Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Αλγεβρών Banach!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH582/

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19, Μέρος Δεύτερο

Περιεχόμενα

Μεταθετικές C^* άλγεβρες

Να χαρακτηρίσουμε ως άλγεβρες Banach τις άλγεβρες της μορφής

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : f \text{ συνεχής}\},$$

όπου K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος ή γενικότερα

$$C_0(X) := \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \; \exists K_f \subseteq X \text{ συμπαγές με } |f(t)| < \varepsilon \; \forall t \notin K_f\}$$

όπου X τοπικά συμπαγής και Hausdorff.

Παρατήρηση $C(K) = C_{\mathbb{R}}(K) + iC_{\mathbb{R}}(K)$ και
$\forall f \in C_{\mathbb{R}}(K)$, $f = f_+ - f_-$ όπου $f_\pm \geq 0$.

C^* άλγεβρες

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια (μιγαδική) άλγεβρα $\mathscr{A}$ *είναι μια απεικόνιση*

$$x \to x^* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} (x+y)^* &= x^* + y^* \\ (\lambda x)^* &= \bar{\lambda} x^* \\ (xy)^* &= y^* x^* \\ (x^*)^* &= x \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathscr{A}$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$.
Μια *C^* άλγεβρα* $\mathscr{A}$ *είναι μια άλγεβρα Banach με ενέλιξη που έχει την ιδιότητα*

$$C^* : \quad \|x^* x\| = \|x\|^2 \qquad (x \in \mathscr{A}).$$

C^* άλγεβρες: Παραδείγματα

1. Η άλγεβρα Banach $\mathbb{C}$ είναι C^* άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $\lambda \to \bar{\lambda}$. Κάθε μιγαδική διαιρετική C^* άλγεβρα είναι ισομετρικά ισόμορφη με την $\mathbb{C}$ (Gelfand-Mazur).
2. Η άλγεβρα $C(K)$ είναι C^* άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $f \to f^*$, όπου $f^*(t) := \overline{f(t)}$ $(t \in K)$. Θα δείξουμε (Θεώρημα Gelfand-Naimark) ότι κάθε μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με κάποιον $C(K)$.
3. Η $A(\mathbb{D})$ δεν είναι C^*-άλγεβρα.
4. Αν X είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff (πχ. $X = \mathbb{R}^d$), η άλγεβρα Banach $C_0(X)$ είναι C^* -άλγεβρα με την ενέλιξη $f \to \bar{f}$.
5. Το ίδιο για την άλγεβρα $C_b(X)$ των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$.
6. Το ίδιο για τις άλγεβρες Banach $\ell^\infty(\Gamma)$ και $L^\infty(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$.
7. Η άλγεβρα $C_c(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα δεν είναι άλγεβρα Banach. Είναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνή *- υπάλγεβρα (μάλιστα ιδεώδες) της $C_0(\mathbb{R})$. (Δες και το αρχείο `Cc(X).pdf`.)

C^* άλγεβρες: Παραδείγματα

8. Η άλγεβρα $\mathscr{B}(H)$ όλων των γραμμικών και φραγμένων τελεστών $T : H \to H$ (H: Hilbert) είναι C^*-άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $T \to T^*$ που ορίζεται καλά από την σχέση

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in H).$$

9. Κάθε υπάλγεβρα $\mathscr{A}$ της $\mathscr{B}(H)$ που είναι $\|\cdot\|$-κλειστή και αυτοσυζυγής (δηλ. $T \in \mathscr{A} \Rightarrow T^* \in \mathscr{A}$) είναι C^*-άλγεβρα. Πχ. η άλγεβρα $\mathscr{K}(H)$ των συμπαγών τελεστών. Θα δείξουμε (Θεώρημα Gelfand-Naimark) ότι κάθε C^* άλγεβρα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με κάποιαν C^*-υπάλγεβρα κάποιας $\mathscr{B}(H)$.

10. Αν $H_0 \subset H$ μη τετριμμένος κλειστός υπόχωρος, η άλγεβρα όλων των $T \in \mathscr{B}(H)$ που αφήνουν τον H_0 αναλλοίωτο δεν είναι C^*-άλγεβρα.

Υπενθύμιση: Ο χώρος των χαρακτήρων

Χαρακτήρας ή *πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή* ϕ σε μία άλγεβρα $\mathscr{A}$ λέγεται ένας μη μηδενικός μορφισμός $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathscr{A}$ συμβολίζουμε $\mathfrak{M}(\mathscr{A})$ ή $\sigma(\mathscr{A})$.

Όταν η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$:
$\phi \in \mathfrak{M}(\mathscr{A}) \iff \phi$ πολλ/στική γραμμ. μορφή και $\phi(\mathbf{1}) = 1$.

Αν $\phi \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$, τότε $\phi(a) \in \sigma(a)$, άρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.
Έπεται ότι $\|\phi\| \leq 1$, και αφού $\phi(\mathbf{1}) = 1$ ισχύει $\|\phi\| = 1$.

Υπενθύμιση: Ο χώρος των χαρακτήρων

Ορισμός (Υπενθύμιση)

Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής- (w^*) τοπολογία του τοπολογικού δυικού X^* είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του X: Αν (ϕ_i) είναι δίκτυο στον X^* και $\phi \in X^*$,*

$$\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi \iff \phi_i(x) \to \phi(x) \quad \forall x \in X.$$

Η w^* είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του $\mathbb{C}^X$ στον X^*.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα. Με τον περιορισμό της ασθενούς- τοπολογίας, το σύνολο $\mathfrak{M}(\mathscr{A})$ των χαρακτήρων είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.*

(Δες π.χ. την 2.4 (και 2.3) στις σημειώσεις του R. Levene εδώ).

Παράδειγμα (Χωρίς μονάδα) Αν $\mathscr{A} = C_0(\mathbb{R})$ και $\phi_n : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$: $\phi_n(f) = f(n)\ \forall f \in \mathscr{A}$, τότε $\phi_n \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$ και $w^*\text{-}\lim_n \phi_n = 0 \notin \mathfrak{M}(\mathscr{A})$.

Μεταθετικές C^*-άλγεβρες: Θεώρημα Gelfand-Naimark

Μετασχηματισμός Gelfand $\mathscr{G} : \mathscr{A} \to C(\mathfrak{M}(\mathscr{A}), w^*) : a \to \hat{a}$
όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, $\phi \in \mathfrak{M}$.

