε με την πρώτη και την τρίτη εξίσωση του συστήματος (79).

$$\varepsilon^2 \Delta u - p_{x_1} = uu_{x_1} + vu_{x_2}, \quad (95)$$

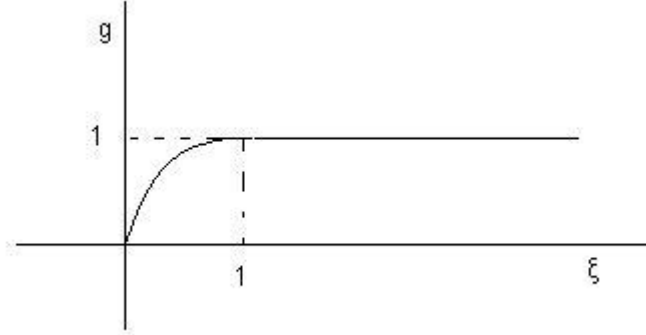
όπου $\varepsilon^2 = \frac{1}{Re}$, και όπου p έχει αντικατασταθεί από την $\frac{p}{Re}$ που εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με p .

$$u_{x_1} + v_{x_2} = 0. \quad (96)$$

A. Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$g(\xi) := \begin{cases} 2\xi - \xi^2, & 0 \leq \xi < 1 \\ 1, & \xi \geq 1 \end{cases}$$

⁴αν συμβαίνει $\max_R < -\alpha K$, $K = 3 + 6\varepsilon^2 + 3M$.



Σχ. 28

Παρατηρούμε ότι

$$0 \leq g \leq 1, \quad 0 \leq g' \leq 2, \quad 0 \geq g'' \geq -2 \quad (97)$$

Έστω (u, v) λύση του συστήματος (79) στο $R = \{0 < x_1 < 3, 0 < x_2 < 2\}$, με συνθήκες Dirichlet (94) στο κάτω σύνορο και υποθέσεις (i), (ii), (iii). Τότε για Re αρκετά μεγάλο ισχύει η εκτίμηση

$$u(x_1, x_2) \geq \underline{u}(x_1, x_2) \quad (98)$$

με

$$\underline{u}(x_1, x_2) := \alpha g(x_1) g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(3 - x_1) g(2 - x_2) \quad (99)$$

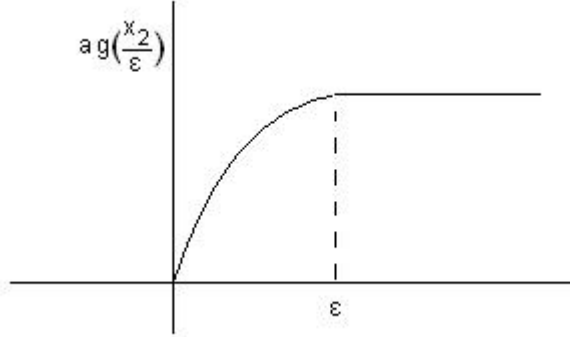
όπου α θετικός αριθμός που ικανοποιεί

$$\begin{cases} \alpha < \frac{a}{K} \\ -\alpha = \max_R p_{x_1} (< 0), \quad K = 3 + 6\varepsilon^2 + 3M \end{cases} \quad (100)$$

Σχόλια

Το Λήμμα δείχνει πολύπλοκο αλλά μπορεί να κατανοηθεί αρκετά εύκολα. Πρώτον το α είναι ένας θετικός αριθμός το μέγεθος του οποίου καθορίζεται από τη σταθερά M στην υπόθεση (ii) και από το $\max p_{x_1} (= -\alpha < 0)$.

Ο σημαντικός όρος στον ορισμό της \underline{u} είναι ο $\alpha g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)$.



Σχ. 29

που δείχνει ότι η $u(x_1, x_2)$ έχει συνοριακό στρώμα πάχους ε . Οι άλλοι όροι είναι μειζονος σημασίας και έχουν να κάνουν με τις οριακές συνθήκες

$$\underline{u}(x_1, x_2) \Big|_{\partial R} = 0.$$

Η απόδειξη του λήματος κάνει χρήση της Αρχής Μεγίστου ([E]). Η \underline{u} είναι μια συνάρτηση σύγκρισης, υπολύση για τον τελεστή

$$Lw := \varepsilon^2 \Delta w - uw_{x_1} - vw_{x_2} \tag{101}$$

(βλέπε (103)).

Απόδειξη. (Λήματος)

Πρώτα από την (96) μέσω της (ii) παίρνουμε την εκτίμηση

$$|v(x_1, x_2)| \leq Mx_2, \quad \text{στο } R. \tag{102}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε την ποσοτητα

$$L\underline{u} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_2^2} \right] - \underline{u}\underline{u}_{x_1} - \underline{v}\underline{u}_{x_2}.$$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_1^2} = \alpha g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \left[g''(x_1)g(3-x_1) - g'(x_1)g'(3-x_1) + g(x_1)g''(3-x_1) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_2^2} = \alpha g(x_1) g(3-x_1) \left[\frac{1}{\varepsilon^2} g''\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) - \frac{2}{\varepsilon^2} g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g'(2-x_2) + \right]$$

$$\left. + g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g''(2-x_2) \right]$$

$$-u\underline{u}_{x_1} = -\alpha u g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \left[g'(x_1)g(3-x_1) - g(x_1)g'(3-x_1) \right]$$

$$-u\underline{u}_{x_2} = -\alpha v g(x_1) g(3-x_1) \left[\frac{1}{\varepsilon^2} g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) - g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g'(2-x_2) \right]$$

Κάνοντας χρήση των

(a) της (i)

(b) της (102) ($\Rightarrow |g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)| \leq 2M\varepsilon$)

(c) της (97)

