Διαφορική Γεωμετρία 1
Σημειώσεις μαθήματος

12 Ιανουαρίου 2023

Περιεχόμενα

1 Βασικά στοιχεία για το μάθημα

Βασικές αναφορές του μαθήματος:

- "Introduction to smooth manifolds", J.Lee
- "A comprehensive introduction to differential geometry", M. Spivak

Βασικά θέματα του μαθήματος:

- Τοπολογικές πολλαπλότητες - ομαλές πολλαπλότητες
- Διανυσματικά πεδία - εφαπτόμενη δέσμη
- Διανυσματικές δέσμες
- Συνεφαπτόμενη δέσμη
- Immersions, submersions και απεικονίσεις σταθερής τάξης
- Εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες
- Διανυσματικά πεδία και οι ροές τους
- Παράγωγος Lie
- Foliations - Θεώρημα του Frobenious
- Ομάδες Lie

2 Τοπολογικές πολλαπλότητες

Ξέρουμε να κάνουμε διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό στον $\mathbb{R}^n$ ή σε ανοιχτά υποσύνολά του. Σκοπός της θεωρίας των διαφορικών πολλαπλοτήτων είναι να οριστούν τοπολογικοί χώροι, λιγότερο τετριμένοι από τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένοι με την κατάλληλη δομή ώστε να κάνουμε το ίδιο. Σε ένα γενικό τοπολογικό χώρο για παράδειγμα, μπορούμε να μιλήσουμε για συνέχεια συναρτήσεων αλλά δεν έχει νόημα να μιλάμε για ομαλές συναρτήσεις σε αυτόν.

Η βασική ιδέα είναι να μελετήσουμε τοπολογικούς χώρους που "μοιάζουν" τοπικά με ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αυτή η ιδέα μας οδηγεί στην έννοια της τοπολογικής πολλαπλότητας.

Υπενθύμιση: Τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ όπου X είναι σύνολο και $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ώστε

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

- Οποιαδήποτε ένωση στοιχείων του $\mathcal{T}$ ανήκει στο $\mathcal{T}$.

Τα στοιχεία του $\mathcal{T}$ τα ονομάζουμε ανοιχτά σύνολα.

Ορισμός 1. *Μια τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης $n \geq 0$, ακέραιος, είναι ένας τοπολογικός χώρος με τις παρακάτω ιδιότητες*

- *Είναι Hausdorff: Δηλαδή έχει την ιδιότητα ότι για κάθε δύο σημεία $x, y \in M$, $x \neq y$, υπάρχουν ανοιχτά υποσύνολα $U, V \subset M$, $U \cap V = \emptyset$, με $x \in U$, $y \in V$.*

- *Είναι δεύτερος αριθμήσιμος (second countable), έχει δηλαδή αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.*

- *Και η βασική ιδιότητα: Για κάθε $x \in M$ υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο $x \in U \subset M$ και ομοιομορφισμός $\phi : U \to \tilde{U} = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής, $1-1$, και η αντίστροφή της $\phi^{-1} : \tilde{U} \to U$ είναι επίσης συνεχής.*

  Ένα τέτοιο (ϕ, U) ονομάζεται χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων γύρω από το x.

Άμεσα παραδείγματα

- Ο $\mathbb{R}^n$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα.

- Ο $X = \mathbb{R}^n/\{x \sim -x\}$ δεν είναι πολλαπλότητα. Καμία γειτονιά του 0 δεν είναι ομοιομορφική με ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$: Αν περιορίσουμε την

  $$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\{x \sim -x\}$$

  στον $\mathbb{R}^n \setminus 0$ τότε κάθε καμπύλη από το x στο $-x$ απεικονίζεται σε βρόγχο με βάση το $\pi(x)$. Αν $n \geq 3$ και ο χώρος τοπικά έμοιαζε με $\mathbb{R}^n$ θα έπρεπε να μπορούμε να τον παραμοφώσουμε σε σημείο. άτοπο.

  Σημείωση: εδώ ο X παίρνει την τοπολογία πηλίκο, όπου τα ανοιχτά U στον είναι ακριβώς τα υποσύνολα με $\pi^{-1}(U) \subset X$ ανοιχτό.

Μπορούμε να γράψουμε κάθε (ϕ, U) σαν

$$\phi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$$

για κάθε $p \in U$, όπου κάθε $x^i : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, αφού είναι σύνθεση συνεχών απεικονίσεων

$$x^i = \pi_i \circ \phi$$

με $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_i(x^1, \ldots, x^n) = x^i$.

2.1 Παραδείγματα

- Γραφήματα συνεχών συναρτήσεων. Έστω $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ και

  $$f : \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$$

  μια συνεχής συνάρτηση. Το γράφημά της είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+k}$

  $$G_f = \left\{(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k) \in \mathbb{R}^{n+k}, (y^1, \ldots, y^k) = f(x^1, \ldots, x^k)\right\}$$

  Δέχεται ολικό χάρτη $\phi : G_f \to \tilde{U}$ που ορίζεται ως

  $$\phi((x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k)) = (x^1, \ldots, x^n)$$

  που είναι συνεχής και η αντίστροφή του είναι η $\phi^{-1} : \tilde{U} \to G_f$

  $$\phi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, f(x^1, \ldots, x^n))$$

  και είναι επίσης συνεχής.

  Σημείωση, εδώ το γράφημα παίρνει την τοπολογία από τον $\mathbb{R}^{n+k}$, όπου ανοιχτά ορίζονται τα υποσύνολα $O \cap G_f$ για κάθε ανοιχτό O του $\mathbb{R}^{n+k}$, επομένως είναι δεύτερος αριθμήσιμος και Hausdorff (αφού προέρχεται από μετρικό χώρο)

  Για παράδειγμα, αν $U = \{|y| < 1, y \in \mathbb{R}^n\}$ και $f(y) = \sqrt{1 - |y|^2}$ έχουμε γράφημα πάνω από τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό θα είναι το άνω ημισφαίριο μια σφαίρας διάστασης n στον $\mathbb{R}^{n+1}$.

  $$\mathbb{S}^n = \{x = (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1\}$$

- Σφαίρες. Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε πώς να φτιάξουμε χάρτη γύρω από κάθε σημείο της $\mathbb{S}^n$ με $x^{n+1} > 0$. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τα σημεία με $x^{n+1} < 0$, ορίζοντας

  $$f' : U \to \mathbb{R}$$

  $f'(y) = -f(y)$.

  Πάλι όμως μας "ξεφεύγουν" τα σημεία με $x^{n+1} = 0$. Οπότε πρέπει να κάνουμε τα παραπάνω συστηματικά για όλα τα x^i:

  Ορίζουμε

  $$U_i^+ = \{(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n, x_i > 0\}$$
  $$U_i^- = \{(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n, x_i < 0\}$$

με αντίστοιχους χάρτες

$$\phi_i^+ : U_i^+ \to U, \quad \phi_i^- : U_i^- \to U$$
$$\phi_i^+((x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$
$$\phi_i^-((x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}).$$

και αντιστρόφους

$$(\phi_i^+)^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y_1, \dots, f(y), \dots, y^n),$$
$$(\phi_i^-)^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y_1, \dots, -f(y), \dots, y^n).$$

Ένας πιο αποδοτικός τρόπος να ορίσουμε χάρτες στην $\mathbb{S}^n$ είναι η στερεογραφική προβολή.

Ορίζουμε $\phi_N : \mathbb{S}^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ ως

$$\phi_N(x^1, \dots, x^n) = \frac{2}{1 - x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n)$$

και αντίστοιχα ορίζουμε $\phi_S : \mathbb{S}^n \setminus S \to \mathbb{R}^n$ ως

$$\phi_S(x^1, \dots, x^n) = \frac{2}{1 + x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n)$$

Άσκηση: μπορείτε να βρείτε τα ϕ_N^{-1}, ϕ_S^{-1};

- Προβολικός χώρος. Έστω $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\{x \sim \lambda x, \lambda \neq 0\}$. Η τοπολογία είναι η τοπολογία πηλίκου που προκύπτει από την απεικόνιση πηλίκο

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\{x \sim \lambda x, \lambda \neq 0\}.$$

Συμβολίζεται συνήθως με $\mathbb{RP}^n$. Κάθε σημείο του το σκεφτόμαστε σαν μια ευθεία που διέρχεται από το 0.

Ερώτηση: γιατί ο $\mathbb{RP}^n$ είναι second countable και Hausdorff;

Χάρτες: Ας συμβολίζουμε με $[x^1, \dots, x^{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$ την κλάση ισοδυναμίας που αντιστοιχεί στο $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή

$$\pi(x^1, \dots, x^{n+1}) = [x^1, \dots, x^{n+1}].$$

Ας ορίσουμε τα υποσύνολα $U_i \subset \mathbb{RP}^n$

$$U_i = \pi\left(\{(x_1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \neq 0\}\right)$$

Ένας χάρτης πάνω από το U_i είναι τότε ο

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$$

με

$$\phi_i([x_1, \dots, x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Η ϕ είναι συνεχής επειδή η $\phi \circ \pi$ είναι συνεχής (βασική ιδιότητα της τοπολογίας πηλίκο)

Ο αντίστροφός της δίνεται από

$$\begin{aligned} \phi_i^{-1}(x^1, \dots, x^n) &= [x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n] \\ &= \pi(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n), \end{aligned}$$

αφού η π είναι συνεχής και η απεικόνιση $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n)$ επίσης.

Ο προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι συμπαγής: Αν περιορίσουμε την π στη μοναδιαία σφαίρα τότε

$$\pi|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$$

είναι συνεχής και επί, αφού κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ είναι ισοδύναμο με $\pm\frac{x}{|x|}$ και επομένως $\pi(\pm\frac{x}{|x|}) = [x]$. Η σφαίρα συμπαγής τοπολογικός χώρος (κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$), και η εικόνα συμπαγούς συνόλου κάτω από συνεχή απεικόνιση είναι συμπαγής.

- Γινόμενα. Έστω $M_1, \dots, M_k$ τοπολογικές πολλαπλότητες διάστασης $n_1, \dots, n_k$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι το $M_1 \times \cdots \times M_k$ είναι τοπολογική πολλαπλοτητα διάστασης $n_1 + \cdots + n_k$.

  Έστω $p = (p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$ και χάρτες (ϕ_i, U_i) ώστε

  $$\begin{aligned} p_i &\in U_i \subset M_i, \\ \phi_i : U_i \to \tilde{U}_i &= \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

  Τότε, στην τοπολογία γινόμενο το $U_1 \times \cdots \times U_k$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $M_1 \times \cdots \times M_k$ και $p \in U_1 \times \cdots \times U_k$

  Η απεικόνιση

  $$\Phi : U_1 \times \cdots \times U_k \to \tilde{U}_1 \times \cdots \times \tilde{U}_k \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} = \mathbb{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$$

  με

  $$\Phi(p_1, \dots, p_k) = (\phi_1(p_1), \dots, \phi_k(p_k)) = (\phi_1 \times \dots \times \phi_k)(p_1, \dots, p_k)$$

  είναι συνεχής, $1-1$ και επί, ενώ η αντίστροφή της

  $$\Phi^{-1} = \phi_1^{-1} \times \cdots \times \phi_k^{-1}$$

  είναι επίσης συνεχής ("καρτεσιανό γινόμενο" συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής)

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές πολλαπλότητες, για παράδειγμα

- $\mathbb{S}^2 \times S^2$, και γενικα γινόμενα σφαιρών $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}$
- Τόρος n-διάστασης (torus) $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times S^1$, n αντίγραφα κύκλων.
- $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, και γενικά "κύλινδροι" $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^n$
- $S^2 \times \mathbb{RP}^2$ και πολλά άλλα.

3 Ομαλές πολλαπλότητες

3.1 Πρόβλημα με τον ορισμό της διαφορισιμότητας συναρτήσεων σε τοπολογικές πολλαπλότητες

Έστω η πολλαπλότητα διάστασης 1, $M = \mathbb{R}$. Σε αυτήν μπορούμε να ορίσουμε δύο διαφορετικούς χάρτες $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x, \\ \psi(x) &= x^3, \end{aligned}$$

αφού και οι δύο είναι ομοιομορφισμοί του $\mathbb{R}$ με τον εαυτό του.

Έστω $f : M = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Πότε θα λέμε ότι είναι διαφορίσιμη; Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ότι η f λέγεται διαφορίσιμη αν η $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, για κάποιο χάρτη φ της . Ποιόν χάρτη όμως θα διαλέξουμε; Τον ϕ ή τον ψ;

Παρατηρούμε ότι για την $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f \circ \phi^{-1}(x) &= x, \\ f \circ \psi^{-1}(x) &= x^{1/3}. \end{aligned}$$

Η μία είναι παραγωγίσιμη στο 0 ή άλλη όχι.

Στον απειροστικό λογισμό ουσιαστικά έχουμε κάνει μια επιλογή, με τι είδους χάρτη θα "μετράμε" τη διαφορισιμότητα, αλλά εδώ υπάρχει το πλεονέκτημα ότι υπάρχει κάποιος (πολλοί) ολικός χάρτης. Σε μια γενική τοπολογική πολλαπλότητα όμως, που αναγκαστηκά χρειαζόμαστε ενδεχομένως πολλούς χάρτες για να την καλύψουμε, είναι αναγκαία κάποια συνθήκη συμβατότητας: ότι όλοι οι χάρτες "συμφωνούν" ως προς το ποιές συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες και ποιές όχι.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, έστω M μια τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n,(ϕ, U), (ψ, V) δυο χάρτες της M ώστε $U \cap V \neq \emptyset$.

Για να συμφωνούν οι δυο χάρτες ως προς τη διαφορισιμότητα, θέλουμε για κάθε συνεχή $f : U \cap V \to \mathbb{R}$, η σύνθεση

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \mathbb{R}$$

να είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν η

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbb{R}$$

είναι.

Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\begin{aligned} f \circ \psi^{-1} &= f \circ \phi^{-1} \circ (\phi \circ \psi^{-1}), \\ f \circ \phi^{-1} &= f \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi^{-1}) = f \circ \psi^{-1} \circ (\phi \circ \psi^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

όπου

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V).$$

Η απεικόνιση $\phi \circ \psi^{-1}$ είναι πάντα ομοιομορφισμός, αφού είναι χάρτες της τοπολογικής πολλαπλότητας M. Συμπεραίνουμε όμως ότι για να έχουμε επιπλέον τh ζητούμενη συμβατότητα, πρέπει $\phi \circ \psi^{-1}$ να είναι λεία με λεία αντίστροφο, να είνα δηλαδή μια αμφιδιαφόριση των συνόλων $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$, $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$.

Η ιδέα είναι λοιπόν ότι αν είναι δυνατόν να καλύψουμε όλη την M με χάρτες που είναι συμβατοί, συμφωνούν μεταξύ τους για το ποιές συναρτήσεις είναι ομαλές, τότε έχουμε μια καλά ορισμένη έννοια διαφορισιμότητας συναρτήσεων *ανεξάρτητη από την επιλογή χάρτη (ή συστήματος συντεταγμένων*)

3.2 Ομαλές πολλαπλότητες - ορισμός

Άτλαντας τοπολογικής πολλαπλότητας: Αν είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n, ονομάζουμε άτλαντα $\mathcal{A}$ της M μια συλλογή από χάρτες $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ τέτοια ώστε $M = \cup_{i \in I} U_i$.

Ομαλός άτλαντας: Είναι ένας άτλαντας $\mathcal{A}$ που έχει την ιδιότητα:
Για κάθε $(\phi, U), (\psi, V) \in \mathcal{A}$ με $U \cap V \neq \emptyset$, η $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ είναι αμφιδιαφόριση. Μια τέτοια απεικονίση ονομάζεται απεικονιση μετάβασης από τον ψ στον ϕ.

Ισχύει (δεν θα το αποδείξουμε) ότι κάθε ομαλός άτλαντας περιέχεται σε έναν μοναδικό μεγιστικό ομαλό άτλαντα, ο οποίος περιέχει κάθε χάρτη της M που είναι συμβατός με τον αρχικό.

Διαφορική δομή σε μία τοπολογική πολλαπλότητα είναι ένας μεγιστικός ομαλός άτλαντας. Μια τοπολογική πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια διαφορική δομή ονομάζεται διαφορική πολλαπλότητα.

Το παράδειγμα με τον $\mathbb{R}$ μας δείχνει ότι είναι εύκολο να κατασκευάσει διαφορετικές διαφορικές δομές σε μια τοπολογική πολλαπλότητα. Υπάρχει όμως ένα σημείο που απαιτεί προσοχή, στο οποίο θα επανέλθουμε σύντομα, όταν μιλήσουμε για διαφορισιμότητα απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων.

3.3 Παραδείγματα

1. Πολλαπλότητες διάστασης 0.

2. $\mathbb{R}^n$

3. Οι σφαίρες $\mathbb{S}^n$: Αν (U_i^+, ϕ_i^+) και (U_j^+, ϕ_j^+) τότε για $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \phi_i^+ \circ (\phi_j^+)^{-1}(x^1, \ldots x^n) &= \phi_i^+(x^1, \ldots, x^{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x^j, \ldots, x^n) \\ &= (x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x^j, \ldots, x^n), \end{aligned}$$

   που μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι αμφιδιαφόριση.

4. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$: Άσκηση

5. Καρτεσιανά γινόμενα διαφορικών πολλαπλοτήτων είναι διαφορικές πολλαπλότητες: Άσκηση

6. Έστω $f(x) = |x|$ και G_f το γράφημα της f. Το G_f είναι ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}$ και επομένως κληρονομεί μια διαφορική δομή ως εξής:

   Η απεικόνιση $F : G_f \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x$ είναι ομοιομορφισμός. Έστω ο χάρτης $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x$, που απο μόνος του σχηματίζει έναν διαφορικό άτλαντα για το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η απεικόνιση $\phi \circ F : G_f \to \mathbb{R}$ είναι ένας ολικός χάρτης για το G_f, και άρα σχηματίζει έναν διαφορικό άτλαντα για το G_f μετατρέποντάς το σε διαφορική πολλαπλότητα.

   Αλλά τι γίνεται με τη διαίσθηση ότι το G_f δεν είναι ομαλό; Όταν μιλήσουμε για υποπολλαπλότητες θα γίνει πιο ξεκάθαρο, αλλά ας κάνουμε την εξής παρατήρηση.

   Το G_f είναι υποσύνολο της διαφορικής πολλαπλότητας $\mathbb{R}^2$. Σαν τέτοιο υπάρχει ο εξής τρόπος να επιλέξουμε τι θα πεί "διαφορίσιμη συνάρτηση" στο G_f: να πούμε ότι μια $f : G_f \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη αν και μόνο επεκτείνεται σε διαφορίσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^2$. Ας δούμε αν αυτό συμφωνεί με τη διαφορική δομή που ορίζει ο χάρτης $\phi \circ F$.

   Η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x, y) = y$ είναι διαφορίσιμη. Παρατηρούμε όμως ότι η

   $$L \circ (\phi \circ F)^{-1}(x) = L(x, |x|) = |x|$$

   δεν είναι διαφορίσιμη. Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαφορική δομή που ορίσαμε στο G_f αποκλείει την $L|_{G_f}$ από το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων.

   Ερώτηση 1: Υπάρχει διαφορικός άτλαντας στο G_f ώστε η L να είναι διαφορίσιμη;

   Αν $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^{1/3}$, τότε η

   $$L \circ (\psi \circ F)^{-1}(x) = L(x^3, |x^3|) = |x|^3$$

   είναι διαφορίσιμη. Αλλά τότε η $L'(x, y) = x^{1/3}$, που δεν είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^2$, ικανοποιεί

   $$L' \circ (\psi \circ F)^{-1}(x) = L'(x^3, |x^3|) = x,$$

   που είναι παραγωγίσιμη ως προς αυτή τη διαφορική δομή.

7. Διανυσματικος χώρος V πεπερασμένης διάστασης n. Έστω e_i μια βάση του, η οποία επάγει έναν ισομορφισμό $L : \mathbb{R}^n \to V$ με τον $\mathbb{R}^n$ ώστε

   $$L(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i.$$

Τότε αν $\phi = L^{-1}$, ο (V, ϕ) είναι ένας ολικός χάρτης και δίνει στον V δομή διαφορικής πολλαπλότητας.

Αυτή είναι ανεξάρτητη της επιλογής βάσης, αφού αν πάρουμε μια άλλη βάση και τον αντίστοιχο χάρτη ψ προκύπτει ότι η $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι μια αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$, και απομένως αμφιδιαφόριση.

8. Ανοιχτές υποπολλαπλότητες διαφορικών πολλαπλοτήτων. Αν $U \subset M$ είναι ανοιχτό υποσύνολο μιας διαφορικής πολλαπλότητας (με άτλαντα $\mathcal{A}$), τότε μπορούμε να ορίσουμε τον άτλαντα

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \phi) \in \mathcal{A}, V \subset U\}.$$

Σημείωση: περιορισμός ένος χάρτης σε ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού του είναι επίσης χάρτης, που περιέχεται στον ίδιο μεγιστικό άτλαντα.

9. Το σύνολο των πινάκων. Το σύνολο των $n \times m$ πινάκων είναι διανυσματικός χώρος διάστασης nm και άρα διαφορική πολλαπλότητα διάστασης nm.

10. Οι αντιστρέψιμοι πίνακες. Οι αντιστρέψιμοι πίνακες $Gl(n, \mathbb{R})$ είναι

$$Gl(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\} = \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Η det είναι συνεχής απεικόνιση, και επομένως το $Gl(n, \mathbb{R})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $M_n(\mathbb{R})$ και άρα ανοιχτή υποπολλαπλότητά του, διάστασης nm

4 Ομαλές απεικονίσεις μεταξύ ομαλών πολλαπλοτήτων

Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες.

Ορισμός 2. *Μια απεικόνιση $F : M \to N$ είναι ομαλή (αντίστοιχα διαφορίσιμη) αν για κάθε $p \in M$ υπάρχουν ομαλοί χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) των M και N αντίστοιχα, με $p \in U$ και $F(U) \subset V$ ώστε η $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ να είναι ομαλή (αντίστοιχα διαφορίσιμη).*

Λέμε ότι η F είναι διαφορίσιμη στο $p \in M$ αν υπάρχει (U, ϕ) χάρτης της M με $p \in U$ και χάρτης (V, ψ) της N με $F(U) \subset V$ ώστε η $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(p)$.

Λήμμα 1. *Αν μια απεικόνιση $F : M \to N$ είναι ομαλή, τότε είναι και συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $p \in M$, θέλουμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής στο p. Αφού η F είναι ομαλή, από τον ορισμό έχουμε ομαλούς χάρτες. (U, ϕ), $p \in U$ και (V, ψ), $F(U) \subset V$ ώστε η $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ να είναι ομαλή. Τότε γράφουμε την F ως

$$F = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}) \circ \phi : U \to V,$$

δηλαδή σύνθεση των απεικονίσεων $\phi, (\psi \circ F \circ \phi^{-1}), \psi^{-1}$ που είναι συνεχείς στο p, $\phi(p)$, $\psi \circ F(p)$ αντίστοιχα, και άρα η F είναι συνεχής στο p. □

Από την άλλη, αν γνωρίζουμε ότι μια απεικόνιση είναι συνεχής, μπορούμε ποιο εύκολα να ελέγξουμε ότι είναι ομαλή, με το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2. *Μια συνεχής απεικόνιση $F : M \to N$ είναι ομαλή αν για κάθε (U, ϕ) ομαλό χάρτη της M και (V, ψ) ομαλό χάρτη της N η σύνθεση*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

είναι ομαλή, στο πεδίο ορισμού της (αν είναι μη κενό)

Απόδειξη. Έστω $p \in M$, και (U, ϕ), (V, ψ) ομαλοί χάρτες στην M και N αντίστοιχα ώστε $p \in U$ και $F(p) \in V$. Από τη συνέχεια της F, $F^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό και άρα το $U' = F^{-1}(V) \cap U \subset U$ είναι ανοιχτό, και μάλιστα $p \in U'$. Περιορίζοντας τον χάρτη ϕ, έχουμε τον (ϕ, U') ώστε $F(U') \subset V$. Επιπλέον, η σύνθεση $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι ομαλή, και αυτό αρκεί για την απόδειξη του λήμματος. □

Λήμμα 3. *Σύνθεση $F_2 \circ F_1$ ομαλών απεικονίσεων $F_1 : M_1 \to M_2$ και $F_2 : M_2 \to M_3$ είναι ομαλή.*

Απόδειξη. Άσκηση □

Λήμμα 4. *(Επικόλληση ομαλών απεικονίσεων) Αν έχουμε ανοιχτά $U_i \subset M$ που καλύπτουν την M και για κάθε i*

$$F_i : U_i \to N$$

ομαλές απεικονίσεις ώστε $F_i|_{U_i \cap U_j} = F_j|_{U_i \cap U_j}$ τότε υπάρχει ομαλή απεικόνιση $F : M \to N$ ώστε $F|_{U_i} = F_i$ για κάθε i.

Απόδειξη. Ορίζουμε για $x \in U_i$, $F(x) = F_i(x)$. Η F είναι καλά ορισμένη αφού οι F_i συμφωνούν στις τομές $U_i \cap U_j$.

Για την ομαλότητα της F έχουμε: για κάθε p υπάρχει U_i ώστε $p \in U_i$ και $F|_{U_i} = F_i$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της ομαλότητας στο U_i παίρνουμε χάρτες του U_i (που είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα της) που πληρούν τον ορισμό, οι οποίοι είναι και χάρτες της M.... $\square$

4.1 Παραδείγματα

1. Η απεικόνιση $\iota : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι ομαλή.

   Είναι συνεχής αφού η τοπολογία στην $\mathbb{S}^n$ εξαρχής κατασκευάστηκε ώστε η i να είναι συνεχής.

   Θα θεωρήσουμε του χάρτες $(U_i^{\pm}, \phi_i^{\pm})$, που περιγράφουν τα “ημισφαίρια” της $\mathbb{S}^n$ σαν γραφήματα πάνω από το $\{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Για τον $\mathbb{R}^{n+1}$ η ταυτοτική απεικόνιση είναι ένας ολικός χάρτης, δεν θα χρειαστεί να την γράψουμε.

   Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \iota \circ (\phi_i^{\pm})^{-1}(x^1, \ldots, x^n) &= \iota(x^1, \ldots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1-|x|^2}, x^{i+1}, \ldots, x^n) \\ &= (x^1, \ldots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1-|x|^2}, x^{i+1}, \ldots, x^n), \end{aligned}$$

   που είναι βεβαίως ομαλή στο πεδίο ορισμού της.

2. Η απεικόνιση $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ είναι ομαλή.

   Είναι συνεχής επειδή το $\mathbb{RP}^n$ έχει την τοπολογία πηλίκο. Αν πάρουμε ένα χάρτη $(\phi_i, \pi(U_i))$, $U_i = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}), x^i \neq 0\}$

$$\phi_i([x^1, \ldots, x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$$

   τότε

$$\phi_i \circ \pi(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \phi_i([x^1, \ldots, x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right),$$

   που είναι ομαλή.

4.2 Αμφιδιαφορίσεις

Μια απεικόνιση $F : M \to N$ λέγεται αμφιδιαφόριση αν

- Είναι ομαλή

- Είναι $1-1$ και επί
- Η αντίστροφή της F^{-1} είναι ομαλή.

Αν για δύο διαφορικές πολλαπλότητας M, N υπάρχει αμφιδιαφόριση $F: M \to N$, τότε λέμε ότι οι M, N είναι αμφιδιαφορικές.

Η σχέση: $M \sim N$ αν και μόνο αν M, N είναι αμφιδιαφορικές είναι σχέση ισοδυναμίας.

Στον $\mathbb{R}$ είχαμε ορίσει δύο διαφορετικές διαφορικές δομές, την $(\mathbb{R}, \phi)$, $(\mathbb{R}, \psi)$, με

$$\phi(x) = x$$
$$\psi(x) = x^3.$$

Αν και διαφορετικές, μπορούμε να δούμε ότι είναι αμφιδιαφορικές μεταξύ τους, μέσω της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/3}$, γιατί τότε

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) = \psi \circ f(x) = x,$$

επομένως και

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1}(x) = x,$$

και άρα οι f, f^{-1} είναι ομαλές ανάμεσα στις δυο διαφορικές πολλαπλότητες.

- Υπάρχουν τοπολογικές πολλαπλότητες με δύο ή περισσότερες διαφορικές δομές που ΔΕΝ είναι αμφιδιαφορικές μεταξύ τους;
  - (Munkres, Moise): Κάθε τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης ≤ 3 έχει διαφορική δομή, μοναδική ως προς αμφιδιαφορίσεις.
  - $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ έχει μοναδική, ως προς αμφιδιαφορίσεις, διαφορική δομή.
  - $\mathbb{R}^4$: Έχει υπεραριθμήσιμο πληθως μη αμφιδιαφορικών διαφορικών δομών
  - (Kervaire – Milnor) Η $\mathbb{S}^7$ έχει 28 μη αμφιδιαφορικές διαφορικές δομές (εξωτικές σφαίρες)
- (Freedman – Donaldson) Σε διάσταση ≥ 4 υπάρχουν τοπολογικές πολλαπλότητες που δεν έχουν καμία διαφορική δομη!

5 Διαμερίσεις της μονάδας - partitions of unity

Βασικά ερώτηματα:

- Πως μπορούμε να ενώσουμε ομαλές απεικονίσεις ορισμένες σε υποσύνολα μεταξύ τους ώστε να πάρουμε ομαλή απεικόνιση ορισμένη σε ολόκληρη την διαφορική πολλαπλότητα; Είδαμε ότι ΑΝ έχουμε ομαλές απεικονίσεις σε ανοιχτά υποσύνολα που καλύπτουν ΚΑΙ αυτές συμφωνούν στις επικαλύψεις τότε υπάρχει ομαλή απεικόνιση από όλη την πολλαπλότητα.
- Πως μπορούμε να επεκτείνουμε μια ομαλή απεικόνιση που είναι ορισμένη σε υποσύνολο σε μια που είναι ορισμένη σε όλη τη διαφορική πολλαπλότητα;

5.1 Bump functions

Λήμμα 5. *Υπάρχει ομαλή απεικόνιση $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $0 \leq H(x) \leq 1$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $H(x) = 1$ *για κάθε* $x \in \overline{B_1(0)}$.
3. $H(x) = 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_2(0)}$, *δηλαδή supp*$f = \overline{B_2(0)}$.

Γενικά, ορίζουμε το στήριγμα μια συνάρτησης f

$$\text{supp} f = \overline{\{x, f(x) \neq 0\}}$$

Απόδειξη. Αν έχουμε ομαλή $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $h(x) = 1$ για $x \leq 1$ και $h(x) = 0$ για $x \geq 2$ μπορούμε να ορίσουμε την H ως $H(x) = h(|x|)$ που είναι ομαλή, γιατί γύρω από το 0, που ενδεχομένως να υπάρχει πρόβλημα λόγω της $|x|$, η h είναι σταθερή.

Την h μπορούμε να την κατασκευάσουμε αξιοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

η οποία είναι ομαλή, ακόμα και στο 0 (άσκηση), $0 \leq f(x) \leq 1$ και $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 1$, και μετά να ορίσουμε την h

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)},$$

που ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες (ελέγξτε το) $\square$

5.2 Παρασυμπάγεια

Εκλέπτυνση (refinement) ανοιχτού καλύματος $\mathcal{U}$ ενός τοπολογικού χώρου X, δηλαδή

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

είναι ένα άλλο ανοιχτό κάλυμα $\mathcal{V}$ του X ώστε για κάθε $V \in \mathcal{V}$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ ώστε $V \subset U$.
ΠΡΟΣΟΧΗ: η εκλέπτυνση ενός καλύματος δεν είναι υποκάλυμα

Παρασυμπαγής (paracompact) ονομάζεται ένας τοπολογικός χώρος X που έχει την ιδιότητα ότι κάθε ανοιχτό κάλυμά του $\mathcal{U}$ έχει μια **τοπικά πεπερασμένη (locally finite)** εκλέπτυνση, δηλαδή κάθε $x \in X$ έχει ανοιχτή περιοχή που τέμνει το πολύ πεπερασμένο πλήθος από τα $U \in \mathcal{U}$.

Πρόταση 1. *Κάθε ομαλή πολλαπλότητα M είναι παρασυμπαγής, και μάλιστα κάθε ανοιχτό κάλυμά της $\mathcal{U}$ έχει μια τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\mathcal{W}$ που*

- *Είναι αριθμήσιμη.*
- *Για κάθε $W \in \mathcal{W}$ υπάρχει ομαλός χάρτης (W, ϕ_W), $\phi : W \to B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$*
- *Το $\mathcal{V} = \{\phi_W^{-1}(B_1(0)), W \in \mathcal{W}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμα της M.*

Απόδειξη. Η απόδειξη στηρίζεται έντονα στο ότι υποθέσαμε εξ'ορισμού ότι μια τοπολογική πολλαπλότητα είναι second countable. Δεν θα γίνει στο μάθημα, παραπέμπουμε στον Lee. □

5.3 Διαμερίσεις της μονάδας

Ορισμός 3. *Έστω $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ένα ανοιχτό κάλυμα ενός τοπολογικού χώρου M. Διαμέριση της μονάδας συμβατή με το κάλυμα $\mathcal{U}$ είναι μια συλλογή $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ συναρτήσεων $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ ώστε*

- $0 \le \psi_a(x) \le 1$ *για κάθε $x \in M$.*
- *supp*$\psi_\alpha \subset U_\alpha$
- *Το σύνολο $\{supp\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ είναι τοπικά πεπερασμένο.*
- $\sum_{\alpha \in A} \psi_a(x) = 1$ *για κάθε $x \in M$: το άθροισμα είναι πεπερασμένο λόγω της προηγούμενης ιδιότητας.*

Θεώρημα 1 (Υπαρξη διαμερίσεων της μονάδας)**.** *Αν M είναι μια διαφορική πολλαπλότητα και $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ είναι ένα (οποιοδήποτε) ανοιχτό κάλυμα της M, τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ συμβατή με το κάλυμα $\mathcal{U}$.*

5.3.1 Εφαρμογές

1. Bump functions πάνω στην πολλαπλότητα:

   Λήμμα 6. *Αν M διαφορική πολλαπλότητα, $A \subset M$ κλειστό και U ανοιχτο με $A \subset U$ τότε υπάρχει $f : M \to \mathbb{R}$ ώστε*

   - $f|A \equiv 1$
   - $0 \leq f \leq 1$
   - $suppf \subset U$

   Απόδειξη. Θεωρούμε το κάλυμα $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ με $U_0 = U$ και $U_1 = M \setminus A$. Από το προηγούμενο θεώρημα παίρνουμε διαμέριση της μονάδας ψ_0, ψ_1. Θέτουμε $f = \psi_0$ και προφανώς από το θεώρημα supp$f \subset U$. Επίσης για κάθε $x \in M$ $\psi_0(x)+\psi_1(x) = 1$. Όμως supp$\psi_1 \subset U_1 = M \setminus A$ και επομένως $\psi_1(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Επομένως, $f(x) = \psi_0(x) = 1$ για κάθε $x \in A$. □

2. Επέκταση ομαλών συναρτήσεων:

   Λήμμα 7. *Αν M και A όπως στο προηγούμενο λήμμα και έχουμε $f : A \to \mathbb{R}^k$ ομαλή, τότε για κάθε U ανοιχτό με $A \subset U$ υπάρχει ομαλή επέκταση $F : M \to \mathbb{R}^k$ της f ώστε $F|_A = f$ και $suppF \subset U$.*

   Απόδειξη.

   - Το ότι η f είναι ομαλή σημαίνει ότι για κάθε $p \in A$ υπάρχει ανοιχτό W_p που περιέχει το p και ομαλή επέκταση $F_p : W_p \to \mathbb{R}^k$ της f.
   - Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $W_p \subset U$, παίρνοντας τομές.
   - Θέλουμε κάπως να ενώσουμε αυτές τις επεκτάσεις.
   - Εφαρμόζουμε το θεώρημα ύπαρξης διαμερίσεων της μονάδας στο κάλυμα

     $$\{W_p,\ p \in A\} \cup \{M \setminus A\},$$

     και παίρνουμε ψ_p, με supp$\psi_p \subset W_p$ και ψ_0 με supp$\psi_0 \subset M \setminus A$ και ορίζουμε

     $$F(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) F_p(x),$$

     που είναι άθροισμα ομαλών συναρτήσεων (γιατί είναι ομαλές; γιατί το άθροισμα είναι ομαλή συνάρτηση;)

- Υπολογίζουμε $F(x)$ για κάποιο $x \in A$, χρησιμοποιώντας ότι $\psi_0 \equiv 0$ στο A

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{p \in A} \psi_p(x) F_p(x) \\
&= \psi_0(x) f(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x) F_p(x) \\
&= \psi_0(x) f(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x) f(x) \\
&= \left(\psi_0(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x) \right) f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

□

6 Απεικονίσεις επικάλυψης (covering maps) - δεν διδάχθηκε

Συνεχίζουμε με ειδικές περιπτώσεις ομαλών απεικονίσεων, αυτή τη φορά με τις απεικονίσεις επικάλυψης.

6.1 Βασικές ιδιότητες τοπολογικών απεικονίσεων επικάλυψης.