Θεώρημα

Αν $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathscr{G} : \mathscr{A} \to C(\mathfrak{M}(\mathscr{A}), w^*)$ είναι ισομετρία επί και διατηρεί την ενέλιξη, δηλαδή $(\mathscr{G}x)^* = \mathscr{G}(x^*)$ για κάθε $x \in \mathscr{A}$.

Χρειάζονται τα λήμματα:

Λήμμα

(ι) Αν $x \in \mathscr{A}$ και $x = x^*$, τότε $\phi(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $\phi \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$.
(ιι) Για κάθε $y \in \mathscr{A}$ και $\phi \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$, ισχύει $\phi(y^*) = \overline{\phi(y)}$.

Παρατήρηση Το συμπέρασμα του Λήμματος ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ που έχει την ιδιότητα $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$. (Ισχύει χωρίς μεταθετικότητα της $\mathscr{A}$.)

Λήμμα

Για κάθε $x \in \mathscr{A}$ ισχύει $\|x\| = \rho(x)$.

Υπενθύμιση: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος (ή, γενικότερα, συμπαγής χώρος Hausdorff) και έστω $C(K)$ η (μιγαδική) άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum). Έστω

$$\mathscr{B} \subseteq C(K)$$

με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι (μιγαδική) υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathscr{B}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathscr{B} \Rightarrow \bar{f} \in \mathscr{B}$).

Τότε η $\mathscr{B}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.

(Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf` ή την 4.2 στις σημειώσεις του R. Levene εδώ).

Μοναδοποίηση

Αν $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ είναι C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathscr{A}_1 := \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}$ εφοδιάζεται με την ενέλιξη
$(x,\lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x,\lambda) \in \mathscr{A}_1)$.
Με τη νόρμα

$$\|(x,\lambda)\| := \sup\{\|xy + \lambda y\| : y \in \mathscr{A}, \|y\| \leq 1\}$$

η $\mathscr{A}_1$ γίνεται C^*-άλγεβρα.

Μεταθετικές C^*-άλγεβρες: Θεώρημα Gelfand-Naimark

Υπενθύμιση Αν $\mathscr{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα, τότε

$$\mathfrak{M}(\mathscr{A}_1) \simeq \mathfrak{M}(\mathscr{A}) \cup \{\phi_\infty\}$$

όπου $\phi_\infty(a + \lambda \mathbf{1}) = \lambda$ (οπότε $\ker \phi_\infty = \mathscr{A}$)

Θεώρημα

*Αν $\mathscr{A}$ μεταθετική C^*-άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand $x \to \hat{x}$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathscr{A}$ επί της $C_o(\mathfrak{M}(\mathscr{A}), w^*)$.*
Η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο $\mathfrak{M}(\mathscr{A})$ είναι w^*-συμπαγής.

Εξάρτηση του φάσματος από την άλγεβρα [1]

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ κλειστή υπάλγεβρα που περιέχει την μονάδα της $\mathscr{A}$. Τότε

$$G_{\mathscr{B}} \subseteq G_{\mathscr{A}} \cap \mathscr{B}.$$

και

$$b \in \mathscr{B} \;\Rightarrow\; \sigma_{\mathscr{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathscr{B}}(b).$$

Ισότητα όμως σ΄ αυτές τις σχέσεις εν γένει δεν ισχύει:

Παράδειγμα

$$\mathscr{A} := C(\mathbb{T}) = \{f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \ \textit{συνεχής}\}$$
$$\mathscr{B} = \{f \in \mathscr{A} : \hat{f}(-k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

(Εδώ $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$*). Αν* $\zeta \in \mathscr{A}$ *είναι η συνάρτηση* $\zeta(e^{it}) = e^{it}$*, τότε* $\zeta \in \mathscr{B}$ *και η* ζ *έχει αντίστροφο, που όμως δεν ανήκει στην* $\mathscr{B}$*.*

[1] Αποδείξεις στο `depspec.pdf`.

Εξάρτηση του φάσματος από την άλγεβρα

Έστω $\mathscr{A}$ μια άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$. Ο *μεταθέτης* $\mathscr{S}'$ του $\mathscr{S}$ είναι το σύνολο

$$\mathscr{S}' := \{a \in \mathscr{A} : as = sa \forall s \in \mathscr{S}\}.$$

Πρόταση

Αν $\mathscr{A}$ είναι [νορμαρισμένη] άλγεβρα με μονάδα και $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ μεταθετικό σύνολο, τότε η $\mathscr{B} := \mathscr{S}''$ είναι [κλειστή] μεταθετική υπάλγεβρα που περιέχει την μονάδα της $\mathscr{A}$ και ικανοποιεί

$$G_{\mathscr{B}} = G_{\mathscr{A}} \cap \mathscr{B}$$

$$\textit{και} \;\; b \in \mathscr{B} \Rightarrow \sigma_{\mathscr{A}}(b) = \sigma_{\mathscr{B}}(b).$$

Ανεξαρτησία του φάσματος από την άλγεβρα

Πρόταση

Αν $\mathscr{A}$ είναι C άλγεβρα με μονάδα και $\mathscr{B}$ κλειστή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα που περιέχει την μονάδα της $\mathscr{A}$, τότε*

$$G_{\mathscr{B}} = G_{\mathscr{A}} \cap \mathscr{B}$$

$$\text{και } \; b \in \mathscr{B} \Rightarrow \sigma_{\mathscr{A}}(b) = \sigma_{\mathscr{B}}(b).$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί το

Λήμμα

Έστω $\mathscr{C}$ μεταθετική C άλγεβρα με μονάδα.*
Αν $a = a^* \in \mathscr{C}$, τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(Θα γενικευθεί οσονούπω.)

Ανεξαρτησία του φάσματος από την άλγεβρα

Παρατήρηση Το συμπέρασμα της Πρότασης δεν ισχύει εν γένει σε άλγεβρες Banach με ισομετρική ενέλιξη, ούτε σε ενελικτικές άλγεβρες με νόρμα που ικανοποιεί την ιδιότητα C*.