Έχουμε:

$$\varepsilon^2 \alpha g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) g''\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) g(3-x_1) \geq -2\varepsilon^2 \alpha$$

$$\varepsilon^2 \alpha g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) g''(3-x_1) \geq -2\varepsilon^2 \alpha$$

$$\varepsilon^2 \alpha g(x_1) g(3-x_1) g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g''(2-x_2) \geq -2\varepsilon^2 \alpha$$

$$\alpha g(x_1) g(3-x_1) g''\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \geq -2\alpha$$

$$-\alpha v g(x_1) g(3-x_1) \frac{1}{\varepsilon} g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \geq -2\alpha M$$

$$+\alpha v g(x_1) g(3-x_1) g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g'(2-x_2) \geq -\alpha M$$

$$-\alpha u g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) g'(x_1) g(3-x_1) \geq -\alpha$$

$$\alpha u g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2)g(x_1)g'(3-x_1) \geq 0$$

Κατά συνέπεια

$$L\underline{u} \geq -\alpha(3+6\varepsilon^2+3M) =: -\alpha K \quad (103)$$

Έστω

$$w := \underline{u} - u.$$

Από την (95) $Lu = p_{x_1}$, από όπου έπεται ότι

$$L(\underline{u} - u) \stackrel{(103)}{\geq} -\alpha K - p_{x_1}$$

Κατά συνέπεια εάν

$$-\alpha K - p_{x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha K > p_{x_1} \quad (104)$$

τότε προκύπτει

$$Lw > 0 \text{ στο } R \quad (105)$$

$$w \Big|_{\partial R} \leq 0 \quad (\text{μέσω της (i)}). \quad (106)$$

Από την (ασθενή) αρχή του μεγίστου συμπαίρνουμε ότι $w \leq 0$. Για χάρη του αναγνώστη μου αγνοεί αυτή την αρχή, δίνουμε ένα λεπτομερές αυτοδύναμο επιχείρημα. Έστω λοιπόν ότι η w έχει θετικό μέγιστο στο (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , αναγκαστικά εσωτερικό σημείο του R .

Τότε θα ισχύει

$$w_{x_1} = w_{x_2} = 0, \quad w^{x_1 x_1} \leq 0, \quad w_{x_2 x_2} \leq 0, \quad x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

που αντίκειται όμως με την (105). Κατά συνέπεια, το μέγιστο της w στο R δεν είναι δυνατόν να είναι θετικό,

$$w \leq 0 \Leftrightarrow \underline{u} \leq u \text{ στο } R. \quad (107)$$

Η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

□

Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη του A.

Συγκεντρωνόμαστε στο τετράγωνο $S = \{1 < x < 2, 0 < y < 1\}$ όπου $\underline{u} = \alpha g\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$ διότι οι άλλοι παράγοντες στην (99) είναι ίσοι με τη μονάδα. Παρατηρούμε ότι η u μηδενίζεται στην κάτω πλευρά του S , αλλά αυξάνεται απότομα και σε απόσταση ε ξεπερνά την τιμή α . Επίσης βλέπουμε ότι η δημιουργία αυτού του οριακού στρώματος συντελείται μεταξύ της εισόδου της ροής από την αριστερή πλευρά του ορθογωνίου R και της άφιξης της ροής στην αριστερή πλευρά του τετραγώνου S .

Η απόδειξη του A. είναι πλήρης.

□

B.

Θεωρείστε το ορθογώνιο $R' = \{0 < x_1 < 3, 0 < x_2 < 1\}$.

Ορίζουμε την

$$\bar{u}(x_1, x_2) := \left\{ x_2 g(x_1) g(3 - x_1) + 2 - g(x_1) - g(3 - x_1) \right\} \quad (108)$$

στο R' , ως υπερλύση που θα δώσει το επάνω φράγμα.

Άσκηση 4.5 Δείξτε ότι κάτω από τις υποθέσεις (i), (ii), (iii) της εκφώνησης του θεωρήματος, υπάρχει σταθερά $K > 0$ ανεξάρτητη του ε , τέτοια ώστε στο R' ισχύει η

$$L\bar{u}(x_1, x_2) \leq K. \quad (109)$$

Έστω τώρα

$$p_{x_1} > K. \quad (110)$$

Έπεται ότι

$$L\bar{u} \leq p_{x_1} = Lu \quad (111)$$

Άσκηση 4.6 (a) Δείξτε ότι στις πλευρές $x_1 = 0, x_1 = 3$ του R' ισχύει $\bar{u} = 1$

(b) Δείξτε ότι στην επάνω πλευρα του R' ισχύει $\bar{u} = 1$

(c) Δείξτε ότι στην κάτω πλευρα του R' ισχύει $\bar{u} \geq 0$.

Κατά συνέπεια

$$\bar{u} \geq u \quad \text{στο } \partial R'. \quad (112)$$

Άσκηση 4.7 Δείξτε με ένα επιχείρημα αρχής μεγίστου πως

$$\bar{u} \geq u \quad \text{στο } R'. \quad (113)$$

Κατά συνέπεια, για $1 < x_1 < 2$, $\bar{u} = x_2$ η (112) δίνει

$$u(x_1, x_2) \leq x_2, \quad x - 1 \in [1, 2]$$

από όπου προκύπτει ότι δεν έχουμε οριακό στρώμα. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

□

Υποδείξεις ασκ. 2.13

$$\varepsilon x^4 + \varepsilon x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon x^4 + \varepsilon x^3 = (x - 1)^2$$

I. Λύσεις φραγμένες όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F(0, x) = \varepsilon x^4 + \varepsilon x^3 - (x - 1)^2 \Rightarrow x = 1 \text{ διπλή ρίζα}$$

Ανάλυση (ξεδίπλωμα της διπλής ρίζας): Θέτουμε $x - 1 = v := \varepsilon^{\frac{1}{2}}q$ (Διότι παρατηρούμε ότι για $v \sim 0$ έχουμε $\varepsilon \sim v^2$). Αντικατάσταση δίνει

$$\varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q)^4 + \varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q)^3 - \varepsilon q^2 = 0. \text{ Με απλοποίηση οδηγούμεθα:}$$

$$\bar{F}(\varepsilon, q) = (1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q)^4 + (1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q)^3 - q^2 = 0$$

$$\bar{F}(0, q) = 2 - q^2 = 0 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$\bar{F}_q(0, \pm\sqrt{2}) \neq 0$. Κατά συνέπεια παίρνουμε 2 λύσεις:

$$v_{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_{\pm}(\varepsilon), \quad q_{\pm}(0) = \sqrt{2} \Rightarrow x_{\pm}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_{\pm}(\varepsilon).$$