Ορισμός 4. *(Απεικόνιση επικαλυψης) Μια απεικόνιση $\pi : \tilde{X} \to X$ λέγεται απεικόνιση επικάλυψης αν*

1. *$\tilde{X}$ είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός, και τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός (έχει βάση τοπολογίας από κατά μονοπάτια συνεκτικά σύνολα)*
2. *Είναι επί.*
3. *Κάθε $p \in N$ έχει ανοιχτή γειτονιά $U \subset N$ ώστε*
   - *U συνεκτικό σύνολο.*
   - *Ο περιορισμός της π σε κάθε συνεκτική συνιστώσα V του $\pi^{-1}(U)$ είναι ομοιομορφισμός των V και U (λέμε ότι η π είναι τοπικός ομοιομορφισμός)*

- Κάθε απεικόνιση επικάλυψης είναι ανοιχτή απεικόνιση.
- Κάθε απεικόνιση επικάλυψης είναι και απεικόνιση πηλίκο (αλλά όχι το αντίστροφο)

  Ορισμός 5. *Μια συνεχής απεικόνιση $\pi : \tilde{X} \to X$, $\tilde{X}, X$ τοπολογικοί χώροι, ονομάζεται απεικόνιση πηλίκο αν είναι επί και η τοπολογία του X είναι η τοπολογία πηλίκο, που επάγει από την $\tilde{X}$ η π:*

  – *$U \subset X$ ανοιχτό αν και μόνο αν $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ ανοιχτό.*

- Αν $\pi : \tilde{X} \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης, τότε ο πληθάριθμος του συνόλου $\pi^{-1}(x)$ είναι ανεξάρτητος του x: είναι τοπικά σταθερός.
- Αν $\pi : \tilde{X} \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης και $F : Y \to X$ συνεχής τότε μια ανύψωση της F είναι μια συνεχής απεικόνιση $\tilde{F} : Y \to \tilde{X}$ ώστε $F = \pi \circ \tilde{F}$.
  – (Μοναδικότητα) Αν δύο ανυψώσεις της F συμφωνούν σε ένα σημείο, τότε είναι ίδιες.
  – (Ανύψωση μονοπατιών) Αν έχουμε συνεχή καμπύλη $\gamma : I \to X, \gamma(0) = x$ και $\pi(\tilde{x}) = x$, τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση της γ, $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$, ώστε $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$.

6.2 Ομαλές απεικονίσεις επικάλυψης

Αν οι M, N είναι διαφορικές πολλαπλότητες, τότε έχουμε τον αντίστοιχο ορισμό της ομαλής απεικόνισης επικάλυψης:

Ορισμός 6. *(Ομαλή απεικόνιση επικαλυψης) Μια απεικόνιση $\pi : M \to N$ λέγεται ομαλή απεικόνιση επικάλυψης αν*

1. *Είναι ομαλή και επί.*
2. *Κάθε $p \in N$ έχει ανοιχτή γειτονιά $U \subset N$ ώστε*
    - *U συνεκτικό σύνολο.*
    - *Ο περιορισμός της π σε κάθε συνεκτική συνιστώσα V του $\pi^{-1}(U)$ είναι αμφιδιαφόριση των V και U (λέμε ότι η π είναι τοπική αμφιδιαφόριση)*

Παραδείγματα:

1. $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$, είναι ομαλή απεικόνιση επικάλυψης.
2. $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$, $\tilde{\pi} = \pi \circ i$, όπου $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ και $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ η απεικόνιση πηλίκο, είναι ομαλή απεικόνιση επικάλυψης.

    Για κάθε $[x] \in \mathbb{RP}^n$, $\tilde{\pi}^{-1}([x] = \left\{\frac{x}{|x|}, -\frac{x}{|x|}\right\}$.

    Αν $[x] \in V = \pi(U_i)$, τότε

    $$\begin{aligned} \tilde{\pi}^{-1}(V) &= (\pi \circ i)^{-1}(V) \\ &= i^{-1}(\pi^{-1}(V)) \\ &= i^{-1}(U_i) \\ &= U_i^+ \cup U_i^- \end{aligned}$$

    και $\tilde{\pi}|_{U_i^+} : U_i^+ \to \pi(U_i)$ δίνεται από

    $$\tilde{\pi}|_{U_i^+}(x^1, \dots, x^{n+1}) = \pi(x^1, \dots, x^{n+1}) = [x^1, \dots, x^{n+1}]$$

    η οποία είναι $1-1$ (αφού $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ και επί. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε (άσκηση) ότι είναι ομαλή με ομαλό αντίστροφο. Τα ίδια ισχύουν και για την $\tilde{\pi}|_{U_i^-} : U_i^- \to \pi(U_i)$ (άσκηση)

    Άρα η $\tilde{\pi}$ είναι ομαλή απεικόνιση επικάλυψης.

    ΠΡΟΣΟΧΗ: η απεικόνιση πηλίκο π δεν είναι απεικόνιση επικάλυψης!

Πρόταση 2. *(ιδιότητες)*

- *Κάθε ομαλή απεικόνιση επικάλυψης είναι ανοιχτή απεικόνιση.*
- *Μια* $1-1$ *ομαλή απεικόνιση επικάλυψης είναι αμφιδιαφόριση.*

Λήμμα 8. *Αν* $\pi : \tilde{M} \to M$ *είναι μια ομαλή απεικόνιση επικάλυψης, τότε για κάθε* $x \in M$ *και* $y \in \pi^{-1}(x)$*, υπάρχει ανοιχτή γειτονιά* $x \in U \subset M$ *και ομαλή απεικόνιση* $\sigma : U \to \tilde{M}$ *που ικανοποιεί* $\pi \circ \sigma = id_M$ *και* $\sigma(x) = y$*. (Τέτοια* σ *ονομάζεται τοπική τομή της* π*. Είναι ουσιαστικά μια τοπική ανύψωση της ταυτοτικής απεικόνισης)*

Απόδειξη. Έστω U μια γειτονιά του x ώστε οι συνεκτικές συνιστώσες του $\pi^{-1}(U)$ να είναι αμφιδιαφορικές του U και έστω $\tilde{U}$ μία από αυτές. Τότε η $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ είναι αμφιδιαφόριση. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε $\sigma : U \to \tilde{M}$ ως $\sigma = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$. □

Συνέπεια είναι ότι αν $\pi : \tilde{M} \to M$ είναι μια ομαλή απεικόνιση επικάλυψης, τότε μια $F : M \to N$ είναι ομαλή αν και μόνο αν η $F \circ \pi : \tilde{M} \to N$ είναι ομαλή:

Για κάθε $x \in M$ ας πάρουμε U και $\sigma : U \to \tilde{U}$ τοπική τομή της π, που είναι αμφιδιαφόριση. Τότε

$$F|_U = (F \circ \pi) \circ \sigma$$

που είναι σύνθεση ομαλών και άρα ομαλή.

Τέλος,

Πρόταση 3. *Αν* M *είναι μια συνεκτική διαφορική πολλαπλότητα διάστασης* n *και* $\pi : \tilde{M} \to M$ *μια τοπολογική απεικόνιση επικάλυψης (*$\tilde{M}$ *απλά τοπολογικός χώρος) τότε* $\tilde{M}$ *είναι τοπολογική πολλαπλότητα και δέχεται διαφορική δομή ώστε η* π *να είναι ομαλή απεικόνιση επικάλυψης.*

6.3 Proper maps

Μια proper απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι μία που έχει την ιδιότητα ότι αντίστροφες εικόνες συμπαγών είναι συμπαγείς.

- Μια proper συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών πολλαπλοτήτων είναι κλειστή: στέλνει κλειστά σε κλειστά.

Πρόταση 4. *Αν μια απεικόνιση* $F : M \to N$ *είναι proper και τοπική αμφιδιαφόριση, τότε είναι απεικόνιση επικάλυψης.*

7 Εφαπτόμενα διανύσματα σε ομαλές πολλαπλότητες

- Γεωμετρικά εφαπτόμενα διανύσματα. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$ - το αντιλαμβανόμαστε σαν σημείο. Τότε ας ορίσουμε

$$\mathbb{R}^n_a = \{(a, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}.$$

Κάθε $(a, v) \in \mathbb{R}^n_a$ μπορούμε να το σκεφτόμαστε σαν ένα διάνυσμα παράλληλο στο $v \in \mathbb{R}^n$ και σημείο εφαρμογής το $a \in \mathbb{R}^n$.

- Παραγωγίσεις. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα. Ας συμβολίσουμε με $C^\infty(M)$ το σύνολο των ομαλών (διαφορίσιμων) συναρτήσεων $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$.

Μια παραγώγιση D στο $p \in M$ θα ονομάζουμε κάθε γραμμική απεικόνιση

$$D : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},$$

δηλαδή $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$, και που επιπλέον ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz, όσον αφορά στα γινόμενα, δηλαδή

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f).$$

Το σύνολο όλων των παραγωγίσεων σε κάποιο σημείο $p \in M$ θα το συμβολίζουμε με T_pM.

Το T_pM είναι διανυσματικός χωρος πάνω από το $\mathbb{R}$ με τις πράξεις

$$(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f),$$
$$(\kappa D)(f) = \kappa D(f).$$

- Παραγωγίσεις στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι κάθε γεωμετρικό εφαπτόμενο διάνυσμα $v_a = (a, v) \in \mathbb{R}^n_a$ επάγει μια παραγώγιση $D_{v_a} \in T_a\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$D_{v_a}(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a + tv),$$

Άσκηση: ελέγξτε ότι είναι παραγώγιση.

Μάλιστα, η απεικόνιση $D : \mathbb{R}^n_a \to T_a\mathbb{R}^n$ είναι γραμμική.

Επίσης, αν $v_a = (a, v)$ με $a = a^i e_i$, $v = v^i e_i$ και $D_{v_a}(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ τότε θέτοντας $f = x^i$ παίρνουμε

$$0 = D_{v_a}(x^i) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x^i(a + tv) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a^i + tv^i) = v^i,$$

επομένως $KerD = \{(a, 0)\}$ οπότε η D είναι $1 - 1$.

Αλλά και αντίθετα, έστω $D \in T_a\mathbb{R}^n$ και ας ορίσουμε $v^i = D(x^i)$ και $v = v^i e_i$.

Από το θεώρημα του Taylor $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - a^i)$, με $g^i(a) = 0$,

$$D_{v_a}(f) = D_{v_a}(f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - a^i)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i,$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε παραγώγιση μηδενίζει τις σταθερές συναρτήσεις, αλλά και γινόμενα fg συναρτήσεων με $f(a) = g(a) = 0$. Αν αυτά ισχύουν, τότε δείξαμε ότι η D είναι ισομορφισμός μεταξύ των $\mathbb{R}^n_a$ και $T_a\mathbb{R}^n$. Προκύπτει μάλιστα ότι ο $T_a\mathbb{R}^n$ είναι πεπερασμένης διάστασης n, το οποίο δεν ηταν εξ'αρχής προφανές.

Θα τα αποδείξουμε αυτά στη γενική περίπτωση, για μια διαφορική πολλαπλότητα M.

Λήμμα 9. *Αν M είναι διαφορική πολλαπλότητα $p \in M$, και $D \in T_pM$ τότε*

1. *Για $f = c \in C^\infty(M)$, μια σταθερή συνάρτηση, $D(f) = 0$.*
2. *Για $f, g \in C^\infty(M)$ με $f(p) = g(p) = 0$, τότε $D(fg) = 0$.*

Απόδειξη. Για το πρώτο έχουμε, για κάθε $D \in T_pM$ και $f(x) = 1$

$$D(f) = D(f^2) = f(p)D(f) + f(p)D(f) = 2D(f),$$

και άρα $D(f) = 0$.

Για το δεύτερο, αν $f, g \in C^\infty(M)$ με $f(p) = g(p) = 0$ και $D \in T_pM$

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) = 0.$$

□

- Εφαπτόμενα διανύσματα σε διαφορικές πολλαπλότητες. Μια διαφορική πολλαπλότητα δεν βρίσκεται μέσα σε Ευκλείδιο χώρο, επομένως δεν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτόμενα διανύσματα με τον παραπάνω γεωμετρικό τρόπο. Εμπνεώμενοι όμως από τον ισομορφισμό μεταξύ γεωμετρικών διανυσμάτων και παραγωγίσεων του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να ΟΡΙΣΟΥΜΕ τα εφαπτόμενα διανύσματα ως παραγωγίσεις.

  Έστω λοιπόν M διαφορική πολλαπλότητα και $p \in M$. Το σύνολο T_pM των διαφορίσεων στο p θα το ονομάζουμε εφαπτόμενο χώρο της M στο p και τα στοιχεία του εφαπτόμενα διανύσματα στο p.

- Ο εφαπτόμενος χώρος T_pM έχει διάσταση όση και η πολλαπλότητα. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε χάρτες ώστε να περάσουμε τη συζήτηση στον $\mathbb{R}^n$.

  Έστω $p \in M$ και (U, ϕ) κάποιος ομαλός χάρτης γύρω από το p.

  Εδώ βλέπουμε ήδη μερικά προβλήματα:

  1. Το Y είναι παραγώγιση στην M όχι στο U, δηλαδή $Y : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ (όχι $Y : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$)
  2. Πρέπει να καταλάβουμε πώς σχετίζονται παραγωγίσεις στο U με τις παραγωγίσεις στο $\phi(U)$

- Το pushforward μιας παραγώγισης. Έστω $F : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση (όπως για παράδειγμα ένας χάρτης $\phi : U \to \mathbb{R}^n$) και $p \in M$. Ορίζουμε την απεικόνιση pushforward

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$

  ώστε για κάθε $Y \in T_pM$ και $f \in C^\infty(N)$

$$(F_*Y)(f) = Y(f \circ F),$$

  αφού $f \circ F \in C^\infty(M)$.

Άσκηση: να ελέγξετε ότι όντως η F_*Y είναι παραγώγιση (γραμμικότητα και Leibniz)

Λήμμα 10. *(Ιδιότητες pushforward) Έστω M, N, P διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$, $G : N \to P$ διαφορίσιμες απεικονίσης, και $p \in M$. Τότε*

1. *$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ είναι γραμμική απεικόνιση.*
2. *Αν $id_M : M \to M$, $id_M(x) = x$, τότε $(id_M)_* = id_{T_pM}$*
3. *$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{G(F(p))}P$*
4. *Αν η F είναι αμφιδιαφόριση τότε η F_* είναι ισομορφισμός και $(F^{-1})_* = F_*^{-1}$.*

Απόδειξη. 1. Έστω $Y \in T_pM$ και $f \in C^\infty(M)$. Τότε

$$((\mathrm{id}_M)_*Y)(f) = Y(f \circ \mathrm{id}_M) = Y(f) = (\mathrm{id}_{T_pM}(Y))(f),$$

που δείχνει το ζητούμενο.

2. Έστω $f \in C^\infty(P)$

$$\begin{aligned}((G \circ F)_*Y)(f) &= Y(f \circ G \circ F)\\ &= (F_*Y)(f \circ G)\\ &= G_*(F_*Y)(f)\\ &= (G_* \circ F_*Y)(f)\end{aligned}$$

3. Προκύπτει από τα παραπάνω αφού $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_M$.

$\square$

- Τοπικότητα των παραγωγίσεων.

Λήμμα 11. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα, $f, g \in C^\infty(M)$ και $U \subset M$ ανοιχτό ώστε $f = g$ στο U. Έστω $p \in U$ και $X \in T_pM$. Τότε*

$$X(f) = X(g).$$

Απόδειξη. Έστω $h = f - g$, θα δείξουμε ότι $X(h) = 0$, όπου η $h = 0$ στη γειτονιά U του p. Παρατηρούμε ότι

$$X(\psi h) = h(p)X(\psi) + \psi(p)X(h).$$

Θέλουμε να γράψουμε $h = \psi h$ χρησιμοποιώντας μια bump function που να ικανοποιεί

1. $\psi = 1$ όποτε $h \neq 0$, δηλαδή $\psi|_{\mathrm{supp}(h)} = 1$ (ώστε $\psi h = h$.)
2. $\psi(p) = 0$, για το οποίο αρκεί $\mathrm{supp}(\psi) \subset M \setminus \{p\}$

Είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε τέτοια bump function, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6. $\square$

- Παραγωγίσεις σε ανοιχτές υποπολλαπλότητες.

Λήμμα 12. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $U \subset M$ ανοιχτή υποπολλαπλότητά της. Αν $\iota : U \to M$, $\iota(x) = x$ και $p \in U$ τότε το pushforward $\iota_* : T_pU \to T_pM$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη.

- $1-1$: Έστω $X \in T_pU$ ώστε $\iota_*(X) = 0$, δηλαδή για κάθε $\tilde{f} \in C^\infty(M)$,

$$0 = (\iota_* X)(\tilde{f}) = X(\tilde{f} \circ \iota)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $X = 0$, ισοδύναμα ότι για κάθε $f \in C^\infty(U)$, $X(f) = 0$. Για να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω πρέπει να επεκτείνουμε την f σε όλη την M.
Έστω $p \in B \subset U$ ανοιχτό, με $\bar{B} \subset U$. Από το Λήμμα 7 έχουμε ότι υπάρχει $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ ώστε $\tilde{f} = f$ στο $\bar{B}$.
Επομένως, $\tilde{f} \circ \iota|_B = f|_B$ στο και άρα

$$X(f) = X(\tilde{f} \circ \iota) = 0.$$

– Επί: Έστω $Y \in T_pM$, πρέπει να βρούμε $X \in T_pU$ ώστε $\iota_* X = Y$. Ορίζουμε το X ώστε για κάθε $f \in C^\infty(U)$, αν $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ είναι μια επέκταση της f στην που συμφωνεί στο $\bar{B}$ (υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια από το Λήμμα 7) τότε

$$X(f) = Y(\tilde{f}).$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επέκτασης $\tilde{f}$ αφού όλες συμφωνούν σε γειτονιά του p.

$\square$

Λόγω του παραπάνω ισομορφισμού, δεν θα συμβολίζουμε διαφορετικά τον εφαπτόμενο χώρο μιας ανοιχτής υποπολλαπλότητας, και απλά θα γράφουμε T_pM, για $p \in U$, κάνοντας την ταύτιση $T_pM \approx T_pU$.

- Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης γύρω από το $p \in M$ τότε
  - $\iota_* : T_qU \to T_qM$ είναι ισομορφισμός για κάθε $q \in U$
  - $\phi_* : T_qU \to T_{\phi(q)}\mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός για κάθε $q \in U$.
  - $T_{\phi(q)}\mathbb{R}^n$ είναι ισόμορφο με $\mathbb{R}^n_{\phi(q)}$ (για κάθε $q \in U$) και άρα διάστασης n.

Συνεπώς, T_qM (για κάθε $q \in U$) είναι διάστασης n ισομορφικός με το $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τα

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q = \phi_*^{-1}(e_i|_{\phi(q)}),$$

όπου η παραγώγιση e_i δρά σε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ως $e_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.
Τότε το σύνολο $\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_q, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_q\}$ είναι βάση του T_qM για κάθε $q \in U$.
Επομένως κάθε $X \in T_qM$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q,$$

όπου οι συντεταγμενες του X, τα X^i, μπορούν να υπολογιστούν ως

$$\begin{aligned}
X(x^j) &= X^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q (x^j) \\
&= X^i[\phi_*^{-1}(e_i|_{\phi(q)})](x^j) \\
&= X^i e_i|_{\phi(q)}(x^j \circ \phi^{-1}) \\
&= X^i e_i|_{\phi(q)}(\mathrm{pr}^j \circ \phi \circ \phi^{-1}) \\
&= X^i \frac{\partial \mathrm{pr}^j}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \\
&= X^i \delta_i^j = X^j.
\end{aligned}$$

- Δράση σε συναρτήσεις. Υπολογίζουμε ότι για μια συνάρτηση $f \in C^\infty(U)$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q f = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(q)$$

- Το pushforward σαν παράγωγος μιας ομαλής $F : M^n \to N^m$ - έκφραση σε συντεταγμένες.

  Έστω $p \in M$, (U, ϕ) χάρτης της M γύρω από το p και (V, ψ) χάρτης της N γύρω από το $F(p)$, και έστω $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$, και $\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}$, $j = 1, \ldots, m$ οι βάσεις των T_pM και $T_{F(p)}N$ αντίστοιχα, από τους δυο χάρτες (x^i οι συντεταγμένες του (U, ϕ) ενώ τα y^j είναι οι συντεταγμένες του (V, ψ))

  Τότε αν $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$, και $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$:

$$\begin{aligned} F_*(X) &= F_*(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p) \\ &= X^i F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p). \end{aligned}$$

  Τώρα για κάθε $F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}$, όπου

$$\begin{aligned} Y^j &= F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p)(y^j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (y^j \circ F) \\ &= \frac{\partial(y^j \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \end{aligned}$$

  Αν συμβολίσουμε με $\hat{F}(x^1, \ldots, x^n) = (\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)$ την αναπαράσταση της F μέσω των χαρτών (U, ϕ) και (V, ψ), έχουμε ότι $\hat{F} = (\hat{F}^1, \ldots, \hat{F}^m)$, με $\hat{F}^j = y^j \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$, και άρα

$$Y^j = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\phi(p))$$

  οπότε

$$F_*(X) = X^i \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{F(p)}.$$

οπότε σε επίπεδο συντεταγμενων το pushforward δίνεται από την αντιστοιχία

$$(X^i)_{i=1,\dots,n} \mapsto \left(X^i \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \right)_{j=1,\dots,m}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το pushforward δίνεται, σε συντεταγμένες, από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{F}^1}{\partial x^1}(\phi(p)) & \cdots & \frac{\partial \hat{F}^1}{\partial x^n}(\phi(p)) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \hat{F}^m}{\partial x^1}(\phi(p)) & \cdots & \frac{\partial \hat{F}^m}{\partial x^n}(\phi(p)) \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της $\hat{F} : \phi(U) \to \psi(V)$.

Επομένως το pushforward F_* παίζει το ρόλο της παραγώγου της F, και θα μπορούσαμε να το συμβολίσουμε και με DF (ο Lee το αποφεύγει, αλλά συνηθίζεται στη βιβλιογραφία)

- Λείες (διαφορίσιμες) καμπύλες

Μια λεία καμπύλη σε μια διαφορική πολλαπλότητα M (απλά καμπύλη από εδώ και στο εξής) είναι μια λεία απεικόνιση $\gamma : I \to M$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ είναι κάποιο ανοιχτό διάστημα.

Αν $0 \in I$ και $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \in T_0\mathbb{R}$ η βάση του $T_0\mathbb{R}$ ως προς τον ταυτοτικό χάρτη του $\mathbb{R}$ τότε συμβολίζουμε

$$\gamma'(0) := \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \right) \in T_{\gamma(0)}M.$$

και το ονομάζουμε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης γ στο $\gamma(0)$.

Πρόταση 5. *Κάθε $X \in T_pM$ προκύπτει με αυτό τον τρόπο, υπάρχει δηλαδή καμπύλη γ με $\gamma(0) = p$ ώστε $X = \gamma'(0)$.*

Απόδειξη. Έστω χάρτης (U, ϕ) γύρω από το p με $\phi(p) = 0$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ και ας θεωρήσουμε την ευθεία $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\sigma(t) = tX^i e_i$$

Τότε $(\phi^{-1} \circ \sigma)_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \right) = X$, και επομένως αρκεί να θέσουμε $\gamma = \phi^{-1} \circ \sigma$. □

Η δράση του $\gamma'(0)$ σε μια συνάρτηση $f \in C^\infty(M)$ δίνεται από

$$\begin{aligned}
\gamma'(0)(f) &= \gamma_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \right)(f) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 (f \circ \gamma) \\
&= (f \circ \gamma)'(0).
\end{aligned}$$

Επομένως για να υπολογίσουμε το $X(f)$ για καποιο $X \in T_pM$ αρκεί να υλοποιήσουμε το X σαν το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(0)$ κάποιας καμπύλης που διέρχεται από το p.

- Pushforward και καμπύλες.

  Αν $F : M \to N$, $X = \gamma'(0) \in T_pM$ τότε

$$\begin{aligned}
F_*X &= F_* \circ \gamma_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \right) \\
&= (F \circ \gamma)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \right) \\
&= (F \circ \gamma)'(0).
\end{aligned}$$

8 Εφαπτόμενη δέσμη και διανυσματικά πεδία.

- Η εφαπτόμενη δέσμη ορίζεται ως η ξένη ένωση

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

Ορίζουμε την προβολή $\pi : TM \to M$ μέσω της συνθήκης $\pi(X) = p$ αν και μόνο αν $X \in T_pM$. Η π είναι συνεχής απεικόνιση.

- TM είναι διαφορική πολλαπλότητα με χάρτες που προκύπτουν από χάρτες (U, ϕ) της M. Συγκεκριμένα, $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ με

$$\Phi(W) = (\phi \circ \pi(W), w^1, \ldots, w^n),$$

δηλαδή για $p \in U$

$$\Phi\left(w^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), w^1, \ldots, w^n)$$

αν $W = w^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(W)}$. Αντίστροφα, αν $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \phi(U)$, τότε

$$\Phi^{-1}(x^1, \ldots, x^n, w^1, \ldots, w^n) = w^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\phi^{-1}(x)}$$

Αυτό προκύπτει με εφαρμογή του επόμενου, αρκετά γενικού λήμματος:

Λήμμα 13. *(Κατασκευή διαφορικής πολλαπλότητας) Έστω ένα σύνολο M, μια οικογένεια υποσυνόλων $U_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$ και $1-1$ απεικονίσεις $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ ώστε:*

1. *$\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό.*
2. *$\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*
3. *Αν $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ τότε η*

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   είναι αμφιδιαφόριση.
4. *Αριθμήσιμα από τα U_α καλύπτουν την M.*
5. *Αν $p \neq q \in M$ τότε είτε $p, q \in U_\alpha$ για κάποιο α είτε υπάρχουν α, β ώστε $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ και $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$)*

Μπορούμε να ελέγξουμε πως για την εφαπτόμενη δέσμη, αν (U_α, ϕ_α) είναι ομαλοί, αριθμήσιμοι στο πλήθος, χάρτες της M που την καλύπτουν, τότε οι απεικονίσεις $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n}$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του λήμματος.

Θα αναφερθούμε συγκεκριμένα στην προϋπόθεση (4), υπολογίζοντας την $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$.

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x^1, \ldots, x^n, w^1, \ldots, w^n) = \Phi_\alpha \left(w^j \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\phi_\beta^{-1}(x)} \right).$$

Για να συνεχίσουμε τον υπολογισμό πρέπει να δούμε πώς εκφράζονται τα διανύσματα συντεταγμένων

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\phi_\beta^{-1}(x)}$$

από τον χάρτη (U_β, ϕ_β) με συντεταγμένες x^i, ως προς τα διανύσματα συντεταγμένων

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right|_{\phi_\alpha^{-1}(\tilde{x})}$$

από τον χάρτη (U_α, ϕ_β) με συντεταγμένες $\tilde{x}^i$, όταν $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x) = \tilde{x}$.

Αν γράψουμε $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\phi_\beta^{-1}(x)} = u_j^i(x) \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right|_{\phi_\alpha^{-1}(\tilde{x})}$ είδαμε ότι

$$u_j^i(x) = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\phi_\beta^{-1}(x)} (\tilde{x}^i) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(\phi_\beta^{-1}(x)) = \frac{\partial(\tilde{x}^i \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial(\mathrm{pr}^i \circ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial x^j}(x),$$

και άρα οι συναρτήσεις $u_j^i : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{R}$ είναι ομαλές, αφού οι $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ είναι ομαλές.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x^1, \ldots, x^n, w^1, \ldots, w^n) &= \Phi_\alpha \left(w^j \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\phi_\beta^{-1}(x)} \right) \\
&= \Phi_\alpha \left(w^j u_j^i \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right|_{\phi_\alpha^{-1}(\tilde{x})} \right) \\
&= (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, w^j u_j^1, \ldots, w^j u_j^n) \\
&= (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, w^j u_j^1, \ldots, w^j u_j^n).
\end{aligned}$$

- Διανυσματικά πεδία. Ένα διανυσματικό πεδίο στην M είναι μια απεικόνιση $X : M \to TM$ ώστε $\pi \circ X = id_M$.

Ένα διανυσματικό πεδίο είναι ομαλό αν X είναι ομαλή απεικόνιση. Ισοδύναμα, αν για κάθε ομαλό χάρτη (U, ϕ) της M οι συναρτήσεις $X^i : U \to \mathbb{R}$ με $q \in U$

$$X(q) = X^i(q) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q ,$$

για κάθε $q \in U$ είναι ομαλές.

- Αν (U, ϕ) είναι ένας ομαλός χάρτης, και x^i οι συναρτήσεις συντεταγμένων, τότε το $q \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q$ είναι ομαλό διανυσματικό πεδίο στο U, αφού οι συντελεστές είναι σταθερές 0 ή 1 και άρα ομαλές συναρτήσεις.

  Αυτό το διανυσματικό πεδίο θα συμβολίζεται απλά ως $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

- Κύκλος S^1:

- Το σύνολο των ομαλών διανυσματικών πεδίων στην M θα συμβολίζεται $\mathcal{X}(M)$.

- Για κάθε $p \in M$ και $X \in T_pM$ υπάρχει $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ ώστε $\tilde{X}(p) = X$.

  Αρκεί να πάρουμε συντεταγμένες γύρω από το p και να γράψουμε $X = X^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$. Τότε αν πάρουμε μια bump function me $\psi(p) = 1$ και supp$\psi \subset U$ μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{X}(q) = \psi(q) X^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q$.

- Αν $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ και $f, g \in C^\infty(M)$, τότε $fX + gY \in \mathcal{X}(M)$, όπου

$$(fX + gY)(p) = f(p)X(p) + g(p)Y(p) \in T_pM.$$

- Έστω Y ένα διανυσματικό πεδίο (όχι απαραίτητα ομαλό), $U \subset M$ ανοιχτό και $f \in C^\infty(U)$. Τότε το Y δρα στην f για να δώσει μια νέα συνάρτηση Yf που ορίζεται ως

$$Yf(p) = Y_p(f)$$

.

- $Yf \in C^\infty(M)$ για κάθε $f \in C^\infty(M)$ αν και μόνο αν $Y \in \mathcal{X}(M)$ (το Y είναι δηλαδή όμαλό)

  Γιατί; Αν πάρουμε σύστημα συντεταγμένων (V, ϕ) και δράσουμε με το X στις συναρτήσεις x^i έχουμε ότι

$$Y_p = Y_p(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (Yx^i)(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p .$$

  οπότε αν $Yx^i \in C^\infty(V)$ τότε και $Y \in \mathcal{X}(V)$.

Για το αντίστροφο, γράφουμε

$$
\begin{aligned}
(Yf)(p) &= \left(Y^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) f \\
&= Y^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) \\
&= Y^i(p) \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} (\phi(p)),
\end{aligned}
$$

που είναι ομαλή συνάρτηση του p.

Σημείωση: την ομαλή συνάρτηση $\frac{\partial}{\partial x^i} f$ τη συμβολίζουμε και με $\frac{\partial f}{\partial x^i}$.

- Κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο $Y \in \mathcal{X}(M)$ ορίζει μια παραγώγιση, δηλαδή μια γραμμική απεικόνιση $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz, σε κάθε σημείο. Δηλαδή για κάθε $p \in M$

  $$[\mathcal{Y}(fg)](p) = f(p)[\mathcal{Y}(g)](p) + g(p)[\mathcal{Y}(f)](p).$$

  Αυτό γίνεται ως $\mathcal{Y} f = Y f$.

- Και αντίστροφα, κάθε παραγώγιση $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ προέρχεται από διανυσματικό πεδίο.

  Για κάθε $p \in M$ η απεικόνιση $f \mapsto (\mathcal{Y} f)(p)$ είναι μια παραγώγιση στο p, επομένως μπορεί να εκφραστεί ως προς μοναδικό $Y_p \in T_pM$, δηλαδή

  $$(\mathcal{Y} f)(p) = Y_p(f).$$

  Έχουμε δηλαδή μια απεικόνιση $Y : p \mapsto Y_p$ που θα δείξουμε ότι είναι ομαλή και άρα ορίζει ομαλό διανυσματικό πεδίο Y. Είδαμε ότι το είναι ομαλό αν και μόνο αν η δράση του σε ομαλές συναρτήσεις δίνει ομαλές συναρτήσεις. Έστω λοιπόν $f \in C^\infty(M)$.

  $$(Yf)(p) = Y_p(f) = (\mathcal{Y} f)(p).$$

  Αφού η $\mathcal{Y}$ είναι παραγώγιση, η $\mathcal{Y} f \in C^\infty(M)$, άρα $Y \in \mathcal{X}(M)$.

- F-συσχετισμένα πεδία. Έστω $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση. Έχουμε δεί ότι για κάθε $X \in T_pM$, $F_* X \in T_{F(p)}N$.

  Αν τώρα $X \in \mathcal{X}(M)$, $X : M \to TM$ ισχύει ότι η απεικόνιση $F_* \circ X : M \to TN$ είναι ομαλή, αλλά δεν είναι διανυσματικό πεδίο στην N, αφού το πεδίο ορισμού είναι το M.

  Αν υπάρχει διανυσματικό πεδίο $Z \in TN$ ώστε

  $$Z_{F(p)} = F_* X_p,$$

  για κάθε $p \in M$ τότε λέμε ότι το Z είναι F-συσχετισμένο με το X.

- Δύο διανυσματικά πεδία $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$ είναι F-συσχετισμένα αν και μόνο αν για κάθε $f \in C^\infty(N)$
$$X(f \circ F) = Yf \circ F.$$
Αυτό ισχύει επειδή
$$X(f \circ F)(p) = (F_* X_p)(f)$$
$$(Yf \circ F)(p) = Y_{F(p)}(f).$$
και επομένως $F_* X_p, Y_{F(p)}$ είναι ίσες παραγωγίσεις στο $F(p)$.

- Αν η $F : M \to N$ είναι αμφιδιαφόριση, τότε για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$ υπάρχει μοναδικό $Y \in \mathcal{X}(N)$ ώστε το Y να είναι F-συσχετισμένο με το X.

  Για κάθε $q \in N$, ορίζουμε $Y_q = F_* X_{F^{-1}(q)}$. Το Y είναι ομαλό αν και μόνο αν για κάθε $f \in C^\infty(N)$ η Yf είναι ομαλή συνάρτηση. Άρα υπολογίζουμε
$$\begin{aligned}(Yf)(q) &= Y_q(f)\\ &= F_* X_{F^{-1}(q)}(f)\\ &= X_{F^{-1}(q)}(f \circ F)\\ &= [X(f \circ F)] \circ F^{-1}(q),\end{aligned}$$
που είναι ομαλή συνάρτηση. Επομένως, θέτωντας $q = F(p)$ έχουμε
$$Yf \circ F = X(f \circ F)$$
και άρα τα πεδία είναι F-συσχετισμένα.

- Παράδειγμα: Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
Τότε τα $\frac{\partial}{\partial t}$ και $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ είναι γ-συσχετισμένα:
$$\begin{aligned}\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t \right) &= \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t \right)(x)\ \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(\cos t, \sin t)} + \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t \right)(y)\ \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{(\cos t, \sin t)}\\ &= (\frac{d}{dt}\cos t)\ \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(\cos t, \sin t)} + (\frac{d}{dt}\sin t)\ \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{(\cos t, \sin t)}\\ &= -\sin t\ \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(\cos t, \sin t)} + \cos t\ \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{(\cos t, \sin t)}\\ &= -y \circ \gamma(t)\ \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)} + x \circ \gamma(t)\ \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)}\\ &= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \right)\bigg|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

9 Η αγκύλη Lie

- Έστω $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in C^\infty(M)$. Τότε $X(f) \in C^\infty(M)$ με

$$X(f)(p) = X_p(f),$$

και μάλιστα η αντιστοιχία $f \mapsto X(f)$ είναι παραγώγιση, δηλαδή εκτός της γραμμικότητας, ισχύει και ότι $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε στην $X(f)$ το διανυσματικό πεδίο Y, ώστε να πάρουμε την ομαλή συνάρτηση $Y(X(f))$. Ορίζεται λοιπόν η

$$f \mapsto Y(X(f)) \in C^\infty(M). \tag{9.1}$$

Είναι παραγώγιση;

- Είναι γραμμική ως προς f, ας ελέγξουμε αν ικανοποιεί Leibniz:

$$\begin{aligned} Y(X(fg)) &= Y(fX(g) + gX(f)) \\ &= Y(f)X(g) + fY(X(g)) + Y(g)X(f) + gY(X(f)) \\ &= fY(X(g)) + gY(X(f)) + Y(f)X(g) + Y(g)X(f). \end{aligned}$$

Δεν φαίνεται να είναι, λόγω της ύπαρξης των δύο όρων στο τέλος. Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^2$, $X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$, $f(x, y) = x, g(x, y) = y$: $(fg)(x, y) = xy$

$$\begin{aligned} &Y(X(fg)) = Y(g) = 1, \\ &fY(X(g)) = 0, \\ &gY(X(f)) = 0, \\ &Y(f)X(g) = 0 \\ &Y(g)X(f) = 1. \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν είναι παραγώγιση.

- Εναλλάσοντας τη σειρά των X, Y, ο παραπάνω υπολογισμός όμως μας λέει επίσης ότι

$$X(Y(fg)) = fX(Y(g)) + gX(Y(f)) + X(f)Y(g) + X(g)Y(f).$$

Βλέπουμε ότι οι δυο τελευταίοι όροι (που ευθύνονταν για την απώλεια της ιδιότητας Leibniz) είναι ακριβώς οι ίδιοι!