Παράδειγμα

Θεωρούμε την (μεταθετική) C άλγεβρα* $\mathscr{A} = C([0,1])$ *και την *-υπάλγεβρα της* $\mathscr{B}$ *που αποτελείται από όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση* $p \in \mathscr{B}$ *όπου* $p(t) = t^2 + 1$ *αντιστρέφεται στην* $\mathscr{A}$. *Αλλά βεβαίως η αντίστροφή της δεν ανήκει στην* $\mathscr{B}$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε την (μεταθετική) άλγεβρα Banach $\mathscr{A} = C(\mathbb{T})$ *εφοδιασμένη με την ενέλιξη* $f \to f^{\#}$ *όπου* $f^{\#}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ *και την αυτοσυζυγή υπάλγεβρα της* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ *όπως στο Παράδειγμα 1 .Η συνάρτηση* $\zeta \in \mathscr{B}$ *όπου* $\zeta(z) = z$ *αντιστρέφεται στην* $\mathscr{A}$, *αλλά η αντίστροφή της δεν ανήκει στην* $\mathscr{B}$.

Ανεξαρτησία του φάσματος από την άλγεβρα

Πόρισμα

Αν $\mathscr{A}$ είναι C^* άλγεβρα και $a \in \mathscr{A}$ τότε
(α) Αν το a είναι φυσιολογικό στοιχείο (δηλ. $aa^* = a^*a$), τότε
$$\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$
(β) Αν $a = a^* \in \mathscr{A}$, τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
(γ) Αν το a είναι unitary, δηλ. $a^*a = aa^* = \mathbf{1}$, τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$.

Παρατήρηση

Σε μη μεταθετικές C^* άλγεβρες, δεν αρκεί η σχέση $a^*a = \mathbf{1}$ για να συμπεράνουμε ότι $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$. Παράδειγμα: αν $a \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ με $a(e_n) = e_{n+1}$ για κάθε n, τότε $a^*a = \mathbf{1}$ αλλά ισχύει $\sigma(a) = \overline{\mathbb{D}}$.

Πόρισμα

Κάθε C^* άλγεβρα είναι ημιαπλή.

Παρατήρηση

Σε μια μη μεταθετική C^* άλγεβρα, η σχέση $\|a\| = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}$ δεν ισχύει για αυθαίρετα στοιχεία της $\mathscr{A}$. Μπορεί για παράδειγμα να ισχύει $a^2 = 0$ και $a \neq 0$ (Πρβγ: $a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in M_2(\mathbb{C})$). Παρόλα αυτά,

Παρατήρηση

Η νόρμα σε μια C^* άλγεβρα καθορίζεται από την αλγεβρική της δομή: για κάθε $x \in \mathscr{A}$ έχουμε

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x^*x)\}.$$

Πρόταση (Αυτόματη συνέχεια μορφισμών)

*Αν $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ είναι C^* άλγεβρες με μονάδα[2] και $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ είναι *-μορφισμός, τότε ο ϕ είναι συνεχής και μάλιστα $\|\phi\| \leq 1$. Αν ο ϕ είναι 1-1, τότε είναι ισομετρία.*

Απόδειξη Δες και το αρχείο `morph.pdf`.

---

[2] το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για C^* άλγεβρες χωρίς μονάδα

Πρόταση (Μοναδικότητα της νόρμας)

Αν $\mathscr{A}$ είναι μία άλγεβρα με ενέλιξη, τότε ορίζεται το πολύ μία νόρμα στην $\mathscr{A}$ ως προς την οποία είναι C^* άλγεβρα.

Πρόταση

Έστω a φυσιολογικό στοιχείο μιας C^* άλγεβρας με μονάδα.
Έστω $K := \mathfrak{M}(C^*(1,a))$ και $\mathscr{G} : C^*(1,a) \to C(K)$ η αναπαράσταση Gelfand της $C^*(1,a)$.
Η απεικόνιση $\hat{a} := \mathscr{G}(a) : K \to \mathbb{C}$ απεικονίζει ομοιομορφικά το K επί του $\sigma(a)$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός

Θεώρημα (Συναρτησιακός Λογισμός)

*Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα, $a \in \mathscr{A}$ φυσιολογικό στοιχείο και $S = \sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει μοναδικός *-μορφισμός*

$$\Phi : C(S) \to \mathscr{A}$$

με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Phi(\iota) = a$ όπου $\iota : S \to S$ η ταυτοτική απεικόνιση $\iota(t) = t$. Ο Φ είναι ισομετρία, και η εικόνα του $\Phi(C(S))$ είναι η C^* άλγεβρα $\mathscr{C} := C^*(\mathbf{1}, a)$ που παράγεται από το a (άρα αποτελείται από φυσιολογικά στοιχεία).

Ορίζουμε: $\Phi = \mathscr{G}^{-1} \circ \Psi : C(S) \xrightarrow{\Psi} C(\mathfrak{M}(\mathscr{C})) \xrightarrow{\mathscr{G}^{-1}} \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$
όπου $\Psi(f) = f \circ \hat{a}$, $(f \in C(S))$ και $\mathscr{G}^{-1}(\hat{y}) = y$, $(y \in \mathscr{C})$.

Αν $f \in C(\sigma(a))$ το $\Phi(f) \in C^*(\mathbf{1}, a)$ γράφεται συνήθως $f(a)$.

Πόρισμα

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, αν $f \in C(\sigma(a))$ τότε

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(t) : t \in \sigma(a)\}.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται ***θετικό*** *(γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.*
Θέτουμε $\mathscr{A}_+ = \{a \in \mathscr{A} : a \geq 0\}$.
Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathscr{A}_+$.

Παραδείγματα

- Στον $C(K)$: $f \geq 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).
- Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
- Στην $\mathscr{B}(H)$: $T \geq 0$ ανν $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Πρόταση

Αν $\mathscr{A}$ C^* άλγεβρα με μονάδα, $a = a^* \in \mathscr{A}$ και $f \in C(\sigma(a))$, τότε

$$f(a) \geq 0 \iff f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Έστω $\mathscr{A}$ C* άλγεβρα με μονάδα.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathscr{A}_+$ είναι κώνος:

$$a, b \in \mathscr{A}_+, \; \lambda \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathscr{A}_+, a + b \in \mathscr{A}_+.$$

Λήμμα

Αν $x = x^*$ και $\|x\| \leq \mu$, τότε $-\mu \mathbf{1} \leq x \leq \mu \mathbf{1}$

$$\textit{και} \quad x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - \mu \mathbf{1}\| \leq \mu\,.$$

Πόρισμα

$$\mathscr{A}_+ = \{x \in \mathscr{A} : x = x^* \;\textit{και}\; \| \|x\| \mathbf{1} - x\| \leq \|x\|\}\,.$$

Πρόταση

Ο κώνος $\mathscr{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή

$$\mathscr{A}_+ \cap (-\mathscr{A}_+) = \{0\}.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C^* άλγεβρας $\mathscr{A}$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα

$$a \in \mathscr{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathscr{A}_+ \text{ ώστε } \; a = b^2.$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C^* άλγεβρας $\mathscr{A}$ (με μονάδα) γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathscr{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(\mathbf{1}, a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$.
Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathscr{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Είναι τετριμένο ότι αν $\mathscr{A}$ είναι μια C* υπάλγεβρα του $\mathscr{B}(H)$ (H χώρος Hilbert), κάθε στοιχείο της μορφής a^*a είναι θετικό.