II. Λύσεις μη φραγμένες όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$

Εισάγουμε το μετασχηματισμό $x =: \frac{1}{w}$ ($x \approx \infty \Leftrightarrow w \approx 0$), οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

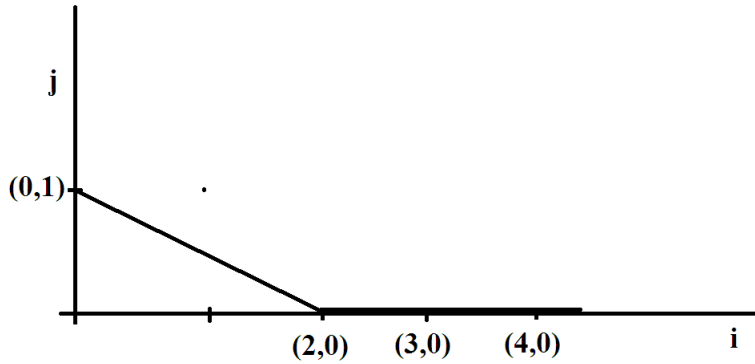
$$w^4 - 2w^3 + w^2 - \varepsilon w - \varepsilon = 0. \tag{114}$$

Καινούρια πληροφορία παίρνουμε μόνο για $w \approx 0$ (γιατί;).

Απάντηση: $x_{\pm}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_{\pm}(\varepsilon)$, $q_{\pm}(0) = \pm\sqrt{2}$

$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2} + \dots, \quad x_4(\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{2}{3} - \dots$$

Λεπτομέρειες Το πολύγωνο του Νεύτωνα έχει ως εξής:



Σχ. 30

Έχουμε λοιπόν 2 λύσεις $z^{\frac{1}{2}}v_+(\cdot)$, $z^{\frac{1}{2}}v_-(\cdot)$. Αντικατάσταση και απλοποίηση δίνει $zv^4 - 2z^{\frac{1}{2}}v^3 + v^2 - z^{\frac{1}{2}}v - 1 = 0$. Κατά συνέπεια $v_{\pm} = v_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$. Θέτουμε: $s := z^{\frac{1}{2}}$. Τότε

$$F(s, v) = s^2v^4 - 2sv^3 + v^2 - sv - 1 = 0,$$

$$F(0, v) = v^2 - 1, \Rightarrow v_{\pm}(0) = \pm 1.$$

$F_v(0, \pm 1) = \pm 2 \neq 0 \Rightarrow v_{\pm}(s)$ ορίζονται. Υπολογίζουμε τον επόμενο όρο

$$\frac{d}{ds} \left(s^2 v^4(s) - 2sv^3(s) + v^2(s) - sv(s) - 1 \right) = 0 ,$$

κατά συνέπεια για $s = 0$ παίρνουμε $v'(0) = \frac{2v^2(0) + 1}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{v_{\pm}(\sqrt{\varepsilon})} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{1}{v_{\pm}(0)} - \frac{1}{(v_{\pm}(0))^2} v'_{\pm}(0) \sqrt{\varepsilon} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\pm 1 - \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon} + \dots \right] = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2} + \dots \end{aligned}$$

□

Λύση άσκησης

A. $\phi(x, \varepsilon) = 0 \Rightarrow x = x(\varepsilon)$, $x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2$, $\phi(x_0, 0) = 0$.

$$\frac{d}{d\varepsilon} \phi(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \Rightarrow \phi_x x' + \phi_{\varepsilon} = 0 \Rightarrow x'(0) = -\frac{\phi_{\varepsilon}(x_0, 0)}{\phi_x(x_0, 0)}$$

Συνθήκη: $\phi_x(x_0, 0) \neq 0$.

Επόμενος όρος: $\frac{d}{d\varepsilon} [\phi_x(x(\varepsilon), \varepsilon)x'(\varepsilon) + \phi_{\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon)] = 0 \Rightarrow$

$$(\phi_{xx}x' + \phi_{x\varepsilon})x' + \phi_x x'' + \phi_{\varepsilon\varepsilon} = 0$$

$$x''(0) = \frac{-\phi_{\varepsilon\varepsilon}(x_0, 0) - x'(0)\{\phi_{xx}(x_0, 0)x'(0) + 2\phi_{\varepsilon x}(x_0, 0)\}}{\phi_x(x_0, 0)}$$

$$x_1 = x'(0) , \quad x_2 = \frac{x''(0)}{2!}$$

Εφαρμογή: $\phi(x, \varepsilon) = e^{\varepsilon x} - (x^2 - 1)$, $x_0 = \pm\sqrt{2}$.

□

Οι επόμενες ασκήσεις είναι επάνω στη θεωρία διακλάδωσης. Υπενθυμίζουμε τις ασκήσεις στις οποίες μελετάται η εξίσωση:

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (115)$$

ως προς x με λ παράμετρο στο \mathbb{R} . Εκεί εισάγουμε το σημείο διακλάδωσης (x_0, λ_0) στην περιοχή του οποίου ο αριθμός των πραγματικών λύσεων της (115) $n(\lambda)$ αλλάζει σε περιοχή του $\lambda = \lambda_0$. Παρατηρήσαμε ότι η αναγκαία συνθήκη ώστε το (x_0, λ_0) να είναι σημείο διακλάδωσης είναι: $F(x_0, \lambda_0) = 0$, $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$. Στις επόμενες ασκήσεις θεωρούμε το γενικότερο πρόβλημα όπου έχουμε περισσότερες παραμέτρους.

Εάν $\lambda = (b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ τότε μας ενδιαφέρει η μελέτη της επιφάνειας διακλάδωσης, δηλαδή της ταυτόχρονης επίλυσης των εξισώσεων

$$F(x, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) = 0, \quad b \in \mathbb{R}^k, x \in \mathbb{R}$$

$$F_x(x, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) = 0$$

2 εξισώσεων $k+1$ μεταβλητών αφαιρούν 2 βαθμούς ελευθερίας και κατά συνέπεια το σύνολο των λύσεων είναι $(k+1) - 2 = k - 1$ διαστάσεων. Εάν $k=2$ έχουμε καμπύλη και γενικότερα εάν $k > 2$ έχουμε υπερεπιφάνεια $k-1$ διαστάσεων.

Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρει η πολυωνυμική περίπτωση

$$F(x, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) = x^k - (b_0 + b_1x + \dots + b_{k-2}x^{k-2}) = 0 \quad (116)$$

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να δείξει ότι ο συντελεστής το x^{k-1} μπορεί να επιλεγεί ίσος με το μηδέν - μέσω μιας μεταφοράς).

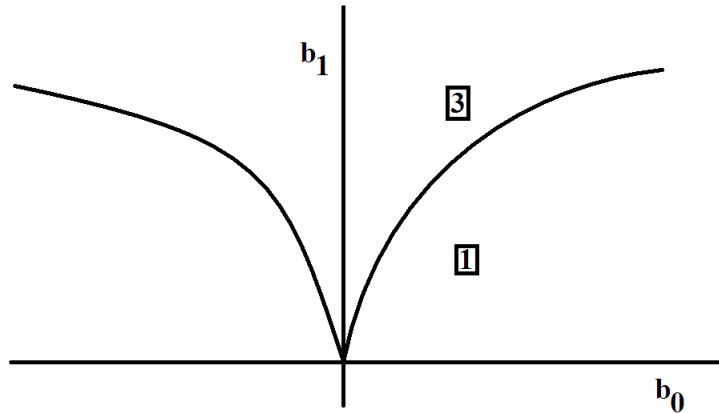
Παράδειγμα 4.8 ($k=3$)

$$(1) \quad x^3 - (b_0 + b_1x) = 0$$

$$(2) \quad 3x^3 - b_1 = 0$$

(2) $\Rightarrow b_1 = 3x^3$. Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$x^3 - (b_0 + 3x^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -2x^3.$$



Σχ. 31: $b_0 = -2x^3$, $b_1 = 3x^2$

Στο σχήμα έχουμε ότι η επιφάνεια διακλάδωσης είναι μια αιχμή που προκύπτει από την απαλοιφή του x . Στο χώρο των παραμέτρων b_0 , b_1 διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: από επάνω από την αιχμή έχουμε 3 λύσεις ενώ από κάτω έχουμε 1 λύση. Αυτή η πληροφορία για τον αριθμό των λύσεων προκύπτει ως εξής: Φιζάρουμε το b_0 και μετβάλλουμε το b_1 . Είναι σαφές ότι η εξίσωση

$$x^3 - (b_0 + b_1x) = x^3 - b_1 \left(\frac{b_0}{b_1} + x \right) = 0$$

για $b_1 \gg 1$ προσεγγίζεται από την $x^3 - b_1x = 0$, η οποία έχει 3 λύσεις. Εφόσον ο αριθμός των λύσεων αλλάζει μόνο εάν διασχίσουμε την επιφάνεια διακλάδωσης καταλήγουμε ότι από επάνω έχουμε 3 λύσεις. Παρόμοια επιχειρηματολογούμε για $b_1 \ll -1$ και έτσι καταλήγουμε στο παραπάνω σχήμα.

Στις επόμενες ασκήσεις μελετάμε την εξίσωση

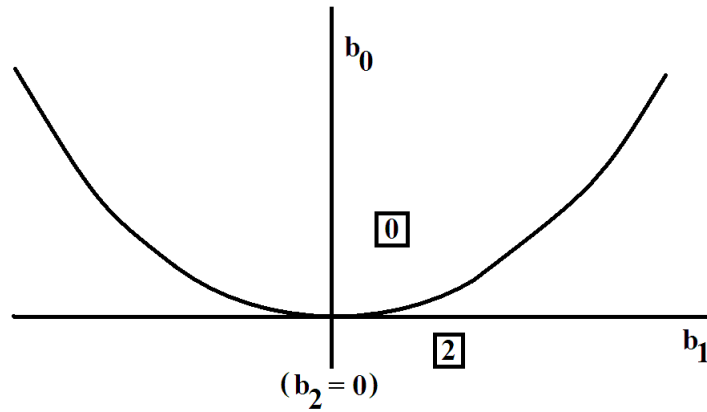
$$(1) \quad P(x, b_0, b_1, b_2) = x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0.$$

Η επιφάνεια διακλάδωσης δίνεται από την ταυτόχρονη επίλυση της (1) και της

$$(2) \quad \frac{\partial P(x, b_0, b_1, b_2)}{\partial x} = 4x^3 + 2b_2x + b_1 = 0.$$

Έχουμε $4-2=2$ βαθμούς ελευθερίας. Κατά συνέπεια στο χώρο των παραμέτρων (b_0, b_1, b_2) η επιφάνεια διακλάδωσης είναι πραγματική επιφάνεια. Στις επόμενες ασκήσεις μελετάμε κάποιες τομές αυτής της επιφάνειας.