- Άρα, μήπως η αντιστοιχία
$$f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$
είναι παραγώγιση; Πράγματι, αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:
$$X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = f(X(Y(g)) - Y(X(g))) + g(X(Y(f)) - Y(X(f))).$$
Βρήκαμε δηλαδή έναν τρόπο, ξεκινώντας από δυο ομαλά διανυσματικά πεδία $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ να πάρουμε ένα τρίτο (αφού είδαμε ότι κάθε παραγώγιση αντιστοιχεί σε ένα διανυσματικό πεδίο). Αυτό το διανυσματικό πεδίο το ονομάζουμε "αγκύλη Lie" των X, Y και το συμβολίζουμε με $[X, Y]$. Συγκεκριμένα,
$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

- Υπολογισμός της αγκύλης Lie σε συντεταγμένες. Ας δούμε πώς εκφράζεται, με πιο απτό τρόπο, η αγκύλη Lie.

  Έστω $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων (ομαλό χάρτη) (U, ϕ). Τότε, για κάθε $f \in C^\infty(M)$
$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(f)\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(f)\right) \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\
&- Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} \\
&+ X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\
&= \left[\left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right] f + X^i Y^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) \\
&= \left[\left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right] f.
\end{aligned}$$
  Επομένως, το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ εκφράζεται σε συντεταγμένες ως
$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

- Παράδειγμα: Έστω $M = \mathbb{R}^2$ και $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Τότε, αν ο δείκτης $i = 1$ αντιστοιχεί στην μεταβλητή x ενώ ο δείκτης $i = 2$ στη μεταβλητή y:

$$
\begin{aligned}
X^1(x,y) &= x \\
X^2(x,y) &= y \\
Y^1(x,y) &= -y \\
Y^2(x,y) &= x.
\end{aligned}
$$

  και άρα:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X^1}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial X^2}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial X^1}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial X^2}{\partial y} = 1, \\
\frac{\partial Y^1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial Y^2}{\partial x} = 1, \\
\frac{\partial Y^1}{\partial y} &= -1, \quad \frac{\partial Y^2}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
$$

  Συνεπώς, αν $[X,Y] = Z^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
Z^1 &= X^1\frac{\partial Y^1}{\partial x} + X^2\frac{\partial Y^1}{\partial y} - Y^1\frac{\partial X^1}{\partial x} - Y^2\frac{\partial X^1}{\partial y} = -y - (-y) = 0, \\
Z^2 &= X^1\frac{\partial Y^2}{\partial x} + X^2\frac{\partial Y^2}{\partial y} - Y^1\frac{\partial X^2}{\partial x} - Y^2\frac{\partial X^2}{\partial y} = x \cdot 1 + y \cdot 0 - (-y) \cdot 0 - x \cdot 1 = 0,
\end{aligned}
$$

  άρα $[X,Y] = 0$.

- Όμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι για κάθε ομαλό χάρτη, τα αντίστοιχα διανύσματα συντεταγμένων ικανοποιούν

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0
$$

- Ιδιότητες της αγκύλης Lie: Έστω $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$

  1. $$
     \begin{aligned}
     [aX + bY, Z] &= a[X,Z] + b[Y,Z], \\
     [X, aY + bZ] &= a[X,Y] + b[X,Z].
     \end{aligned}
     $$

  2. $[X,Y] = -[Y,X]$

3.
$$[X, gY] = g[X, Y] + X(g)Y,$$
άρα και
$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$$
και
$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X,$$
αν $f, g \in C^\infty(M)$.

4. Ταυτότητα Jacobi: αν $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Η αποδείξεις γίνονται με απευθείας πράξεις, και κάνοντας χρήση του ορισμού. Για παράδειγμα, για κάθε $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z](f)) - [Y, Z](X(f)) \\ &= X(YZf - ZYf) - YZ(X(f)) + ZY(X(f)) \\ &= XYZ(f) - XZY(f) - YZX(f) + ZYX(f)\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}[Y, [Z, X]](f) &= YZX(f) - YXZ(f) - ZXY(f) + XZY(f), \\ [Z, [X, Y]](f) &= ZXY(f) - ZYX(f) - XYZ(f) + YXZ(f).\end{aligned}$$

Αθροίζοντας, βλέπουμε ότι ισχύει η ταυτότητα Jacobi.

- Αν $F : M \to N$ είναι ομαλή και έχουμε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $V, W \in \mathcal{X}(N)$ ώστε X, V και Y, W F-συσχετισμένα τότε
$$F_*[X, Y]_p = [V, W]_{F(p)},$$
δηλαδή τα $[X, Y]$ και $[V, W]$ είναι F-συσχετισμένα. Αυτό γιατί για κάθε $f \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned}[X, Y](f \circ F) &= XY(f \circ F) - YX(f \circ F) \\ &= X(Wf \circ F) - Y(Vf \circ F) \\ &= VWf \circ F - WVf \circ F \\ &= (VWf - WVf) \circ F \\ &= [V, W]f \circ F,\end{aligned}$$

και άρα τα $[X, Y]$ και $[V, W]$ είναι F-συσχετισμένα.

10 Διανυσματικές δέσμες (Vector bundles)

- Παράδειγμα καινούριας δομής: $M^n \times \mathbb{R}^k$.
  - Πολλαπλότητα διάστασης $n + k$.
  - Υπάρχει απεικόνιση $\pi : M \times \mathbb{R}^k \to M$, $\pi(q, v) = q$
  - Για κάθε $q \in M$, $\pi^{-1}(q)$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης k.

  Είναι μια συλλογή πραγματικών διανυσματικών χώρων διάστασης k πάνω από κάθε σημείο της M, μια "δέσμη" διανυσματικών χώρων.

  Μια "δέσμη διανυσματικών χώρων" θα μπορούσε να είναι της μορφής $U \times \mathbb{R}^k$ μόνο τοπικά γύρω από κάθε σημείο της M. Οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

- Διανυσματική δέσμη E τάξης k πάνω από ένα τοπολογικό χώρο M, είναι ένας τοπολογικός χώρος μαζί με μια επί συνεχή απεικόνιση $\pi : E \to M$ με τις παρακάτω ιδιότητες

  1. Για κάθε $p \in M$ το σύνολο $E_p := \pi^{-1}(p)$ (ίνα πάνω από το p) έχει δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου διάστασης k.
  2. Για κάθε $p \in M$ υπάρχει μια ανοιχτή γειτονιά $p \in U$ και ομοιομορφισμός
  $$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$
  (τοπική τετριμμενοποίηση) ώστε
     - $pr^1 \circ \Phi = \pi$, όπου $pr^1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$, $pr^1(q, v) = q$.
     - Για κάθε $q \in U$ ο περιορισμός της $\Phi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

  Αν οι E και M είναι διαφορικές πολλαπλότητες και η π είναι ομαλή απεικόνιση, λέμε ότι η E είναι ομαλή διανυσματική δέσμη πάνω από την M, τετριμμενοποιήσεις που είναι αμφιδιαφορίσεις τις αποκαλούμε επίσης ομαλές.

  E αποκαλείται ολικός χώρος της δέσμης, η βάση, και π η προβολή της δέσμης

- Παράδεγμα: Η ταινία του Möbius.

  Γεωμετρική περιγραφή: Έστω η λωρίδα $S = [0, 1] \times \mathbb{R}$ και η σχέση ισοδυναμίας της S που ορίζεται ως
  $$(0, y) \sim (1, -y)$$
  και $E = S/\sim$ ο χώρος πηλίκο. Ορίζεται η συνεχής και επί απεικόνιση $\pi : E \to \mathbb{S}^1$ ως
  $$\pi([(x, y)]) = e^{2\pi i x}$$

ενώ κάθε $\pi^{-1}(e^{2\pi ix}) = \{[(x,y)], y \in \mathbb{R}\}$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης 1.

Έστω $U = \{e^{2\pi ix}, x \in (0,1)\}$ και $V = \{e^{2\pi ix}, x \in [0,1/2) \cup (1/2,1]\}$

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$$

με $\Phi([(x,y)]) = (e^{2\pi ix}, y)$ είναι μια τοπική τετριμμενοποίηση.

Αντίστοιχα και η

$$\Phi' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}$$

με

$$\Phi'([(x,y)]) = \begin{cases} (e^{2\pi ix}, y), & x \in [0,1/2) \\ (e^{2\pi ix}, -y), & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

- Η εφαπτόμενη δέσμη TM μιας διαφορική πολλαπλότητας M^n είναι διανυσματική δέσμη τάξης n πάνω από την M.

  1. TM είναι διαφορική πολλαπλότητα.
  2. Η προβολή $\pi : TM \to M$ είναι ομαλή.
  3. Για κάθε $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = T_pM$ που είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης n.
  4. Για κάθε $p \in M$ έστω ομαλός χάρτης (U,ϕ), $p \in U$, και $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$, $i = 1,\ldots,n$ τα αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία συντεταγμένων.
     Η απεικόνιση $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ με

     $$\Phi_U(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q) = (q, v^1, \ldots, v^n)$$

     είναι μια τοπική τετριμμενοποίηση της TM: είναι ομοιομορφισμός (και μάλιστα αμφιδιαφόριση), ικανοποιεί τη συνθήκη $pr^1 \circ \Phi_U = \pi$ και βέβαια η $\Phi_U : T_qM \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$,

     $$\Phi_U(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q) = (q, v^1, \ldots, v^n)$$

     είναι γραμμικός ισομορφισμός, αφού $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \right\}_{i=1,\ldots,n}$ είναι βάση του T_qM.

- Συναρτήσεις μετάβασης μιας διανυσματικής δέσμης.

Λήμμα 14. *Έστω $\pi : E \to M$ μια διανυσματική δέσμη τάξης k πάνω από την M, και $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, $\Psi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$ δυο τοπικές τετριμμενοποιήσεις με $U \cap V \neq \emptyset$. Τότε, η σύνθεση*

$$\Phi \circ \Psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

έχει τη μορφή

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(x, v) = (x, T(p)v)$$

όπου $T : U \cap V \to GL(k, \mathbb{R})$ είναι ομαλή απεικόνιση.

Το λήμμα είναι συνέπεια του ότι ο περιορισμός κάθε τοπικής τετριμμενοποίησης σε κάθε νήμα E_q, είναι γραμμικός ισομορφισμός με τον $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, και άρα για κάθε q, $\Phi \circ \Psi^{-1}(q, v) = (q, \sigma(q)(v)$, όπου $\sigma(q) : \{q\} \times \mathbb{R}^k \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

- Παράδειγμα: Ταινία του Möbius. Η απεικόνιση μετάβασης

$$\Phi' \circ \Phi^{-1} : U \cap V \times \mathbb{R} \to U \cap V \times \mathbb{R}$$

δίνεται, για $x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ (ώστε $e^{2\pi i x} \in U \cap V$)

$$\Phi' \circ \Phi^{-1}(e^{2\pi i x}, y) = \begin{cases} (e^{2\pi i x}, y) & x \in (0, 1/2) \\ (e^{2\pi i x}, -y) & x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Επομένως $T_{VU} : U \cap V \to GL(1, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$ δίνεται από

$$T_{VU}(e^{2\pi i x}) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1/2) \\ -1 & x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

- Κατασκευή διανυσματικών δεσμών.

Λήμμα 15. *(Λήμμα κατασκευής διανυσματικών δεσμών) Έστω M^n διαφορική πολλαπλότητα και ότι για κάθε $p \in M$ έχουμε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο E_p διάστασης k.*

Ορίζουμε $E = \bigsqcup_{p \in M} E_p$ και $\pi(v) = p$ αν και μόνο αν $v \in E_p$. Έστω επίσης

1. *U_α, $\alpha \in A$ ανοιχτό κάλυμα της M*
2. *$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ $1 - 1$ και επί ώστε $\Phi_\alpha : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ να είναι γραμμικός ισομορφισμός.*
3. *Αν $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, υπάρχει ομαλή απεικόνιση*

   $$T_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

   ώστε

   $$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k$$

   να δίνεται από τη σχέση

   $$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(q, v) = (q, T_{\alpha\beta}(q)v).$$

Τότε η E δέχεται δομή διαφορικής πολλαπλότητα διάστασης $n+k$, και είναι ο ολικός χώρος μιας ομαλής διανυσματικής δέσμης τάξης k πάνω από την M, π είναι ομαλή προβολή και Φ_α ομαλές τοπικές τετριμμενοποιήσεις.

Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε την ταινία Möbius, με μοναδικά δεδομένα τις συναρτήσεις μετάβασης που υπολογίσαμε.

- Τομές διανυσματικών δεσμών. Ορισμός ανάλογος με τα διανυσματικά πεδία:

  Ορισμός 7. *Έστω $\pi : E \to M$ μια ομαλή διανυσματική δέσμη. Μια ομαλή απεικόνιση $\sigma : M \to E$ θα ονομάζεται ομαλή (ολική) τομή (section) της δέσμης αν $\pi \circ \sigma = id_M$.*

  Ορισμός 8. *Αντίστοιχα, αν $U \subset M$ ανοιχτό, τότε μια ομαλή απεικόνιση $\sigma : U \to E$ με $\pi \circ \sigma = id_U$ θα ονομάζεται ομαλή τοπική τομή (section) της δέσμης.*

  Η μηδενική τομή είναι η $\sigma(p) = 0_p \in E_p$: αν $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ είναι μια ομαλή τετριμμενοποίηση (και άρα αμφιδιαφόριση) τότε

  $$\Phi \circ \sigma : U \to U \times \mathbb{R}^k$$

  δίνεται από

  $$\Phi \circ \sigma(x) = (x, 0),$$

  και άρα είναι διαφορισιμη απεικόνιση. Αλλά $\sigma = \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ \sigma)$ και επομένως είναι και η σ ομαλή.

  Το σύνολο των ομαλών τομών μιας διανυσματικής δέσμης $E \to M$ το συμβολίζουμε με $\Gamma(E)$. Μάλιστα, αν $f, g \in C^\infty(M)$ και $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ τότε και $f\sigma_1 + g\sigma_2 \in \Gamma(E)$.

- Παράδειγμα 1: Τα ομαλά διανυσματικά πεδία είναι τομές της εφαπτόμενης δέσμης TM (άρα $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$)

- Παράδειγμα 2: Τετριμένες δέσμες. Κάθε συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}^k$ ορίζει μια τομή σ της τετριμμενης δέσμης $M \times \mathbb{R}^k$ ως $\sigma(x) = (x, f(x))$. Και αντίστροφα, κάθε τομή σ ορίζει μια συνάρτηση $f(x) = pr^2 \circ \sigma$.

- Πλαίσια. Έστω $U \subset M$ ανοιχτό, $E \to M^n$ μια διανυσματική δέσμη τάξης k και $\sigma_i : U \to E$, $i = 1, \ldots, m$ τοπικές τομές της E.

  Θα λέμε ότι $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ είναι ανεξάρτητες, αν για κάθε $p \in U$ τα $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_m(p) \in E_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

  Μια διατεταγμένη k-αδα $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ τοπικών ανεξάρτητων τομών $\sigma_i : U \to E$ ονομάζεται τοπικό πλαίσιο της E πάνω από το U. Επιπλέον, αν $U = M$ τότε η $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ ονομάζεται ολικό πλαίσιο της E.

- Παράδειγμα: Στην τετριμένη δέσμη $M \times \mathbb{R}^k$ πάνω από την M οι τομές $\sigma_i : M \to M \times \mathbb{R}^k$.

$$\sigma(p) = (p, e_i),$$

όπου e_i η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^k$, ορίζουν ένα ολικό πλαίσιο $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ της $M \times \mathbb{R}^k$.

- Τοπικά πλαίσια ορίζουν τετριμενοποιήσεις και το αντίστροφο.

Πρόταση 6. *Έστω $E \to M$ μια διανυσματική δέσμη τάξης k, $U \subset M$ ανοιχτό, και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ ένα τοπικό πλαίσιο της E πάνω από το U. Τότε υπάρχει τοπική τετριμενοποίηση $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ της E ώστε $\Psi \circ \sigma_i(p) = (p, e_i)$ για κάθε $p \in U$. Και αντίστροφα, κάθε τοπική τετριμμενοποίηση $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ ορίζει ένα τοπικό πλαίσιο $\sigma_i(p) = \Phi^{-1}(p, e_i)$.*

Απόδειξη. Αφού $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ είναι τοπικό πλαίσιο της E πάνω από το U, για κάθε $p \in U$ και $V \in E_p$ υπάρχουν v^i, $i = 1, \ldots, k$ ώστε

$$V = v^i \sigma_i(p).$$

Ορίζουμε τότε $\Psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$ ως

$$\Psi(p, v^1, \ldots, v^n) = v^i \sigma_i(p).$$

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η Ψ^{-1} ικανοποιεί τις συνθήκες ώστε να είναι τετριμενοποίηση: $pr^1 \circ \Psi^{-1} = \pi$ και $\Psi^{-1}|_{E_p} \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ γραμμικός ισομορφισμός. Μένει να ελέγξουμε ότι είναι αμφιδιαφόριση.

Αφού $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ είναι τοπικό πλαίσιο, είναι $1-1$ και επί. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμη με διαφορίσιμο αντίστροφο.

Έστω $p \in U$ και $\Phi : \pi^{-1} \to V \times \mathbb{R}^k$ μια τοπική τετριμενοποίηση της E ώστε $p \in V$.

Τότε η $\Phi \circ \Psi : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$ είναι

$$\Phi \circ \Psi(q, v^1, \ldots, v^k) = \Phi(v^i \sigma_i(q)) = v^i \Phi(\sigma_i(q)),$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε ότι η $\Phi|_{E_q}$ είναι γραμμική.

Οι απεικονίσεις $\Phi \circ \sigma : U \cap V \to \pi^{-1}(U \cap V)$ είναι διαφορίσιμες, σαν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. Άρα και η $\Phi \circ \Psi$ είναι διαφορίσιμη γύρω από το p, άρα και η Ψ (αφού η Φ είναι αμφιδιαφόριση.

Επειδή επιπλέον η $\Phi|_{E_q}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, μπορούμε να γράψουμε

$$\Phi \circ \Psi(q, e_i) = (q, A_i^j(q) e_j) = A_i^j(q) \cdot (q, e_j),$$

όπου $A : U \cap V \to Gl(k, \mathbb{R})$ είναι διαφορίσιμη, και έστω $B : U \cap V \to Gl(k, \mathbb{R})$ ώστε $B = A^{-1}$, που είναι πάλι διαφορίσιμη και

$$(\Phi \circ \Psi)^{-1}(q, e_j) = (q, B_j^i(q) e_i)$$

και άρα είναι διαφορίσιμη. $\square$

Άμεσο συμπέρασμα: αν μια διανυσματική δέσμη έχει ένα ολικό πλαίσιο, τότε είναι τετριμμένη.

- Κριτήριο ομαλότητας τομών. Έστω $\pi : E \to M$ μια διανυσματική δέσμη τάξης k πάνω από την M. Τότε, μια τομή $\sigma : M \to E$ είναι ομαλή αν και μόνο αν για κάθε τετριμενοποίηση $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ με $\sigma_i(q) = \Phi^{-1}(p, e_i)$ το αντίστοιχο πλαίσιο η σ μπορεί να γραφτεί ως

$$\sigma = f^i \sigma_i$$

όπου $f^i : U \to \mathbb{R}$ είναι ομαλές συναρτήσεις (οι συνιστώσες της σ, ως προς το πλαίσιο $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$.)

Αφού σ_i είναι ομαλές (Φ^{-1} ομαλή), αν f^i είναι ομαλές το ίδιο ισχύει και για τη σ.

Αντίστροφα, αν η σ είναι ομαλή τότε και η $\Phi \circ \sigma$ είναι ομαλή, σαν σύνθεση ομαλών, και μάλιστα

$$\Phi \circ \sigma(q) = (q, f^i(q) e_i),$$

αφού $\Phi(\sigma_i(q)) = (q, e_i)$. Επομένως, οι f^i είναι ομαλές.

- Παραλληλοποιησιμότητα: Αν η εφαπτόμενη δέσμη μιας πολλαπλότητας M είναι η τετριμένη, λέμε ότι η M είναι παραλληλοποιήσιμη.

  - Η $\mathbb{S}^1$ είναι παραλληλοποιήσιμη - η εφαπτόμενη δέσμη της είναι η τετριμένη: $T\mathbb{S}^1 = S^1 \times \mathbb{R}$. Αν $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, τότε η σχέση

  $$\gamma_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \right) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{S}^1$$

  ορίζει ένα ομαλό, μη μηδενικό διανυσματικό πεδίο στην $\mathbb{S}^1$, άρα ένα ολικό πλαίσιο της $T\mathbb{S}^1$. Επομένως είναι η τετριμμένη δέσμη, και άρα παραλληλοποιήσιμη.

  - Η $T\mathbb{S}^2$ δεν είναι παραλληλοποιήσιμη. Μάλιστα δεν υπάρχει ούτε μία ολική τομή που να μη μηδενίζεται σε κανένα σημείο - δεν μπορούμε να το αποδείξουμε ακόμα.

  - Η $T\mathbb{S}^3$ είναι παραλληλοποιήσιμη. Η S^3 μπορεί να περιγραφεί σαν η ομάδα Lie (δεν έχουμε πει ακόμα γι'αυτό) $SU(2)$.

  $$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Η $SU(2)$ λοιπόν είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 3 έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\cdot : SU(2) \times SU(2) \to SU(2),$$

και η αντιστροφη $\alpha : SU(2) \to SU(2)$, $\alpha(A) = A^{-1}$ να είναι διαφορίσιμες.

Θεωρώντας $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, ώστε

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2, |a|^2 + |b|^2 = 1\}$$

τότε η απεικόνιση $F : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$

$$F(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

είναι αμφιδιαφόριση. Προφανώς είναι $1-1$ και επί. Για τη διαφορησιμότητα, οι χάρτες της $SU(2)$ κατασκευάζονται με παρόμοιο τρόπο με της $\mathbb{S}^3$.

Επίσης, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{S}^3$ ορίζεται η εξής αμφιδιαφόριση $G : SU(2) \to SU(2)$

$$G\left(\begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\kappa} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\kappa} \end{bmatrix}.$$

Άρα ένας ισομορφισμός $G_*^{[a,b]} : T_I SU(2) \to T_{[a,b]} SU(2)$, που εξαρτάται ομαλά από το (a, b), όπου συμβολίζουμε με $[a, b]$ τον πίνακα που αντιστοιχεί στο ζεύγος (a, b).

Επομένως, για κάθε βάση του $T_I SU(2)$ παίρνουμε ένα ολικό πλαίσιο της $TSU(2)$. Αυτή η διαδικασία είναι πολύ πιο γενική και δείχνει ότι η εφαπτόμενη δέσμη κάθε ομάδας Lie είναι παραλληλοποιήσιμη.

Μπορούμε να γράψουμε ακριβώς 3 διανυσματικά πεδία που αποτελούν πλαίσιο της $T\mathbb{S}^3$

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (-x^2, x^1, -x^4, x^3), \\
\sigma_2(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (-x^3, x^4, x^1, -x^2), \\
\sigma_3(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (-x^4, -x^3, x^2, x^1).
\end{aligned}$$

- **Κατασκευές νέων διανυσματικών δεσμών από παλιές**

  1. *Pull-back.* Έστω $f : M_1 \to M_2$ ομαλή απεικόνιση και $\pi : E \to M_2$ μια διανυσματική δέσμη τάξης k πάνω από την M_2.

     Για κάθε $x \in M_1$ ας θεωρήσουμε τον διανυσματικό χώρο $E_{f(x)}$, και ας ορίσουμε

     $$f^*E = \bigsqcup_{x \in M_1} \{x\} \times E_{f(x)}$$

και $\pi' : f^*E \to M_1$ ώστε $\pi(x, v) = x$ αν και μόνο αν $v \in E_{f(x)}$.
Για κάθε $p \in M_1$ παίρνουμε τετριμενοποίηση της E γύρω από το $f(p)$, $\Phi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$, και $U \subset M_1$ ώστε $f(U) \subset V$. Τότε για κάθε $(x, v) \in (\pi')^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$

$$\Psi(x, v) = (x, pr_2 \circ \Phi(v)).$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα κατασκευής διανυσματικών δεσμών για να κατασκευάσουμε τη δεσμη **pull-back**

2. *Ευθύ άθροισμα.* Αν έχουμε δύο διανυσματικές δέσμες $\pi_1 : E_1 \to M$, $\pi_2 : E_2 \to M$ τότε ορίζεται μια νέα δέσμη, το **ευθύ άθροισμα** $E_1 \oplus E_2 \to M$. Με ολικό χώρο

$$E_1 \oplus E_2 = \bigsqcup_{x \in M} (E_1)_x \oplus (E_2)_x.$$

Τότε, η προβολή ορίζεται με τον προφανη τρόπο $(v_1 \oplus v_2) \in (E_1)_x \oplus (E_2)_x \mapsto x$. Ποιές είναι οι τετριμενοποιήσεις της;

- **Απεικονίσεις μεταξύ δεσμών.** Έστω δύο διανυσματικές δέσμες $\pi_1 : E_1 \to M_1$ και $\pi_2 : E_2 \to M_2$ πάνω από τις διαφορικές πολλαπλότητες M_1 και M_2 αντίστοιχα.

Μια απεικόνιση δεσμών είναι ένα ζεύγος (f, F) όπου $f : M_1 \to M_2$ και $F : E_1 \to E_2$

είναι ομαλές απεικονίσεις, ώστε $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$. Επιπλέον, για κάθε $p \in M_1$

$$F|_{(E_1)_p} : (E_1)_p \to (E_2)_{f(p)}$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

Μερικές φορές λέμε ότι η $F : E_1 \to E_2$ είναι μια απεικόνιση δεσμών η οποία καλύπτει την $f : M_1 \to M_2$.

Ισομορφισμός μεταξύ δεσμών είναι μια απεικόνιση μεταξύ δεσμών που είναι $1-1$, επί και η αντίστροφή της είναι επίσης απεικόνιση δεσμών.

Αν έχουμε δύο διανυσματικές δέσμες E, E' πάνω από την ίδια πολλαπλότητα

$$\pi : E \to M$$
$$\pi' : E' \to M,$$

λέμε ότι μια $F : E \to E'$ είναι μια απεικόνιση δεσμών πάνω από την M, αν η F καλύπτει την ταυτική απεικόνιση $id : M \to M$. Αν η F είναι ισομορφισμός δεσμών που καλύπτει την ταυτική, λέμε ότι η F είναι ισομορφισμός δεσμών πάνω από την M.

1. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, και E μια διανυσματική δέσμη τάξης k πάνω από την M. Τότε η E είναι τετριμένη αν και μόνο αν είναι ισομορφική με τη δέσμη γινόμενο $M \times \mathbb{R}^k$

   Τετριμένη δέσμη τάξης k πάνω από την M αποκαλούμε μια δέσμη $E \to M$ που έχει μια τοπική τετριμενοποιήση πάνω από όλη την :

   $$\Phi : E = \pi^{-1}(M) \to M \times \mathbb{R}^k.$$

   Αυτή η Φ είναι επιπλέον μια απεικόνιση μεταξύ δεσμών πάνω από την M, ανάμεσα στην E και την δέσμη γινόμενο $E' = M \times \mathbb{R}^k$, με προβολή $\pi' : M \times \mathbb{R}^k \to M$, $\pi' = pr_1$:

   $$\pi' \circ \Phi(v) = pr_1(\pi(v), pr_2(\Phi(v))) = \pi(v) = id \circ \pi(v),$$

   και βέβαια

   $$\Phi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k = E'_p$$

   είναι γραμμική - και μάλιστα γραμμικός ισομορφισμός.
   Επιπλέον, η $\Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to E$ είναι επίσης απεικονιση δεσμών πάνω από την M, και για κάθε $p \in M$

   $$(\Phi^{-1})|_{E'_p} : E'_p = \{p\} \times \mathbb{R}^k \to E_p.$$

   είναι γραμμική.
   Άρα μια τετριμμένη δέσμη είναι ισόμορφη με μια δέσμη γινόμενο.
   Αντίστροφα, έστω ότι η υπάρχει $F : E \to M \times \mathbb{R}^k$ ισομορφισμός δεσμών πάνω από την M. Τότε $E = \pi^{-1}(M)$ και η F είναι αυτόματα τοπική τετριμενοποίηση πάνω από το M, και άρα η E είναι τετριμένη δέσμη.

2. Έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε η $f_* : TM \to TN$ είναι μια απεικόνιση δεσμών που καλύπτει την f.

   Έστω $\pi_1 : TM \to M$, $\pi_2 : TN \to N$ οι αντίστοιχες προβολές. Αν $X \in T_pM$ ξέρουμε ότι $f_*X \in T_{f(p)}N$ και άρα $\pi_2 \circ f_*(p) = f(p) = f \circ \pi_1(p)$.

   Επιπλέον, από τις ιδιότητες του pushforward έχουμε ότι $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ είναι γραμμική απεικόνιση. Άρα η $f_* : TM \to TN$ είναι απεικόνιση δεσμών.

   Σημείωση: Είδαμε ότι f_* είναι απεικόνιση μεταξύ δεσμών. Από την άλλη για κάθε $X \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$ είδαμε ότι η $f_*X \in \Gamma(f^*TN)$.

- **Άλλα παραδείγματα:**

1. Έστω η $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$ έστω

$$E_x = \{(x, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3, v \perp x\},$$

   και ας ορίσουμε $E = \bigsqcup_{x \in \mathbb{S}^2} E_x$, με $\pi : E \to \mathbb{S}^2$ να είναι η συνηθισμένη προβολή $\pi(x, v) = x$. Έστω $U_1^{\pm}, U_2^{\pm}, U_3^{\pm}$ τα ανοιχτά υποσύνολα της $\mathbb{S}^2$

$$U_i^+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{S}^2,\ x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{S}^2,\ x^i < 0\}.$$

   Μπορούμε να ορίσουμε τις απεικονίσεις

$$\Phi_i^{\pm} : \pi^{-1}(U_i^{\pm}) \to U_i^{\pm} \times \mathbb{R}^2$$
$$\Phi_1^{\pm}(x, v^1, v^2, v^3) = (v^2, v^3),$$
$$\Phi_2^{\pm}(x, v^1, v^2, v^3) = (v^1, v^3),$$
$$\Phi_3^{\pm}(x, v^1, v^2, v^3) = (v^1, v^2).$$

   Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα κατασκευής δεσμών για να δώσουμε στην E δομή μιας διανυσματικής δέσμης τάξης 2 πάνω από την $\mathbb{S}^2$. Μπορούμε να δούμε ότι η E είναι ισόμορφη με την εφαπτόμενη δέσμη της $\mathbb{S}^2$: αρκεί να ορίσουμε

$$F : E \to T\mathbb{S}^2,$$
$$F(x, v) = D_v \in T_x\mathbb{S}^2,$$

   όπου για κάθε $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, $D_v(f) = (f \circ \gamma)'(0)$ για κάθε $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ με $\gamma'(0) = v$, και να ελέγξουμε ότι είναι ισομορφισμός δεσμών.

2. Για κάθε $x \in \mathbb{S}^2$, έστω

$$E'_x = \{(x, w) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3,\ w // x\},$$

   και

$$E' = \bigsqcup_{x \in \mathbb{S}^2} E'_x,$$

   με $\pi' : E' \to \mathbb{S}^2$, $\pi' = pr_1$. Ορίζουμε

$$\Psi : E' \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R},$$
$$\Psi(x, w) = (x, w \cdot \frac{x}{|x|}).$$

   Με αυτά τα δεδομένα, το λήμμα κατασκευής δεσμών μας δίνει μια διανυσματική δέσμη τάξης 1: την ονομάζουμε κάθετη δέσμη της $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

   Μάλιστα Ψ είναι $1-1$, επί και γραμμικός ισομορφιμός στα νήματα, επομένως είναι ένας ισομορφισμός δεσμών πάνω από την $\mathbb{S}^2$. Συνεπώς, η E' είναι η τετριμένη δέσμη.

3. Η δέσμη $E \oplus E'$ είναι η τετριμένη δέσμη τάξης 2 πάνω από την $\mathbb{S}^2$.
4. Πάνω από τον πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\{x \sim \lambda x, \lambda \neq 0\}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τη λεγόμενη *ταυτολογική δέσμη*.
   Για κάθε $[x] \in \mathbb{RP}^n$ ορίζουμε

$$\tau_{[x]} = \{([x], v) \in \mathbb{R}^{n+1}, v//x\}$$

και

$$\tau_n = \bigsqcup_{[x] \in \mathbb{RP}^n} \tau_{[x]},$$

με $p : \tau \to \mathbb{RP}^n$, $p = pr_1$.

Αν $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ είναι η απεικόνιση πηλίκο και

$$U_i = \pi(\{(x^1, \dots, x^{n+1}), x^i \neq 0\})$$

ας ορίσουμε

$$\begin{aligned} \Phi_i :\ & p^{-1}(U_i) \to \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}, \\ \Phi_i&([x], v) = ([x], v \cdot e_i), \end{aligned}$$

Παρατήρηση 10.1. Ο $\mathbb{RP}^1$ είναι αμφιδιαφορικός με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$. Η ταυτολογική δέσμη τ_1 είναι τότε ισόμορφη με την ταινία του Möbius, σαν διανυσματικές δέσμες (άσκηση).

Παρατήρηση 10.2. Γενικά, ορίζονται γενικότερες ταυτολογικές δέσμες πάνω από τις πολλαπλότητες Grassmann (ειδική περίπτωση ο προβολικός χώρος). Το ενδιαφέρων είναι μετά ότι κάθε δέσμη πάνω από μια πολλαπλότητα, είναι ισόμορφη με κάποια δέσμη που είναι pullback κάποιας ταυτολογικής δέσμης πάνω από μια πολλαπλότητα Grassmann: δείτε Milnor-Stasheff.

- **Απεικονίσεις διανυσματικών δεσμών και τομές.** Αν $F : E \to E'$ είναι απεικόνιση δεσμών πάνω από την M και $\sigma \in \Gamma(E)$ τότε ορίζεται η τομή $F(\sigma) := F \circ \sigma \in \Gamma(E')$. Ορίζεται επομένως μια απεικόνιση (συμβολίζουμε πάλι με F)

$$\begin{aligned} F &: \Gamma(E) \to \Gamma(E'), \\ F(\sigma) &= F \circ \sigma. \end{aligned}$$

Η απεικόνιση $F : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ είναι γραμμική, αφού η F (σαν απεικόνιση δεσμών) είναι γραμμική στα νήματα. Μάλιστα, για τον ίδιο λόγο, είναι $C^\infty(M)$-γραμμική, με την έννοια ότι για κάθε $f \in C^\infty(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$

$$F(f\sigma) = fF(\sigma).$$

Πρόταση 7. *Αν $\pi : E \to M$, $\pi' : E' \to M$ είναι δύο διανυσματικές δέσμες πάνω από την M, τότε μια απεικόνιση $\mathcal{F} : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ είναι $C^\infty(M)$-γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση δεσμών $F : E \to E'$ ώστε $\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma$, για κάθε $\sigma \in \Gamma(E)$.*

11 Η συνεφαπτόμενη δέσμη

- **Ο δυϊκός ενός διανυσματικού χώρου.** Αν V είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος, V^* συμβολίζεται ο πραγματικός διανυσματικός χώρος που είναι δυϊκός του V:

$$V^* = \{v^* : V \to \mathbb{R},\ v^* \text{ γραμμική}\}.$$

- Αν $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ είναι μια βάση του V ($\dim V = n$) τότε τα $\{e^1, \dots, e^n\} \subset V^*$

$$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

είναι βάση του V^*, η λεγόμενη δυϊκή βάση της $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Αν $v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n$ τότε

$$e^i(v) = e^i(v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n) = v^i.$$

Επίσης, αν $\omega = \omega_i e^i$ τότε

$$\omega(e_j) = \omega_i e^i(e_j) = \omega_i \delta^i_j = \omega_j.$$

- **Συνεφαπτόμενη δέσμη.** Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Για κάθε $x \in M$ ο εφαπτόμενος χώρος $T_x M$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης n, και έστω $T^*_x M := (T_x M)^*$ ο δυϊκός του. Ορίζουμε

$$T^*M = \bigsqcup_{x \in M} T^*_x M$$

με $\pi : T^*M \to M$, $\pi(\omega) = x$ αν και μόνο αν $\omega \in T^*_x M$.

Αν (U, ϕ) είναι ένας ομαλός χάρτης της M^n, με διασματικά πεδία συντεταγμένων

$$q \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$$

Τότε για κάθε $q \in U$ η αντίστοιχη δυϊκή βάση του $T^*_q M$ συμβολίζεται ως

$$dx^i|_q$$

για $i = 1, \dots, n$. Επομένως κάθε $\omega_q \in T^*_q M$ γράφεται ως $\omega_q = \omega_i dx^i|_q$ και μπορούμε να ορίσουμε

$$\Phi(\omega_i dx^i|_q) = (q, \omega_1, \dots, \omega_n).$$

Για να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα κατασκευής ώστε τη T^*M να αποκτήσει δομή διανυσματικής δέσμης, πρέπει να δείξουμε ότι αν έχουμε ανοιχτό κάλυμα από ανοιστά $U_\alpha \subset M$, ώστε να ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ (άρα όλα τα U_α είναι πεδία ορισμού ομαλών χαρτών της M), πρέπει, αν $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικονίσεις μετάβασης

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

να είναι αμφιδιαφορίσεις και μάλιστα να οι περιορισμοί στα νήματα να είναι γραμμικοί ισομορφισμοί που μεταβάλονται ομαλα. Δηλαδή ότι, για $\bar{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$,

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(q, \bar{\omega}) = (q, T_{\alpha\beta}(q)(\bar{\omega})),$$

όπου $T : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(n, \mathbb{R})$ είναι ομαλή απεικόνιση.