Θεώρημα (!)

Αν $\mathscr{A}$ είναι C^* άλγεβρα και $y \in \mathscr{A}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. *Το y είναι θετικό*
2. *Υπάρχει $b \in \mathscr{A}_+$ ώστε $y = b^2$.*
3. *Υπάρχει $a \in \mathscr{A}$ ώστε $y = a^*a$.*

Χρειάζεται το

Λήμμα

Αν $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα και $h, k \in \mathscr{A}$, τότε

$$\mathbf{1} - hk \in G_{\mathscr{A}_1} \iff \mathbf{1} - kh \in G_{\mathscr{A}_1}$$

($\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ η μοναδοποίηση). Συνεπώς

$$\sigma(hk) \cup \{0\} = \sigma(kh) \cup \{0\}.$$

Θετικές γραμμικές μορφές

Ορισμός

Μια γραμμική $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ *σε μια* C^* *άλγεβρα* $\mathscr{A}$ *λέγεται* ***θετική*** *αν* $\phi(a) \geq 0$ *για κάθε* $a \in \mathscr{A}_+$. *Λέγεται* ***κατάσταση (state)*** *αν* $\|\phi\| = 1$ *(Γράφουμε* $\phi \in S(\mathscr{A})$*).*
Λέγεται ***πιστή (faithful)*** *αν* $\phi(a^* a) > 0$ *για κάθε* $a \neq 0$.

Παραδείγματα

1. Στην $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, η $\phi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ (όπου $\xi \in \ell^2(n)$, $\|\xi\| = 1$.)
2. Στην $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, η $\psi(T) = \sum_i \langle Te_i, e_i \rangle$.
3. Στην $C(K)$, (*i*) η $\phi(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$.
4. (*ii*) η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.
5. Σε μια μεταθετική C* άλγεβρα $\mathscr{C}$, κάθε χαρακτήρας.

Παρατηρήσεις $\mathfrak{M}(\mathscr{C}) \subsetneq S(\mathscr{C})$ ανν $\dim \mathscr{C} > 1$.
Κάθε θετική γραμμική μορφή στην $C(K)$ είναι της μορφής (4) (Θεωρ. Riesz).

Υπενθύμιση: Θετικά ημιορισμένες μορφές

Έστω V (μιγαδικός) γραμμικός χώρος.
Μια απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear αν για κάθε $u \in V$ η $V \ni v \to \langle v, u \rangle \in \mathbb{C}$ είναι γραμμική και η $V \ni v \to \overline{\langle u, v \rangle} \in \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Λέγεται ερμιτιανή αν επιπλέον $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ για κάθε $u, v \in V$.

Λέγεται θετικά ημιορισμένη ή ημι-εσωτερικό γινόμενο αν επιπλέον $\langle v, v \rangle \geq 0$ για κάθε $v \in V$. Τότε έχουμε την

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \text{ για κάθε } v, v \in V.$$

Λέγεται θετικά ορισμένη ή εσωτερικό γινόμενο αν επιπλέον $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$.

Παραδείγματα

1. Αν $V = \mathbb{C}^n$, $\langle v, u \rangle = \sum_i \lambda_i v_i \bar{u}_i$ όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}, [\in \mathbb{R}], [\in \mathbb{R}_+]$.
2. Αν $V = C(K)$, (i) $\langle v, u \rangle = v(t_0)\overline{u(t_0)}$ όπου $t_0 \in K$.
3. (ii) $\langle v, u \rangle = \int v\bar{u}d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.

Θετικές γραμμικές μορφές

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα, $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική.
Αν ϕ είναι θετική γραμμική μορφή, $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ για κάθε $x \in \mathscr{A}$.
Επομένως, αν $a, b \in \mathscr{A}_h$ τότε $a \geq b \Rightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$.

Πρόταση

Αν ϕ θ.γ.μ., η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathbb{C} : \langle a, b \rangle = \phi(b^* a)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο, και είναι εσωτερικό γινόμενο ανν η ϕ είναι πιστή. Ισχύει η ανισότητα

$$|\phi(b^* a)|^2 \leq \phi(a^* a)\phi(b^* b) \;\; \text{για κάθε} \;\; a, b \in \mathscr{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathscr{A}$ τότε

$$\phi(a^* a) = 0 \iff \phi(b^* a) = 0 \text{ για κάθε } \; b \in \mathscr{A}.$$

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή σε μια C^* άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι συνεχής. (άσκ.)
Όταν η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα και η ϕ είναι θετική, τότε $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$.

Απόδειξη (όταν $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$)
$0 \le a^*a \le \|a^*a\| \mathbf{1} = \|a\|^2 \mathbf{1} \Rightarrow 0 \le \phi(a^*a) \le \|a\|^2 \phi(\mathbf{1})$. Αλλά $|\phi(a)|^2 = |\phi(\mathbf{1}^*a)|^2 \le \phi(a^*a)\phi(\mathbf{1}^*\mathbf{1})$ άρα $|\phi(a)|^2 \le \|a\|^2 \phi(\mathbf{1})^2$.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα, $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική. Αν $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$, τότε η ϕ είναι θετική.

(Δες κι το Λήμμα (2).)

Αναπαραστάσεις

Στόχος Κάθε C* άλγεβρα $\mathscr{A}$ «αναπαρίσταται» ως άλγεβρα τελεστών σε κάποιον χώρο Hilbert.

Αναπαράσταση (representation) (π, H) μιάς C* άλγεβρας $\mathscr{A}$ λέγεται μια απεικόνιση $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert που είναι μορφισμός *-αλγεβρών, δηλαδή

$$\pi(a+\lambda b) = \pi(a) + \lambda \pi(b)$$
$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$$
$$\pi(a^*) = (\pi(a))^*$$

για κάθε $a, b \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $\mathscr{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$.