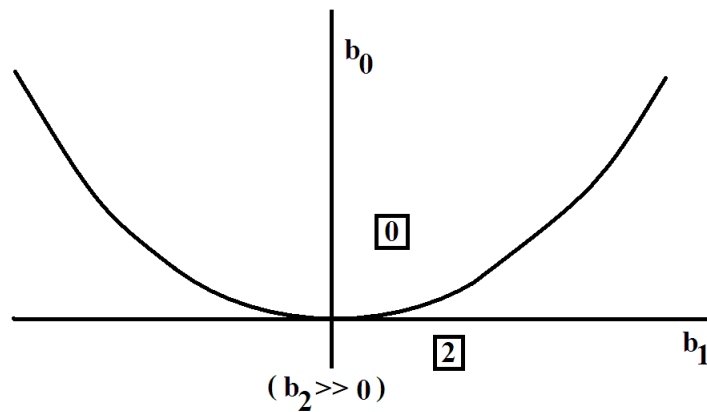
Άσκηση 4.9



$$\text{Σχ. 32: } b_0 = 3 \left(\frac{b_1}{4} \right)^{\frac{4}{3}}$$

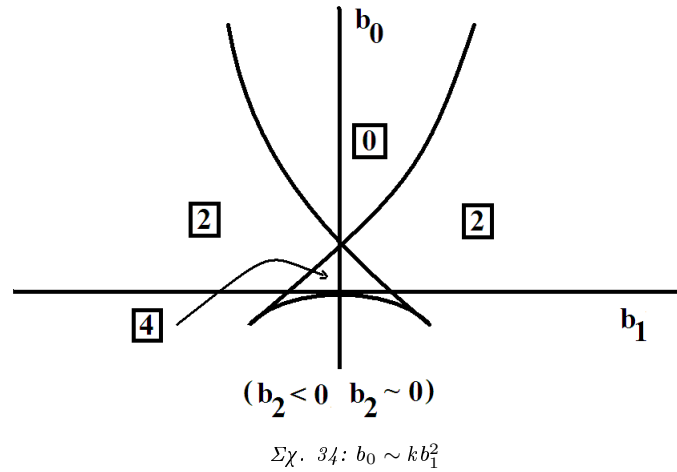
Δείξτε την παραπάνω τομή, $b_2 = 0$, φιζαρισμένο.

Άσκηση 4.10

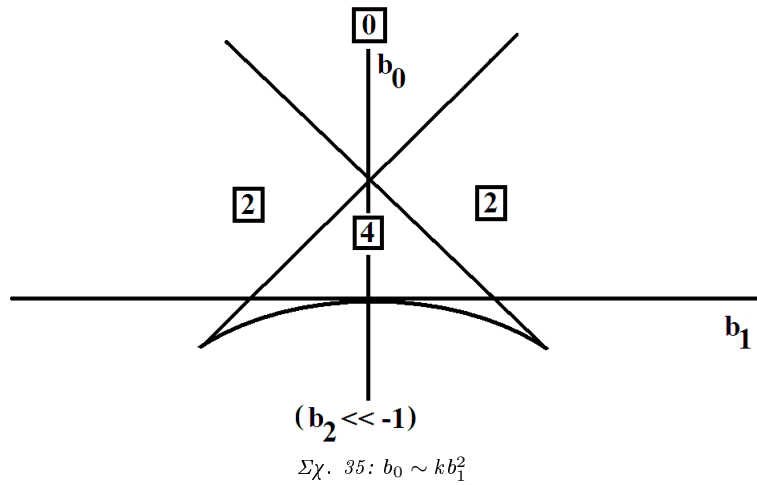


$$\text{Σχ. 33: } b_0 \sim k b_1^2$$

Άσκηση 4.11 (Ουρά χελιδονιού I)



Άσκηση 4.12 (Ουρά χελιδονιού II)



Υποδείξεις για τις ασκήσεις (Γεωμετρική λύση)

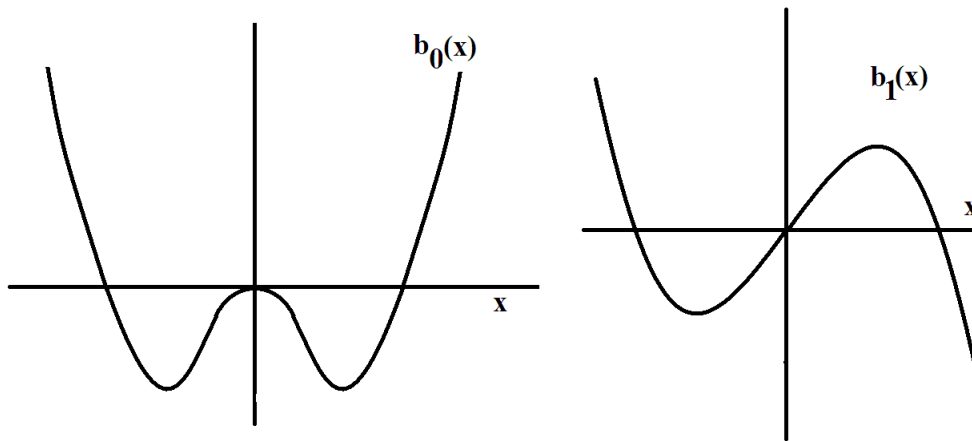
θέσατε: $p_1(x) = x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$

$p_2(x) = 4x^3 + 2b_2x + b_1 = 0, \quad b_2 < 0$

$p_1(x) = p_2(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) - xp_2(x) = p_2(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b_0 = 3x^4 + b_2x^2 \\ b_1 = -4x^3 - 2b_2x \end{cases} \quad (117)$$

Οι εξισώσεις (117) είναι παραμετρική μορφή της καμπύλης (b_0, b_1) . Είναι χρήσιμα τα κάτω γραφήματα στην ανάλυση του προβλήματος.

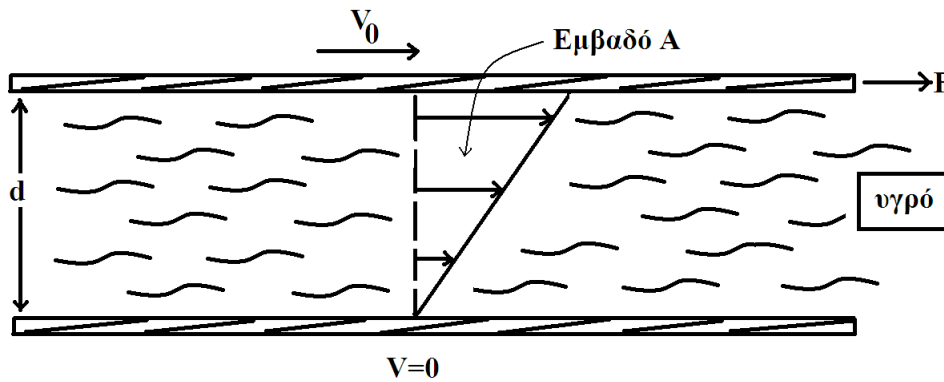


Σχ. 36

□

Σχόλια για τη φυσική σημασία του ιξώδους και του αριθμού Reynolds.

a) Θεωρείστε το εξής πείραμα. Έχουμε δύο στερεές επίπεδες επιφάνειες με υγρό ενδιάμεσα όπως στο σχήμα