Υπενθυμίζουμε ότι $Gl(n, \mathbb{R})$ είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $M_n(\mathbb{R})$, και ότι η ομαλότητα της T σημαίνει ότι

$$T(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & \cdots & a_{1n}(q) \\ & \vdots & \\ a_{n1}(q) & \cdots & a_{nn}(q) \end{bmatrix}$$

όπου οι $a_{ij} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}$ είναι ομαλές συναρτήσεις.

Υπολογίζουμε λοιπόν τις $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$, συμβολίζοντας με x^i τις συνεταγμένες του χάρτη ϕ_α και y^i τις συντεταγμένες του χάρτη ϕ_β.

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(q, \bar{\omega}) = \Phi_\alpha(\omega_i dy^i|_q).$$

Πρέπει να εκφράσουμε το $\omega_i dy^i|_q$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\tilde{\omega}_i dx^i|_q$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_j &= \omega_i dy^i|_q \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_q \right) \\ &= \omega_i dy^i|_q \left(\left. \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} \right|_q \right) \\ &= \omega_i \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \delta^i_k = \omega_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(q, \bar{\omega}) &= (q, \omega_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}) \\ &= (q, T(q)(\bar{\omega})), \end{aligned}$$

όπου $T(q)(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_q$, και επομένως

$$T(q) = \left(\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_q \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Ο πίνακας $\left(\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_q \right)_{i,j=1,\dots,n}$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $q \in U_\alpha \cap U_\beta$, και εξαρτάται ομαλά από το q.

- Ομαλές τομές της συνεφαπτόμενης δέσμης. Μια ομαλή τομή $\omega \in \Gamma(T^*M)$ ονομάζεται 1-μορφή. Έχουμε δυο κριτήρια ομαλότητας για τομές: Μια 1-μορφή ω είναι ομαλή αν και μόνο αν ένα από τα παρακάτω συμβαίνει.

  1. Για καθε $X \in \mathcal{X}(M)$ η συνάρτηση $q \mapsto \omega_q(X_q)$ είναι ομαλή.
  2. Για κάθε σύστημα συντεταγμένων (U, ϕ), αν για κάθε $q \in U$ γράψουμε $\omega_q = \omega_i(q) dx^i|_q$ οι συναρτήσεις $q \mapsto \omega_i(q)$ είναι ομαλές.

- Το διαφορικό μιας ομαλής συνάρτησης. Έστω $f : M \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση. Τότε για κάθε $p \in M$ ορίζουμε το διαφορικό df της f έτσι ώστε για κάθε $p \in M$ και $X_p \in T_pM$

  $$df_p(X_p) = X_p(f).$$

  Το διαφορικό είναι μια διαφορική 1-μορφή, δηλαδή είναι μια ομαλή τομή της T^*M. Για να το δούμε αυτό, μένει να δείξουμε ότι είναι ομαλή.

  Έστω $X \in \mathcal{X}(M)$. Τότε

  $$df(X) = X(f) \in C^\infty(M),$$

  αφού $f \in C^\infty(M)$ και το X ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο.

- Αναπαράσταση του διαφορικού σε συντεταγμένες. Έστω (U, ϕ) ένα σύστημα συντεταγμένων, και $X \in \mathcal{X}(U)$. Τότε αν $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ έχουμε

  $$\begin{aligned} df(X) &= df(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= X^i df(\frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \\ &= X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(X). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

- Το διαφορικό των συναρτήσεων συντεταγμένων x^i. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι αν $x^i : U \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συντεταγμένων το διαφορικό της

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} dx^j = \delta^i_j dx^j = dx^i.$$

Εδώ, στο αριστερό μέλος το dx^i είναι το διαφορικό της συνάρτησης x^i ενώ στο αριστερό μέλος είναι το σύμβολο που χρησιμοποιήσαμε για τη δυϊκή βάση. Βλέπουμε ότι είναι ίσα, δικαιολογώντας έτσι το συμβολισμό dx^i για τη δυϊκή βάση.

- Ιδιότητες. Για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$ ισχύει ότι

1. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $d(af + bg) = adf + bdg$.
2. $d(fg) = fdg + gdf$.
3. $d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$.

Επίσης, αν δυο ομαλές συναρτήσεις f, g είναι ίσες σε κάποιο ανοιχτό $U \subset M$ και $p \in U$ τότε $df_p = dg_p$. Γιατί; Θυμηθείτε την αντίστοιχη ιδιότητα για τις παραγωγίσεις.

- Αν η M είναι συνεκτική τότε $df = 0$ αν και μόνο αν η f είναι σταθερή: σε κάθε σύστημα συντεταγμένων

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Συνεπώς, αν $df = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, για κάθε i, που σημαίνει ότι η f είναι τοπικά σταθερή. Δηλαδή το σύνολο

$$S = \{f(p) = c\}$$

είναι ανοιχτό. Είναι όμως κλειστό από συνέχεια άρα, αφού η M είναι συνεκτική είτε $S = M$ είτε $S = \emptyset$. Αν όμως $c = f(q)$ για κάποιο $q \in M$, τότε $S \neq \emptyset$ και άρα $S = M$. Δηλαδή $f(p) = c$ για κάθε $p \in M$.

- Έστω $\gamma : I \to M$ μια ομαλή καμπύλη και $f : M \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση. Τότε για κάθε $t \in I$ υπενθυμίζουμε ότι

$$\gamma'(t) = \gamma_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \right)$$

$$\gamma_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \right) f = (f \circ \gamma)'(t)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= \gamma'(t)(f) \\ &= \gamma_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right)(f) \\ &= (f\circ\gamma)'(0) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned} f_*\gamma'(t) &= f_*\gamma_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) \\ &= (f\circ\gamma)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) \in T_{f(t)}\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Δρώντας πάνω στην ομαλή συνάρτηση συντεταγμένων t, του $\mathbb{R}$ έχουμε επίσης

$$f_*\gamma'(t_0)(t) = (f\circ\gamma)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} \right)(t) = (t\circ f\circ\gamma)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0} \right) = (f\circ\gamma)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t} \right) = (f\circ\gamma)'(t_0),$$

και άρα

$$f_*\gamma'(t_0) = (f\circ\gamma)'(t_0)\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t_0}$$

Έχουμε δηλαδή δύο εκφράσεις για την παράγωγο της f, οι οποίες είναι ισοδύναμες κάτω από την ταύτιση $T_{f(t)}\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$

$$a\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(t)} \mapsto a.$$

- Pullback μιας 1-μορφής. Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση μεταξύ τους.

  Έστω $\omega \in \Gamma(T^*N)$, μια 1-μορφή στην N. Τότε η ω μέσω της F ορίζει μια 1-μορφή, το pullback $F^*\omega$ της ω, στην M με τον εξής τρόπο. Αρχικά, για κάθε $p \in M$ ορίζουμε $(F^*\omega)_p \in T_p^*M$ ώστε για κάθε $X_p \in T_pM$

  $$(F^*\omega)_p(X_p) = \omega_{f(p)}(F_*X_p).$$

  Τότε, η αντιστοιχία $p \mapsto (F^*\omega)_p$ ορίζει μια, ενδεχομένως όχι ομαλή, τομή της T^*M. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι ομαλή.

  Αυτό θα το δείξουμε γράφοντας την ω σε συντεταγμένες, αλλά πρέπει πρώτα να καταλάβουμε πως δουλεύει το pullback σε 1-μορφές πού είτε είναι διαφορικά ομαλών συναρτήσεων (όπως για παράδειγμα τα dx^i) είτε είναι γινόμενο συναρτήσεων με 1-μορφές (όπως για παράδειγμα $\omega_i dx^i$)

Έστω $f : N \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση, και df το διαφορικό της. Τότε, για κάθε $X_p \in T_pM$

$$(F^*df)_p(X_p) = df(F_*X_p) = F_*X_p(f) = X_p(f \circ F) = d(f \circ F)_p(X_p),$$

επομένως $F^*(df) = d(f \circ F)$. Δηλαδή το pullback του διαφορικού μιας συνάρτησης είναι και αυτό διαφορικό μιας συνάρτησης.

Επίσης, αν $\omega \in \Gamma(T^*N)$

$$[F^*(f\omega)]_p = F^*(f(F(p))\omega_{F(p)}) = f(F(p))F^*\omega_{F(p)},$$

άρα $F^*(f\omega) = (f \circ F)F^*\omega$.

Έστω τώρα τυχαίο $p \in M$ και (U, ϕ) ένας χάρτης της N γύρω από το $F(p)$, με συναρτήσεις συντεταγμένων $y^i : U \to \mathbb{R}$.Τότε γράφουμε την ω στο U ως

$$\omega = \omega_i dy^i.$$

Αν θέσουμε $V = F^{-1}(U)$, V είναι ανοιχτό, και τότε για κάθε $q \in V$

$$\begin{aligned}(F^*\omega)_q &= F^*(\omega_i dy^i)_q \\ &= (\omega_i \circ F)(q)(F^*dy^i)_q \\ &= (\omega_i \circ F)(q)d(y^i \circ F)_q.\end{aligned}$$

Τώρα $q \mapsto (\omega_i \circ F)(q)$ είναι ομαλή γιατί η ω και η F είναι ομαλές, ενώ $d(y^i \circ F) \in \Gamma(T^*N)$ αφού η σύνθεση $y^i \circ F$ είναι ομαλή συνάρτηση.

Παρατήρηση 11.1. Έστω $f : M \to N$, ομαλή. Έχει ενδιαφέρον ότι ενώ το push-forward ενός διανυσματικού πεδίο δεν ορίζει διανυσματικό πεδίο στην N (εκτός και αν η f είναι αμφιδιαφόριση) το pullback μιας 1-μορφής της N είναι μια 1-μορφή στην M.

- Παράδειγμα. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

  $$F(x, y, z) = (x^2, x + y).$$

  Συμβολίζοντας με (u, v) τις συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$, έστω

  $$\omega = (u + v)du + (u^2 + v^2)dv.$$

  Τότε

  $$\begin{aligned}(F^*\omega)_{(x,y,z)} &= F^*((u + v)du + (u^2 + v^2)dv) \\ &= (x^2 + x + y)d(u \circ F) + (x^4 + (x + y)^2)d(v \circ F).\end{aligned}$$

Τώρα, $(u \circ F)(x, y, z) = x^2$ και $(v \circ F)(x, y, z) = x + y$, επομένως,

$$\begin{aligned} d(u \circ F) &= 2x dx, \\ d(v \circ F) &= dx + dy. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (x^2 + x + y)2x dx + (x^4 + (x+y)^2)(dx + dy), \\ &= (x^2 + x + y + x^4 + (x+y)^2)dx + (x^4 + (x+y)^2)dy. \end{aligned}$$

12 Ολοκλήρωση 1-μορφών

- Οι διαφορικές μορφές είναι το κατάλληλο αντικείμενο για ολοκλήρωση - όχι οι συναρτήσεις. Θα το δούμε αυτό για 1-μορφές.

  Πρώτα, ορίζουμε το ολοκλήρωμα μιας 1-μορφής ω σε ένα διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Το $[a,b]$ δεν είναι πολλαπλότητα (έχει σύνορο), αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $[a,b] \subset (a',b')$ και η ω επεκτείνεται ομαλά σε μια 1-μορφή $\tilde{\omega}$ στο (a',b').

  Γράφουμε σε συντεταγμένες $\omega_t = f(t)dt$, και ορίζουμε

  $$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt.$$

  Μετά, αν M είναι μια διαφορική πολλαπλότητα, $\gamma : [a,b] \to M$ και ω μια διαφορική 1-μορφή στην M. Ορίζουμε τότε

  $$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega.$$

- Το ολοκλήρωμα είναι αναλλοίωτο κάτω από γνησίως αύξουσες αναπαραμετρήσεις της καμπύλης.

  Έστω $\tilde{\gamma} : [c,d] \to M$ μια αναπαραμέτρηση της γ, ώστε να υπάρχει γνησίως αύξουσα $\phi : [c,d] \to [a,b]$ ομαλή και με ομαλή αντίστροφο και

  $$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi.$$

  Τότε, για κάθε $\omega = f(t)dt$, $\phi^*\omega = \phi^*(f(t)dt) = (f\circ\phi)(t)d\phi = (f\circ\phi)(t)\phi'(t)dt$.

  Επομένως,

  $$\begin{aligned}
  \int_{\tilde{\gamma}} \omega &= \int_{[c,d]} \tilde{\gamma}^*\omega = \int_{[c,d]} (\gamma\circ\phi)^*\omega \\
  &= \int_{[c,d]} \phi^*\gamma^*\omega = \int_{[c,d]} \phi^*(f(t)dt) \\
  &= \int_{[c,d]} (f\circ\phi)(t)\phi'(t)dt = \int_c^d (f\circ\phi)(t)\phi'(t)dt \\
  (\text{αν } \phi \text{ γνησίως αύξουσα}) &= \int_a^b f(u)du = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_\gamma \omega. \\
  (\text{αν } \phi \text{ γνησίως φθίνουσα}) &= \int_b^a f(u)du = -\int_a^b f(u)du = -\int_{[a,b]} \gamma^*\omega = -\int_\gamma \omega.
  \end{aligned}$$

- Μια διαφορετική έκφραση για το ολοκλήρωμα μιας 1-μορφής. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $\gamma : [a, b] \to M$ μια ομαλή καμπύλη και ω μια 1-μορφή. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων (U, ϕ), έστω $\phi \circ \gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ (δηλαδή $\gamma^i = x^i \circ \gamma$). Τότε

$$
\begin{aligned}
(\gamma^*\omega)_t \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) &= \gamma^*(\omega_i(\gamma(t)) dx^i|_{\gamma(t)}) \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) \\
&= \omega_i(\gamma(t)) \gamma^* dx^i|_{\gamma(t)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) \\
&= \omega_i(\gamma(t)) dx^i|_{\gamma(t)} \left(\gamma_* \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) \\
&= \omega_i(\gamma(t)) dx^i|_{\gamma(t)} (\gamma'(t)) \\
&= \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)),
\end{aligned}
$$

  και επομένως,

$$
\gamma^*\omega_t = (\gamma^*\omega)_t \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) dt = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.
$$

  Έχουμε λοιπόν ότι

$$
\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.
$$

- Ολοκληρώνοντας ένα διαφορικό. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $f \in C^\infty(M)$ και $\gamma : [a, b] \to M$ μια ομαλή καμπύλη. Τότε

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma df &= \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\
&= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).
\end{aligned}
$$

  Βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της καμπύλης!! Μάλιστα, αν $\gamma(b) = \gamma(a)$ (κλειστή καμπύλη) τότε

$$
\int_\gamma df = 0.
$$

- Ιδιότητες ολοκληρωμάτων. Έστω $\gamma : [a, b] \to M$ μια ομαλή καμπύλη.

  1. $\int_\gamma (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 \int_\gamma \omega_1 + c_2 \int_\gamma \omega_2$.

2. Αν $\gamma(t) = p \in M$ για κάθε t τότε
$$\int_\gamma \omega = 0.$$

3. Αν $a < c < b$ τότε
$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,b]}} \omega.$$

- Παράδειγμα. Είδαμε ότι το ολοκλήρωμα ένος διαφορικού κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι μηδέν. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει γενικα.

  Έστω $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,
$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \tag{12.1}$$
  και $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma'(t) = -\sin t \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + \cos t \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)}$.

  Τότε, αφού $(\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 = 1$
$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t dy|_{\gamma(t)} - \sin t dx|_{\gamma(t)}\right)\left(-\sin t \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + \cos t \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 2\pi.\end{aligned}$$

- Συντηρητικές 1-μορφές. Είδαμε ότι το ολοκλήρωμα ενός διαφορικού df κατά μήκος μιας καμπύλης $\gamma : [a, b] \to M$, με $p = \gamma(a), q = \gamma(b)$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης και εξαρτάται μόνο από τις τιμές της συνάρτης f στα άκρα, μέσω της ποσότητας $f(q) - f(p)$. Μάλιστα αν $p = q$ το ολοκλήρωμα είναι πάντα μηδέν.

  Ορισμός 9. *Μια ομαλή* 1*-μορφή* $\omega \in \Gamma(T^*M)$ *ονομάζεται ακριβής (exact) αν υπάρχει ομαλή συνάρτηση* $f : M \to \mathbb{R}$ *ώστε*
$$\omega = df.$$

  Προφανώς, αφού το διαφορικό κάθε σταθερής συνάρτησης είναι 0, $df = d(f + c)$ επομένως $\omega = df = d(f + c)$. Η συνάρτηση f δεν καθορίζεται μοναδικά από την ω.

  Όμως αν $\omega = df = dg$ τότε $d(f - g) = 0$ και επομένως $f - g = c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ (υποθέτουμε ότι η M είναι συνεκτική εδώ). Άρα $g = f + c$. Οπότε η μόνη πηγή μη μοναδικότητας στην f του παραπάνω ορισμού είναι η πρόσθεση κάποιας σταθεράς.

  Το λογικό ερώτημα είναι ποιες άλλες 1-μορφές έχουν αυτή την ιδιότητα:

Ορισμός 10. *Μια* 1*-μορφή* ω *της* M *ονομάζεται συντηρητική αν για κάθε κλειστή, κατά τμήματα ομαλή καμπύλη* γ *της* M

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι μια 1-μορφή $\omega \in \Gamma(T^*M)$ είναι συντηριτική αν και μόνο αν για κάθε $p, q \in M$ και καμπύλες $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to M$, κατά τμήματα ομαλές, με $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a) = p, \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b) = q$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

Επομένως αυτό που έχουμε απευθείας είναι ότι κάθε ακριβής 1-μορφή είναι συντηρητική. Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 2. *Αν μια ομαλή* 1*-μορφή* ω *είναι συντηρητική τότε είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Αφού η ω είναι συντηρητική, το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της κατά τμήματα ομαλής καμπύλης που ολοκληρώνουμε. Ορίζουμε λοιπον, για $p, q \in M$

$$\int_p^q \omega = \int_\gamma \omega,$$

όπου $\gamma : [a, b] \to M$ είναι μία (οποιαδήποτε) κατά τμήματα ομαλή καμπύλη με $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$.

Πρέπει να βρούμε ομαλή $f : M \to \mathbb{R}$ ώστε $\omega = df$. Σταθεροποιούμε $p \in M$ και ορίζουμε $f : M \to \mathbb{R}$ ως

$$f(x) = \int_p^x \omega.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι ομαλή και ότι $df = \omega$.

Έστω $q \in M$ και (U, ϕ) ένας ομαλός χάρτης γύρω από το q ώστε $\phi(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$, και x^i οι συναρτήσεις συντεταγμένων, και ας γράψουμε $\omega = \omega_i dx^i$ στο U.

Θα υπολογίσουμε το $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ (και θα δούμε ότι ορίζεται).

Έστω η καμπύλη $\gamma_:(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

$$\gamma_i(t) = \phi^{-1}(0, \dots 0, t, 0 \dots, 0)$$

το t στην i-θέση, ώστε $\gamma_i(0) = q$.

Τότε

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(t) &= \int_p^q \omega + \int_q^{\gamma_i(t)} \omega \\ &= f(q) + \int_q^{\gamma_i(t)} \omega. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int_q^{\gamma_i(t)} \omega &= \int_0^t \omega_{\gamma_i(u)}(\gamma_i'(u))du \\ &= \int_0^t \omega_{\gamma_i(u)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma_i(u)} \right) du \\ &= \int_0^t \omega_i(\gamma_i(u))du, \end{aligned}$$

και άρα

$$f(\gamma_i(t)) = f(q) + \int_0^t \omega_i(\gamma_i(u))du.$$

Επομένως

$$(f \circ \gamma_i)'(0) = \omega_i(q)$$

και αφού

$$df \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) = (f \circ \gamma)'(0),$$

συμπεραίνουμε ότι η f γύρω από το q έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και άρα είναι διαφορίσιμη. Μάλιστα οι μερικές παράγωγοι δίνονται από της συναρτήσεις συντεταγμένων της ω (που είναι ομαλή) και άρα η f είναι επίσης ομαλή C^∞ και

$$df_q \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \right) = \omega_i(q),$$

οπότε $df = \omega$, και άρα η ω είναι ακριβής. □

- Η 1-μορφή στην (12.1) δεν είναι συντηρητική.

- Υπάρχει τρόπος να ελέγξουμε (με υπολογισμό) αν μια 1-μορφή είναι ακριβής ή όχι; Να το ελέγξουμε με το προηγούμενο θεώρημα, ελέγχοντας αν είναι συντηρήτική είναι δύσκολο, αφού αυτό προυποθέτει ολοκλήρωση ως προς όλες τις καμπύλες.

  Έστω ότι $\omega = df$ τότε σε κάθε σύστημα συντεταγμένων $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Παραγωγίζοντας ως προς x^j και μεταθέτοντας τις παραγώγους παίρνουμε

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}.$$

  Συμπεραίνουμε ότι κάθε ακριβής 1-μορφή, σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, πρέπει να ικανοποιεί

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}. \tag{12.2}$$

Ορισμός 11. *Κάθε $\omega \in \Gamma(T^*M)$ που ικανοποιεί την* (12.2) *σε κάθε ομαλό σύστημα συντεταγμένων της M ονομάζεται κλειστή (closed) 1-μορφή.*

Επομένως έχουμε το παρακάτω κριτήριο ελέγχου:

Πρόταση 8. *Κάθε ακριβής 1-μορφή είναι κλειστή.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα, η 1-μορφή ω στην (12.1) είναι κλειστή, αλλά όχι ακριβής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

1. Η 1-μορφή $\omega = y \cos xydx + x \cos xydy$ στον $\mathbb{R}^2$ είναι κλειστή.

$$\omega_1 = y \cos xy,$$
$$\omega_2 = x \cos xy,$$

   και άρα

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \cos xy - xy \sin xy,$$
$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \cos xy - xy \sin xy,$$

   που είναι ίσα, άρα είναι κλειστή. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε από αυτό ότι είναι ακριβής (αν και είναι: $\omega = d(\sin xy)$)

2. Η $\omega = x \cos xydx + y \cos xydy$ όμως δεν είναι κλειστή, και άρα δεν είναι ακριβής.

Από την άλλη αν ορίσουμε τη συνάρτηση $\theta(x,y) = \arctan(y/x)$ στο $\{x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2(1+(y/x)^2)} = -\frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2(1+(y/x)^2)} = \frac{x}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

άρα

$$d\theta = \frac{xdy}{x^2+y^2} - \frac{ydx}{x^2+y^2} = \omega,$$

στο $\{x > 0\}$. Αυτή η συνάρτηση όμως δεν επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- Ενώ η κλειστότητα είναι μια τοπική ιδιότητα (την ελέγχουμε με έναν υπολογισμό σε κάθε σύστημα συντεταγμένων), το αν μια κλειστή 1-μορφή είναι και ακριβής εξαρτάται από την ολική δομή της πολλαπλότητας, την τοπολογία της. Αυτή η ιδέα, επεκτεταμένη σε k-μορφές είναι η βάση της συνομολογίας deRham.

  Η παρακάτω πρόταση ενισχύει τη σύνδεση της τοπολογίας με το αν μια κλειστή μορφή είναι ακριβής: αυτό πράγματι συμβαίνει σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που είναι "ομοτοπικά με σημείο", τετριμένα τοπολογικά.

Πρόταση 9. *Αν το ανοιχτό $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι αστρόμορφο, τότε κάθε κλειστή 1-μορφή στο U είναι και ακριβής.*

Απόδειξη. Έστω ότι το U είναι αστρόμορφο ως προς το 0. Για κάθε $x \in U$ ορίζουμε την καμπύλη $\gamma_x(t) = tx$, $t \in [0,1]$, και ορίζουμε

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^1 \omega_{\gamma_x(t)}(\gamma_x'(t))dt\\ &= \int_0^1 \omega_{xt}(x) = \int_0^1 \omega_i(xt)x^i dt.\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^j}\int_0^1 \omega_i(xt)x^i dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^j}(\omega_i(xt)x^i)dt \\
&= \int_0^1 \left(t\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}(xt)x^i + \omega_i(xt)\delta^i_j\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(t\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}(xt)x^i + \omega_j(xt)\right)dt \\
(\omega \text{ κλειστή}) &= \int_0^1 \left(t\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}(xt)x^i + \omega_j(xt)\right) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\omega_j(xt))dt \\
&= \omega_j(x).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1. *Κάθε σημείο p σε μια πολλαπλότητα M έχει γειτονιά όπου κάθε κλειστή 1-μορφή είναι και ακριβής.*

13 Απεικονίσεις σταθερής τάξης

- Έστω $F : M^n \to N^l$ μια ομαλή απεικόνιση ανάμεσα σε δυό διαφορικές πολλαπλότητες M, N. Ονομάζουμε **τάξη** της F στο $p \in M$, την τάξη της γραμμικής απεικόνισης

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

δηλαδή την διάσταση της εικόνας της F_*, $\dim ImF_*$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν γύρω από τα p και $F(p)$ επιλέξουμε συστήματα συντεταγμένων (U, ϕ), (V, ψ) αντίστοιχα, ώστε $p \in U$ και $F(p) \in V$ τότε η αναπαράσταση της F είναι η

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} = (\hat{F}^1, \ldots, F^l) : \phi(U) \to \psi(V),$$

και αν $X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, τότε

$$F_*X_p = X^i \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)},$$

το οποίο καταχρηστικά συνήθως γράφουμε ως

$$F_*X_p = X^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)},$$

ταυτίζοντας την F με την αναπαράστασή της, όταν δουλεύουμε σε συντεταγμένες.

Η τάξη της F στο p είναι κάτι συγκεκριμένο: η τάξη του Ιακωβιανού πίνακα της F στο p:

$$\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right).$$

- Αν η τάξη της F είναι η ίδια σε κάθε σημείο $p \in M$, η F λέμε ότι έχει σταθερή τάξη.

Ειδικές περιπτώσεις απεικονίσεων σταθερής τάξης είναι οι: immersions και submersions.

- **Immersion:** $F : M^m \to N^l$ ονομάζεται immersion αν η $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ είναι $1-1$ σε κάθε σημείο $p \in M$, δηλαδή αν η τάξη της είναι m. Προφανώς αυτό είναι εφικτό μόνο αν $m \leq l$.

Για παράδειγμα, έστω M_1, M_2 δύο διαφορικές πολλαπλότητες και $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$. Οι απεικονίσεις

$$\iota_1 : M_1 \to M_1 \times M_2, \quad \iota_1(q) = (q, p_2)$$

και

$$\iota_2 : M_2 \to M_1 \times M_2, \quad \iota_2(q) = (p_1, q)$$

είναι immersions: Έστω $X \in T_qM$ με $(\iota_1)_*X = 0$. Τότε, για κάθε $f \in C^\infty(M_1)$ μπορούμε να ορίσουμε την $\hat{f} : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ ως

$$\hat{f}(p,q) = f(p)$$

η οποία είναι μια ομαλή συνάρτηση πάνω στην $M_1 \times M_2$, και ικανοποιεί $\hat{f} \circ \iota_1(q) = \hat{f}(q, p_2) = f(q)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$0 = [(\iota_1)_*X](\hat{f}) = X(\hat{f} \circ \iota_1) = X(f),$$

επομένως $X = 0$, οπότε η $(\iota_1)_*$ είναι $1-1$.

- **Submersion:** $F : M^m \to N^l$ ονομάζεται submersion αν η $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$είναι επί σε κάθε σημείο $p \in M$, και επομένως έχει σταθερή τάξη l. Προφανώς αυτό είναι εφικτό μόνο αν $m \geq l$.

  Για παράδειγμα, έστω M_1, M_2 δύο διαφορικές πολλαπλότητες. Τότε οι προβολες

  $$\begin{aligned} \pi_1 &: M_1 \times M_2 \to M_1, \quad \pi_1(p,q) = p, \\ \pi_2 &: M_1 \times M_2 \to M_2, \quad \pi_2(p,q) = q, \end{aligned}$$

  είναι submersions: Έστω $Y \in T_{\pi_1(p,q)}M_1$. Τότε υπάρχει $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1 \times M_2$ ώστε $\gamma'(0) = Y$. Αν ορίσουμε $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), q) \in M_1 \times M_2$ τότε $\pi_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ και

  $$(\pi_1)_*\tilde{\gamma}'(0) = (\pi_1 \circ \tilde{\gamma})'(0) = \gamma'(0),$$

  και επομένως η $(\pi_1)_*$ είναι επί.

- **Ομαλή εμφύτευση** (smooth embedding): Αν $F : M \to N$ είναι immersion, και ταυτόχρονα ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του F και του $F(M)$.

  Για παράδειγμα, έστω $\iota : \mathbb{S}^n \to \iota(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ με $\iota(x) = x$. Η ι είναι immersion, αλλά επίσης η αντίστροφη της $\iota^{-1} : \iota(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{S}^n$ είναι συνεχής, και επομένως η ι είναι ομοιομορφισμός.

- Άλλα παραδείγματα:

  1. $\gamma : I \to M$ μια ομαλή καμπύλη είναι immersion αν και μόνο αν $\gamma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Αυτές τις καμπύλες τις ονομάζαμε "κανονικές" στη θεωρία καμπύλων.
  2. Αν $F : M \to N$ είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση, F_* είναι γραμμικός ισομορφισμός, επομένως η F είναι και immersion και submersion.
  3. Αν E είναι μια διανυσματική δέσμη πάνω από την M, και $\pi : E \to M$ είναι η προβολή της, τότε η π είναι submersion. Θα μπορούσε να είναι και immersion;
  4. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

     $$F(\phi, \theta) = ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$$

της οποίας η εικόνα είναι ο τόρος που προκύπτει από περιστροφή του κύκλου

$$(y-2)^2+z^2=2$$

γύρω από τον άξονα των z. Είναι immersion, αφού $F^1(\phi,\theta)=(2+\cos\phi)\cos\theta$, $F^2(\phi,\theta)=(2+\cos\phi)\sin\theta$, $F^3(\phi,\theta)=\sin\phi$ οπότε ο Ιακωβιανός πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial\phi} & \frac{\partial F^1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial F^2}{\partial\phi} & \frac{\partial F^2}{\partial\theta} \\ \frac{\partial F^3}{\partial\phi} & \frac{\partial F^3}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta & -(2+\cos\phi)\sin\theta \\ -\sin\phi\sin\phi & (2+\cos\phi)\sin\theta \\ \cos\phi & 0 \end{pmatrix},$$

που μπορεί να ελεγχθεί ότι έχει τάξη 2, για κάθε (ϕ,θ).

Η F ομώς δεν είναι ομαλή εμφύτευση, αφού δεν είναι $1-1$, και σίγουρα ο τόρος δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^2$.

Όμως η F επάγει μια ομαλή εμφύτευση G της $S^1\times S^1$ στον $\mathbb{R}^3$. Για να το δούμε αυτό πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει ομαλή απεικόνιση επικάλυψης $\pi:\mathbb{R}^2\to S^1\times S^1\subset\mathbb{C}^2$ ορισμένη ως

$$\pi(\phi,\theta)=(e^{i\phi},e^{i\theta}).$$

Μια απεικόνιση επικάλυψης είναι τοπική αμφιδιαφόριση, και επομένως immersion και submersion.

Επίσης, μια ομαλή απεικόνιση επικάλυψης για κάθε σημείο έχει μια ομαλή "τοπική τομή" ορισμένη σε ανοιχτο $U\subset S^1\times S^1$ γύρω από το σημείο, $\sigma:U\to\mathbb{R}^2$ ώστε $\pi\circ\sigma=id_{S^1\times S^1}$, επομένως σ_* είναι επίσης immersion και submersion.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, μπορούμε να ορίσουμε την G έτσι ώστε αν $(p,q)=\pi(\phi,\theta)$ τότε $G(p,q)=F(\phi,\theta)$. Η G είναι καλά ορισμένη αφού η F είναι σταθερή στο σύνολο $\pi^{-1}(p,q)$, λόγω περιοδικότητας.

Επίσης, η G είναι ομαλή γιατί η $G\circ\pi=F$ είναι ομαλή. Μάλιστα, αν σ είναι μια τοπική τομή ορισμένη σε ένα ανοιχτό U, τότε $G|_U=F\circ\sigma$ και επομένως αν $G_*=F_*\circ\sigma_*$ στο U. Οπότε η G είναι immersion επειδή η F είναι immersion. Αλλά τώρα η G είναι και $1-1$ με συνεχή αντίστροφο, και επομένως μια ομαλή εμφύτευση.

- Γιατί μια immersion δεν είναι απαραίτητα ομαλή εμφύτευση; Είδαμε ότι ένας λόγως είναι ότι μπορεί να μην είναι $1-1$, αλλά υπάρχουν και άλλα φαινόμενα που μπορούν αν συμβούν, όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

  1. Η $\gamma:(-\pi/2,3\pi/2)\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\sin 2t,\cos t)$ είναι $1-1$ και $\gamma'(t)\neq 0$ για κάθε t, επομένως είναι immersion. Όμως

  $$\lim_{t\to-\pi/2}\gamma(t)=(0,0)=\lim_{t\to 3\pi/2}\gamma(t)=\gamma(\pi/2)).$$

  Η εικόνα της είναι επομένως ένα οχτάρι, και είναι συμπαγής, άρα δεν είναι ομοιομορφική με το ανοιχτό διάστημα $(-\pi/2,3\pi/2)$, οπότε δεν είναι ομαλή εμφύτευση.

2. Έστω $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$ ο τόρος, και $a \in \mathbb{R}$ άρρητος. Θεωρούμε την απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i a t}).$$

Πάλι εύκολα βλέπουμε ότι $\gamma'(t) \neq 0$, επομένως η γ είναι immersion.

Επίσης, είναι $1-1$ αφού $e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_2}$ αν και μόνο αν $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$. Τότε όμως $at_1 - at_2 \notin \mathbb{Z}$, αφού a άρρητος, και άρα $e^{2\pi i a t_1} \neq e^{2\pi i a t_2}$, οπότε $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ εκτός αν $t_1 = t_2$.

Η F όμως δεν ομαλή εμφύτευση. Αν ήταν, το σύνολο $\gamma(\mathbb{Z})$ δεν θα είχε σημείο συσσώρευσης, αφού ούτε το $\mathbb{Z}$ έχει. Θα δείξουμε όμως ότι έχει: το σύνολο $\{e^{2\pi i a n}, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}^1$ έχει σημείο συσσώρευσης, αφού $\mathbb{S}^1$ συμπαγής, ενώ αντίστοιχα $e^{2\pi i n} = (1,0)$. Επομένως η $\gamma(n) = ((1,0), e^{2\pi i a n}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο σημείο στον τόρο.

Πρόταση 10. *Αν $F : M \to N$ είναι μια $1-1$ immersion. Τότε σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις η F είναι μια ομαλή εμφύτευση με κλειστή εικόνα.*

1. *συμπαγής*
2. *F proper (ελληνική μετάφραση;;)*

Απόδειξη. Και για τις δύο περιπτώσεις, η απόδειξη βασίζεται στο ότι κάθε $1-1$, κλειστή και συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι τοπολογική εμφύτευση (δηλαδή ομοιομορφισμός του πεδίου ορισμού με την εικόνα)

Αν η M είναι συμπαγής, τότε κάθε κλειστό υποσύνολό της είναι επίσης συμπαγές και επομένως η εικόνα του συμπαγής, και επομένως κλειστό υποσύνολο.

Αν η F είναι proper (προεικόνα συμπαγούς είναι συμπαγές), τότε αυτομάτως η F είναι κλειστή (δείτε το βιβλίο του Lie, κεφάλαιο 2, δεν θα μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες) □

- Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης σε πολλαπλότητες.

Θεώρημα 3. *Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες, $p \in M$, $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση ώστε $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ να είναι γραμμικός ισομορφισμός. Τότε υπάρχουν συνεκτικές γειτονιές $p \in U$ και $F(p) \in V$ ώστε*

$$F|_U : U \to V$$

να είναι αμφιδιαφόριση.

Επομένως, άμεσο πόρισμα είναι ότι αν M, N έχουν την ίδια διάσταση και η F είναι είτε immersion είτε submersion, τότε είναι τοπική αμφιδιαφόριση.

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στο θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης στον $\mathbb{R}^n$.

- Το θεώρημα σταθερής τάξης.

Θεώρημα 4. *Έστω M^m, N^n διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση σταθερής τάξης k. Για κάθε $p \in M$ υπάρχουν ομαλές συντεταγμένες $(x^1, \dots, x^m)$ γύρω από το p και $(y^1, \dots, y^n)$ γύρω από το $F(p)$ ώστε η αναπαράσταση της F να είναι*

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Ένα πόρισμα είναι το εξής.

Πόρισμα 2. *Αν $F : M^m \to N^n$ είναι ομαλή απεικόνιση και η M είναι συνεκτική, τότε η F έχει σταθερή τάξη αν και μόνο αν για κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχουν συστήματα συντεταγμένων γύρω από το p και $F(p)$ αντίστοιχα ώστε η αναπαράσταση της F να είναι γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη.