Η αναπαράσταση $\mathscr{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$ λέγεται πιστή (faithful) αν είναι 1-1.
Λέγεται μη εκφυλισμένη (non-degenerate) αν

$$\overline{\mathrm{span}(\pi(\mathscr{A})(H))} = H.$$

Αναπαραστάσεις της $C(K)$: Παραδείγματα

Έστω μ κανονικό μέτρο Borel (πιθανότητας) στον K.

Αναπαράσταση π_μ της $C(K)$ στον $L^2(K,\mu)$: Για κάθε $f \in C(K)$, ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathscr{B}(L^2(K,\mu)))$ από τη σχέση

$$(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$$

για κάθε $\xi \in L^2(K,\mu))$ και (μ-σχεδόν) κάθε $t \in K$.

Κάθε μεταθετική C* άλγεβρα $\mathscr{A}$ δέχεται πιστή (;) αναπαράσταση:

Έστω μ κανονικό μέτρο Borel (πιθανότητας) στον $K := \mathfrak{M}(\mathscr{A})$.

Για κάθε $a \in \mathscr{A}$, (έχουμε $\hat{a} \in C(K)$ και) ορίζουμε $\pi_\mu(a) \in \mathscr{B}(L^2(K,\mu)))$ από τη σχέση

$$(\pi_\mu(a)\xi)(t) = \hat{a}(t)\xi(t)$$

για κάθε $\xi \in L^2(K,\mu))$ και (μ-σχεδόν) κάθε $t \in K$.

Η π_μ είναι πιστή ανν $\mu(V) > 0$ για κάθε $V \subseteq K$ μη κενό ανοικτό, ισοδύναμα ανν $\psi(a^*a) > 0$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$ μη μηδενικό, όπου $\psi(a) = \int_k \hat{a}d\mu$.

Κάθε μεταθετική C* άλγεβρα έχει πιστή αναπαράσταση

Αν $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική C* άλγεβρα, έστω $K = \mathfrak{M}(\mathscr{A}_1)$. Αν $K_0 \subseteq K$ είναι πυκνό, θέτω $H = \ell^2(K_0)$ με ο.κ. βάση $\{e_\phi : \phi \in K_0\}$. Για κάθε $a \in \mathscr{A}$, ορίζω

$$\pi(a)e_\phi = \phi(a)e_\phi, \quad \phi \in K_0 .$$

Ο $\pi(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον H και η $a \to \pi(a)$ είναι πιστή αναπαράσταση της $\mathscr{A}$ στον H.

Αν η $\mathscr{A}$ είναι διαχωρίσιμη, μπορώ να επιλέξω τον H διαχωρίσιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πρδγ: $\mathscr{A} = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Παρατήρηση Μια μεταθετική C* άλγεβρα δεν δέχεται πάντα πιστή θετική γραμμική μορφή. Πρδγ: $\mathscr{A} = \ell^\infty(\Gamma)$ όπου Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Λεπτομέρειες στο `abrep.pdf`.

Η αναπαράσταση GNS (Gelfand-Naimark-Segal)

Έστω $\mathscr{A}$ *-άλγεβρα, H χώρος Hilbert, $\xi \in H$ και $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ *-αναπαράσταση. Τότε η

$$\phi_\xi : \mathscr{A} \to \mathbb{C} : a \to \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_H$$

είναι θετική γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi(a^* a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$.

Πάμε προς το αντίστροφο: Από ϕ να φτιάξουμε (π, H, ξ).

Η αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Έστω (π, H, ξ) και (π', H, ξ') *-αναπαραστάσεις μιας *-άλγεβρας $\mathscr{A}$, όπου ξ κυκλικό διάνυσμα για την (π, H) (δηλαδή $\{\pi(a)\xi : a \in \mathscr{A}\}$ πυκνός στον H) και ξ' κυκλικό για την (π', H'). Αν $\phi_\xi = \phi_{\xi'}$ τότε οι αναπαραστάσεις είναι unitarily ισοδύναμες, δηλ. υπάρχει $U : H \to H'$ unitary ώστε $U\xi = \xi'$ και για κάθε $a \in \mathscr{A}$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, tail, two heads, "U"] \arrow[d, "\pi(a)"'] & H' \arrow[d, "\pi'(a)"] \\ H \arrow[r, tail, two heads, "U"'] & H' \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό: $U\pi(a) = \pi'(a)U$.

Η αναπαράσταση GNS (ύπαρξη)

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ *άλγεβρα Banach με ισομετρική ενέλιξη και μονάδα, και* $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ *θετική γραμμική μορφή (δηλ.* $\phi(a^*a) \geq 0$ *για κάθε* $a \in \mathscr{A}$*). Τότε υπάρχουν* (π, H, ξ) *όπου* H *χώρος Hilbert,* $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ **-αναπαράσταση της* $\mathscr{A}$ *και* $\xi \in H$ *κυκλικό διάνυσμα για την* π *ώστε*

$$\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A}.$$

Βήματα απόδειξης GNS[3]

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathscr{A}$.
2. Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a, b\rangle_0 := \phi(b^* a)$.
   Όταν $\mathscr{A} = C(X)$ έχουμε $\langle a, b\rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.
3. Αφού ϕ θετική, $\langle a, a\rangle_0 = \phi(a^* a) \geq 0$.
   Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathscr{N}_\phi = \mathscr{N} := \{u \in \mathscr{A} \ : \langle u, u\rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathscr{A}/\mathscr{N}$.
   Ονομάζουμε H_ϕ $(= L^2(\mu))$ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς
   την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle a, a\rangle_0}$.
   (γράφω $[a] = a + \mathscr{N}$, $a \in \mathscr{A}$). $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$: χώρος Hilbert.

[2]Λεπτομέρειες στο gns19.pdf.

Βήματα απόδειξης GNS II

5. Η $\mathscr{A}$ δρα στον γραμ. χώρο $\mathscr{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathscr{N}) \subseteq \mathscr{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathscr{A}/\mathscr{N}$.

7. Επειδή η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα Banach με μονάδα και ισομετρική ενέλιξη, δείχνουμε (!) ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \, \|[b]\|_\phi$.
   [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a) : H_\phi \to H_\phi$.

8. Η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση (εύκολο). [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ. $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

9. Θέτουμε $\xi_\phi = [\mathbf{1}_{\mathscr{A}}]$. Τότε

$$\begin{aligned}\left\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \right\rangle_{H_\phi} &= \left\langle \pi_\phi(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}] \right\rangle_{H_\phi} \\ &= \langle a, \mathbf{1} \rangle_{H_\phi} = \phi(\mathbf{1}^* a) = \phi(a). \qquad \square\end{aligned}$$

Στο Βήμα (7) της απόδειξης, χρειάζονται τα λήμματα:

Λήμμα

Μια θετική γραμμική μορφή ϕ σε μια άλγεβρα Banach $\mathscr{A}$ με μονάδα και ισομετρική ενέλιξη είναι συνεχής, μάλιστα $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}_{\mathscr{A}})$.