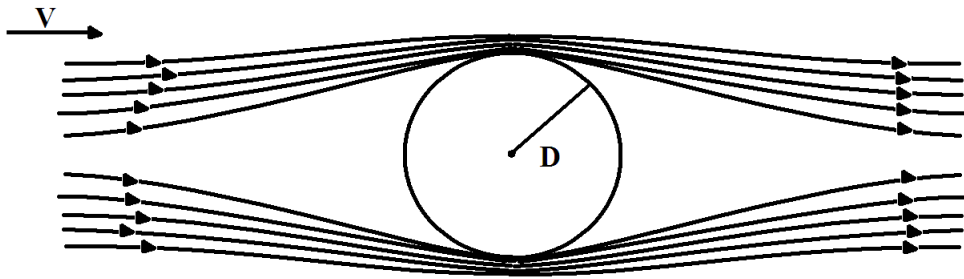
Σχ. 37

Κρατάμε την κάτω επιφάνεια ακίνητη ενώ κινούμε την από πάνω με μια μικρή ταχύτητα v_0 . Η δύναμη που χρειάζεται για να συντηρήσει αυτή την κίνηση είναι ανάλογη του εμβαδού των επιφανειών και του $\frac{v_0}{d}$, όπου d η απόσταση μεταξύ των επιφανειών. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v_0}{d}$$

Η σταθερά αναλογίας εδώ δεν είναι τίποτα άλλο από το συντελεστή ιξώδους που επιλέγαμε στην σχετική παράγραφο.

b) Θεωρείστε τώρα ένα άλλο πείραμα: την ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού ταχύτητας V μακριά γύρω από έναν κύλινδρο,



Σχ. 38

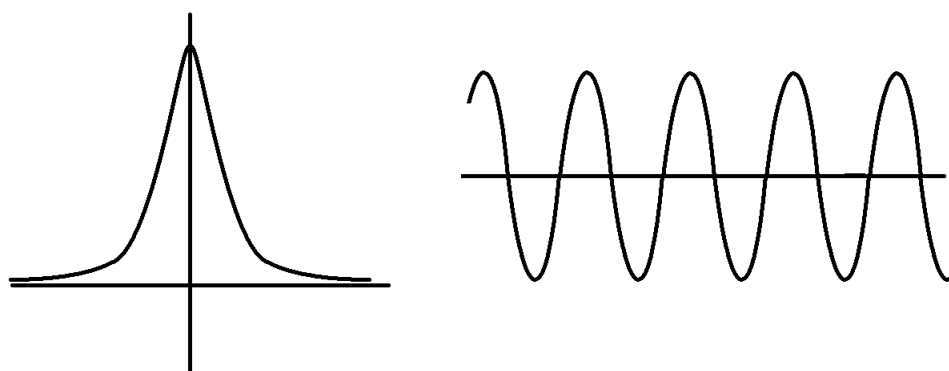
Έχουμε 4 παραμέτρους στο πρόβλημα: μ , ρ , D , και V . Το αναμενόμενο είναι ότι για να προσδιοριστεί η ροή θα χρειαστεί να γνωρίζουμε τις τιμές όλων αυτών των παραμέτρων. Είναι εντυπωσιακό ότι για να προσδιοριστεί η ροή χρειάζεται μια μόνο παράμετρος που ορίζει τον αριθμό Reynolds

$$Re = \frac{\rho}{\mu} VD.$$

□

5 Ο Μετασχηματισμός του Liouville - Η Μέθοδος WKB

Στα προβλήματα ιδιόμορφων διαταραχών έχουμε χονδρικά δύο ειδών φαινόμενα:



(I) Φαινόμενα Συγκέντρωσης

(II) Φαινόμενα Ταλάντωσης

Σχ.39

Το οριακό στρώμα είναι της κατηγορίας (I). Το απλό παράδειγμα

$$\varepsilon^2 y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \tag{118}$$

που έχει λύση

$$y_\varepsilon(x) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \left[e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x-2}{\varepsilon}} \right]$$

αντιπροσωπεύει την (I). Παρατηρούμε ότι η (118) μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση τείνει στην δ του Dirac:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x) \chi_{[0,1]}(x) = \delta(x)$$

($\chi_{[0,1]}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[0,1]$)

Απλό παράδειγμα ταλάντωσης (κατηγορία (II)) παρέχεται από το πρόβλημα

$$\varepsilon y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \tag{119}$$

που έχει λύση αν $\varepsilon \neq (n\pi)^{-2}$

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\sin\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (120)$$

Φυσικά είναι δυνατόν να συνυπάρχουν και τα δύο φαινόμενα. Η εξίσωση του Airy προσφέρει ένα τέτοιο παράδειγμα,

$$\varepsilon^2 y'' - xy = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (121)$$

Πράγματι για $x \in [-1, 0)$ η (121) συμπεριφέρεται σαν την (119), ενώ για $x \in (0, 1]$ σαν την (120).

Ορμώμενοι από την εμφάνιση των εκθετικών (πραγματικών ή φανταστικών) τουλάχιστον στην περίπτωση τελεστών με σταθερούς συντελεστές, ο Liouville προτείνει τον μετασχηματισμό

$$y(x) = e^{\frac{S(x)}{\delta}}$$

για τη μελέτη του

$$\varepsilon^2 y'' = Q(x)y,$$

όπου $\delta = \delta(\varepsilon)$ υπό προσδιορισμό.

Παράδειγμα 5.1 (Εξίσωση του Schrödinger)

$$\varepsilon y'' = Q(x)y, \quad Q(x) \neq 0$$

Αντικαθιστούμε

$$y(x) = e^{\frac{1}{\delta} S(x)} \sim e^{\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)} \sim e^{\frac{1}{\delta} (S_0(x) + \delta S_1(x) + \dots)}$$

Έχουμε

$$y' \sim \left(\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S'_n \right) \exp \left(\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n \right)$$

$$y'' \sim \left[\left(\frac{1}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S''_n \right) + \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S''_n \right] \exp \left(\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n \right)$$

Αντικατάσταση δίνει

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} S_0'^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\delta} S_0' S_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_0'' + \dots = Q(x)$$

Ο μεγαλύτερος όρος στο 1ο μέλος είναι $\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}$ που πρέπει να εξισορροπήσει το 2ο μέλος.