- Έστω ότι υπάρχουν συστήματα συντεταγμένων $(U, \phi), U \subset M$, και $(V, \psi), F(U) \subset V$ ώστε η αναπαράσταση της F, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ να είναι γραμμική. Το διαφορικό μιας γραμμικής απεικόνισης είναι η ίδια η απεικόνιση, και επομένως η τάξη της είναι η ίδια σε κάθε σημείο του U. Η τάξη της F επομένως είναι τοπικά σταθερή, και αφού η M είναι συνεκτική, η F έχει σταθερή τάξη.
- Έστω ότι η F έχει σταθερή τάξη. Τότε υπάρχουν συστήματα συντεταγμένων (U, ϕ), $U \subset M$, και (V, ψ), $F(U) \subset V$ ώστε η αναπαράσταση της F, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ να είναι

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

□

Συνέπεια του θεωρήματος σταθερής τάξης είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5. *Αν $F : M^m \to N^n$ είναι ομαλή απεικόνιση σταθερής τάξης. Τότε*

1. *Αν η F είναι επί τότε είναι submersion.*
2. *Αν η F είναι $1 - 1$ τότε είναι immersion.*
3. *Αν η F είναι $1 - 1$ και επί τότε είναι αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο τον δεύτερο ισχυρισμό.

Αφού η F έχει σταθερή τάξη, τότε σε κατάλληλα συστήματα συντεταγμένων έχει τη μορφή

$$F(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Αν F δεν είναι immersion, πρέπει $k < m$. Επομένως $F(0, \dots, 0, \varepsilon) = F(0, \dots, 0)$, για ε μικρό και επομένως δεν είναι $1 - 1$. □

- Σημαντικές ιδιότητες των submersions. Έστω $\pi : M^m \to N^n$ μία submersion.

  1. π είναι μια ανοιχτή απεικόνιση, δηλαδή απεικονίζει ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά.
     Έστω $W \subset M$ ανοιχτό, $q \in \pi(W)$ και $q = \pi(p)$. Μπορούμε να βρούμε χάρτες (U, ϕ) γύρω από το p και (V, ψ) γύρω από το q ώστε η αναπαράσταση της F να είναι
     $$F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n).$$
     και $\phi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$. Βλέπουμε αμέσως ότι το $\pi(W)$ περιέχει ένα ανοιχτο, το $\phi^{-1}(B_\varepsilon(0))$.
  2. Κάθε σημείο της M είναι στην εικόνα μιας τοπικής τομής της π. Έστω $p \in M$, $q = \pi(p)$ και ας γράψουμε όπως πριν την τοπική αναπαράσταση ως
     $$F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n),$$
     με $m \geq n$, και $\phi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε
     $$\sigma : V \to U$$
     ορίζοντας την τοπική της αναπαράσταση ως προς τους χάρτες (U, ϕ) (V, ψ) ως
     $$\sigma(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0).$$
  3. Αν μια submersion είναι επί, τότε είναι απεικόνιση πηλίκο. Υπενθυμίζουμε ότι μια απεικόνιση πηλίκο είναι μια επί συνεχής απεικόνιση ώστε $U \subset N$ είναι ανοιχτό αν και μόνο αν $\pi^{-1}(U) \subset M$ είναι ανοιχτό. Μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση το $N = M/\sim$ έχει την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την π.
     Αυτή η ιδιότητα είναι συνέπεια του ότι μια submersion είναι ανοιχτή απεικόνιση.

- Χρησιμότητα των επί submersions.

  1. Κριτήριο ομαλότητας: Αν $\pi : M \to N$ είναι επί submersion και $F : N \to P$ μια απεικονιση. Τότε η F είναι ομαλή αν και μόνο αν $\pi \circ F$ είναι ομαλή.
     Επιλέγοντας μια ομαλη τοπική τομή της π, $\sigma : U \to M$, $U \subset N$ έχουμε ότι $\pi \circ \sigma = id_U$. Οπότε
     $$F|_U = (F \circ \pi) \circ \sigma,$$
     από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.
  2. "Push-forward" συναρτήσεων. Αν $\pi : M \to N$ είναι μια επί submersion και $F : M \to P$ είναι μια ομαλή απεικόνιση η οποία είναι σταθερή στα σύνολα $\pi^1(\{q\})$ για κάθε $q \in N$. Τότε υπάρχει μοναδική ομαλή απεικόνιση $\tilde{F} : N \to P$ ώστε $\tilde{F} \circ \pi = F$.
     Αφού F είναι σταθερή στο σύνολο $\pi^{-1}(q)$, για $q \in N$, μπορούμε να ορίσουμε
     $$\tilde{F}(q) = F(p)$$
     από όπου έχουμε αυτόματα $\tilde{F} \circ \pi(p) = F(p)$, η οποία είναι ομαλή από το κριτήριο ομαλότητας.

3. Μοναδικότητα πηλίκων.

Έστω ότι έχουμε δύο επί submersions $\pi_1 : M \to N_1$ and $\pi_2 : M \to N_2$ και έστω ότι η κάθε μία είναι σταθερή στις προεικονες της άλλης. Δηλαδή για κάθε $p \in N_1$ και $q \in N_2$ οι απεικονίσεις

$$\pi_1 : \pi_2^{-1}(\{q\}) \to N_1$$
$$\pi_2 : \pi_1^{-1}(\{p\}) \to N_2$$

είναι σταθερές,

Τότε υπάρχει μια αμφιδιαφόριση $F : N_1 \to N_2$ ώστε $F \circ \pi_1 = \pi_2$, η οποία προέρχεται εφαρμόζοντας το "push-forward" παραπάνω στις π_1 και π_2.

14 Εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες (embedded submanifolds)

- Τι είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα.

Ορισμός 12. *Ένα υποσύνολο S μιας διαφορικής πολλαπλότητας M διάστασης n ονομάζεται εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης k αν για κάθε $p \in S$ υπάρχει ομαλός χάρτης (U, ϕ) της M γύρω από το p, με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^i : U \to \mathbb{R}$*

$$U \cap S = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n),\ x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Ο αριθμός $n - k$ ονομάζεται **συνδιάσταση (codimension)** της S.

- Εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες και ομαλές εμφυτεύσεις.

Θεώρημα 6. *Αν $S \subset M$ είναι μια εμφυτευμένη k-υποπολλαπλότητα, τότε η S είναι τοπολογική πολλαπλότητα, με τοπολογία την επαγώμενη από την M. Επιπλέον, υπάρχει μοναδική διαφορική δομή στην S ώστε η εμφύτευση $\iota : S \to M$ να είναι ομαλή εμφύτευση.*

Απόδειξη. Το S είναι Hausdorff και δεύτερο αριθμήσιμο, γιατί η M είναι.

Η S είναι τοπολογική πολλαπλότητα. Τον άτλαντα για την S τον κατασκευάζουμε ως εξής. Για κάθε $p \in S$, έστω (U, ϕ) ομαλός χάρτης της M γύρω από το p ώστε

$$U \cap S = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n),\ x^{k+1} = \dots = x^n = 0\},$$

και το $U \cap S$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S (αφού αυτό έχει την επαγώμενη τοπολογία)

Ορίζουμε το $U \cap S$ τον χάρτη ώστε για κάθε $q \in U \cap S$

$$\psi(q) = \pi \circ \phi(q)$$

όπου $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ είναι η προβολή στις k πρώτες συνιστώσες,

$$\pi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k).$$

Το σύνολο $\psi(U \cap S) \subset \mathbb{R}^k$ είναι ανοιχτό γιατί η ϕ και οι π είναι ανοιχτές απεικονίσεις.

Η αντίστροφη της ψ είναι η απεικόνιση

$$(x^1, \dots, x^k) \mapsto \phi^{-1}(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) = \phi^{-1} \circ j(x^1, \dots, x^k),$$

όπου $j(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, η οποία είναι επίσης συνεχής. Επομένως η ψ είναι ομοιομορφισμός.

Η S είναι διαφορική πολλαπλότητα. Αρκεί να ελέγξουμε ότι οι παραπάνω χάρτες είναι συμβατοί.

Έστω (U, ϕ) και (U', ϕ') χάρτες στην M με $U \cap U' \cap S \neq 0$, και $(U \cap S, \psi)$, $(U' \cap S, \psi')$ οι αντίστοιχοι χάρτες της S.

Τότε, η $\psi' \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U' \cap S) \to \psi'(U \cap U' \cap S)$ δίνεται από

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \pi \circ \phi' \circ \phi^{-1} \circ j,$$

και επομένως είναι ομαλή σαν σύνθεση ομαλών απεικονίσεων.

Η $\iota : S \to M$ είναι ομαλή εμφύτευση. Η ι είναι τοπολογική εμφύτευση γιατί S έχει την τοπολογία επαγώμενη από την M. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι immersion.

Η αναπαράσταση της ι σε τοπικές συντεταγμένες, επιλέγοντας γύρω από το $\iota(p) = p$ ένα χάρτη (U, ϕ) της M και τον αντίστοιχο $(U \cap S, \psi)$ για την S, είναι

$$\begin{aligned} \phi \circ \iota \circ \psi^{-1}(x^1, \ldots, x^k) &= \phi \circ \iota \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) \\ &= (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Επομένως έχει τάξη k και άρα είναι immersion.

Η διαφορική δομή αυτή είναι η μοναδική ώστε ι να είναι ομαλή εμφύτευση. Έστω ότι η S είναι εφοδιασμένη με κάποια (ίσως διαφορετική) διαφορική δομή $\mathcal{A}$ ώστε η ι να είναι ομαλή εμφύτευση.

Αρκεί να δείξουμε ότι αν (V, θ) είναι ένας ομαλός χάρτης στην $\mathcal{A}$ τότε αυτός είναι συμβατός με τους χάρτες που κατασκευάστηκαν παραπάνω. Δηλαδή αν (U, ϕ) είναι χάρτης της M ώστε $V \cap U \cap S \neq 0$ και $(U \cap S, \psi)$ ο αντίστοιχος χάρτης της S, τότε η

$$\psi \circ \theta^{-1} : \theta(V \cap U \cap S) \to \psi(V \cap U \cap S)$$

είναι αμφιδιαφόριση.

Έχουμε ότι

$$\psi \circ \theta^{-1} = \pi \circ \phi \circ \iota \circ \theta^{-1},$$

οπότε σαν σύνθεση ομαλών απεικονίσεων η $\psi \circ \theta^{-1}$ είναι ομαλή απεικόνιση.

Αφού είναι $1-1$ και επί, αρκεί να δείξουμε ότι είναι τοπική αμφιδιαφόριση και γι'αυτό αρκεί να δείξουμε ότι είναι submersion (ή immersion). Έχουμε λοιπόν

$$(\psi \circ \theta^{-1})_* = \pi_* \circ \phi_* \circ \iota_* \circ (\theta^{-1})_*$$

Η $(\theta^{-1})_*$ είναι ισομορφισμός αφού είναι ομαλός χάρτης. Η $\phi_* \circ \iota_*$ είναι $1-1$ αφού η ι_* είναι $1-1$ και η ϕ_* $1-1$ και επί, και άρα η $\phi_* \circ \iota_* \circ \theta^{-1}$ είναι $1-1$.

Από τον ορισμό της ϕ

$$\phi \circ \iota \circ \theta^{-1}(y^1, \ldots, y^k) = (x^1(y), \ldots, x^k(y), 0, \ldots, 0),$$

επομένως

$$Im(\phi \circ \iota \circ \theta^{-1})_* \cap Ker\pi_* = \emptyset.$$

Συνεπώς η σύνθεση $\pi_* \circ (\phi \circ \iota \circ \theta^{-1})_*$ είναι $1-1$ οπότε η $\pi \circ \phi \circ \iota \circ \theta^{-1}$ είναι immersion. $\square$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο.

Θεώρημα 7. *Η εικόνα μιας ομαλής εμφύτευσης είναι εμφυτευμένη πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Είναι συνέπεια του θεωρήματος σταθερής τάξης, αφού μια ομαλή εμφύτευση είναι immersion. $\square$

- Ο εφαπτόμενος χώρος μιας εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας. Από τη στιγμή που για μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα η εμφύτευση $\iota : S \to M$ είναι immersion, μπορούμε μέσω της

$$\iota_* : T_pS \to T_pM$$

να ταυτίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο T_pS με την εικόνα του $i_*(T_pS) \subset T_pM$: θα γράφουμε (μετά από αυτή την ενότητα) T_pS αντί για $i_*(T_pS)$.

Συγκεκριμένα, αν $X \in T_pS$ μια παραγώγιση, η δράση του $\tilde{X} = \iota_* X$ σε μια $f \in C^\infty(M)$ είναι

$$(\iota_* X)f = X(f \circ \iota) = X(f|_S).$$

Σημειώνουμε ότι στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την

$$f|_S = f \circ \iota.$$

Οι f και η ι είναι ομαλές απεικονίσεις, επομένως και η $f|_S$ είναι ομαλή - συνέπεια λοιπόν του ότι η ι είναι ομαλή εμφύτευση (που με τη σειρά του είναι συνέπεια του ορισμού της εμφυτευμένης πολλαπλότητας μέσω του Θεωρήματος 6) είναι ότι ο περιορισμός ομαλής συνάρτησης είναι ομαλή συνάρτηση.

Είδαμε επίσης ότι την παράγωγο μπορούμε να την υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας ομαλές καμπύλες. Έστω $f \in C^\infty(M)$ και S μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητά της M. Έστω $p \in S$ και $\tilde{X} \in T_pM$. Ο παραπάνω υπολογισμός μας λέει ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο $\tilde{X}f(p)$ αρκεί να υπολογίσουμε την παράγωγο $f_S(p)$, όπου $X \in T_pS$ ώστε $\iota_* X = \tilde{X}$.

Έστω λοιπόν $\gamma : -(\varepsilon, \varepsilon) \to S \subset M$ μια ομαλή καμπύλη με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = X$. Τότε

$$\tilde{X} f(p) = i_* \tilde{X} f(p) = (f \circ \iota \circ \gamma)'(0) = X(f|_S)(p).$$

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι η παράγωγος μιας $f \in C^\infty(M)$ σε κατεύθυνση εφαπτόμενη σε μια εμβαπτυσμένη υποπολλαπλότητα εξαρτάται μόνο από τον περιορισμό της f στην υποπολλαπλότητα.

- Υποπολλαπλότητες στάθμης.

Θεώρημα 8. *Αν M^m, N^n είναι διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$ είναι μια ομαλή απεικόνιση σταθερής τάξης k τότε για κάθε $a \in F(M)$ το σύνολο στάθμης*

$$F^{-1}(\{a\})$$

είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M συνδιάστασης k, και κλειστό υποσύνολο της M.

Απόδειξη. Κάθε $F^{-1}(\{a\})$ είναι κλειστό από συνέχεια. Τους απαραίτητους χάρτες για να δείξουμε ότι η $F^{-1}(\{a\})$ είναι υποπολλαπλότητα τους παίρνουμε από το θεώρημα σταθερής τάξης: γύρω από κάθε σημείο $p \in F^{-1}(\{a\})$ η F αναπαριστάται με κατάλληλους χάρτες ως

$$F(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

ώστε το p να αντιστοιχεί στο $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ και το a στο $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Επομένως, γύρω από το p το σύνολο $F^{-1}(\{a\})$ αντιστοιχεί (μέσω του χάρτη (U, ϕ) στην M) στο

$$\{(x^1, \ldots, x^m) \in U,\ x^1 = \cdots = x^k = 0\}.$$

Επομένως το σύνολο στάθμης είναι υποπολλαπλότητα διάστασης $m - k$ και συνδιάστασης k. □

Στην περίπτωση λοιπόν που η F είναι submersion, η τάξη είναι $\dim N$ οπότε τα σύνολα στάθμης της F είναι κλειστές υποπολλαπλότητες της M συνδιάστασης $\dim N$.

Ορολογία: αν $c \in F(M)$ τότε

- Αν για κάθε $p \in M$ με $F(p) = c$, η $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ είναι επιμορφισμός, τότε το c ονομάζεται ομαλή τιμή της F, και το σύνολο στάθμης $F^{-1}(\{c\})$ ομαλό σύνολο στάθμης.
- Αν για κάποιο $p \in M$ με $F(p) = c$, η $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ δεν είναι επιμορφισμός, τότε το c ονομάζεται κρίσιμη τιμή και το p κρίσιμο σημείο της F.

Τότε μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 9. *Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση. Τότε κάθε ομαλό επίπεδο στάθμης της F είναι μια κλειστή υποπολλαπλότητα της M συνδιάστασης* $\dim N$.

Απόδειξη. Δεν γνωρίζουμε αν η F έχει σταθερή τάξη, αλλά γνωρίζουμε ότι η F έχει σταθερή τάξη $\dim N$ κατά μήκος του ομαλού συνόλου στάθμης $S = F^{-1}(\{a\})$.

Αρκεί λοιπόν να περιορίσουμε την F σε μια ανοιχτή γειτονιά M' του S στην οποία η F έχει σταθερή τάξη, και να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 8, αφού η M' θα είναι μια ανοιχτή υποπολλαπλότητα της M.

Η ύπαρξη της γειτονιάς M' όπου η F έχει σταθερή τάξη $\dim N$ εξασφαλίζεται από συνέχεια: γράφουμε το F_* σε συντεταγμένες γύρω από $p \in S$ σαν $\dim N \times \dim M$ πίνακα. Αυτός ο πίνακας έχει τάξη $\dim N$ αν και μόνο αν κάποια υποορίζουσά του είναι μη μηδενική. Η ορίζουσα εξαρτάται συνεχώς από τα στοιχεία του πίνακα, από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

- Περιγραφή του εφαπτόμενου χώρου ενός συνόλου στάθμης.

Λήμμα 16. *Έστω $p \in S \subset M$ μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα, $p \in U \subset M$ ανοιχτό και $F : U \to N$ submersion ώστε $S \cap U = F^{-1}(\{a\})$. Τότε*

$$T_pS = KerF_*.$$

Απόδειξη. $F \circ \iota : S \to N$ είναι σταθερή, επομένως $F_* \circ \iota_* = 0$. Επομένως $\iota_*(T_pS) \subset KerF_*$.

Για να δείξουμε την ισότητα: αφού F_* είναι επί

$$\dim KerF_* = \dim T_pM - \dim T_{F(p)}N = \dim T_pS.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή η S έχει συνδιάσταση $\dim N$.

□

- Περιορίζοντας απεικονίσεις σε υποπολλαπλότητες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι

    1. Αν $F : M \to N$ ομαλή και $S \subset M$ εμβαπτυσμένη υποπολλαπλότητα τότε η $F|_S : S \to N$ είναι ομαλή.
    2. Αν $F : M \to N$ ομαλή, $S \subset N$ εμβαπτυσμένη υποπολλαπλότητα και $F(M) \subset S$, τότε η απεικόνιση $F : M \to S$ είναι ομαλή.

- Διανυσματικά πεδία σε υποπολλαπλότητες.

Ορισμός 13. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $S \subset M$ εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ ονομάζεται εφαπτόμενο στην S αν για κάθε $p \in S$, $X_p \in T_pS$.*

Παρατηρούμε ότι γενικά ο περιορισμός ενός $X \in \mathcal{X}(M)$ σε μια εμβαπτυσμένη υποπολλαπλότητα $S \subset M$ δεν είναι διανυσματικό πεδίο της S. Αυτό όμως ισχύει αν το X είναι εφαπτόμενο στην S:

Πρόταση 11. *Αν $S \subset M$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα και $\iota : S \to M$ η αντίστοιχη εμφύτευση, τότε αν $X \in \mathcal{X}(M)$ είναι εφαπτόμενο στην S τότε υπάρχει μοναδικό διανυσματικό πεδίο $Y \in \mathcal{X}(S)$ ώστε τα X, Y να είναι ι-συσχετισμένα.*

Μια εφαρμογή της παραπάνω πρότασης είναι η παρακάτω.

Πρόταση 12. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $S \subset M$ εμφυτευμένη υποπολλαπλότητά της. Έστω $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ εφαπτόμενα στην S. Τότε το $[Y_1, Y_2]$ είναι επίσης εφαπτόμενο στην S.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(S)$ ώστε $\iota_* X_i = Y_i$.

Τότε, για κάθε $p \in S$

$$[Y_1, Y_2]_{\iota(p)} = [\iota_* X_1, \iota_* X_2]_{\iota(p)} = \iota_*[X_1, X_2]_p,$$

επομένως το $[Y_1, Y_2]$ είναι εφαπτόμενο στην S. □

Παρατήρηση 14.1. Την παραπάνω πρόταση μπορεί κανείς να την "διαβάσει" και ως εξής. Η αγκύλη Lie $[Y_1, Y_2]_{\iota(p)}$, για $p \in S$, παρόλο που τα πεδία Y_1, Y_2 είναι ορισμένα στην M, εξαρτάται μόνο από τους περιορισμους τους στην υποπολλαπλότητα S, αφού $[Y_1, Y_2]_{\iota(p)} = \iota_*[X_1, X_2]_p$, και άρα ο υπολογισμός της $[Y_1, Y_2]_{\iota(p)}$ μπορεί να γίνει πάνω στην S, ξεχνώντας την M.

- 1-μορφές σε υποπολλαπλότητες. Αν $\omega \in \Gamma(T^*M)$ είναι μια 1-μορφή στην M και $S \subset M$ μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητά της, με αντίστοιχηεμφύτευση $\iota : S \to M$ τότε ορίζουμε

$$\omega|_S = \iota^* \omega \in \Gamma(T^*S).$$

Το παρακάτω παράδειγμα λειτουργεί σαν προειδοποίηση για την φύση αυτού του περιορισμού. Ακόμα και αν η $\omega_p \neq 0$ για ένα $p \in S$, μπορούμε να έχουμε ότι $\omega|_S = 0$ στο p, αρκεί $ker\omega_p = T_pS$, αφού τότε για $V \in T_pS$

$$\omega|_S(V) = \iota^*\omega(V) = \omega(\iota_* V) = 0.$$

Έστω $\omega = dy$ στον $\mathbb{R}^2$ και $S = \{y = 0\}$ υποπολλαπλότητα. Τότε

$$\omega|_S = \iota^* dy = d(y \circ \iota) = 0,$$

αφού η y είναι σταθερή και ίση με 0 κατά μήκος της $S = \{y = 0\}$.

Εφαρμογή: Έστω $f \in C^\infty(M)$ και $S \subset M$ εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Τότε

$$d(f|_S) = (df)|_S.$$

Έστω $V \in T_pS$, τότε

$$d(f|_S)(V) = V(f) = \iota_* V(f) = df(\iota_* V) = \iota^*(df) = df|_S.$$

14.1 Πολλαπλότητες πινάκων που είναι σύνολα στάθμης

- Είδαμε ότι οι πραγματικοί $m \times n$ πίνακες $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, σαν πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης mn, είναι και διαφορική πολλαπλότητα διάστασης mn.

- Συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Αυτοί είναι οι πίνακες $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ με την ιδιότητα $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

  $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $\frac{n(n+1)}{2}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε με δυο τρόπους. Ο άμεσος τρόπος είναι να παρατηρήσει κανείς ότι ο $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ και μια βάση του είναι οι πίνακες S_{ab} για $a \leq b$ με $S_{ab} = (s_{ij})$ όπου

$$s_{ij} = \begin{cases} s_{ij} = 0 & \text{αν } \{i,j\} \neq \{a,b\} \\ s_{ij} = 1 & \text{αν } \{i,j\} = \{a,b\} \end{cases}$$

  Για παράδειγμα, μια βάση του $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ είναι η

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

  και επομένως η διάστασή του είναι $\frac{2\cdot 3}{2} = 3$.

  Μπορούμε να το δούμε και ως εξής. Έστω η ομαλή (γραμμική) απεικονιση $F : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$F((a_{ij})) = (a_{12} - a_{21}, \ldots, a_{1n} - a_{n1}, a_{23} - a_{32}, \ldots, a_{2n} - a_{n2}, \ldots, a_{(n-1)n} - a_{n(n-1)}) \in \mathbb{R}^{1+2+\ldots+n-1}.$$

  Μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι submersion και ότι $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(0)$. Επομένως, το $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ είναι κλειστή υποπολλαπλότητα της $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ συνδιάστασης $\frac{n(n-1)}{2}$ και άρα διάστασης

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

  Βέβαια, αφού η F είναι γραμμική, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = KerF$ από όπου μπορούμε να βρούμε τη βάση.

- Ορθογώνιοι πίνακες

$$O(n) = \{P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ PP^T = I_n\}.$$

  Ορίζοντας την απεικόνιση $F : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ ως

$$F(A) = AA^T,$$

  πρέπει να ελέξγουμε ότι $I_n \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ είναι ομαλή τιμή της F.

  Έστω $A \in O(n)$. Κάθε $X \in T_A\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι ένας πίνακας $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ αφού είδαμε ότι οι παραγωγίσεις σε εναν διανυσματικό χώρο ταυτίζονται με κάποιο γεωμετρικό εφαπτόμενο διάνυσμα, δηλαδή

$$T_A\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \approx \{A\} \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \approx M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Μάλιστα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $X = \gamma'(0)$ όπου

$$\gamma(t) = A + tX,$$

και επομένως

$$\begin{aligned} F_* X = (F\circ\gamma)'(0) = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big((A+tX)(A+tX)^T\big) \\ = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A+tX)\cdot A^T + A \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A+tX)^T \\ = & XA^T + AX^T. \end{aligned}$$

Για κάθε $Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \approx T_I \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ παρατηρούμε ότι για $X = \frac{1}{2}AY$

$$F_* X = F_* \frac{1}{2} YA = \frac{1}{2}(YAA^T + AA^T Y^T) = \frac{Y+Y^T}{2} = Y,$$

και άρα $F_* : T_A M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to T_I \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ είναι επί.

Επομένως, η $O(n)$ είναι κλειστή υποπολλαπλότητα της $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ συνδιάστασης $\dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, άρα διάστασης

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Μάλιστα, ο εφαπτόμενος χώρος $X \in {}_I O(n) = KerF_*$ (όπου θέτουμε $A = I$) και άρα

$$X + X^T = 0.$$

Ο εφαπτόμενος χώρος λοιπόν της $O(n)$ στο I είναι οι αντισυμμετρικοί πίνακες X με $X = -X^T$.

- Η ειδική γραμμική ομάδα (special linear group) $SL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \det A = 1\}$$

Η απεικόνιση $F : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$F(A) = \det A,$$

είναι ομαλή. Μάλιστα, συμβολίζοντας με $DF_p = (F_*)|_{T_pM}$ για μια ομαλή $F : M \to N$:

$$(D\det)_A(X) = \frac{d}{dt}(A+tX)\bigg|_{t=0} = \det A \cdot \mathrm{tr}(A^{-1}X).$$

Επομένως, για $A \in SL(n,\mathbb{R})$

$$(D\det)_A(A) = \det A \cdot \mathrm{tr} I = n \det A = n \neq 0,$$

και άρα $(D\det)_A : T_A\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to T_1\mathbb{R}$ είναι επί. Δηλαδή το 1 είναι ομαλή τιμή της det.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η $SL(n,\mathbb{R})$ είναι κλειστή υποπολλαπλότητα της $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ συνδιάστασης $\dim\mathbb{R} = 1$, άρα διάστασης

$$\dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1.$$

Ο εφαπτόμενος χώρος στο $A = I_n$ αποτελείται από εκείνους τους πίνακες X με

$$(D\det)_A(X) = \det A \cdot \mathrm{tr}(A^{-1}X) = \mathrm{tr}X = 0.$$

Άρα

$$T_I SL(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}X = 0\}.$$

- Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n) = \{A \in O(n),\ \det A = 1\}$. Για κάθε $A \in O(n)$ έχουμε $AA^T = I_n$. Παίρνοντας ορίζουσες βλέπουμε ότι $(\det A)^2 = 1$ και άρα $\det A = \pm 1$.

  Άρα η $O(n)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες

$$O(n) = (O(n) \cap \{\det = 1\}) \bigcup (O(n) \cap \{\det = -1\}).$$

  Η $SO(n) = O(n) \cap \{\det = 1\} = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$ είναι υποομάδα της $O(n)$ και ανοιχτή υποπολλαπλότητά της. Επομένως έχουμε

$$\dim SO(n) = \dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

15 Ολοκληρωτικές καμπύλες και ροές διανυσματικών πεδίων

- Ολοκληρωτικές καμπύλες διανυσματικών πεδίων.
  Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $V \in \mathcal{X}(M)$ ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο. Μια ομαλή καμπύλη $\gamma : (a,b) \to M$ ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** του διανυσματικού πεδίου V αν

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \tag{15.1}$$

  για κάθε $t \in (a,b)$.

- Παραδείγματα.

  1. Έστω $M = \mathbb{R}^2$ και $V = \frac{\partial}{\partial x}$. Κάθε καμπύλη

$$\gamma(t) = (t+c, d),$$

     όπου $c, d \in \mathbb{R}$, είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X γιατί, αν x, y είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων, τότε

$$\gamma'(t)x = \gamma_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \right)(x) = (x \circ \gamma)'(t) = 1,$$
$$\gamma'(t)y = \gamma_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \right)(y) = (y \circ \gamma)'(t) = 0,$$

     επομένως

$$\gamma'(t) = \gamma'(t)(x) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} + \gamma'(t)(y) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{\gamma(t)} = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} = X_{\gamma(t)}.$$

  2. Έστω $M = \mathbb{R}^2$, $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Θέλουμε να βρούμε, αν υπάρχουν, ολοκληρωτικές καμπύλες $\gamma(t) = (x(t), y(t)$ για το W. Τότε

$$\gamma'(t) = x'(t) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} + y'(t) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{\gamma(t)}.$$

     Επομένως, η γ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του W αν και μόνο αν για κάθε t

$$\gamma'(t) = W_{\gamma(t)}$$
$$x'(t) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} + y'(t) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{\gamma(t)} = -y \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} + x \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{\gamma(t)}.$$

Βλέπουμε ότι το πρόβλημα εύρεσης ολοκληρωτικών καμπύλων ανάγεται στην επίλυση του συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y \\ y'(t) &= x. \end{aligned}$$

Μπορούμε είτε να μαντέψουμε τη λύση, είτε να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned} x''(t) &= -y'(t) = -x \\ y''(t) &= x'(t) = -y \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha \cos t - \beta \sin t \\ y(t) &= -x'(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t. \end{aligned}$$

Για $t = 0$, $x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$. Επομένως, αν $\gamma(0) = (0,0)$ τότε $\gamma(t) = (0,0)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Γενικά,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

επομένως η καμπύλη περιστρέφει το διάνυσμα (α, β) αριστερόστροφα, ώστε $\gamma(t)$ αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία t.

Οι υπόλοιπες ολοκληρωτικές καμπύλες λοιπόν του W είναι κύκλοι με κέντρο το $(0,0)$ και αρχή $\gamma(0) = (\alpha, \beta)$.

- Η εύρεση ολοκληρωτικών καμπύλων πάντα ανάγεται στην επίλυση ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ειδικότερα, δουλεύοντας σε ένα χάρτη (U, ϕ) της M με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, \ldots, x^n$, έστω ότι ένα $V \in \mathcal{X}(M)$ γράφεται, στο U, ως

$$V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

όπου εδώ θεωρούμε ότι $v^i : \phi(U) \to \mathbb{R}$.

Ας υποθέσουμε ότι ψάχνουμε στο U μια ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma : I \to U$ του V. Γράφοντας τη γ στις συντεταγμένες, με $\gamma(t) = (\phi^{-1} \circ \tilde{\gamma})(t)$, όπου

$$\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}^1(t), \ldots, \tilde{\gamma}^n(t)),$$

έχουμε

$$\gamma'(t) = (\tilde{\gamma}^i)'(t) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t)}.$$

Επομένως, για να είναι η γ ολοκληρωτική καμπύλη του V πρέπει

$$(\tilde{\gamma}^i)'(t) = v^i(\tilde{\gamma}^1, \dots, \gamma^n(t)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{15.2}$$

Από τη θεωρία συνήθων διαφορικών εξισώσεων, δοσμένης μιας αρχικής συνθήκης

$$\tilde{\gamma}(0) = (a^1, \dots, a^n) = a$$

υπάρχει πάντα μια **μοναδική** λύση $\tilde{\gamma}_a = (\tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^n) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \phi(U)$, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, του (15.2). Επιπλέον, η λύση $\tilde{\gamma}$ εξαρτάται με ομαλό τρόπο από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή υπάρχει $a \in V_0 \subset U$ ώστε η απεικόνιση

$$\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_0 \to \phi(U)$$

να είναι ομαλή.

Επομένως, για κάθε $p \in U$ με $p = \phi^{-1}(a^1, \dots, a^n)$ η λύση $\tilde{\gamma}(t)$ με $\tilde{\gamma}(0) = (a^1, \dots, a^n)$ αντιστοιχεί σε μια ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ του V που διέρχεται από το $p = \gamma(0)$, που εξαρτάται επίσης με ομαλό τρόπο από το p (με αντίστοιχο τρόπο όπως παραπάνω, για την $\tilde{\gamma}$).

- Αν $\gamma : (a, b) \to M$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη ενός $V \in \mathcal{X}(M)$ τότε και η καμπύλη $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t - c)$, $t \in (a + c, b + c)$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V, αφού για κάθε $f \in C^\infty(M)$

$$\bar{\gamma}'(t)(f) = (f \circ \bar{\gamma})'(t) = (f \circ \gamma)'(t - c) = \gamma'(t - c)(f) = V_{\gamma(t-c)}(f) = V_{\bar{\gamma}(t)}(f),$$

  και άρα $\bar{\gamma}'(t) = V_{\bar{\gamma}(t)}$, για κάθε $t \in (a + c, b + c)$.

- Ολικές ροές - κίνητρο: Έστω $V \in \mathcal{X}(M)$ και **ας υποθέσουμε** ότι για κάθε $p \in M$ η ολοκληρωτική καμπύλη γ_p του V με $\gamma_p(0) = p$ είναι **μοναδική και ορίζεται για κάθε** $t \in (-\infty, \infty)$**.** Αφού οι ολοκληρωτικές καμπύλες εξαρτώνται με ομαλό τρόπο από τις αρχικές συνθήκες αυτή η διαδικασία ορίζει μια ομαλή απεικόνιση $\Phi : M \times (-\infty, +\infty) \to M$ με

$$\Phi(p, t) = \gamma_p(t).$$

  Προφανώς, $\Phi(p, 0) = p$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

  Ορίζουμε επίσης τις απεικονίσεις $\Phi_t : M \to M$, με $\Phi_t(p) = \Phi(p, t) = \gamma_p(t)$, οι οποίες σπρώχνουν κάθε σημείο τη πολλαπλότητας κατά μήκος της αντίστοιχης ολοκληρωτικής καμπύλης για χρόνο t, και

$$\Phi_0 = id_M.$$

  Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \Phi_{t+s}(p) &= \gamma_p(t + s) \\ \Phi_t \circ \Phi_s(p) &= \gamma_{\gamma_p(s)}(t). \end{aligned}$$

Η αντιστοιχεί $t \mapsto \gamma_p(t+s)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V, όπως είδαμε παραπάνω, με το $t = 0$ να αντιστοιχεί στο σημείο $\gamma_p(s)$. Αλλά και η αντιστοιχία $t \mapsto \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V με το $t = 0$ να αντιστοιχεί στο σημείο $\gamma_p(s)$. Από μοναδικότητα, πρέπει να ταυτίζονται και άρα

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s. \tag{15.3}$$

Συνέπεια αυτού, εφόσον $t+(-t) = 0$ και $\Phi_0 = id_M$ είναι ότι $\Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$ άρα η Φ είναι αντιστρέψιμη με ομαλή αντίστροφο. Είναι δηλαδή αμφιδιαφόριση.

Τη Φ λοιπόν μπορούμε να τη δούμε σαν

$$\Phi : \mathbb{R} \to \text{Diff}(M),$$

όπου $\text{Diff}(M) = \{F : M \to M,\ F \text{ αμφιδιαφόριση της } M\}$ έχει δομή ομάδας με την πράξη της σύνθεσης. Η Φ λοιπόν είναι ένας μορφισμός ομάδων, λόγω της (15.3).

- Ολικές ροές. Με κίνητρο τα παραπάνω ορίζουμε

Ορισμός 14. *Μια ομαλή απεικονιση $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ που ικανοποιεί*

$$\Phi(\Phi(p,t), s) = \Phi(t+s, p)$$

ισοδύναμα αν $\Phi_t(p) = \Phi(p,t)$

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s \tag{15.4}$$

και $\Phi(p, 0) = p$, για κάθε $p \in M$, ονομάζεται ολική ροή στην M.

Όπως είδαμε η συνθήκη (15.4) μας δίνει ότι $\Phi_t : M \to M$ είναι αμφιδιαφορίσεις, και $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.

- Έστω $\Phi_t : M \to M$ μια ολική ροή. Θα δείξουμε ότι για κάθε $p \in M$ οι ομαλές καμπύλες $\gamma_p(t) = \Phi_t(p)$ είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου

$$V_p = \gamma_p'(0),$$

που ονομαζεται απειροστός γεννήτορας της Φ.