Λήμμα

Με τις ίδιες υποθέσεις, αν $a, b \in \mathscr{A}$, τότε

$$\phi(b^* a^* ab) \leq \|a\|^2_{\mathscr{A}} \phi(b^* b).$$

Η αναπαράσταση GNS για C*-άλγεβρα χωρίς μονάδα

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ *μια C*-άλγεβρα και* $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ *θετική γραμμική μορφή. Τότε υπάρχουν* (π, H, ξ) *όπου* H *χώρος Hilbert,* $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ **-αναπαράσταση της* $\mathscr{A}$ *και* $\xi \in H$ *κυκλικό διάνυσμα για την* π *ώστε*

$$\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A} .$$

Απόδειξη Η ϕ επεκτείνεται σε θετική γραμμική μορφή στη μοναδοποίηση $\phi_1 : \mathscr{A}_1 \to \mathbb{C}$, οπότε ορίζεται η αναπαράσταση GNS (π_1, H_1, ξ) για το ζεύγος $(\mathscr{A}_1, \phi_1)$. Ονομάζουμε $H = \overline{\{\pi_1(a)\xi : a \in \mathscr{A}\}} \subseteq H_1$ και $\pi(a) := \pi_1(a)|_H$.
(Παρατήρηση: Εδώ $\xi = [\mathbf{1}_{\mathscr{A}_1}]$ και συνεπώς $\pi_1(a)\xi \in H$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$.)

Στις C*-άλγεβρες, οι καταστάσεις επαρκούν για τη νόρμα

Παρατήρηση Σε μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathscr{C} \simeq C_0(X)$, για κάθε $a \in \mathscr{C}$ υπάρχει χαρακτήρας $\phi = \delta_t$ ώστε $\|a\| = \sup|\hat{a}| = |\hat{a}(t)| = |\phi(a)|$.
Μια μη μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathscr{A}$ μπορεί να μην έχει χαρακτήρες (π.χ. $\mathscr{A} = M_2$). Όμως πάντα υπάρχουν 'αρκετές' καταστάσεις:

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a$ κατάσταση ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$.

Συνεπώς $\left\|\pi_\phi(a)\right\| = \|a\|$.
Απόδειξη Αν $b := a^*a$ και $\lambda_0 := \max\sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\psi : C^*(\mathbf{1}_{\mathscr{A}_1}, b) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \psi(f(b)) = f(\lambda_0) \quad (f \in C(\sigma(b))$$

και επεκτείνω (H-B) το ψ σε $\phi : \mathscr{A}_1 \to \mathbb{C}$ κατάσταση, οπότε $\phi(a^*a) = \psi(b) = \lambda_0 = \|a^*a\|$.

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$$

δηλ. με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$).

Αν $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(x_1) \\ T_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολο: η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Χρήσιμη Άσκηση:

$$\| T_1 \oplus T_2 \| = \max\{\| T_1 \|, \| T_2 \|\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός

Το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert $H := \bigoplus_{i\in I} H_i$ *είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων* $\xi = (\xi_i)$ *με* $\xi_i \in H_i$ *για κάθε* $i \in I$ *και*

$$\|\xi\|_H := \sup\left\{ \sum_{i\in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\} < \infty.$$

Άσκηση Είναι πλήρης χώρος. Το *αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$$H_0 := \{(\xi_i)_{i\in I} : \xi_i \in H_i \text{ και } \xi_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

είναι πυκνός υπόχωρος του H. Η νόρμα $\|\cdot\|_H$ προέρχεται απ΄ το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{i\in I} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i} \quad \xi, \eta \in H_0 .$$

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathscr{B}(\bigoplus H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \to H_0 : (x_i) \to (T_i x_i)\,.$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\mathrm{supp}(T_i x_i) \subseteq \mathrm{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H.

Πρόταση

Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathscr{B}(\bigoplus H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν $\sup\{\|T_j\|_{\mathscr{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. Μάλιστα

$$\left\|\bigoplus_i T_i\right\|_{\mathscr{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathscr{B}(H_j)} : j \in I\}\,.$$

Ευθέα αθροίσματα: Αναπαραστάσεων

Έστω $\mathscr{A}$ μια C*-άλγεβρα και για κάθε $i \in I$ έστω (π_i, H_i) μια αναπαράσταση. Επειδή $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathscr{B}(H_i)} \leq \|a\|_{\mathscr{A}}$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \to \oplus H_i : (x_i) \to (\pi_i(a) x_i) .$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\oplus H_i) : a \to \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$.

Η π είναι μια *-αναπαράσταση της $\mathscr{A}$. (Άσκηση!)

[*Αποδείξεις στο* `dirsum.pdf`.]

Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C*-άλγεβρα και $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{A})$ το σύνολο των states της $\mathscr{A}$. Για κάθε $\phi \in \mathscr{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

Ορισμός

*Η **καθολική αναπαράσταση** της $\mathscr{A}$ είναι η (π, H) όπου*

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathscr{S}} H_\phi \quad \textit{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathscr{S}} \pi_\phi(a), \;\; a \in \mathscr{A}.$$

Στόχος:

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.
Επομένως κάθε C-άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και *-ισομορφικά ως C*-υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathscr{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.*

Απόδειξη: Έχουμε δείξει (δες Πρόταση 29)ότι

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ ώστε $\phi(a^* a) \neq 0$.

Η καθολική αναπαράσταση

Πόρισμα

Αν $\{a_i : i \in I\}$ πυκνό υποσύνολο της $\mathscr{A}$, για κάθε $i \in I$ έστω π_i αναπαράσταση της $\mathscr{A}$ ώστε $\|\pi_i(a_i)\| = \|a_i\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi := \oplus_{i \in I} \pi_i$$

είναι πιστή.

Παρατήρηση - Άσκηση Αν η $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\phi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πόρισμα

Αν η $\mathscr{A}$ είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Η άλγεβρα Banach $\ell^1(G)$

Αν S είναι μη κενό σύνολο,

$$\ell^1(S) = \{f : S \to \mathbb{C} : \sum_s |f(s)| := \|f\|_1 < \infty\}.$$

$\forall f \in \ell^1(S)$, έχουμε $f = \sum_s f(s)\delta_s$ (απόλυτη σύγκλιση).