Κατά συνέπεια $\delta \sim \varepsilon$ και παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases} S_0'' = Q \\ 2S_0' S_1' + S_0'' = 0 \\ 2S_0' S_n' + S_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{\infty} S_j' S_{n-j}' = 0, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (122)$$

Η (122)(i) λέγεται εξίσωση της εικόνας, ορολογία που προέρχεται από τη γεωμετρική οπτική. Η λύση της είναι

$$S_0(x) = \pm \int_a^b \sqrt{Q(t)} dt \quad (123)$$

Η (122)(ii) λέγεται εξίσωση μεταφοράς. Η λύση της προκύπτει ως εξής:

$$2S_0' S_1' + S_0'' = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1' = -\frac{1}{2} \frac{S_0''}{S_0'}$$

από όπου ολοκληρώνοντας, modulo κάποια σταθερά, παίρνουμε

$$S_1 = -\frac{1}{2} \ln S_0' \stackrel{(123)}{=} -\frac{1}{2} \sqrt{Q(x)} = \ln [Q(x)]^{-\frac{1}{4}}$$

Κατά συνέπεια λαμβάνοντας υπόψη τους δύο μόνο όρους έχουμε μια προσέγγιση

$$\begin{aligned} y_{WKB}(x) \sim c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt \right] + \\ + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt \right] \end{aligned} \quad (124)$$

όπως το $\varepsilon \rightarrow 0$,

c_1, c_2 σταθερές και a κάποιο σημείο.

Εφαρμογές της (124)

$$a) \quad \varepsilon^2 y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

εδώ $Q(x) = -1$, $S_0(x) = \pm ix$, $S_1(x) \equiv 0$, $y \sim e^{\pm \frac{1}{\varepsilon} ix}$, άρα η γενική λύση είναι

$$y_{WKB} = c_1 \sin \frac{x}{\varepsilon} + c_2 \sim \frac{x}{\varepsilon},$$

από όπου με χρήση των συνοριακών συνθηκών παίρνουμε την (120).

Είναι εντυπωσιακό ότι παίρνοντας μόνο έναν όρο η WKB προσέγγιση σε αυτή την περίπτωση δίνει την ακριβή λύση!

Εξαγωγή της προσέγγισης του οριακού στρώματος

$$(*) \quad \varepsilon y'' + a(x) + y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = A, \quad y(1) = B$$

Υπόθεση: $a(x) > 0$ στο $[0,1]$.

Επιλέγουμε 2 όρους του αναπτύγματος

$$y \sim e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1}$$

$$y' \sim e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right)$$

$$y'' \sim e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} S_0'' + S_1'' \right]$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση και απλοποίηση των εκθετικών δίνει

$$0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} S_0'' + \frac{1}{\varepsilon^2} S_0'^2 + S_1'^2 + S_1' + \frac{2}{\varepsilon} S_0' S_1' \right] + a \left[\frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right] + b$$

Οδηγούμαστε λοιπόν εξισώνοντας συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ε

$$(i) \quad \varepsilon^{-1} : \quad S_0' + a S_0' = 0$$

$$(ii) \quad \varepsilon^0 : \quad S_0'' + 2S_0'S_1' + aS_1' + b = 0$$

$$(i) \Rightarrow S_0' = 0, \quad S_0' = -a$$

Η πρώτη επιλογή δίνει στην (ii)

$$aS_1' + b = 0 \Rightarrow S_1 = - \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi$$

Η δεύτερη επιλογή δίνει

$$-a + 2(-a)S_1' + aS_1' + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$a' + aS_1' = b \Leftrightarrow$$

$$S_1' = \frac{b}{a} - \frac{a'}{a} \Leftrightarrow S_1 = \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \ln a(x).$$

Πάιρνουμε τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$y_1(x) \sim e^{\frac{S_0+S_1}{\varepsilon}+S_1} = e^{S_1(x)} = e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi}$$

$$y_2(x) \sim e^{\frac{S_0+S_1}{\varepsilon}+S_1} = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \ln a(\xi)}$$

$$= \frac{1}{a(x)} e^{[\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi]}.$$

Κατά συνέπεια η γενική λύση είναι ο γραμμικός συνδυασμός

$$y(x) \sim c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Προσδιορίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2 :

$$A = y(0) = c_1 + \frac{c_2}{a(0)} \tag{125}$$

$$B = c_1 e^{-\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} + \frac{c_2}{a(1)} e^{[\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 a(\xi) d\xi]}$$

Αγνοώντας τον αμελητέο όρο τάξης $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ (η συνβιβαστότητα αυτή θα επιβεβαιωθεί εκ των υστέρων) έχουμε

$$B = c_1 e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} + \frac{c_2}{a(1)} \quad (126)$$

Από τις (125), (126) παίρνουμε

$$y_{WKB}(x) = B e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} + \frac{a(0)}{a(x)} \left[A - B e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} \right] e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi}$$

Ο 2ος όρος συνεισφέρει μόνο εάν $x = O(\varepsilon)$. Κατά συνέπεια έχουμε την απλοποιημένη προσέγγιση

$$y_{WKB}(x) = B e^{\left[\int_x^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi \right]} + \left[A - B e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} \right] e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}}$$

Άσκηση 5.2 Δείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon = \delta \quad (\text{Dirac συνάρτηση,})$$

όπου y_ε όπως στην (118). Δηλαδή επαληθεύσατε ότι για κάθε $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχή συνάρτηση, έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x y_\varepsilon(x) \phi(x) dx = \phi(0).$$

$$\left(\text{Υπόδειξη: } \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x y_\varepsilon(x) dx \rightarrow 1 \text{ όπως το } \varepsilon \rightarrow 0 \right)$$

Άσκηση 5.3 Τι συμβαίνει με την (119) στην περίπτωση όπου $\varepsilon = (n\pi)^{-2}$; (Υπόδειξη: βλ. 9.4 στο [AK])

Άσκηση 5.4 Θεωρείστε το πρόβλημα (*), εφαρμογή της (124). Θα υποθέσουμε τη λύση στη γενικότερη μορφή

$$y = e^{\frac{1}{\delta}S(x)}, \quad S(x) = S_0(x) + \delta S_1(x)$$

και κάνοντας χρήση της αρχής εξισορρόπησης θα δείξουμε ότι $\delta = \varepsilon$. Δείξτε ότι αντικατάσταση στην (*) οδηγεί στην

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} S_0'' + \frac{2\varepsilon}{\delta^2} S_0' + \frac{\varepsilon}{\delta} S_0'' + \frac{a(x)}{\delta} S_0' + a(x) S_1' + b(x) + \dots = 0$$

όπου οι ... υποδηλώνουν όρους αμελητέους. Από τους πρώτους 3 όρους ο μεγαλύτερος είναι ο $\frac{\varepsilon}{\delta^2} S_0''$ που θα πρέπει να εξισορροπήσει τον μεγαλύτερο από τους υπόλοιπους 3 όρους:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \varepsilon \sim \delta$$

Χάριν απλότητας επιλέγουμε $\varepsilon = \delta$.