Πρόταση 13. *Έστω $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ μια ομαλή ολική ροή στην M και ας ορίσουμε για κάθε $p \in M$ την καμπύλη $\gamma_p(t) = \Phi(p,t)$, και τον απειροστό γεννήτορα της Φ, το (ενδεχομένως μη ομαλό) διανυσματικό πεδίο V στην με*

$$V_p = \gamma_p'(0).$$

Τότε το V είναι ένα ομαλό διανσυματικό πεδίο, και οι καμπύλες $\gamma_p(t)$ είναι ολοκληρωτικες καμπύλες του V.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι το V είναι ομαλό, αρκεί να δείξουμε ότι η δράση του Vf σε κάθε ομαλή συναρτηση $f \in C^\infty(M)$ είναι ομαλή συνάρτηση. Υπολογίζουμε λοιπον

$$Vf = \gamma_p'(0)f = (f \circ \gamma_p)'(0) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(p,0)} (f \circ \Phi)(p,t).$$

Τώρα $f \circ \Phi \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ αφού είναι σύνθεση ομαλών απεικονίσων και το διανυσματικό πεδίο

$$(p,t) \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(p,t)} \in T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R})$$

είναι ομαλό, επομένως Vf είναι ομαλή (Ερώτηση, πώς ορίζεται το $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(p,t)}$;)
Μένει να δείξουμε ότι κάθε $\gamma_p(t)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V. Έχουμε, για τυχαίο $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\Phi(p, t + t_0) = \Phi(\Phi_{t_0}(p), t).$$

άρα $\gamma_p(t + t_0) = \gamma_{\gamma_p(t_0)}(t)$. Συνεπώς

$$\gamma_p'(t_0) = \gamma_{\gamma_p(t_0)}'(0) = V_{\gamma_p(t_0)},$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

- Παραδείγματα.

  1. Στο παράδειγμα με $M = \mathbb{R}^2$ και $X = \frac{\partial}{\partial x}$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ η ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma_{(x,y)}$ του X από το (x,y) (δηλαδή που ικανοποιεί $\gamma_{(x,y)}(0) = (x,y)$) ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και δίνεται από
  $$\gamma_{(x,y)}(t) = (t + x, y).$$
  Ορίζει λοιπον την ολική ροή $\Phi : \mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^2$
  $$\Phi((x,y),t) = (t + x, y).$$

  2. Στο παράδειγμα με $M = \mathbb{R}^2$ και $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ η ροή $\gamma_{(x,y)}$ του W από το (x,y) ορίζεται επίσης για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με
  $$\gamma_{(x,y)}(t) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$
  και επομένως ορίζει μια ολική ροή $\Phi : \mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^2$
  $$\Phi((x,y),t)) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$
  Η Φ δεν μετακινεί το σημείο $(0,0)$ ενώ μετατοπίζει κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ διερχόμενου από το (x,y) κατά γωνία t.

- Ορίζουν όλα τα διανυσματικά πεδία ολικές ροές; Η απάντηση είναι όχι, όπως δείχνουν τα παρακάτω παραδείγματα.

  1. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0$ και $X = \frac{\partial}{\partial x}$. Για κάθε $(x, y) \in M$ η αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη είναι, όπως είδαμε, η
  $$\gamma_{(x,y)}(t) = (t + x, y),$$
  η οποία όμως μένει στην M μόνο όσο $t + x < 0$ δηλαδή $t < -x$.

  2. Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι το προηγούμενο παράδειγμα είναι "τεχνητό", επειδή "κόψαμε" τον $\mathbb{R}^2$ στη μέση. Το ακόλουθο παράδειγμα όμως δείχνει ότι είναι δυνατόν και στον $\mathbb{R}^2$ να έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο του οποίου οι ολοκληρωτικές καμπύλες δεν ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

  Έστω $M = \mathbb{R}^2$ και $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ βρίσκονται λύνοντας το σύστημα
  $$\begin{aligned} \gamma_1'(t) &= (\gamma_1(t))^2, \\ \gamma_2'(t) &= 0. \end{aligned} \tag{15.5}$$
  Η δεύτερη εξίσωση μας λέει ότι $\gamma_2(t) = d \in \mathbb{R}$, ενώ για τη δεύτερη έχουμε
  $$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) = (\gamma_1(t))^2 \\ \iff \quad & -\frac{\gamma_1'(t)}{(\gamma_1(t))^2} = -1 \quad \text{αν } \gamma_1(t) \neq 0 \\ & = \left(\frac{1}{\gamma_1(t)}\right)' = -1, \end{aligned}$$
  επομένως,
  $$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1(t)} = -t + c \\ \iff \quad & \gamma_1(t) = \frac{1}{c - t}. \end{aligned}$$
  Οπότε, η ολοκληρωτική καμπύλη με αρχή το $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ δίνεται από
  $$\gamma_{(x,y)}(t) = \begin{cases} (0, y) & \text{αν } x = 0 \\ (\frac{1}{x^{-1} - t}, y) & \text{αν } x \neq 0. \end{cases}$$
  Βλέπουμε λοιπόν ότι αν $x \leq 0$ η $\gamma_{(x,y)}$ ορίζεται για κάθε $t \in \left(\frac{1}{x}, +\infty\right)$, αλλά αν $x > 0$ η $\gamma_{(x,y)}$ ορίζεται μόνο για
  $$t \in \left(-\infty, \frac{1}{x}\right),$$

και επομένως δεν ορίζει μια ολική ροή.

Για να κατανοήσουμε λίγο καλύτερα αυτό το παράδειγμα, ας ορίσουμε $N = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u > 0\}$ και την απεικονιση

$$F : N \to M$$

με

$$F(u, v) = \left(\frac{1}{u}, v\right),$$

που μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι αμφιδιαφόριση (Άσκηση).

Τότε, για κάθε $f \in C^\infty(M)$, έχουμε $(f \circ F)(u, v) = f(\frac{1}{u}, v)$, οπότε για κάθε $(x, y) \in M$ έχουμε $(x, y) = F\left(\frac{1}{x}, y\right)$ και άρα

$$\begin{aligned} F_*\left(-\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{(\frac{1}{x},y)}\right)(f) &= -\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)}(f \circ F) \\ &= x^2 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1/x,y)} \end{aligned}$$

αφού $-\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{(\frac{1}{x},y)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(-t + \frac{1}{x}, y)$ και $F\left(-t + \frac{1}{x}, y\right) = \left(\frac{1}{x^{-1}-t}, y\right)$, οπότε

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(f \circ F)\left(-t + \frac{1}{x}, y\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\left(\frac{1}{x^{-1} - t}, y\right) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{1}{x^{-1} - t}, y\right)(f) \\ &= x^2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)}(f). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F_*\left(-\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{(\frac{1}{x},y)}\right) = x^2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)}.$$

Η ολοκληρωτικές καμπύλες του $V = -\frac{\partial}{\partial u}$ δεν υπάρχουν για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο παράδειγμα. Μπορεί κανείς να δεί ότι αν $\gamma(t)$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη V τότε η $F \circ \gamma(t)$ θα είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του F_*V. Σημειώνουμε ότι το push-forward εδώ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο αφού η F είναι αμφιδιαφόριση.

Για να το δούμε αυτό, ας υπολογίσουμε, θέτοντας $\gamma_t = \gamma(t+s)$,

$$\begin{aligned}
(F\circ\gamma)'(t) &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}(F\circ\gamma)(t+s)\\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}(F\circ\gamma_t)(s)\\
&= F_*\gamma_t'(0)\\
&= F_*V_{\gamma_t(0)} \quad \text{αφού η } \gamma \text{ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του } V\\
&= F_*V_{\gamma(t)},
\end{aligned}$$

και άρα η $F\circ\gamma$ είναι πράγματι ολοκληρωτική καμπύλη του F_*V.

Μέσω αμφιδιαφόρισης λοιπον, βλέπουμε ότι το ζήτημα που εμφανίζεται στο δεύτερο παράδειγμα είναι της ίδιας φύσης με το πρόβλημα του πρώτου παραδείγματος.

- Τοπικές ροές. Έστω ότι η M είναι μια διαφορική πολλαπλότητα.

  Ένα πεδίο ορισμού μιας τοπικής ροής είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{D}\subset M\times\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $p\in M$ το σύνολο
  $$\mathcal{D}^p = \{t\in\mathbb{R},\ (t,p)\in\mathcal{D}\}$$
  είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0.

  Μια τοπική ροή στην M είναι μια συνεχής απεικόνιση
  $$\Phi:\mathcal{D}\to M,$$
  όπου το $\mathcal{D}$ είναι πεδίο ορισμού ροής, ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες

  1. Για κάθε $p\in M$, $\Phi(p,0)=p$.
  2. Για κάθε $p\in M$, αν $s\in\mathcal{D}^p$ και $t\in\mathcal{D}^{\Phi(p,s)}$ ώστε $s+t\in\mathcal{D}^p$ τότε
  $$\Phi(\Phi(p,s),t)=\Phi(t+s,p).$$

  Συμβολίζουμε, όπως πριν, αν $(p,t)\in\mathcal{D}$,
  $$\Phi_t(p)=\Phi(p,t),$$
  και
  $$\gamma_p(t)=\Phi(p,t).$$
  Επίσης, το διανυσματικό πεδίο V με
  $$V_p=\gamma_p'(0)$$
  ονομάζεται απειροστός γεννήτορας της Φ.

  Όπως και για τις ολικές ροές, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 14. *Αν $\Phi : \mathcal{D} \to M$ είναι μια ομαλή τοπική ροή τότε ο απειροστός γεννήτοράς της είναι ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο στην M, και κάθε καμπύλη γ_p, $p \in M$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του.*

- Παράδειγμα. Έστω $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$ και $X = \frac{\partial}{\partial x}$. Ορίζουμε

  $$\mathcal{D} = \{((x, y), t) \in M \times \mathbb{R},\ t < -x\},$$

  όπου για κάθε $(x, y) \in M$
  $$\mathcal{D}^{(x,y)} = (-\infty, -x).$$
  Η απεικόνιση $\Phi : \mathcal{D} \to M$
  $$\Phi((x, y), t) = (t + x, y)$$
  είναι μια τοπική ροή αφού
  $$\Phi((x, y), 0) = (x, y)$$
  και αν $s \in \mathcal{D}^{(x,y)}$ και

  $$t \in \mathcal{D}^{\Phi((x,y),s)} = \mathcal{D}^{(s+x,y)} = \{t \in \mathbb{R},\ t < -s - x\}$$

  έχουμε ότι

  $$\Phi(\Phi((x, y), s), t) = \Phi((s + x, y), t) = (t + s + x, y) = \Phi((x, y), s + t).$$

  Ο απειροστός γεννήτορας είναι το διανυσματικό πεδίο X, ώστε για κάθε $(x, y) \in M$

  $$\begin{aligned} X_{(x,y)} &= \gamma'_{(x,y)}(0) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi((x, y), t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x + t, y) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)}. \end{aligned}$$

  Σε προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του X είναι οι

  $$\gamma_{(x,y)}(t) = (x + t, y),$$

  που ορίζονται για $t < -x$ δηλαδή για κάθε $t \in \mathcal{D}^{(x,y)} = (-\infty, -x)$.

- Το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης τοπικών ροών.

Θεώρημα 10. *Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και V ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο στην M. Τότε υπάρχει μια μοναδική μεγιστική ομαλή (τοπική) ροή $\Phi : \mathcal{D} \to M$ της οποίας ο απειροστός γεννήτορας είναι το V. Επιπλέον*

1. *Για κάθε $p \in M$, η καμπύλη $\gamma_p(t) = \Phi(p,t)$, $t \in \mathcal{D}^p$ είναι η μοναδική μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη του V από το p.*
2. *Αν $s \in \mathcal{D}^p$ τότε $\mathcal{D}^{\Phi(p,s)} = \mathcal{D}^p - s = \{t - s,\ t \in \mathcal{D}^p\}$.*
3. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο*
$$M_t = \{p \in M,\ (p,t) \in \mathcal{D}\}$$
είναι ανοιχτό στην M και $\Phi_t : M_t \to M_{-t}$ είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη Φ_{-t}.
4. *Για κάθε $(p,t) \in \mathcal{D}$,*
$$(\Phi_t)_* V_p = V_{\Phi_t(0)}.$$

Με τους όρους μεγιστική ροή και μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη εννοούμε ότι δεν είναι δυνατόν να επεκταθούν σε κάποιο μεγαλύτερο πεδίο ορισμού.

Το θεώρημα δεν θα το αποδείξουμε λεπτομερώς, απλά θα συζητήσουμε κάποιες ιδέες στην απόδειξή του.

– Πρώτα από όλα, το θεώρημα βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα ύπαρξης λύσεων για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

  Θεώρημα 11. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $V : U \to \mathbb{R}^n$ μια ομαλή απεικόνιση. Για $t_0 \in \mathbb{R}$ και $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$ έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned}(\gamma^i)'(t) &= V^i(\gamma(t)),\\ \gamma^i(t_0) &= x^i.\end{aligned}$$

  Τότε

  1. *Υπάρχει $x_0 \in U$ και ανοιχτό $U_0 \subset U$ ώστε $x_0 \in U_0$, και ανοιχτο διάστημα $t_0 \in J$, έτσι ώστε για κάθε $x \in U_0$ υπάρχει μια λεία καμπύλη $\gamma_x : J \to U$ που είναι λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών.*
  2. *Δύο λείες λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών είναι ίσες όπου ορίζονται και οι δύο.*
  3. *Ομαλή εξάρτηση. Έστω η απεικόνιση $\Phi : U_0 \times J \to U$ με*
  $$\Phi(x,t) = \gamma_x(t).$$
  Τότε η Φ είναι λεία απεικόνιση.

- Από τη μοναδικότητα παίρνουμε ότι αν δύο ολοκληρωτικές καμπύλες του V, $\gamma, \tilde{\gamma}$ ορίζονται σε ένα διάστημα J και για κάποιο $t_0 \in J$ έχουμε $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ τότε $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ για κάθε $t \in J$.

  Η απόδειξη αυτού βασίζεται στο να δείξουμε ότι το σύνολο $S \subset J$ στο οποίο οι δυο λύσεις είναι ίσες είναι ταυτόχρονα και ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του J, το οποίο είναι συνεκτικο και άρα $S = J$.

  Η κλειστότητα προέρχεται από τη συνέχεια των $\gamma, \tilde{\gamma}$.

  Για να δείξουμε ότι το S είναι ανοιχτό, αρκεί να δουλέψουμε τοπικα, σε συντεταγμένες, και να χρησιμοποιήσουμε τη μοναδικότητα του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

- Μετά, ορίζουμε τα σύνολα $\mathcal{D}^p$ για κάθε $p \in M$ ως εξής:

  Το κάθε $\mathcal{D}^p$ είναι η ένωση κάθε διαστήματος που περιέχει το 0 και είναι πεδίο ορισμού ολοκληρωτικής καμπύλης του V από το p.

- Τώρα, για κάθε $p \in M$ και $t \in \mathcal{D}^p$, από τον ορισμό του $\mathcal{D}^p$ υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη γ_p του V με $\gamma_p(0) = p$ που ορίζεται στο t. Επομένως, ορίζουμε την απεικόνιση

  $$\Phi(p, t) = \gamma_p(t).$$

  Είναι καλά ορισμένη γιατί κάθε άλλη ολοκληρωτική καμπύλη με $\tilde{\gamma}(0) = p$ που ορίζεται στο $[0, t]$ πρέπει να ταυτίζεται με τη γ στο $[0, t]$.

  Επίσης η $\gamma_p(t) = \Phi(p, t)$ είναι η μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη του V από το p.

- Ορίζουμε

  $$\mathcal{D} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}^p.$$

  και επεκτείνουμε $\Phi : \mathcal{D} \to M$. Τότε η Φ αυτομάτως ικανοποιεί το (1) του Θεωρήματος, αφού η $t \mapsto \Phi(p, t) = \gamma_p(t)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V. Επίσης $\Phi(p, 0) = p$ για κάθε $p \in M$.

- Για να είναι η Φ τοπική ροή πρέπει επιπλέον να ισχύει ότι

  $$\Phi(\Phi(p, s), t) = \Phi(p, s + t),$$

  αν $(p, s), (p, s + t), (\Phi(p, s), t) \in \mathcal{D}$. Αυτό πάλι, όπως και στις ολικές ροές είναι συνέπεια του ορισμού της Φ μέσω ολοκληρωτικών καμπύλων του V, και του ότι μεταφορά μιας ολοκληρωτικής καμπύλης είναι ολοκληρωτική καμπύλη.

- $\Phi_t : M_t \to M_{-t}$ είναι αμφιδιαφόριση, με

  $$M_t = \{p \in M,\ (p, t) \in \mathcal{D}\}$$
  $$M_{-t} = \{p \in M,\ (p, -t) \in \mathcal{D}\}.$$

Αν $p \in M_t$ τότε $t \in \mathcal{D}^p$ και επομένως υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη γ_p του V ώστε $\Phi(p,t) = \gamma_p(t)$. Τότε, η καμπύλη $\tilde{\gamma}(s) = \gamma_p(s+t)$ είναι επίσης ολοκληρωτική καμπύλη του V με $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_p(t)$. Επίσης $\tilde{\gamma}(-t) = \gamma_p(-t+t) = \gamma_p(0) = p$. Από τον ορισμό του $\mathcal{D}^{\Phi(p,t)}$ έχουμε ότι $-t \in D^{\Phi(p,t)}$ και άρα $\Phi(p,t) \in M_{-t}$.

Επίσης $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = id_{M_t}$ και $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = id_{M_{-t}}$ και επομένως η Φ_t είναι αμφιδιαφόριση με $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$.

- Πλήρη διανυσματικά πεδία ονομάζονται εκείνα τα ομαλά διανυσματικά πεδία που η τοπική ροή τους είναι ολική. Ισοδύναμα, εκείνα των οποίων κάθε ολοκληρωτική καμπύλη ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λήμμα 17. *Αν είναι διαφορική πολλαπλότητα και V ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο. Αν γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του που δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ - δηλαδή που δεν μπορεί να επεκταθεί σε ολοκληρωτική καμπύλη του V που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Τότε η εικόνα της γ δεν γίνεται να περιέχεται σε συμπαγές υποσύνολο της M.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $\gamma : (a,b) \to M$ ολοκληρωτική καμπύλη του V, με $\gamma(0) = p, b < +\infty$, και έστω ότι δεν υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη του V από το p που να ορίζεται σε μεγαλύτερο διάστημα. Έστω ότι υπάρχει $K \subset M$ συμπαγές ώστε $\gamma(t) \in K$ για κάθε $t \in (a,b)$.

Αν πάρουμε μια ακολουθεία $t_i \to b^-$, τότε $\gamma(t_i) \in K$ και επομένως αφού το K είναι συμπαγές είναι και ακολουθιακά συμπαγές, οπότε υπάρχει υπακολουθία της $\gamma(t_i)$ που συγκλίνει σε κάποιο $q \in K$.

Έστω $\Phi : \mathcal{D} \to M$ η ροή του V. Αφού το $\mathcal{D}$ είναι ανοιχτό, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $q \in U \subset M$ ανοιχτό, ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \subset \mathcal{D}$.

Επομένως, υπάρχει t_i όσο θέλουμε κοντά στο b, ώστε $\gamma(t_i) \in U$ και $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{\gamma(t_i)}$.

Τότε, η καμπύλη

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & a < t < b \\ \Phi_{t-t_i} \circ \Phi_{t_i}(p) & t \in (t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon) \end{cases}$$

Διαλέγοντας το t_i ώστε $t_i + \varepsilon > b$ παίρνουμε ότι η σ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V από το p που ορίζεται σε μεγαλύτερο διάστημα. Ατοπο. $\square$

Πόρισμα 3. *Κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο με συμπαγή φορέα (που είναι 0 έξω από συμπαγές υποσύνολο) είναι πλήρες.*

Ειδικά, αν η M είναι συμπαγής κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο της είναι πλήρες.

Απόδειξη. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει V ομαλό διανυσματικό πεδίο στην με συμπαγή φορέα το οποίο δεν είναι πλήρες. Έστω $\Phi : \mathcal{D} \to M$ η ροή του V.

Υπάρχει επομένως ολοκληρωτική καμπύλη γ_p του V από κάποιο σημείο $p \in M$ οι οποία δεν επεκτείνεται το πεδίο ορισμού της σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $\mathcal{D}^p \neq (-\infty, +\infty)$.

Αυτό μπορεί να συμβεί όμως μόνο αν $p \in K$, γιατί για κάθε $q \in M \setminus K$ η ολοκληρωτική καμπύλη του V από το q είναι οι σταθερή καμπύλη $\gamma(t) = q$ που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αφού το πεδίο ορισμού της γ_p δεν είναι όλο το $\mathbb{R}$, το προηγούμενο λήμμα μας λέει ότι υπάρχει $\bar{t} \in \mathcal{D}^p$ ώστε $q = \gamma_p(\bar{t}) \in M \setminus K$. Στη γλώσσα των ροών αυτό μεταφράζεται ως

$$\Phi_{\bar{t}}(p) = \gamma_p(\bar{t}) = q.$$

Αν η M είναι συμπαγής και $K = M$ αμέσως αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Γενικά όμως, όπως είδαμε, η ολοκληρωτική καμπύλη γ_q του V από το q είναι η σταθερή καμπύλη $\gamma_q(t) = q$, $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, $0\bar{t} \in \mathcal{D}^q$ και μάλιστα

$$\Phi_{-\bar{t}}(q) = q.$$

Γνωρίζουμε ότι $\Phi_{-\bar{t}} \circ \Phi_t = id_{M_t}$ και άρα πρέπει

$$p = \Phi_{-\bar{t}} \circ \Phi_{\bar{t}}(p) = \Phi_{-\bar{t}}(q) = q.$$

Όμως $q \neq p$ αφού το ένα είναι στο K ενώ το άλλο δεν είναι, άτοπο. $\square$

- Ιδιάζοντα (singular) και ομαλά (regular) σημεία ενός διανυσματικού πεδίου.

  Αν M διαφορική πολλαπλότητα και V ομαλό διανυσματικό πεδίο στην M τότε

  - Αν $p \in M$ ικανοποιεί $V_p = 0$ τότε το p ονομάζεται ιδιάζον σημείο του V.
  - Αν $p \in M$ ικανοποιεί $V_p \neq 0$ τότε λέγεται ομαλό σημείο του V.

  Είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος ότι αν p είναι ιδιάζον, τότε η αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη είνα σταθερή, δηλαδή $\gamma_p(t) = q$ και επομένως ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

  Αν p είναι ομαλό, τότε η $\gamma_p : \mathcal{D}^p \to M$ είναι immersion. Ισοδύναμα, η ολοκληρωτική καμπύλη γ_p ικανοποιεί $\gamma_p'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in \mathcal{D}^p$.

  Τον λόγο τον είδαμε επίσης στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος. Αν για κάποιο $\bar{t} \in \mathcal{D}^p$ είχαμε ότι $\gamma_p'(\bar{t}) = 0$ τότε το $q = \gamma_p(\bar{t})$ θα ήταν ιδιάζον σημείο του V, αφού η γ_p είναι ολοκληρωτική καμπύλη και άρα $V_q = \gamma_p'(\bar{t})$.

  Αφού λοιπόν το q είναι ιδιάζον, θα είχαμε ότι $\gamma_q(t) = q$ για κάθε t και άρα

  $$p = \Phi_{-\bar{t}}(\Phi_{\bar{t}}(p)) = \Phi_{-\bar{t}}(q) = \gamma_q(-\bar{t}) = q,$$

  άτοπο.

Ας έχει κανείς στο νου του, ότι πίσω από τον φορμαλιστικό τρόπο της απόδειξης, όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιοτητες $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}$ και ότι $\Phi_0 = id$ κρύβεται ουσιαστικά η μοναδικότητα των λύσεων των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

- Κανονική μορφή διανυσματικού πεδίου γύρω από ομαλό σημείο του.

Θεώρημα 12. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και V ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο στην M. Έστω ότι $p \in M$ είναι ομαλό σημείο του V (δηλαδή $V_p \neq 0$). Τότε υπάρχει σύστημα συντεταγμένων (U, ϕ) γύρω από το p, με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, \ldots, x^n$ ώστε*

$$V|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση που $M = U \subset \mathbb{R}^n$, $p = 0$ και το διανυσματικό πεδίο και αν $u^1, \ldots, u^n$ είναι οι συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$, το V_0 έχει μη μηδενική συνιστώσα u^1.

Η αναγωγή στη γενική περίπτωση γίνεται μετά εύκολα, γιατί ο ισχυρισμός του θεωρήματος είναι τοπικός. Έστω $\Phi : \mathcal{D} \to U$ η ροή του V. Αφού $\mathcal{D}$ είναι ανοιχτο, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $W \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό με $0 \in W$ ώστε $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}$.

Έστω

$$S = \{(u^2, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^{n-1},\ (0, u^2, \ldots, u^n) \in W\}$$

και ας ορίσουμε πρώτα την απεικόνιση $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \to U$ με

$$\psi(t, u^2, \ldots, u^n) = \Phi_t(0, u^2, \ldots, u^n).$$

Η ψ ικανοποιεί:

1. $\psi_*(\frac{\partial}{\partial t}) = V$: έχουμε ότι
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,u^2,\ldots,u^n)} = \sigma'(0),$$
όπου $\sigma(s) = (t + s, u^2, \ldots, u^n)$, και άρα αφού $\psi \circ \sigma = \Phi_{t+s}(u^2, \ldots, u^n) = \gamma_{(t,u^2,\ldots,u^n)}(s)$
$$\psi_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,u^2,\ldots,u^n)} \right) = (\psi \circ \sigma)'(0) = \gamma'_{(t,u^2,\ldots,u^n)}(0) = V_{\psi(t,u^2,\ldots,u^n)}$$

2. $\psi_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_0 \right) = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_0$, για $i = 2, \ldots, n$.
Έστω $\sigma_i(s) = (0, 0, \ldots, s, \ldots, 0)$, το s στην $i + 1$ θέση. Τότε,
$$\sigma'(0) = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_0$$

και

$$\psi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_0\right) = (\psi\circ\sigma_i)'(0)$$
$$= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\Phi_0(0,0,\dots,s,\dots,0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(0,0,\dots,s,\dots,0)$$
$$= \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_0$$

Αφού το V έχει μη μηδενική u^1 συνιστώσα, βλέπουμε ότι η $V_0, \left.\frac{\partial}{\partial u^2}\right|_0, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial u^n}\right|_0$ είναι βάση και άρα το push-forward $\psi_* : T_0\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός. Επομένως, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης υπάρχουν $U_0 \subset U$, και $W_0 \subset (-\varepsilon,\varepsilon)\times S$ ανοιχτά, με $0\in U_0$, $0\in W_0$ και αμφιδιαφόριση $\phi : U_0 \to W_0$ ώστε

$$\phi^{-1} = \psi|_{W_0}.$$

Άρα η (U_0,ϕ) είναι ένας χάρτης γύρω από το 0 και αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων που ορίζει είναι οι $x^i = u^i\circ\phi$ τότε ικανοποιεί

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = (\phi^{-1})_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) = V.$$

□

- Παράδειγμα. Έστω $M=\mathbb{R}^2$ και $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.

  Το $(1,0)$ είναι ομαλό σημείο του V, αφού $V_{(1,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(1,0)}$.

  Η ροή Φ του V δίνεται, όπως είδαμε, από

  $$\Phi((x,y),t)) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t).$$

  Ορίζουμε λοιπόν, σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 12

  $$\psi(u,t) = (u\cos t, u\sin t).$$

  Αν $W_0 = \{(x,t),\ x>0, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$, η $\psi : W_0 \to \psi(W_0) = U_0 = \{(x,y),\ x>0\}$ είναι αντιστρέψιμη και

  $$\psi^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)).$$

  Επομένως, θέτοντας $\phi = \psi^{-1}$, το ζεύγος (U_0,ϕ) είναι χάρτης του $\mathbb{R}^2$ γύρω από το $(1,0)$ και μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι $\psi_*(\frac{\partial}{\partial t}) = V$:

  $$\frac{d}{dt}\psi(u,t) = (-u\sin t, u\cos t) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = V.$$

16 Η παράγωγος Lie

- Πώς παραγωγίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο;

Στον $\mathbb{R}^n$ ένα διανυσματικό πεδίο $W \in \mathcal{X}(\mathcal{R}^n)$ μπορούμε να το δούμε με φυσιολογικό τρόπο ως μια ομαλή απεικόνιση

$$W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

την οποία μπορούμε να παραγωγίσουμε:

Έστω $p \in \mathbb{R}^n$ και $V \in T_p\mathbb{R}^n$. Τότε

$$D_V W(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W_{p+tV} = \lim_{t\to 0} \frac{W_{p+tV} - W_p}{t}.$$

- Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή τη διαδικασία σε μια πολλαπλότητα M;

1. Η ποσότητα
$$\frac{W_{p+tV} - W_p}{t}$$
για να οριστεί σε μια γενική πολλαπλότητα, χρειάζεται κάποιος τρόπος ώστε αν δοθεί $V \in T_pM$ να μπορούμε να κατασκευάσουμε μια καμπύλη γ, ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = V$. Αυτό ώστε να αντικατασταθεί το W_{p+tV} με $W_{\gamma(t)}$.
2. Επίσης παρατηρήστε ότι εφόσον $W_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ ενώ $W_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}M$ η διαφορά $W_{\gamma(t)} - W_{\gamma(0)}$ δεν μπορεί να οριστεί, αφού ανήκουν σε διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους.

Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ένα φυσικό τρόπο να αντιστοιχούμε εφαπτόμενους χώρους σε διαφορετικά σημεία - μέσω μεταφοράς. Πώς θα το κάνουμε σε μια πολλαπλότητα;

- Γιατί να μην χρησιμοποιήσουμε συντεταγμένες ώστε να δούμε το W σαν διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$ και να παραγωγίσουμε όπως πρίν;

Για παράδειγμα, αν $V \in T_pM$, ας πάρουμε ένα σύστημα συντεταγμένων (U, ϕ) γύρω από το $p \in M$ ώστε $\phi(p) = 0$ και $V = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p$. Τότε αν $W \in \mathcal{X}(U)$ μπορούμε να γράψουμε

$$W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

οπότε τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε παράγωγο του W ως προς το εφαπτόμενο διάνυσμα $V \in T_pM$ στο σημείο p, $D_V W(p)$, ως

$$D_V W(p) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{W^i(t, 0, \ldots, 0) - W^i(0, \ldots, 0)}{t}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W^i(t)\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p. \tag{16.1}$$

Το πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι το αποτέλεσμα δεν είναι καλά ορισμένο - εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.

Παρατηρήστε όμως ότι αυτό που ουσιαστικά κάνουμε με αυτή την προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε τη ροή Φ_t του διανυσματικού πεδίου $\frac{\partial}{\partial x^1}$ για να παραγωγίσουμε, αφού η ροή γράφεται στο σύστημα συντεταγμένων ως

$$\hat{\Phi}_t(u^1, \ldots, u^n) = \phi \circ \Phi_t \circ \phi^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1 + t, u^2, \ldots, u^n)$$

και το push forward

$$(\Phi_{-t})_* : T_{\Phi_t(p)}M \to T_pM$$

δίνεται από

$$(\Phi_{-t})_* \left(W^i(t, 0, \ldots, 0) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Phi_t(p)} \right) = W^i(t, 0, \ldots, 0) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p ,$$

αφού ο Ιακωβιανός πίνακας των Φ_t και Φ_{-t} είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Επομένως, σε αυτή τη γλώσσα η (16.1) γίνεται

$$\lim_{t\to} \frac{(\Phi_{-t})_* W_{\Phi_t(p)} - W_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t)_* W_{\Phi_t(p)}. \tag{16.2}$$

Αλλά και αντίστροφα: για κάθε ροή Φ_t μπορούμε να βρούμε σύστημα συντεταγμένων γύρω από $p \in M$ ώστε ο απειροστός γενήτορας V της Φ να ικανοποιεί $V|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$, οπότε η (16.2) μετατρέπεται στην (16.1).

Ουσιαστικά η ιδέα να χρησιμοποιήσουμε συντεταγμένες για να παραγωγίσουμε δεν είναι εντελώς ανεπαρκής, απλά η (16.2) μας λέει ότι αντιστοιχεί σε παραγώγιση ενός $W \in \mathcal{X}(M)$ στο $p \in M$ **κατά μήκος μιας ροής** $\Phi : \mathcal{D} \to M$, **και οχι** σε κατευθυνόμενη παράγωγο του W σε μια διεύθυνση $V \in T_pM$. Με άλλα λόγια, η εξάρτηση από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων **κωδικοποιείται** στη ροή Φ_t - χωρίς αναφορά σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων.

- Παράγωγος Lie: Αν V, W είναι ομαλά διανυσματικά πεδία στην M και $\Phi : \mathcal{D} \to M$ είναι η ροή του V, τότε ορίζουμε τη παράγωγο Lie του W ως προς το V ως

$$(L_V W)_p = \lim_{t\to} \frac{(\Phi_{-t})_* W_{\Phi_t(p)} - W_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t)_* W_{\Phi_t(p)}.$$

- Την παράγωγο Lie επομένως δεν πρέπει να τη σκεφτόμαστε σαν μια έννοια κατευθυνόμενης παραγώγου του W, αλλά παραγώγισης του W κατά μήκος της ροής ενός διανυσματικού πεδίου V.

  Για να οριστεί κατευθυνόμενη παράγωγος ενός διανυσματικού πεδίου χρειάζεται μια επιπλέον δομή - μια συνοχή (connection). Μια τέτοια δομή ορίζεται με φυσικό τρόπο κάθε φορά που έχουμε μια πολλαπλότητα Riemann - η λεγόμενη Levi-Civita συνοχή.

•

Λήμμα 18. *Αν V, W είναι ομαλά διανυσματικά πεδία στην M, τότε η παράγωγος Lie $(L_V W)_p$ υπάρχει για κάθε $p \in M$ και το $p \mapsto (L_V W)_p$ είναι ομαλό διανυσματικό πεδίο.*

Απόδειξη. Έστω $\Phi : \mathcal{D} \to M$ η ροή του V, ένα τυχαίο σημείο $p \in M$ και ένα σύστημα συντεταγμένων (U, x^i) γύρω από το p.

Από το θεμελιώδες θεώρημα για τις ροές, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $U_0 \subset U, p \in U_0$ ώστε $U_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}$ ώστε $\Phi(U_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$. Θα μπορούσαμε εξαρχής να θεωρήσουμε ότι $M = U$, και $\Phi : \mathcal{D} \to U$.

Αν η $\hat{\Phi} = \phi \circ \Phi$ γράφεται ως

$$\hat{\Phi}(x, t) = (\Phi^1(x, t), \ldots, \Phi^n(x, t))$$

τότε

$$(\Phi_{-t})_* W_{\Phi_t(x)} = \frac{\partial \Phi^i(\Phi(x, t), -t)}{\partial x^j} W^j(\Phi(t, x)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x.$$

Επομένως και το $(L_V W)_x$ εξαρτάται ομαλά στο x. □

•

Θεώρημα 13. *Αν V, W είναι ομαλά διανυσματικά πεδία τότε*

$$L_V W = [V, W]. \tag{16.3}$$

Απόδειξη. Έστω $p \in M$ ένα ομαλό σημείο του V, δηλαδή με $V_p \neq 0$.

Επιλέγοντας ένα σύστημα συντεταγμένων (U, x^i) γύρω από το p ώστε $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$, η ροή γράφεται

$$\Phi_t(x) = (x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)$$

και

$$(\Phi_{-t})_* W_{\Phi_t(x)} = W^j(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x,$$

αφού ο αντίστοιχος Ιακωβιανός πίνακας είναι ο ταυτοτικός.

Επομένως,

$$(L_V W)_x = \frac{\partial W^j}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^n) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}[V,W](x^j) &= V(W(x^j)) - W(V(x^j)) \\ &= V(W^j) - W(\delta_1^j) \\ &= \frac{\partial W^j}{\partial x^1}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$[V,W]_x = \frac{\partial W^j}{\partial x^1}(x^1,\dots,x^n)\,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x = (L_V W)_x.$$

Αν το p δεν είναι ομαλό σημείο του V, υπάρχουν δύο περιπτώσεις

1. Υπάρχει $p_i \to p$ ώστε κάθε p_i να είναι ομαλό. Τότε η σχέση ισχύει και στο p από συνέχεια.
2. Αν δεν υπάρχει ακολουθία όπως στο (1), τότε υπάρχει περιοχή του p όπου το V μηδενίζεται. Σε αυτή την περιοχή, και η αγκύλη Lie $[V,W] = 0$ αλλά και η ροή Φ_t είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Οπότε
$$\frac{(\Phi_{-t})_* W_{\Phi_t(x)} - W_x}{t} = 0,$$
και άρα $(L_V W)_x = 0$.

□

- Ιδιότητες της παραγώγου Lie - προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της αγκύλης Lie.

1. $L_V W = -L_W V$, αφού $[V,W] = -[W,V]$
2. $L_V[W,X] = [L_V W, X] + [W, L_V X]$ (ταυτότητα Jacobi), αφού
$$[V,[W,X]] + [W,[X,V]] + [X,[V,W]] = 0$$
και άρα
$$L_V[W,X] = [V,[W,X]] = [[V,W],X] + [W,[V,X]] = [L_V W, X] + [W, L_V X].$$
3. $L_{[V,W]}X = L_V L_W X - L_W L_V X$ (επίσης ταυτότητα Jacobi), αφού
$$\begin{aligned}L_{[V,W]}X &= [[V,W],X] = -[[W,X],V] - [[X,V],W] = [V,[W,X]] - [W,[V,X]] \\ &= L_V L_W X - L_W L_V X.\end{aligned}$$
4. $L_V(fW) = (Vf)W + f L_V W$

5. Αν $F : M \to N$ είναι αμφιδιαφόριση τότε

$$F_*(L_V W) = L_{F_* V} F_* W,$$

αφού έχουμε την αντίστοιχη ιδιότητα της αγκύλης Lie

$$F_*[V, W] = [F_* V, F_* W].$$

- Λέμε ότι δύο ομαλά διανυσματικά πεδία $V, W \in \mathcal{X}(M)$ μετατίθενται αν $[V, W] = 0$.