Αν η S είναι ημιομάδα, η πράξη της S επεκτείνεται σε πολλ/σμό στον $c_{00}(S)$:

$$f * g = \left(\sum_r f(r)\delta_r\right) * \left(\sum_s g(s)\delta_s\right) := \sum_{r,s} f(r)g(s)\delta_{rs} \text{ και}$$

$$\|f*g\|_1 \le \sum_r \left\| f(r)\sum_s g(s)\delta_{rs} \right\|_1 = \sum_r |f(r)|\,\|g\|_1 = \|f\|_1\,\|g\|_1$$

οπότε η $*$ επεκτείνεται στην $(\ell^1(S), \|\cdot\|_1)$: άλγεβρα Banach, μεταθετική ανν S αβελιανή, με μονάδα δ_1 αν $\exists 1 \in S$.

Η $(\ell^1(S),*)$ αναπαρίσταται 1-1 στον $(\ell^2(S),\|\cdot\|_2)$

$$\ell^2(S)=\{\xi:S\to\mathbb{C}:\sum_s|\xi(s)|:=\|\xi\|_2<\infty\}.$$

Για κάθε $s\in S$ η απεικόνιση

$$\lambda(s):\delta_t\to\delta_{st}$$

επεκτείνεται σε $\lambda(s):\ell^2(S)\to\ell^2(S)$ διότι $\forall\xi\in c_{00}(S)$,

το $\lambda(s)\xi:=\sum_t\xi(t)\delta_{st}$ έχει $\|\lambda(s)\xi\|_2^2:=\sum_t\|\xi(t)\delta_{st}\|_2^2=\|\xi\|_2^2$

:$\lambda(s)$ ισομετρία. Αν $f=\sum_s f(s)\delta_s\in c_{00}(S)$, ορίζουμε

$$\lambda(f):=\sum_s f(s)\lambda(s):\ell^2(S)\to\ell^2(S)$$

οπότε για $\xi\in c_{00}(S)$

$$\lambda(f)\xi=\sum_s f(s)\lambda(s)\xi=\sum_s f(s)\sum_t\xi(t)\delta_{st}=f*\xi$$

Η $(\ell^1(S), *)$ αναπαρίσταται 1-1 στον $(\ell^2(S), \|\cdot\|_2)$

$$\|\lambda(f)\xi\|_2 = \left\|\sum_s f(s)\lambda(s)\xi\right\|_2 \leq \sum_s |f(s)|\,\|\lambda(s)\xi\|_2 = \|f\|_1\,\|\xi\|_2$$

άρα $\|\lambda(f)\|_{\mathscr{B}} \leq \|f\|_1$ (εδώ $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\ell^2(S))$ και η απεικόνιση

$$\lambda : (\ell^1(S), *, \|\cdot\|_1) \to (\mathscr{B}(\ell^2(S)), \circ, \|\cdot\|_{\mathscr{B}}) : f \to \lambda(f)$$

είναι αναπαράσταση:

$$\lambda(f * g) = \lambda(f) \circ \lambda(g) \qquad \forall f, g \in \ell^1(S).$$

Επίσης, είναι 1-1: αν $\lambda(f) = 0$ τότε για κάθε $t \in S$ έχουμε $\lambda(f)\delta_t = 0$, άρα

$$0 = \|\lambda(f)\delta_t\|_2^2 = \left\|\sum_s f(s)\delta_{st}\right\|_2^2 = \sum_s |f(s)|^2$$

και συνεπώς $f = 0$.

Η $(\ell^1(G),*)$ αναπαρίσταται 1-1 στον $(\ell^2(G),\|\cdot\|_2)$

Αν G ομάδα, η $s \to s^{-1} : G \to G$ ορίζει ισομετρική ενέλιξη στην $\ell^1(G)$:

$$f^* = \left(\sum_r f(r)\delta_r\right)^* = \sum_r \overline{f(r)}\delta_{r^{-1}} = \sum_s \overline{f(s^{-1})}\delta_s$$

$$\|f^*\|_1 = \sum_s |\overline{f(s^{-1})}| = \sum_r |f(r)| = \|f\|_1$$

Για κάθε $s \in G$ η απεικόνιση

$$\lambda(s) : \delta_t \to \delta_{st}$$

επεκτείνεται σε ισομετρία $\lambda(s) : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$. Επειδή

$$I = \lambda(e) = \lambda(ss^{-1}) = \lambda(s)\lambda(s^{-1})$$

$$\text{και} \quad I = \lambda(e) = \lambda(s^{-1}s) = \lambda(s^{-1})\lambda(s)$$

η $\lambda(s)$ ισομετρία επί δηλ. unitary τελεστής στον $\ell^2(G)$. Έπεται ότι $\lambda(s^{-1}) = \lambda(s)^*$, άρα

$$\lambda(f^*) = \lambda\left(\sum_s \overline{f(s^{-1})}\delta_s\right) = \sum_s \overline{f(s^{-1})}\lambda(s) = \sum_r \overline{f(r)}\lambda(r^{-1}) = (\lambda(f))^*.$$

Η $(\ell^1(G),*)$ αναπαρίσταται 1-1 στον $(\ell^2(G),\|\cdot\|_2)$

Συνοψίζω: Η απεικόνιση

$$\lambda : (\ell^1(G),*,\|\cdot\|_1) \to (\mathscr{B}(\ell^2(G)),\circ,\|\cdot\|_{\mathscr{B}}) : f \to \lambda(f)$$

όπου $\lambda(f)\delta_t = \sum_s f(s)\delta_{st}$ είναι 1-1 *-αναπαράσταση:

$$\lambda(f*g) = \lambda(f)\lambda(g), \quad \lambda(f^*) = (\lambda(f))^* \qquad \forall f,g \in \ell^1(S).$$

και $\|\lambda(f)\|_{\mathscr{B}} \le \|f\|_1$ (εδώ $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\ell^2(G))$.

Ορισμός

Η ανηγμένη (reduced) C^* άλγεβρα $C_r^*(G)$ της G είναι η $\|\cdot\|_{\mathscr{B}}$-κλειστή θήκη της $\lambda(\ell^1(G)) \subseteq \mathscr{B}(\ell^2(G))$.

Η ανηγμένη (reduced) C^* άλγεβρα $C_r^*(G)$

Ορισμός

Η ανηγμένη (reduced) C^* άλγεβρα $C_r^*(G)$ της G είναι η $\|\cdot\|_{\mathscr{B}}$-κλειστή θήκη της $\lambda(\ell^1(G)) \subseteq \mathscr{B}(\ell^2(G))$.