Υποδείξεις για παρόμοιες ασκήσεις

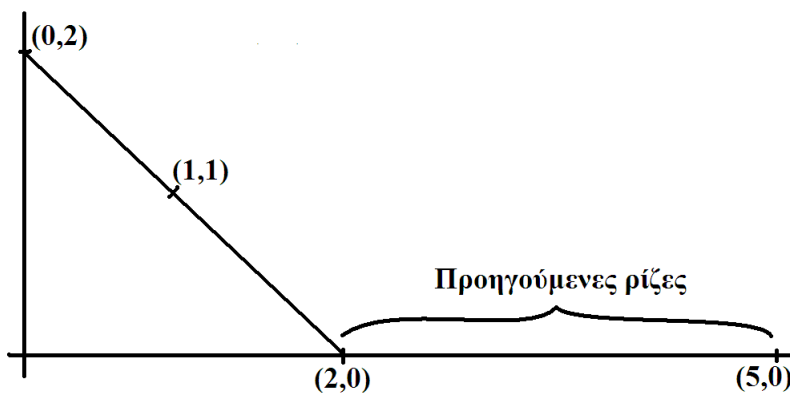
$$1. \varepsilon^2 x^5 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0 \Rightarrow \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 = x^3 - 8 \Rightarrow$$

$$I. F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8) = 0. F(0, x) = 0 \Rightarrow x = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$F_x(0, x) \Big|_{x=2e^{\frac{2k\pi i}{3}}} \neq 0$$

$$\text{Πραγματική } x = 2 \Rightarrow x_1(\varepsilon) = 2 + 2\varepsilon + \dots$$

$$II. x = \frac{1}{w} \Rightarrow \varepsilon^2 \left(\frac{1}{w}\right)^5 - \varepsilon \left(\frac{1}{w}\right)^4 - \left(\frac{1}{w}\right)^3 + 8 \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon w - w^2 + 8w^5 = 0$$



Σχ. 40

$$\alpha_1 = 1, n_1 = 1 \Rightarrow w = zv$$

$$F(z, v) = z^2 - z^2v - z^2v^2 + 8z^5v^5 = 0,$$

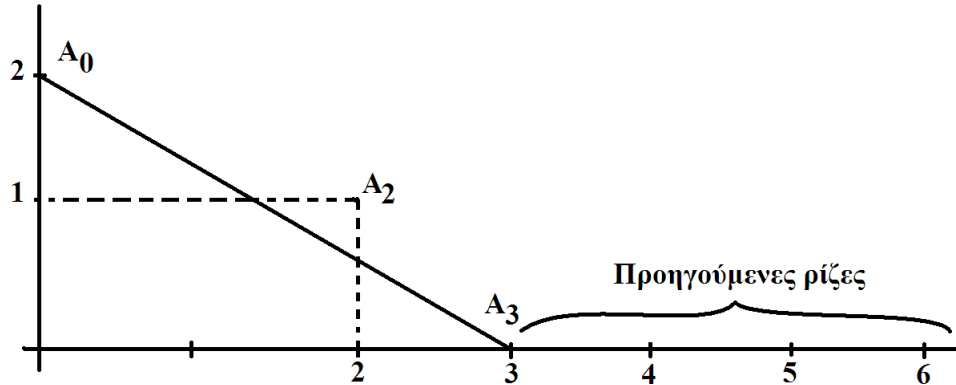
$$F(0, v) = 1 - v - v^2 = 0 \Rightarrow v_{1,2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$w = z \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + cz \right] \Rightarrow x = \frac{1}{\varepsilon \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + c\varepsilon \right]} = \frac{1}{A\varepsilon} - \frac{c}{A^2} + \dots$$

$$2. \quad \varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8), \quad F(0, x) = 0 \Rightarrow x = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\text{Πραγματική ρίζα } x = 2 \Rightarrow x_1(\varepsilon) = 2 - \frac{4\varepsilon}{3} + \dots$$

$$II. \quad x = \frac{1}{w} \Rightarrow 8w^6 - w^3 - \varepsilon w^2 + \varepsilon^2 = 0$$



Σχ. 41

$$L_1 = \frac{2}{3}, \quad n = 3.$$

$$A_0 = (0, 2), \quad A_2 = (2, 1), \quad A_3 = (3, 0), \quad A_6 = (6, 0)$$

Βιβλιογραφία

- [AK] Αλικάκος, Καλογερόπουλος, *Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, 3η ανατύπωση, 2007.
- [A] Arnold, *Ordinary differential equations*, Springer - Verlag, 1992.
- [BO] Bender & Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Asymptotic methods and perturbation theory*, Springer.
- [CH] Chow & Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer, 1982.
- [E] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate studies in advanced mathematics, AMS, 19.
- [Fe] Feynman, Leighton, Souds, *The Feynman Lecture on Physics*, Adison - Wesley 2117, Vol. II.
- [F] Fife, *A gentle introduction to the physics and mathematics of incompressible flow*, Lecture notes (Fife's page, Mathematics Department, University of Utah).

- [H] Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer Lecture notes, #840.
- [HS] Hirsch & Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press.
- [L] J. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Απόδοση στα Ελληνικά Β. Δουγαλής, Δ. Μητσούδης, Ι. Στρατής, 2002.
- [N] Nishiura, *Dynamics of patterns*.
- [W] Walker, *Algebraic curves*.