  Χρήσιμο λήμμα

Λήμμα 19. *Αν $F : M \to N$ ομαλή απεικόνιση τότε τα $V \in \mathcal{X}(M)$, $W \in \mathcal{X}(N)$ είναι F συσχετισμένα αν και μόνο αν για τις ροές θ, η των V και W αντίστοιχα ισχύει*

$$\eta_t \circ F = F \circ \theta_t.$$

Δοκιμάστε να το αποδείξετε, βασίζεται στο ότι V, W είναι οι απειροστοί γενήτορες των θ, η οπότε οι ολοκληρωτικές τους καμπύλες δίνονται από $t \mapsto \theta_t(p)$ και $t \mapsto \eta_t(p)$. Μετά πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη μοναδικότητα των ολοκληρωτικών καμπύλων.

Πρόταση 15. *Αν τα $V, W \in \mathcal{X}(M)$ έχουν ροές θ, η αντίστοιχα τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. $[V, W] = L_V W = -L_W V = 0$
2. *Το W είναι αναλλοίωτο κάτω από τη ροή του V, δηλαδή για κάθε (p, t) στο πεδίο ορισμού της θ*

$$(\theta_t)_* W_p = W_{\theta_t(p)}.$$

3. *Το V είναι αναλλοίωτο κάτω από τη ροή του W, δηλαδή για κάθε (p, t) στο πεδίο ορισμού της η*

$$(\eta_t)_* V_p = V_{\eta_t(p)}.$$

4. $\theta_t \circ \eta_s = \eta_s \circ \theta_t$

Απόδειξη. Το (2) συνεπάγεται το (1): Αφού το (2) είναι ισοδύναμο με $W_p = (\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)}$, παραγωγίζοντας παίρνουμε $L_V W = 0$.

Το (1) συνεπάγεται το (2): Έστω

$$X(t) = (\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} \in T_p M.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
X'(t_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\theta_{-t_0-s})_* W_{\theta_{s+t_0}(p)} \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\theta_{-t_0})_*(\theta_{-s})_* W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))} \\
&= (\theta_{-t_0})_* \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\theta_{-s})_* W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))} \\
&= (\theta_{-t_0})_*(L_V W)_{\theta_{t_0}(p)}.
\end{aligned}$$

Το (2) είναι ισοδύναμο με το (4): για αυτό παρατηρήστε ότι το (2) είναι ισοδύναμο με το εξής: αν $F : M_t \to M_{-t}$

$$F(x) = \theta_t(x)$$

τότε $W|_{M_t}$ είναι F-συσχετισμένο με το $W|_{M_{-t}}$. Επομένως η ισοδυναμία του (2) με το (4) προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα. □

- Κανονική μορφή ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων που μετατίθενται.

Θεώρημα 14. *Έστω M μία διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{X}(U)$, $U \subset M$ ανοιχτό, γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο του U. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. *Για κάθε $p \in U$ υπάρχουν συντεταγμένες (U_0, u^i) γύρω από το p ώστε $V_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, για $i = 1, \dots, k$.*
2. *$[V_i, V_j] = 0$.*

Απόδειξη. Για κάθε σύστημα συντεταγμένων τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x^i}$ μετατίθενται, αφού

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right](f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(f)\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(f)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0.$$

Επομένως το (1) συνεπάγεται το (2).

Για το αντίστροφο, η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του Θεωρήματος 12, ότι γύρω από ένα ομαλό του σημείο κάθε διανυσματικό πεδίο είναι $\frac{\partial}{\partial x^1}$ για κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Όπως και στην απόδειξη το Θεωρήματος 12 αρκεί να δουλέψουμε σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$, συμβολίζοντας τις συντεταγμένες του με $u^1, \dots, u^n$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι στο $0 \in \mathbb{R}^n$ τα διανύσματα

$$(V_1)_0, \dots, (V_k)_0, \left.\frac{\partial}{\partial u^{k+1}}\right|_0, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial u^n}\right|_0 \tag{16.4}$$

αποτελούν βάση του $T_0\mathbb{R}^n$.

Έστω $\theta_i : \mathcal{D}_i \to U$, $i = 1, \ldots, k$ οι ροές των $V_1, \ldots, V_n$. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να βρούμε $W \subset U$ ανοιχτό, $0 \in W$ και $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, k$

$$W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}_i.$$

Σίγουρα μπορούμε να το κάνουμε για κάθε μία από τις ροές θ_i, αλλά μπορούμε μικραίνοντας τα W και ε αρκετά να το πετύχουμε για όλα τα $\mathcal{D}_i$, αφού αυτά είναι πεπερασμένα στο πλήθος.

Ορίζουμε

$$S = \{(u^{k+1}, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^{n-k},\ (0, \ldots, 0, u^{k+1}, \ldots, u^n) \in W\}$$

και $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times S \to U$ ως

$$\psi(t_1, \ldots, t_k, u^{k+1}, \ldots, u^n) = (\theta_1)_{t_1} \circ \cdots \circ (\theta_k)_{t_k}(u^{k+1}, \ldots, u^n).$$

Η χρησιμότητα της υπόθεσης (2) του θεωρήματος φαίνεται σε συνδυασμό με την Πρόταση 15: αφού τα $[V_i, V_j] = 0$, η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι οι αντίστοιχες ροές μετατίθενται, δηλαδή

$$(\theta_i)_{s_1} \circ (\theta_j)_{s_2} = (\theta_j)_{s_2} \circ (\theta_j)_{s_1}.$$

Αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, k$

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right) = V_i.$$

Υπολογίζουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\psi_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial t_i} \right|_{(t_1, \ldots, t_k, u^{k+1}, \ldots, u^n)} \right) &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \psi(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + s, t_{i+1}, \ldots, t_k, u^{k+1}, \ldots, u^n) \\
&= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\theta_1)_{t_1} \circ \cdots \circ (\theta_i)_{t_i+s} \circ \cdots \circ (\theta_k)_{t_k}(u^{k+1}, \ldots, u^n), \\
&= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\theta_i)_{t_i+s} \circ (\theta_1)_{t_1} \circ \cdots \circ \widehat{(\theta_i)_{t_i+s}} \circ \cdots \circ (\theta_k)_{t_k}(u^{k+1}, \ldots, u^n) \\
&= (V_i)_{(\theta_i)_{t_i} \circ (\theta_1)_{t_1} \circ \cdots \circ \widehat{(\theta_i)_{t_i}} \circ \cdots \circ (\theta_k)_{t_k}(u^{k+1}, \ldots, u^n)} \\
&= (V_i)_{(\theta_1)_{t_1} \circ \cdots \circ (\theta_i)_{t_i} \circ \cdots \circ (\theta_k)_{t_k}(u^{k+1}, \ldots, u^n)} \\
&= (V_i)_{\psi(t_1, \ldots, t_k, u^{k+1}, \ldots, u^n)}
\end{aligned}$$

Με αντίστοιχο τρόπο, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 12, μπορούμε να δείξουμε επιπλέον ότι στο $0 \in \mathbb{R}^n$, για κάθε $i = k+1, \ldots, n$ έχουμε

$$\psi_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_0 \right) = \left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_0.$$

Αφού τα διανύσματα (16.4) αποτελούν βάση του $T_0\mathbb{R}^n$, το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μας επιτρέπει να αντιστρέψουμε την ψ τοπικά ώστε να κατασκευάσουμε ένα χάρτη $\phi = \psi|_{U_0}^{-1}$, για κάποια ανοιχτή περιοχή $U_0 \subset (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times S$ του $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times S \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

- Παράδειγμα. Έστω στον $\mathbb{R}^2$ τα διανυσματικά πεδία

$$\begin{aligned} V &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \\ W &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της $[\ ,\ ]$, και ότι $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right]$ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $[V, W] = 0$:

$$\begin{aligned} [V, W] &= \left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &= \left[x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}\right] + \left[x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[-y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}\right] + \left[-y\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &= x\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + x\left[x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right] + x\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + y\left[x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &- y\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + x\left[-y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right] - y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + y\left[-y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &= -x\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}\right] + x\frac{\partial}{\partial y} - y\left[\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &- y\frac{\partial}{\partial x} + x\left[\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial x}\right] + y\left[\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ &= -x\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - x^2\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] + x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} - yx\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &- y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + xy\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right] + y\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + y^2\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right] \\ &= -x\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον, $V_{(1,0)} = \frac{\partial}{\partial y}$, $W_{(1,0)} = \frac{\partial}{\partial x}$, οπότε στο $p = (1, 0)$ τα V_p, W_p είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Επομένως από το Θεώρημα 14 μπορούμε να βρούμε χάρτη του $\mathbb{R}^2$ ώστε τα βασικά διανυσματικά πεδία να είναι ακριβώς τα V, W.

Για να βρούμε αυτό το χάρτη, πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις ροές των V, W. Ήδη από προηγούμενο παράδειγμα ξέρουμε ότι η ροή θ του V είναι

$$\theta((x, y), t)) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t).$$

Ας βρούμε τη ροή του $W = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες $(x(t), y(t))$ του W από το σημείο (x_0, y_0) ικανοποιούν

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y,\\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0\end{gathered}$$

και επομένως

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^t.$$

Η ροή του W είναι λοιπόν

$$\eta((x, y), t) = (xe^t, ye^t).$$

Ορίζουμε

$$\psi(t, s) = \eta_t \circ \theta_s(1, 0) = \eta_t(\cos s, \sin s) = (e^t\cos s, e^t \sin s).$$

Η ψ επομένως αντιστρέφεται τοπικά, και μάλιστα ο ζητούμενος χάρτης γύρω από το $(1, 0)$ είναι

$$\begin{gathered}\phi : \{(x, y),\ x > 0\} \to \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\\ \phi(x, y) = \left(\log\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right).\end{gathered}$$

17 Μια εφαρμογή σε μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

- Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και V ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο στην M και μια ομαλή συνάρτηση $g \in C^\infty(M)$.

  Θέλουμε να βρούμε $f \in C^\infty(M)$ ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$Vf = g. \tag{17.1}$$

- Ας εκφράσουμε την (17.1) ως προς τις ολοκληρωτικές καμπύλες του V. Έστω λοιπόν $\Phi : \mathcal{D} \to M$ η ροή του V και $\gamma_p : \mathcal{D}^p \to M$ η ολοκληρωτική καμπύλη του V από το $p \in M$. Για κάθε $t \in \mathcal{D}^p$, $\gamma_p'(t) = V_{\gamma(t)}$, επομένως η εξίσωση (17.1) κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης γίνεται

$$V_{\gamma(t)} f = g(\gamma(t)) \tag{17.2}$$
$$\iff \quad \gamma'(t) f = g(\gamma(t)) \tag{17.3}$$
$$\iff \quad (f \circ \gamma)'(t) = g(\gamma(t)). \tag{17.4}$$

  Μπορούμε επομένως να βρούμε την $f(\gamma(t))$ ολοκληρώνοντας την εξίσωση (17.4), αν έχουμε μια αρχική συνθήκη $f(p) = f(\gamma_p(0)) = \varphi$.

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα $N \subset M$ τέτοια ώστε το V να μην εφάπτεται στην N σε κανένα σημείο της, δηλαδή για κάθε $p \in N$, $V_p \notin T_pN$.

  Έστω επίσης ότι έχουμε μια ομαλή συνάρτηση $\varphi : N \to \mathbb{R}$. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε για κάθε $p \in N$ να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(f \circ \gamma_p)'(t) = g(\gamma_p(t))$$
$$(f \circ \gamma_p)(0) = \varphi(p).$$

  Ορίζοντας έτσι μια ομαλή συνάρτηση

$$f : U \to \mathbb{R},$$

  όπου $N \subset U$ ανοιχτό, και η οποία ικανοποιεί

$$Vf = g,$$
$$f|_N = \varphi,$$

  οπότε έχουμε λύσει την (17.1) σε μια γειτονιά της N.

- Παράδειγμα. Έστω $M = \mathbb{R}^2$, $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ και $N = \{(x,0),\ x > 0\}$, $g(x,y) = x$ και $\varphi : N \to \mathbb{R}$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του V από σημεία $(x,0) \in N$ δίνονται από

$$\gamma_{(x,0)}(t) = (x\cos t, x\sin t).$$

Η εξίσωση $Vf = g$ γίνεται λοιπόν

$$(f \circ \gamma_{(x,0)})'(t) = x \cos t,$$

επομένως

$$f(x \cos t, x \sin t) = f(x,0) + \int_0^t x \cos t dt = \varphi(x) + x \sin t.$$

Αφού για $(u,v) = (x \cos t, x \sin t)$ με $v > 0$ μπορούμε να λύσουμε $(x,t) = \left(\sqrt{u^2+v^2}, \arctan \frac{v}{u}\right)$, παίρνουμε τελικά

$$f(u,v) = \varphi(\sqrt{u^2+v^2}) + \sqrt{u^2+v^2} \sin \arctan \frac{v}{u} = \varphi(\sqrt{u^2+v^2}) + v.$$

- Γενίκευση. Το πρόβλημα (17.1) έχει μία εξίσωση και ένα άγνωστο.

  Θα μπορούσαμε να φανταστούμε μια γενίκευσή του ως εξής. Έστω $V_1, \ldots, V_k$ ομαλά διανυσματικά πεδία στην M και ας θεωρήσουμε το ομογενές πρόβλημα

  $$V_i f = 0, \quad i = 1, \ldots, k \tag{17.5}$$

  Τώρα αυτό το πρόβλημα έχει περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους, οπότε ίσως να μην έχει πάντα λύσεις. Το ερώτημα που προκύπτει λοιπόν είναι πότε έχει λύσεις και πόσες.

  Αν γνωρίζαμε ότι $[V_i, V_j] = 0$ τότε η ροές των διανυσματικών πεδίων μετατίθενται και επομένως αν είχαμε αρχικά δεδομένα σε μια υποπολλαπλότητα εγκάρσια στα V_i θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μια επέκταση, σταθερή στις ολοκληρωτικές καμπύλες των V_i.

  Τι μπορεί να γίνει όμως αν δεν ισχύει ότι $[V_i, V_j] = 0$; Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις (17.5) σε ένα ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων που να ικανοποιεί την σχέση μετάθεσης;

  Για να το προσεγγίσουμε όμως χρειαζόμαστε κάποιου είδους γενίκευση σε μεγαλύτερη διάσταση της έννοιας της ολοκληρωτικής καμπύλης ενός διανυσματικού πεδίου.

  Δηλαδή, όπως η ολοκληρωτική καμπύλη εφάπτεται στο διανυσματικό πεδίο, έτσι θα θέλαμε αν έχουμε μια συλλογή διανυσματικών πεδίων να βρούμε κάποια υποπολλαπλότητα η οποία να εφάπτεται σε αυτά, αν μπορεί να γίνει αυτό. Αυτό θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

18 Το θεώρημα του Frobenius

18.1 k-κατανομές και οι ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητές τους.

- Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια k-κατανομή D της είναι μια επιλογή για κάθε $p \in M$ ενός k-διάστατου υπόχωρου $D_p \in T_pM$.

- Μια κατανομή θα λέμε ότι είναι ομαλή, αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει μια γειτονιά του, U, και ομαλά διανυσματικά πεδία $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(U)$ ώστε για κάθε $p \in U$

$$(Y_1)_p, \dots, (Y_k)_p \in D_p$$

  είναι βάση του D_p.

- Απο εδώ και στο εξής, όταν λέμε k-κατανομή θα εννούμε μια ομαλή k-κατανομή.

- Το πρόβλημα που θα κοιτάξουμε είναι το εξής: αν D είναι μια k-κατανομή όπως παραπάνω και $p \in M$, υπάρχει $1-1$ immersion $\iota : N \to M$, ώστε $p \in \iota(N) \subset M$ και για κάθε $x \in N$,

$$\iota_*(T_xN) = D_x \ ;$$

  Το σύνολο $\iota(N)$ θα το αποκαλούμε ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D, διερχόμενη από το p, και θα γράφουμε απλά $N \subset M$ ταυτίζοντας το N με την εικόνα του. Αντίστοιχα θα ταυτίζουμε $\iota_*(T_xN)$ με το T_xN.

- Παραδείγματα

  1. $V \in \mathcal{X}(M)$ με $V_p \neq 0$ για κάθε $p \in M$. Τότε $D_p = \text{span}(V_p)$ ορίζει μια 1-κατανομή στην M. Κάθε ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ είναι $1-1$ immersion που εφάπτεται στην κατανομή D.
  2. Έστω $M = \mathbb{R}^n$ και D τέτοια ώστε

$$D_p = \text{span}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right).$$

     Τότε κάθε k-επίπεδο με εξισώσεις

$$(x^{k+1}, \dots, x^n) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$$

     είναι εφαπτόμενο στην D.

3. Έστω $M = \mathbb{R}^3$ και

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$$
$$W = \frac{\partial}{\partial y},$$

και ας ορίσουμε D την 2-κατανομή με $D_p = \text{span}(V_p, W_p)$.

Μπορούμε να δούμε ότι δεν υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα $0 \in N$ που να εφάπτεται στην D.

Παρατηρούμε ότι ο άξονας των x είναι η εικόνα της ολοκληρωτικής καμπύλης του V από το 0, και άρα αν υπήρχε υποπολλαπλότητα N το V θα ήταν εφαπτόμενο στην N και άρα θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ ώστε το τμήμα του άξονα των x με $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ θα περιεχόταν στην N.

Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο, κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του W στην με αρχή $(x, 0, 0)$, για $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ θα περιεχόταν στην N. Μια τέτοια ολοκληρωτική καμπύλη θα ήταν η ευθεία του xy επιπέδου παράλληλη στον άξονα των y, διερχόμενη από το $(x, 0, 0)$.

Επομένως, η N γύρω από το 0 θα ήταν τμήμα του επιπέδου xy. Τότε όμως το V δεν θα ήταν εφαπτόμενο στην N, για (x, y, z) κοντά στο 0 με $y \neq 0$, οπότε δεν μπορεί να υπάρχει υποπολλαπλότητα N εφαπτόμενη στην κατανομή D.

- Αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας. Έστω ότι έχουμε μια k-κατανομή D σε μια διαφορική πολλαπλότητα M και N μια ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D.

  Έστω $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ με $X_p, Y_p \in D_p$ για κάθε $p \in M$. Συγκεκριμένα, τα διανυσματικά πεδία X, Y εφάπτονται στην N και επομένως για κάθε $p \in N$, $[X, Y]_p \in T_pN = D_p$.

  Η παρακάτω συνθήκη λοιπόν είναι αναγκαία ώστε να υπάρχουν ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητας της D γύρω από κάθε σημείο $p \in M$

$$\text{Αν } X, Y \in \mathcal{X}(M) \text{ και } X_p, Y_p \in D_p \text{ για κάθε } p \in M \Longrightarrow [X, Y]_p \in D_p \text{ για κάθε } p \in M. \quad (18.1)$$

- Κάθε k-κατανομή D που έχει την ιδιότητα ότι κάθε $p \in M$ περιέχεται σε μια ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D αποκαλείται ολοκληρώσιμη κατανομή.

- Κάθε k-κατανομή D που έχει την ιδιότητα (18.1) αποκαλείται involutive.

- Οπότε δείξαμε την πρόταση

Πρόταση 16. *Κάθε ολοκληρώσιμη κατανομή είναι involutive.*

- Για το Παράδειγμα 3 παραπάνω υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
[V, W] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right] \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right] - \frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - y\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \notin \text{span}(V, W),
\end{aligned}$$

  άρα η κατανομή δεν είναι involutive, που εξηγεί γιατί δεν υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα που περιέχει το 0. Μάλιστα η Πρόταση 16 μας λέει ότι κανένα σημείο του $\mathbb{R}^3$ δεν περιέχεται σε ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα εκείνης της κατανομής.

- Από τις ιδιότητες της αγκύλης Lie συνεπάγεται ότι αρκεί να ελέγξουμε την involutivity για k διανυσματικά πεδία που παράγουν την κατανομή σε κάθε σημείο.

18.2 Το θεώρημα του Frobenius

- Το θεώρημα του Frobenius μας λέει ότι ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 16.

- Μάλιστα θα δείξουμε ότι αν D είναι μια involutive k-κατανομή σε μια διαφορική πολλαπλότητα M, γύρω από κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχει χάρτης (U, φ) με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, \ldots, x^n$, με $x^i(p) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, ώστε

  1. Για κάθε $q \in U$
  $$D_q = \text{span}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_q\right).$$

  2. Τα υποσύνολα του U που ορίζουν οι εξισώσεις
  $$x^{k+1} = c_{k+1}, \ldots, x^n = c_n$$
  είναι ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες της D.

  Ένας τέτοιος χάρτης της M θα αποκαλείται **επίπεδος ως προς την κατανομή** D**.**

Θεώρημα 15. *Αν D είναι μια involutive k-κατανομή σε μια διαφορική πολλαπλότητα M^n, τότε γύρω από κάθε σημείο της M υπάρχει χάρτης επίπεδος ως προς την κατανομή D.*

Συγκεκριμένα, κάθε σημείο της M περιέχεται σε μια ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D.

Απόδειξη.

– Ξεκινάμε από την εξής ειδική περίπτωση: αν η κατανομή D παράγεται από k γραμμικά ανεξάρτητα (σε κάθε σημείο) ομαλά διανυσματικά πεδία $Y_1, \dots, Y_k$, **τα οποία μετατίθενται**.

  Σε αυτή την περίπτωση το Θεώρημα 14 μας λέει ότι γύρω από κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχει χάρτης (U, φ) με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$, με $x^i(p) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, ώστε για κάθε $i = 1, \dots, k$ να ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = (Y_i)|_U.$$

  Τότε αυτομάτως το σύνολο

$$\{p \in M,\ x^{k+1}(p) = \cdots = x^n(p) = 0\},$$

  είναι ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D που περιέχει το p.

– Η γενική περίπτωση ανάγεται στην ειδική περίπτωση, τουλάχιστον τοπικά - που μας αρκεί γιατί ο ισχυρισμός του θεωρήματος είναι τοπικός.

  Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $M = U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $Y_1, \dots, Y_k$ διανυσματικά πεδία στο U, γραμμικά ανεξάρτητα στο 0, και μάλιστα ότι

$$(Y_1)_0, \dots, (Y_k)_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right|_0, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_0$$

  είναι βάση του $T_0\mathbb{R}^n$.

  Υποθέτουμε επιπλέον ότι σε κάθε $p \in U$

$$[Y_i, Y_j]_p \subset \text{span}((Y_1)_p, \dots, (Y_k)_p) = D_p.$$

  Έστω $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ η προβολή στις k πρώτες συντεταγμένες, δηλαδή

$$\Pi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k),$$

  και το push-forward

$$\Pi_* : TU \to T\mathbb{R}^k$$

  όπου για κάθε $q \in U$

$$\Pi_*\left(\sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q\right) = \sum_{i=1}^k v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\Pi(q)}.$$

  Ο πυρήνας του Π_* στο 0 είναι ο υπόχωρος

$$\text{span}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right|_0, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_0\right).$$

Επομένως, κανένα από τα $(Y_1)_0, \dots, (Y_k)_0$ δεν είναι στον πυρήνα, και επομένως η απεικόνιση

$$(\Pi_*)|_{D_0} : D_0 \to T_{\Pi(0)}\mathbb{R}^k$$

είναι ισομορφισμός.

Από συνέχεια, το ίδιο θα ισχύει και σε κάποια περιοχή U_0 του 0, δηλαδή υπάρχει U_0, $0 \in U_0$ ώστε για κάθε $q \in U_0$

$$(\Pi_*)|_{D_q} : D_q \to T_{\Pi(q)}\mathbb{R}^k$$

είναι ισομορφισμός - αρκεί να βρούμε την U_0 ώστε τα $(Y_i)_q$ να παραμένουν γραμμικά ανεξάρτητα και όχι στον πυρήνα του $(\Pi_*)|_{T_qU}$.

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε τα διανυσματικά πεδία στο U_0, ώστε για $q \in U_0$

$$(X_i)_q = (\Pi_*)|_{D_q}^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Pi(q)} \right)$$

για κάθε $i = 1, \dots, k$. Αυτά αποτελούν βάση του D_q, αφού η $(\Pi_*)|_{D_q}$ είναι ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι μετατίθενται, το οποίο μας ανάγει στην ειδική περίπτωση στην αρχή της απόδειξης του θεωρήματος.

Από τον ορισμό τους των X_i τα διανυσματικά πεδία X_i και $\frac{\partial}{\partial x^i}$ είναι Π-συσχετισμένα, δηλαδή

$$\Pi_*((X_i)_q) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Pi(q)}.$$

Συνεπώς,

$$\Pi_*([X_i, X_j]_q) = [\Pi_* X_i, \Pi_* X_j]_{\Pi(q)} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{\Pi(q)} = 0.$$

Επομένως, $[X_i, X_j]_q$ ανήκει στον πυρήνα του $(\Pi_*)|_{T_qU}$.

Όμως, **επειδή η κατανομή είναι involutive** και $(X_i)_q, (X_j)_q \in D_q$ για κάθε q, ισχύει και ότι

$$[X_i, X_j]_q \in D_q.$$

Η $(\Pi_*)|_{D_q}$ όμως είναι ισομορφισμός, οπότε αναγκαστικά $[X_i, X_j]_q = 0$.

□

- Επιστρέφοντας στις μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, το θεώρημα του Frobenius έχει την παρακάτω συνέπεια.

Πρόταση 17. *Έστω $Y_1, \dots, Y_k$ ομαλά διανυσματικά πεδία σε ένα ανοιχτό $U \subset \mathbb{R}^n$, γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο του U. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

1. *Η κατανομή που παράγουν τα $Y_1, \ldots, Y_k$ είναι involutive.*
2. *Κάθε $x \in U$ έχει ανοιχτή γειτονιά V και $n-k$ ομαλές συναρτήσεις $f_l : V \to \mathbb{R}$, $l = 1, \ldots, n-k$ που ικανοποιούν*

$$Y_1 f_l = Y_2 f_l = \cdots = Y_k f_l = 0,$$

και επιπλέον, για κάθε $q \in V$ τα διαφορικά $(df_1)_q, \ldots, (df_l)_q$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Μάλιστα, στην περίπτωση που τα (1) και (2) ισχύουν, κάθε λύση u των εξισώσεων $Y_l u = 0$ είναι τοπικά συνάρτηση των $f_1, \ldots, f_{n-k}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την ισοδυναμία μεταξύ (1) και (2) - λεπτομέρειες για την έκφραση κάθε λύσης σαν συνάρτηση των $f_1, \ldots, f_{n-k}$ μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Lee.

– Έστω ότι η κατανομή D που παράγουν τα $Y_1, \ldots, Y_k$ είναι involutive. Τότε, για κάθε $x \in U$ μπορούμε να βρούμε ένα χάρτη (V, φ) επίπεδο ως προς την D, με συναρτήσεις συντεταγμένων u^i. Επομένως, για κάθε $q \in V$ και κάθε $i = 1, \ldots, k$

$$(Y_i)_q \in D_q = \mathrm{span}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial u^k}\right|_q \right),$$

οπότε για κάθε $l = k+1, \ldots, n$, και $i = 1, \ldots, k$

$$Y_i(u^l) = 0.$$

Οι u^l, $l = k+1, \ldots, n$, είναι οι ζητούμενες λύσεις - τα διαφορικά du^l είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο του V αφού είναι η δυϊκή βάση, της βάσης $\frac{\partial}{\partial u^l}$ κάθε εφαπτόμενου χώρου.

– Για το αντίστροφο, θεωρούμε την ομαλή απεικόνιση $F : V \to \mathbb{R}^{n-k}$

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-k}(x)).$$

Αφού τα διαφορικά $(df_l)_q$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο $q \in V$, παίρνουμε ότι η F είναι submersion - Άσκηση: γιατί;

Επομένως, για κάθε $y \in F(V) \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $F^{-1}(y)$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα συνδιάστασης $n-k$, επομένως διάστασης k.

Αφού $Y_i f_l = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και $l = 1, \ldots, n-k$, έχουμε ότι $(Y_i)_q \in \mathrm{Ker} F$ και επομένως αν $F(q) = y$, τα γραμμικά ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία $(Y_1)_q, \ldots, (Y_k)_q$ εφάπτονται στην εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα $N = F^{-1}(y)$, που έχει διάσταση k - οπότε $D_q = T_q N$.

Τέλος, αφού τα Y_i εφάπτονται στην υποπολλαπλοτητα, έχουμε ότι $[Y_i, Y_j]_q \in T_q N = D_q$, οπότε η κατανομή είναι involutive.

□

19 Φυλλώσεις - foliations

19.1 Immersed υποπολλαπλότητες

Ξεκινάμε με τον ορισμό μιας immersed υποπολλαπλότητας.

Ορισμός 15. *Ένα υποσύνολο $N \subset M$ μιας διαφορικής πολλαπλότητας λέγεται immersed υποπολλαπλότητα διάστασης k αν είναι η εικόνα μιας μιας διαφορικής πολλαπλότητας διάστασης k μέσω μιας $1-1$ immersion, δηλαδή υπάρχει διαφορική πολλαπλότητα $\tilde{N}$ και $1-1$ immersion $F : \tilde{N} \to M$ ώστε $N = F(\tilde{N})$.*

Για παράδειγμα

1. Κάθε εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης k είναι και immersed υποπολλαπλότητα, της ίδιας διάστασης.
2. Το οχτάρι, η καμπύλη $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$ είναι $1-1$ immersion, οπότε η εικόνα της είναι immersed υποπολλαπλότητα διάστασης 1.
3. Η καμπύλη γ στον τόρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C}^2$ με $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi a t + \theta})$, αν ο a είναι άρρητος είναι immersed υποπολλαπλότητα, αλλά όχι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα.
4. Το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin\frac{1}{x}$ είναι immersed υποπολλαπλότητα διάστασης 1 του $\mathbb{R}^2$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός μιας immersed υποπολλαπλότητας είναι ο εξής.

Ορισμός 16. *Ένα υποσύνολο $N \subset M$ μιας διαφορικής πολλαπλότητας λέγεται immersed submanifold διάστασης k αν δέχεται τοπολογία και διαφορική δομή που το μετατρέπει σε διαφορική πολλαπλότητα διάστασης k, τέτοια ώστε η εμφύτευση $\iota : N \to M$ να είναι $1-1$ immersion.*

Παρατήρηση 19.1. Η τοπολογία μιας immersed υποπολλαπλότητας ενδεχομένως να είναι διαφορετική από την τοπολογία του N σαν υποσύνολο της M - για παράδειγμα το οχτάρι.

Ο Ορισμός 16 συνεπάγεται τον Ορισμό 15, αφού η εμφύτευση $\iota : N \to M$ είναι $1-1$ αλλά και immersion.

Αλλά και ο Ορισμός 15 συνεπάγεται τον Ορισμό 16. Στην εικόνα N μιας $1-1$ immersion $F : \tilde{N} \to N$ ορίζουμε τα ανοιχτά υποσύνολα της N να είναι οι εικόνες ανοιχτών υποσυνόλων της N, ενώ για κάθε ομαλό χάρτη (U, φ) της $\tilde{N}$, ορίζουμε τον χάρτη $(F(U), \varphi \circ F^{-1})$ για την N - μένει να ελεγθεί ότι όντως είναι χάρτης, και ότι όλοι μαζί ορίζουν μια διαφορική δομή στην N ώστε $\iota : N \to M$ να είναι $1-1$ immersion.

Θα λέμε ότι μια immersed υποπολλαπλότητα $N \subset M$ είναι συνεκτική, αν είναι συνεκτική ως προς την τοπολογία που προκύπτει από τον Ορισμό 16 - όχι ως προς την επαγώμενη τοπολογία.

Παράδειγμα: Με βάση αυτά, το σύνολο

$$S = \{(0,y), y \in (-1,1)\} \cup \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) x > 0 \right\}$$

είναι immersed υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$ αλλά δεν είναι συνεκτική - αν και το σύνολο S, εφοδιασμένο με την επαγώμενη από το $\mathbb{R}^2$ τοπολογία, είναι συνεκτικό.

19.2 Foliations

Ορισμός 17. *Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Μια φύλλωση $\mathcal{F}$ διάστασης k της M είναι μία διαμέρισή της από συνεκτικές immersed υποπολλαπλότητες $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, ώστε γύρω από κάθε $p \in M$ να υπάρχει ένας χάρτης (U,φ) ώστε για κάθε $\alpha \in A$ η τομή $\mathcal{F}_\alpha \cap U$, αν δεν είναι κενή, είναι ένα υποσύνολο του U της μορφής*

$$x^{k+1} = c_{k+1}, \dots, x^n = c_n.$$

Οι υποπολλαπλότητες $\mathcal{F}_\alpha$ αποκαλούνται φύλλα.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 20. *Έστω $\mathcal{F}$ μια φύλλωση σε μια διαφορική πολλαπλότητα M. Η συλλογή των εφαπτόμενων χώρων όλων των φύλλων της $\mathcal{F}$ ορίζουν μια κατανομή στην M που είναι involutive.*

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη φύλλωση του $\mathbb{R}^3$ με φύλλα τα παραβολοειδή

$$\mathcal{F}_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = x^2 + y^2 + a\},$$

$a \in \mathbb{R}$.

Ένα τυχαίο $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ανήκει στο φύλλο $\mathcal{F}_a$ με $a = z - x^2 - y^2$. Επίσης, ο εφαπτόμενος χώρος του $\mathcal{F}_a$ στο (x,y,z) είναι ο πυρήνας της παραγώγου της απεικόνισης $G_a(x,y,z) = x^2 + y^2 - z + a$, αφού $\mathcal{F}_a = G_a^{-1}(0)$.

Υπολογίζουμε, για $p = (x,y,z)$,

$$(DG_a)_p \left(c_1 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + c_2 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + c_3 \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p \right) = 2xc_1 + 2yc_2 - c_3.$$

Επομένως, ο πυρήνας του $(DG_a)_p$ ικανοποιεί

$$2xc_1 + 2yc_2 - c_3 = 0.$$

Για $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ παίρνουμε $c_3 = 2x$, ενώ για $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ παίρνουμε $c_3 = 2y$. Επομένως, βάση του εφαπτόμενουν χώρου του $\mathcal{F}_a$ είναι η

$$\left\{ V_{(x,y,z)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y,z)} + 2x\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{(x,y,z)}, W_{(x,y,z)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x,y,z)} + 2y\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{(x,y,z)} \right\}.$$

Επομένως, η φύλλωση ορίζει την 2-κατανομή D, με

$$D_{(x,y,z)} = \text{span}\{V_{(x,y,z)}, W_{(x,y,z)}\}.$$

Η κατανομή είναι involutive, και μάλιστα τα διανυσματικά πεδία V, W μετατίθενται:
Έστω $F_a(x,y) = (x, y, x^2 + y^2 + a)$. Από την κατασκευή τους τα V, W ικανοποιούν

$$V_{(x,y,z)} = (F_{z-x^2-y^2})_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)} \right)$$
$$W_{(x,y,z)} = (F_{z-x^2-y^2})_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x,y)} \right).$$

Επομένως,

$$[V,W]_{(x,y,z)} = (F_{z-x^2-y^2})_* \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \right) = 0.$$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο, involutive κατανομές δίνουν foliations.

Θεώρημα 16. *(Ολικό Frobenius) Έστω D μια involutive k-κατανομή σε μια διαφορική πολλαπλότητα. Τότε, η συλλογή όλων των μεγιστικών συνεκτικών ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων της D ορίζει μια φύλλωση της M, διάστασης k.*

20 Ομάδες Lie

Ορισμός 18. *Μια ομάδα Lie G είναι μια ομάδα που έχει δομή διαφορικής πολλαπλότητας τέτοια ώστε ο πολλαπλασιασμός της ομάδας*

$$\begin{aligned} m : G \times G &\to G \\ m(g,h) &= gh \end{aligned}$$

και η αντιστροφή

$$\begin{aligned} i : G &\to G \\ i(g) &= g^{-1}, \end{aligned}$$

να είναι ομαλές απεικονίσεις.

Μάλιστα, για να είναι μια διαφορική πολλαπλότητα με δομή ομάδας ομάδα Lie, αρκεί η απεικόνιση $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ να είναι ομαλή.

20.1 Παραδείγματα ομάδων Lie

1. Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ με την πράξη της πρόσθεσης $+$, με ουδέτερο στοιχείο το 0.

2. $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ είναι ομάδα Lie με πράξη τον πολλαπλασιασμό και ουδέτερο στοιχείο το 1.

   Ο $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^*$ και υποομάδα του, επομένως είναι επίσης ομάδα Lie.

3. $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$ είναι ομάδα Lie, με πράξη τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό, και ουδέτερο στοιχείο το 1.

4. Ο κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$ με τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό και ουδέτερο στοιχείο το $1 \in \mathbb{C}$.