Παράδειγμα

Όταν $G = \mathbb{Z}$, η $\ell^1(\mathbb{Z})$ είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την άλγεβρα Wiener $\mathscr{W}$ των συναρτήσεων $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και η $C_r^*(\mathbb{Z})$ είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την $C(\mathbb{T})$.

Πράγματι, για κάθε $f \in \mathscr{W}$ έχουμε $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ και, αν $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier, τότε $\mathscr{F}^{-1} \circ \lambda(\hat{f}) \circ \mathscr{F} = M_f$ όπου $M_f : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : h \to fh$.
Επομένως $\left\|\lambda(\hat{f})\right\|_{\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))} = \|f\|_{\mathscr{B}(L^2(\mathbb{T}))} = \|f\|_{\mathbb{T}}$ (νόρμα supremum).

Η δυική μιας διακριτής αβελιανής ομάδας

Ορισμός

Χαρακτήρας *μιας ομάδας G λέγεται ένας μορφισμός ομάδων $\chi : G \to \mathbb{T}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της G συμβολίζεται $\widehat{G}$.*

Αν $\chi \in \widehat{G}$, ορίζουμε $\phi_\chi : \ell^1(G) \to \mathbb{C}$ από τη σχέση:

$$\phi_\chi(f) := \sum_s f(s)\chi(s), \quad f = \sum_s f(s)\delta_s \in \ell^1(G).$$

Πρόταση

Έστω G μια αβελιανή ομάδα. Ο τοπολογικός χώρος $(\widehat{G}, \tau)$ (όπου τ η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία της G) είναι ομοιομορφικός με τον συμπαγή και Hausdorff τοπολογικό χώρο $(\mathfrak{M}(\ell^1(G)), w^*)$ μέσω της απεικόνισης $\chi \to \phi_\chi$. Συνεπώς οι C^*-άλγεβρες $C(\mathfrak{M}(\ell^1(G)))$ και $C(\widehat{G})$ είναι $*$-ισομορφικές. Η $(\widehat{G}, \tau)$ είναι αβελιανή τοπολογική ομάδα.

[*Λεπτομέρειες στο* ghat.pdf.]

Ημι-σταυρωτά γινόμενα (semicrossed products)

Έστω δυναμικό σύστημα (K,σ) όπου K συμπαγής Hausdorff και $\sigma : K \to K$ συνεχής συνάρτηση. Θέτω $\mathscr{C} := C(K)$ και για κάθε $x \in K$ αναπαριστώ στον $H_x := \ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\pi_x(f) = \mathrm{diag}(f(\sigma^n(x)) = \begin{bmatrix} f(x) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f(x_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & f(x_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & f(x_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

(όπου $f \in \mathscr{C}$, $x_n = \sigma^n(x)$)

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Αθροίζω:

Ημι-σταυρωτά γινόμενα (semicrossed products)

$$\begin{aligned} \text{Ορίζω} \quad \pi(f) &:= \oplus_{x\in K}\pi_x(f) \\ S &:= \oplus_{x\in K} S_x \\ \text{στον} \quad H &:= \oplus_{x\in K} H_x. \end{aligned}$$

Το ημι-σταυρωτό γινόμενο $\mathscr{C} \times_\sigma \mathbb{Z}_+$ είναι η κλειστή υπάλγεβρα (όχι *-υπάλγεβρα) της $\mathscr{B}(H)$ που παράγεται από τα $\{\pi(f) : f \in \mathscr{C}\} \cup \{S\}$.
Ελέγχεται ότι ικανοποιείται η 'covariance relation'

$$\pi(f)S = S\pi(f\circ\sigma)$$

(οπότε $S\pi(f)S\pi(g) = S^2\pi(f\circ\sigma)\pi(g) = S^2\pi((f\circ\sigma)g)$ κ.λπ.).
Έπεται ότι το $\mathscr{C} \times_\sigma \mathbb{Z}_+$ είναι η κλειστή θήκη όλων των 'πολυωνύμων' $\sum_{n=0}^{N} S^n\pi(f_n)$ με συντελεστές $\pi(f_n)$ από την $\mathscr{C}$.

Σταυρωτά γινόμενα (crossed products)

Αν σ ομοιομορφισμός μπορώ να βάλω κάθε $H_x := \ell^2(\mathbb{Z})$, και $\pi_x(f) = \mathrm{diag}(f(\sigma^n(x))), n \in \mathbb{Z}$ και στη θέση του S_x το bilateral shift

$$\pi_x(f) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & f(x_{-1}) & & & \\ & & \boxed{f(x)} & & \\ & & & f(x_1) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad S_x = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & & & \\ & 1 & \boxed{0} & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Το σταυρωτό γινόμενο $\mathscr{C} \rtimes_\sigma \mathbb{Z}$ είναι η κλειστή *-υπάλγεβρα της $\mathscr{B}(H)$ που παράγεται από τα $\{\pi(f) : f \in \mathscr{C}\} \cup \{S\}$. Είναι η κλειστή θήκη όλων των ‘τριγωνομετρικών πολυωνύμων’ $\sum_{n=-N}^{N} S^n \pi(f_n)$ με συντελεστές $\pi(f_n)$ από την $\mathscr{C}$.

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα

Έστω $K = \mathbb{T} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ και $\sigma(e^{it}) = \lambda e^{it} = e^{i(t+\theta)}$ όπου $\theta/2\pi$ άρρητος. Θέτουμε $H_2 = L^2(\mathbb{T}, \mu)$ (μέτρο Lebesgue).
Η αναπαράσταση π παράγεται απ' την εικόνα του $\pi(\zeta)$ (όπου $\zeta(e^{it}) = e^{it}$). Αφού εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Fourier $\mathscr{F} : H_2 \to H_x$, ο $\pi(\zeta)$ αντιστοιχεί στον unitary τελεστή $V = M_\zeta$, δηλαδή:

$$(V\xi)(z) = z\xi(z) \quad \xi \in H_2, z = e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Επίσης ο τελεστής S αντιστοιχεί στον unitary τελεστή U που ορίζεται από

$$(U\xi)(z) = \xi(\bar{\lambda} z).$$

Οι τελεστές αυτοί ικανοποιούν την covariance condition

$$VU = \lambda UV$$

($\sim$ η σχέση Weyl της Κβαντομηχανικής).