5. Οι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, είτε με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ - συμβολίζεται με $Gl(n,\mathbb{R})$, είτε με στοιχεία από το $\mathbb{C}$ - συμβολίζεται με $Gl(n,\mathbb{C})$. Και στις δύο περιπτώσεις το ουδέτερο στοιχείο είναι ο ταυτοτικός πίνακας I_n, ενώ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων και η αντιστροφή πινάκων είναι ομαλές απεικονίσεις.

6. Οι ορθογώνιοι πραγματικοί $n \times n$ πίνακες $O(n)$. Είδαμε ότι είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της $Gl(n,\mathbb{R})$ διάστασης $\frac{n(n+1)}{2}$, αλλά είναι και υποομάδα της $Gl(n,\mathbb{R})$. Επομένως, ο περιορισμός του πολλαπλασιασμού πινάκων και της αντιστροφής πινάκων παραμένουν ομαλές απεικονίσεις $m : O(n) \times O(n) \to O(n)$ και $i : O(n) \to O(n)$.

7. Το καρτεσιανό γινόμενο $G_1 \times \cdots \times G_k$ ομάδων Lie $G_1, \ldots, G_k$ είναι ομάδα Lie με τον πολλαπλασιασμό
$$(g_1, \ldots, g_k) \cdot (g_1', \ldots, g_k') = (g_1 g_1', \ldots, g_k g_k').$$

8. Για παράδειγμα, ο τόρος $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ είναι ομάδα Lie.

9. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) πεπερασμένης διάστασης, και $Gl(V)$ το σύνολο των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον εαυτό του. Τότε το $Gl(V)$ με πολλαπλασιασμό τη σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι ομάδα Lie.

20.2 Μορφισμοί ομάδων Lie

Ορισμός 19. *Έστω G, H ομάδες Lie και $F : G \to H$ μια ομαλή απεικόνιση που είναι και ομομορφισμός ομάδων. Τότε η F λέγεται ομομορφισμός ομάδων Lie.*

20.2.1 Παραδείγματα μορφισμών

1. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = e^x$ είναι μορφισμός ομάδων Lie, αφού $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$. Η εικόνα του είναι η υποομάδα Lie $\mathbb{R}^+$, ενώ η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ έχει αντίστροφη $f^{-1}(y) = \log y$, επομένως είναι ισομορφισμός ομάδων Lie.

2. Ομοίως, η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^z$, είναι μορφισμός ομάδων Lie.

3. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $f(t) = e^{it}$ είναι μορφισμός ομάδων Lie.

4. Η εμφύτευση $\iota : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^*$, $\iota(e^{it}) = e^{it}$ είναι μορφισμός ομάδων Lie.

5. Η απεικόνιση ορίζουσα $\det : Gl(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ είναι μορφισμός ομάδων Lie, αφού
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
Ομοίως και η $\det : Gl(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$.

6. Έστω G μια **αβελιανή** ομάδα Lie. Τότε η απεικόνιση της αντιστροφής $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$ είναι μορφισμός ομάδων, αφού
$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}.$$

7. Έστω G μια ομάδα Lie, και $g \in G$. Η απεικόνιση συζυγίας $C_g : G \to G$, $C_g(h) = g^{-1}hg$ είναι μορφισμός ομάδων Lie.

20.3 Αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία σε μια ομάδα Lie

20.3.1 Αριστερή και δεξιά μετατόπιση

Έστω G μια ομάδα Lie και $g \in G$. Χρησιμοποιώντας τη δομή ομάδας της G μπορούμε να ορίσουμε τις ομαλές απεικονίσεις $L_g, R_g : G \to G$

$$L_g(h) = gh$$
$$R_g(h) = hg,$$

που τις ονομάζουμε αριστερή και δεξιά μετατόπιση αντίστοιχα.

Είναι ομαλές γιατί μπορούν και οι δύο να γραφτούν σαν σύνθεση ομαλών απεικονίσεων. Για παράδειγμα, για την L_g ορίζουμε $\iota_g : G \to G \times G$

$$\iota_g(h) = (g, h),$$

ώστε $L_g = (m \circ \iota_g)(h)$.

Αφού $g^{-1}gh = gg^{-1}h = h$ βλέπουμε αμέσως ότι $L_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ L_{g^{-1}} = id_G$, και επομένως η αριστερή μετατόπιση L_g αντιστρέφεται με αντίστροφη

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}.$$

Όμοια έχουμε και ότι

$$(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι απεικονίσεις L_g, R_g είναι αντιστρέψιμες και μάλιστα με οι αντίστροφοί τους είναι επίσης αριστερές/δεξιές μετατοπίσεις, και άρα ομαλές απεικονίσεις. Οι L_g, R_g είναι λοιπόν **αμφιδιαφορίσεις** της ομάδας Lie.

20.3.2 Αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία

Ορισμός 20. *Έστω G μια ομάδα Lie. Ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(G)$ λέγεται αριστερά αναλλοίωτο αν για κάθε $g, h \in G$*

$$(L_g)_* X_h = X_{gh} = X_{L_g(h)}. \tag{20.1}$$

Το X είναι δηλαδή L_g συσχετισμένο με τον εαυτό του για κάθε $g \in G$. Η L_g είναι αμφιδιαφόριση οπότε μπορούμε να γράψουμε την (20.1) *ως*

$$(L_g)_* X = X,$$

χωρίς να υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Πρόταση 18. *Το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων σε μια ομάδα Lie είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{X}(G)$, κλειστός ως προς την αγκύλη Lie. Δηλαδή αν $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ είναι αριστερά αναλλοίωτα, τότε και η αγκύλη Lie $[X, Y]$ είναι αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στην G.*

Απόδειξη. Έστω $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ δύο αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στην G, δηλαδή για κάθε $g \in G$

$$\begin{aligned}(L_g)_* X &= X \\ (L_g)_* Y &= Y.\end{aligned} \tag{20.2}$$

Από τη γραμμικότητα της απεικόνισης push forward και την (20.2), έχουμε ότι για κάθε $g \in G$

$$(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_* X + b(L_g)_* Y = aX + bY,$$

και άρα το $aX + bY$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτο.

Από τις ιδιότητες της αγκύλης Lie έχουμε επίσης, λόγω της (20.2), ότι

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y],$$

και επομένως το $[X, Y]$ είναι αριστερά αναλλοίωτο. $\square$

20.4 Η άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie

Ορισμός 21 (Άλγεβρες Lie)**.** *Μια άλγεβρα Lie είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένως με έναν πολλαπλάσιασμό $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*

- *Η απεικόνιση $[\ ,\ ]$ είναι διγραμμική.*
- *Η απεικόνιση $[\ ,\ ]$ είναι αντισυμμετρική: $[A, B] = -[B, A]$ για κάθε $A, B \in V$.*
- *Η $[\ ,\ ]$ ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi: για κάθε $A, B, C \in V$*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Έχουμε και τους αντίστοιχους ορισμούς της υποάλγεβρας Lie και του ομομορφισμού αλγεβρών Lie.

Ορισμός 22.

1. *Μια γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ μεταξύ αλγεβρών Lie που ικανοποιεί*

$$T([A, B]) = [T(A), T(B)]$$

ονομάζεται μορφιμός αλγεβρών Lie.

2. *Ένας υπόχωρος μιας άλγεβρας Lie $(V, [\ ,\ ])$ που είναι κλειστός ως προς την αγκύλη Lie ονομάζεται υποάλβρα Lie της $(V, [\ ,\ ])$.*

Ο πυρήνας και η εικόνα ενός μορφισμού αλγεβρών Lie είναι υποάλγεβρες Lie. Για παράδειγμα, αν $T : V \to W$ είναι μορφισμός αλγεβρών Lie και $A, \in KerT$, τότε

$$T([A, B]) = [T(A), T(B)] = [0, 0] = 0.$$

20.4.1 Παραδείγματα αλγεβρών Lie

1. Αν M είναι διαφορική πολλαπλότητα, τότε το σύνολο $\mathcal{X}(M)$, των ομαλών διανυσματικών πεδίων της M, είναι άλγεβρα Lie με την αγκύλη Lie, αφού αυτή ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi.

2. Ο διανυσματικός χώρος $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ των πραγματικών $n \times n$ πινάκων είναι άλγεβρα Lie, με αγκύλη τον μεταθέτη
$$[A, B] = AB - BA,$$
την οποία τη συμβολίζουμε με $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Υπενθυμίοζουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ήταν ο εφαπτόμενος χώρος των αντιστρέψιμων πινάκων $GL(n, \mathbb{R})$ πάνω από το ουδέτερο στοιχείο I_n.

3. Αντίστοιχα, οι μιγαδικοί $n \times n$ πίνακες γίνονται με τον ίδιο τρόπο η άλγεβρα Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

4. Το σύνολο των αντισυμμετρικών πραγματικών $n \times n$ πινάκων A, δηλαδή με $A^T = -A$, με την ίδια αγκύλη είναι άλγεβρα Lie που συμβολίζεται με $\mathfrak{o}(n)$ αφού
$$[A, B]^T = (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B].$$
Υπενθυμίζουμε ότι συναντήσαμε τους αντισυμμετρικούς πίνακες σαν τον εφαπτόμενο χώρο $T_{I_n}O(n)$, της ομάδας Lie $O(n)$.

5. Γενικά, αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος, τότε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον εαυτό του μαζί με τον μεταθέτη
$$[A, B](x) = A(B(x)) - B(A(x))$$
είναι μια άλγεβρα Lie, που συμβολίζεται με $\mathfrak{gl}(V)$.

6. Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε το ζεύγος $(V, [\ ,\ ])$ όπου για κάθε $v, w \in V$, $[v, w] = 0$, είναι άλγεβρα Lie, και ονομάζεται αβελιανή άλγεβρα Lie.

Θα δούμε ότι είναι ένα γενικό φαινόμενο, ο εφαπτόμενος χώρος μιας ομάδας Lie πάνω από το ουδέτερο στοιχείο να είναι άλγεβρα Lie, δικαιολογώντας το συμβολισμό $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ και $\mathfrak{o}(n)$ στα παραπάνω παραδείγματα.

20.4.2 Η άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie

Με βάση τα παραπάνω, η Πρόταση 18 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Πρόταση 19. *Το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων μιας ομάδας Lie G είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας Lie $\mathcal{X}(M)$.*

Την άλγεβρα Lie των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων μιας ομάδας Lie G θα τη συμβολίζουμε με $Lie(G)$, ή χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μικρό γοτθικό γράμμα, δηλαδή $\mathfrak{g}$ είναι η άλγεβρα Lie της ομάδας Lie G.

Ενώ η άλγεβρα Lie $\mathcal{X}(G)$ είναι άπειρης διάστασης, θα δούμε παρακάτω ότι η άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ μια ομάδας Lie G είναι πεπερασμένης διάστασης. Μάλιστα είναι ισόμορφη με τον εφαπτόμενο χώρο T_eG, και επομένως η διάστασή της είναι ίση με τη διάσταση της διαφορικής πολλαπλότητας G.

Θεώρημα 17. *Έστω G μια ομάδα Lie. Η απεικόνιση εκτίμησης $\varepsilon : \mathfrak{g} \to T_eG$, με $\varepsilon(X) = X_e$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, και επομένως η $\mathfrak{g}$ είναι πεπερασμένης διάστασης ίσης με τη διάστασης της G.*

Απόδειξη. Βλέπουμε εύκολα ότι η ε είναι γραμμική απεικόνιση. Έχει επίσης τετριμένο πυρήνα, αφού αν X είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G, για κάθε $g \in G$

$$X_g = (L_g)_*(X_e).$$

Επομένως αν $\varepsilon(X) = X_e \in T_eG$ βλέπουμε ότι $X_g = 0 \in T_gG$ για κάθε $g \in G$.

Μένει να δείξουμε ότι η ε είναι επιμορφισμός. Έστω $v \in T_eG$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα **ομαλό**, **αριστερά αναλλοίωτο** διανυσματικό πεδίο X της G ώστε $X_e = \varepsilon(X) = v$.

Είναι εύκολο να επεκτείνουμε το διάνυσμα $v \in T_eG$ σε όλη την G ώστε να φτιάξουμε ένα αριστερά αναλλοίωτο, ενδεχομένως μη ομαλό, διανυσματικό πεδίο.

Αρκεί να ορίσουμε για κάθε $g \in G$

$$X_g = (L_g)_* v, \tag{20.3}$$

γιατί τότε για κάθε $g, h \in G$

$$\begin{aligned}(L_g)_* X_h &= (L_g)_* \circ (L_h)_* v\\ &= (L_g \circ L_h)_* v\\ &= (L_{gh})_* v\\ &= X_{gh},\end{aligned}$$

επομένως πράγματι το X είναι αριστερά αναλλοίωτο.

Για να δείξουμε ότι το X είναι ομαλό, παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $f \in C^\infty(G)$ και $g \in G$

$$(Xf)(g) = ((L_g)_* v)f = v(f \circ L_g).$$

Υλοποιώντας το $v \in T_eG$ ως $\gamma'(0) = v$, όπου $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ με $\gamma(0) = e$ έχουμε

$$\begin{aligned}(Xf)(g) &= \gamma'(0)(f \circ L_g)\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t)\end{aligned}$$

Έστω $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times G \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t, g) = f \circ L_g \circ \gamma(t) = f \circ m(g, \gamma(t)).$$

Η φ είναι ομαλή ως σύνθεση ομαλών απεικονίσεων. Παρατηρούμε ότι

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(0,g)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t),$$

επομένως

$$Xf(g) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(0,g)},$$

και άρα η Xf είναι ομαλή εφόσον η φ είναι ομαλή. $\square$

Συνέπεια της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος είναι το εξής.

Πόρισμα 4. *Κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο μιας ομάδας Lie είναι ομαλό.*

Απόδειξη. Κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ικανοποιεί την (20.3), επομένως το επιχείρημα του παραπάνω θεωρήματος αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Επίσης το Θεώρημα 17 μας υποδεικνύει έναν τρόπο υπολογισμού αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων $X \in Lie(G)$. Πρώτα καθορίζουμε το $X_e \in G$ και στη συνέχεια το επεκτείνουμε σε όλη τη G ως

$$X_g = (L_g)_* X_e. \tag{20.4}$$

Για παράδειγμα, στην ομάδα Lie $\mathbb{R}^n$, έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε $L_x(y) = x + y$, και επομένως το push forward δίνεται από

$$(L_x)_* \left(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e \right) = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x,$$

αφού ο Ιακωβιανός πίνακας της L_x, ως προς τον συνηθισμένο χάρτη του $\mathbb{R}^n$, είναι ο ταυτοτικος πίνακας. Επομένως, τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^n$ είναι τα διανυσματικά πεδία των οποίων η έκφραση ως προς τη βάση $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ έχει σταθερούς συντελεστές, είναι δηλαδή της μορφής $X_x = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $X, Y \in Lie(\mathbb{R}^n)$

$$[X, Y] = 0,$$

επομένως η $Lie(\mathbb{R}^n)$ είναι αβελιανή.

Θα αποδείξουμε αργότερα ότι γενικά κάθε αβελιανή ομάδα Lie G έχει αβελιανή άλγεβρα $Lie(G)$.

20.5 Επαγώμενοι μορφισμοί αλγεβρών Lie

Κάθε μορφισμός $F : G \to H$ μεταξύ δύο ομάδων Lie επάγει ένα μορφισμό των αντίστοιχων αλγεβρών Lie τους $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, μέσω της απεικόνισης push forward $F_* : T_eG \to T_eH$, αφού από το Θεώρημα 17 οι εφαπτόμενοι χώροι T_eG, T_eH είναι ισόμορφοι με τις άλγεβρες Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ (εδώ συμβολίζουμε τα ουδέτερα στοιχεία και των δύο ομάδων με e)

Θεώρημα 18. *Έστω G, H δύο ομάδες Lie, με άλγεβρες Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ αντίστοιχα, και $F : G \to H$ ένας μορφισμός ομάδων Lie. Τότε για κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{g}$ υπάρχει ένα μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $Y \in \mathfrak{h}$ που είναι F-συσχετισμένο με το X, δηλαδή $Y_{F(g)} = F_*X_g$. Γράφοντας $Y = F_*X$, η απεικόνιση $F_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι μορφισμός αλγεβρών Lie.*

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathfrak{g}$. Είδαμε ότι το X καθορίζεται πλήρως από το X_e μέσω της σχέσης

$$X_g = (L_g)_*X_e.$$

Αντίστοιχα, κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $Y \in \mathfrak{h}$ ικανοποιεί

$$Y_h = (L_h)_*Y_e,$$

για κάθε $h \in H$. Η ιδέα είναι να ορίσουμε ένα $Y \in \mathfrak{h}$ τέτοιο ώστε $Y_e = F_*X_e$, οπότε θέτουμε, για καθε $h \in H$

$$Y_h = (L_h)_*F_*X_e = (L_h \circ F)_*X_e,$$

το οποίο είναι αυτομάτως αριστερά αναλλοίωτο και επομένως ομαλό.

Πρέπει να δείξουμε ότι το Y είναι F-συσχετισμένο με το X. Για κάθε $g \in G$ έχουμε

$$F_*X_g = F_* \circ (L_g)_*X_e = (F \circ L_g)_*X_e. \tag{20.5}$$

Από την άλλη, για κάθε $g, g' \in G$

$$(F \circ L_g)(g') = F(gg') = F(g)F(g') = (L_{F(g)} \circ F)(g'),$$

οπότε $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$. Επομένως η (20.5) γίνεται

$$F_*X_g = (F \circ L_g)_*X_e = (L_{F(g)} \circ F)_*X_e = Y_{F(g)},$$

δηλαδή το Y είναι F-συσχετισμένο με το X.

Για να αποδείξουμε ότι η F_* είναι μορφισμός αλγεβρών Lie, πρέπει να δείξουμε ότι διατηρεί την αγκύλη Lie. Υπολογίζουμε λοιπόν, για $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ και αντίστοιχα F-συσχετισμένα $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2] = [Y_1, Y_2],$$

από τις ιδιότητες της αγκύλης Lie. $\square$

Παρατήρηση 20.1. Προσέξτε ότι η απεικόνιση $F_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ που ορίσαμε παραπάνω δεν είναι απλά το push forward μια συνηθισμένης ομαλής απεικόνισης μεταξύ δύο διαφορικών πολλαπλοτήτων $F : M \to N$.

Στην τελευταία περίπτωση, το push forward καθορίζει εφαπτόμενα διανύσματα μόνο σε κάθε σημείο της **εικόνας** της F και αυτό μόνο αν η F είναι $1-1$. Διαφορετικά, αν $F(x) = F(y)$ με $x \neq y$ και $Z \in \mathcal{X}(M)$, ενδεχομένως θα είχαμε $F_* Z_x \neq Z_* y$.

Στην περίπτωση όμως της Πρότασης 18 η F είναι ομομορφισμός ομάδων Lie και την F_* την ορίσαμε στα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικα πεδία $\mathfrak{g}$.

Δείτε για παράδειγμα τη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x,0)$. Αυτή είναι ομαλή σαν απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^2$ στον εαυτό του, αλλά και ομομορφισμός ομάδων Lie αφού είναι γραμμική. Επίσης, $Im(T) = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$.

Αν Z είναι ένα οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ με $Z_{(x,y_1)} = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(x,y_1)}$, ενώ $Z_{(x,y_2)} = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{(x,y_1)}$, τότε σίγουρα $T_* Z_{(x,y_1)} = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(x,0)} \neq 0 = T_* Z_{(x,y_2)}$.

Αν όμως το είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ τότε, αφενώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τα pushforward $T_* Z_{(x,y)}$ συμφωνούν για κάθε $y \in \mathbb{R}$, αφετέρου υπάρχει τρόπος να οριστεί το $T_* Z$ σε **όλο το** $\mathbb{R}^2$, μέσω παράλληλης μετατόπισης. Βλέπουμε δηλαδή πόσο καίριο ρόλο παίζει η δομή ομάδας στον ορισμό του $F_* : Lie(\mathbb{R}^2) \to Lie(\mathbb{R}^2)$.

Για παράδειγμα, αν $Z = \frac{\partial}{\partial x} \in Lie(\mathbb{R}^2)$ τότε $F_* Z = Z \in Lie(\mathbb{R}^2)$, σε όλο τον $\mathbb{R}^2$ και όχι μόνο στον άξονα των x.

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 18, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του push forward, είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 20.

1. *Αν G είναι ομάδα Lie και id_G είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός, τότε $(id_G)_* = id_{\mathfrak{g}}$.*

2. *Έστω G, H, K είναι ομάδες Lie με αντίστοιχες άλγεβρες Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$, και $F_1 : G \to H$, $F_2 : H \to K$ δύο ομομορφισμοί ομάδων Lie. Τότε $(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_* \circ (F_1)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$.*

3. *Αν $F : G \to H$ είναι ισομορφισμός ομάδων Lie, τότε η $F_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie. Δηλαδή, ισόμορφες ομάδες Lie έχουν ισόμορφες άλγεβρες Lie.*

Απόδειξη. Άσκηση □

Για παράδειγμα, είδαμε ότι η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\gamma(t) = e^{it}$ είναι μορφισμός ομάδων Lie. Επίσης είδαμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το διανυσματικό πεδίο $X_t = a \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t$ είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}$.

Συμβολίζοντας με $\frac{d}{d\theta} = \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, to pushforward του X είναι λοιπόν $\gamma_* X_t = a \gamma_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t = a \frac{d}{d\theta}\Big|_{e^{it}}$. Επομένως για κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $a\frac{\partial}{\partial t} \in Lie(\mathbb{R})$ παίρνουμε το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο

$$a\frac{d}{d\theta}$$

στον κύκλο $\mathbb{S}^1$.

Αφού κάθε αριστερά αναλλοίωτο $Y \in Lie(\mathbb{S}^1)$ θα έχει Y_1 της μορφής $a \left.\frac{d}{d\theta}\right|_1$ βλέπουμε ότι με αυτό τον τρόπο παίρνουμε όλα τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στον κύκλο. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι αφού ο κύκλος έχει διάσταση 1 τότε και $\dim Lie(\mathbb{S}^1) = 1$. Ήδη τα πεδία της μορφής $a\frac{d}{d\theta}$, $a \in \mathbb{R}$ αποτελούν ένα μονοδιάστατο υπόχωρο της $Lie(\mathbb{S}^1)$, και επομένως

$$Lie(\mathbb{S}^1) = \left\{ a\frac{d}{d\theta}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Πρόταση 21. *Κάθε αβελιανή ομάδα Lie G έχει αβελιανή άλγεβρα $Lie(G)$.*

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι σε μια αβελιανή ομάδα Lie η απεικόνιση αντιστροφής $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$ είναι μορφισμός ομάδων Lie.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το push forward $i_* : T_eG \to T_eG$. Έστω $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ με $\gamma(0) = e$ και $\gamma'(0) = v \in T_eG$. Τότε

$$i_*v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i(\gamma(t)).$$

Αφού $i(\gamma(t)) \cdot \gamma(t) = e$ για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, παραγωγίζοντας στο $t = 0$ έχουμε, χρησιμοποιώντας τη διάσπαση $T_{(e,e)}(G \times G) = T_eG \oplus T_eG$,

$$\begin{aligned} 0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i(\gamma(t)) \cdot \gamma(t) &= m_*(i_*v \oplus v) \\ &= m_*(i_*v \oplus 0) + m_*(0 \oplus v) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (i(\gamma(t)) \cdot e) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e \cdot \gamma(t) \\ &= i_*v + v. \end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $v \in T_eG$

$$i_*v = -v.$$

Συνεπώς, ο αντίστοιχος μορφισμός αλγεβρών Lie $i_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ δίνεται από

$$i_*X = -X.$$

Τώρα, έστω $X, Y \in \mathfrak{g}$. Αφού i_* είναι μορφισμός αλγεβρών Lie

$$-[X,Y] = i_*[X,Y] = [i_*X, i_*Y] = [-X, -Y] = [X,Y],$$

οπότε πράγματι

$$[X,Y] = 0.$$

□

20.6 Υποομάδες Lie

Ορισμός 23. *Έστω G μια ομάδα Lie. Ένα υποσύνολο $H \subset G$ λέγεται υποομάδα Lie της G αν*

1. *H είναι **υποομάδα** της G.*
2. *Η H δέχεται τοπολογία και διαφορική δομή ώστε να είναι είναι **ομάδα Lie** και **immersed υποπολλαπλότητα** της G - δηλαδή μπορούμε να δούμε την H σαν την εικόνα μιας $1-1$ immersion από την H στην G (δείτε την Ενότητα 19.1).*

Η καλύτερη περίπτωση μιας immersed υποπολλαπλότητας είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Για υποομάδες που είναι και εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες ισχύει η ακόλουθη, πολύ βοηθητική, πρόταση.

Πρόταση 22. *Έστω G μια ομάδα Lie και H μια υποομάδα της G που είναι και εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της G. Τότε η H είναι υποομάδα Lie της. G, και επιπλέον κλειστό υποσύνολο της G.*

Απόδειξη. Αφού η H είναι immersed υποπολλαπλότητα, η εμφύτευση $\iota : H \to G$ είναι immersion, και επομένως ομαλή. Επομένως, αν $m_H : H \times H \to G$ είναι ο πολλαπλασιασμός στην H, και αφού η είναι υποομάδα της G, μπορούμε να γράψουμε $m_H(h_1, h_2) = m(\iota(h_1), \iota(h_2))$, δηλαδή

$$m_H = m \circ \iota \oplus \iota.$$

Βλέπουμε συνεπώς ότι η m_H είναι ομαλή, ως σύνθεση ομαλών απεικονίσεων. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει και ότι η αντιστροφή $i_H : H \to G$ είναι ομαλή απεικόνιση.

Σίγουρα αφού η H είναι υποομάδα της G, οι εικόνες των m_H, i_H περιέχονται στην H. Η H όμως ως εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα έχει την τοπολογία που επάγεται από τον εγκλεισμό στην G, και άρα οι $m_H : H \times H \to H$, $i_H : H \to H$ είναι συνεχείς. Το Λήμμα 21 επομένως μας λέει ότι είναι και ομαλές, επομένως η H είναι υποομάδα Lie της G.

Για να δείξουμε ότι η H είναι κλειστό υποσύνολο της G, έστω $g \in \bar{H}$ και ακολουθία $h_i \in H$ με $h_i \to g$.

Η ιδέα είναι ότι κάθε $g \in G$ έχει μια γειτονιά που "μοιάζει" με γειτονιά του $e \in H \subset G$. Συγκεκριμένα, λόγω συνέχειας, η ακολουθία

$$g^{-1} h_i \to e. \tag{20.6}$$

Αφού η H είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα, υπάρχει χάρτης $(U, x^1, \ldots, x^n)$ της G γύρω από το e με $x^i(e) = 0$ και

$$H \cap U = \{x^1 = \cdots = x^k = 0\}.$$

Μάλιστα, το σύνολο $H \cap U$ είναι κλειστό υποσύνολο του U.

Επιπλέον, για τυχαία i, j

$$h_j^{-1} h_i = (g^{-1} h_j)^{-1} g h_i. \tag{20.7}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, λόγω συνέχειας του πολλαπλασιασμού και της αντιστροφής στην G και των (20.6), (20.7), μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε i, j

$$g^{-1}h_j \in U,$$
$$h_j^{-1}h_i = (g^{-1}h_j)^{-1}gh_i \in W \cap H \subset U \cap H,$$

οπου $W \subset U$ ανοιχτό με $\bar{W} \subset U$.

Στέλνοντας, $i \to +\infty$ παίρνουμε ότι $h_j^{-1}h_i \to h_j^{-1}g$, επομένως $h_j^{-1}g \in \bar{W} \subset U$. Αφού το $U \cap H$ είναι κλειστό στο U, $h_j^{-1}h_i \in U \cap H$ και $h_j^{-1}g \in U$, συμπαιρένουμε ότι $h_j^{-1}g \in U \cap H$. Επομένως

$$g = h_j h_j^{-1} g \in H,$$

που δείχνει ότι $\bar{H} = H$ και άρα το H είναι κλειστό υποσύνολο της G. □

Λήμμα 21. *Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες, $F : M \to N$ ομαλή απεικόνιση, και $S \subset N$ μια immersed υποπολλαπλότητα της N. Αν η $Im(F) \subset S$ και η F είναι συνεχής σαν απεικόνιση $F : M \to S$ τότε η F είναι μια ομαλή απεικόνιση $F : M \to S$, όπου εδώ η S έχει την τοπολογία και διαφορική δομή που προκύπτει από την ιδιότητά της ως immersed υποπολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Θα παραλείψουμε την απόδειξη σε αυτές τις σημειώσεις, παραπέμπτοντας στο βιβλίο του Lie - Κεφάλαιο 8. Δείτε όμως την παρακάτω παρατήρηση, σχετικά με την αναγκαιότητα της υπόθεσης της συνέχειας της $F : M \to S$. □

Παρατήρηση 20.2. Να θυμίσουμε ότι η τοπολογία μιας immersed υποπολλαπλότητας δεν είναι απαραίτητα η τοπολογία που επάγεται από τον εγκλεισμό $S \subset N$ και επομένως η $F : M \to S$ στο παραπάνω λήμμα δεν είναι αυτομάτως συνεχής.

Πάρτε για παράδειγμα το οχτάρι $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\gamma(\pi/2) = (0, 0)$ και η εικόνα του είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των x. Επομένως, η εικόνα της ομαλής απεικόνισης $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$

$$\sigma(t) = (\sin 2t, -\cos t),$$

περιέχεται λόγω αυτής της συμμετρίας στην εικόνα της γ. Όμως, για κάθε $t_n \to \frac{\pi}{2}$, αφενώς $\sigma(t_n) \to \sigma(\pi/2) = (0, 0)$ (αφού η σ είναι σαφώς συνεχής απεικόνιση από το $(-\varepsilon, \varepsilon)$ στον $\mathbb{R}^2$), αλλά αν $t_n < 0$ μπορούμε να δούμε ότι $\sigma(t_n) = \gamma(s_n)$ για $s_n \to -\pi/2$, και όχι για $s_n \to \pi/2$ όπου $\gamma(\pi/2) = (0, 0)$. Επομένως η $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Im(\gamma)$ δεν είναι συνεχής, ως προς την τοπολογία της immersed υποπολλαπλότητας $Im(\gamma)$, η οποία είναι αμφιδιαφορική με το διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Έχουμε είδη δει τα ακόλουθα παραδείγματα, τα οποία η Πρόταση 22 μας λέει ότι είναι όλα υποομάδες Lie κάποιας μεγαλύτερης ομάδας Lie.

1. $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$

2. $SO(n) \subset O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$

3. $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$

4. $SU(2) \subset GL(2, \mathbb{C})$.

Έχουμε όμως και το ακόλουθο παράδειγμα μιας υποομάδας Lie μιας ομάδας Lie που δεν είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα.

Έστω $a \in \mathbb{R}$ άρρητος και η ομάδα Lie $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Η $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi a i t})$$

είναι immersed υποπολλαπλότητα του $\mathbb{T}^2$ η οποία δεν είναι εμφυτευμένη, και μάλιστα η εικόνα της γ είναι πυκνή στον $\mathbb{T}^2$.

Η εικόνα $Im(\gamma)$ είναι υποομάδα Lie του $\mathbb{T}^2$. Πράγματι, είναι immersed υποπολλαπλότητα και επίσης είναι υποομάδα αφού η γ είναι ομομορφισμός ομάδων, και μάλιστα ισομορφική με τον $\mathbb{R}$. Τέλος, η διαφορική δομή της $Im(\gamma)$ κάνει την $\iota : \mathbb{R} \to Im(\gamma)$ μια αμφιδιαφόριση, και επομένως ο πολλαπλασιασμός και η αντιστροφή στον $\mathbb{T}^2$ περιορισμένες στην $Im(\gamma)$ είναι ομαλές απεικονίσεις, αφού αντιστοιχούν στον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή στον $\mathbb{R}$.

20.6.1 Υποάλγεβρες Lie υποομάδων Lie

Πρόταση 23. *Έστω G μια ομάδα Lie, με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, και $H \subset G$ μια υποομάδα Lie της G. Τότε η άλγεβρα Lie $Lie(H)$ είναι ισομορφική με την υποάλγεβρα $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$*

$$\mathfrak{h} = \{X \in Lie(G),\ X_e \in T_e H\}$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\iota : H \to G$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie και επομένως η $\mathfrak{h} := \iota_* Lie(H)$ είναι υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$. Για την ακρίβεια η $\mathfrak{h}$ αποτελείται από τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία X της G τα οποία είναι της μορφής $i_* V$ για κάποιο $V \in Lie(H)$. Μάλιστα, ικανοποιούν

$$X_e = \iota_* V_e.$$

και μάλιστα καθορίζονται μοναδικά από αυτή τη σχέση. Εφόσον η ι είναι immersion, η $\iota_* : T_e H \to \iota_*(T_e H)$ είναι ισομορφισμός.

Επομένως κάθε $V \in Lie(H)$ καθορίζει ένα μοναδικό $X \in Lie(G)$ με $X_e = \iota_* V_e \in T_e H$. $\square$

20.7 Μονοπαραμετρικές υποομάδες

Σε αυτή την υποενότητα θα μας απασχολήσουν οι ροές και οι ολοκληρωτικές καμπύλες αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων μιας ομάδας Lie.

Πρόταση 24. *Έστω μια ομάδα Lie G. Τότε κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G είναι πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω $X \in Lie(G)$ ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο και ας υποθέσουμε ότι δεν είναι πλήρες. Υπάρχει λοιπόν $\gamma : (a, b) \to G$ μια μεγιστική ολοκληρωτική του καμπύλη είτε με $-\infty < a$ είτε με $b < +\infty$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $b < +\infty$ (διαφορετικά μπορούμε να κάνουμε το ίδιο επιχείρημα για το πεδίο $-X$)

Θα δούμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα του αριστερά αναλλοίωτου ώστε να κατασκευάσουμε μια επέκταση της γ σε ένα διάστημα γνήσια μεγαλύτερο του (a, b), αντιβαίνοντας την υπόθεση ότι η γ είναι μεγιστική.

Έστω $c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 < c_2$. Ας ορίσουμε την καμπύλη $\sigma : (a + c_2 - c_1, b + c_2 - c_1) \to G$

$$\sigma(t) = L_{\gamma(c_2)\gamma(c_1)^{-1}}(\gamma(t + c_1 - c_2))$$

Τότε

$$\sigma(c_2) = \gamma(c_2)\gamma(c_1)^{-1}\gamma(c_1) = \gamma(c_2)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= \left(L_{\gamma(c_2)\gamma(c_1)^{-1}}\right)_* (\gamma'(t + c_1 - c_2)) \\ &= \left(L_{\gamma(c_2)\gamma(c_1)^{-1}}\right)_* X_{\gamma(t+c_1-c_2)} \\ &= X_{\sigma(t)},\end{aligned}$$

αφού το X είναι αριστερά αναλλοίωτο, επομένως όπως η γ έτσι και η σ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X, με $\sigma(c_2) = \gamma(c_2)$.

Από μοναδικότητα, συμπεραίνουμε ότι η $\gamma(t) = \sigma(t)$ για κάθε

$$t \in (a + c_2 - c_1, b) = (a, b) \cap (a + c_2 - c_1, b + c_2 - c_1).$$

Συνεπώς, η

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in (a, b) \\ \sigma(t), & t \in (a + c_2 - c_1, b + c_2 - c_1) \end{cases}$$

είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του X που επεκτείνει τη γ, άτοπο. □

Αν λοιπόν G είναι μια ομάδα Lie και $X \in Lie(G)$, η ροή του X είναι ολική, δηλαδή ορίζεται ως

$$\Phi : G \times \mathbb{R} \to G.$$

Επιπλέον, αφού το X είναι αριστερά αναλλοίωτο, είναι L_g-συσχετισμένο με τον εαυτό του για κάθε $g \in G$, και επομένως από το Λήμμα 19 για κάθε $g \in G$ και $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$L_g \circ \Phi_t = \Phi_t \circ L_g. \tag{20.8}$$

Συνεπώς, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ η ολοκληρωτική καμπύλη του X από το $e \in G$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned}\gamma_e(s+t) &= \Phi_{t+s}(e) \\ &= \Phi_t \circ \Phi_s(e) \\ &= \Phi_t \circ L_{\Phi_s(e)}(e) \\ &= L_{\Phi_s(e)} \circ \Phi_t(e) \\ &= \Phi_s(e) \cdot \Phi_t(e) \\ &= \gamma_e(s) \cdot \gamma_e(t) = \gamma_e(t) \cdot \gamma_e(s).\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι

Λήμμα 22. *Αν G είναι μια ομάδα Lie και $X \in Lie(g)$, η ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma_e : \mathbb{R} \to G$ του X είναι ένας μορφισμός ομάδων Lie.*

Οδηγούμαστε λοιπόν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 24. *Έστω G μια ομάδα Lie. Τότε ένας ομαλός μορφισμός ομάδων Lie $F : \mathbb{R} \to G$ λέγεται μονοπαραμετρική υποομάδα της G.*

Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι κάθε μονοπαραμετρική υποομάδα της G προέρχεται από αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία, όπως και στο Λήμμα 22.

Θεώρημα 19. *Έστω G μια ομάδα Lie. Οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της G είναι οι ολοκληρωτικές καμπύλες από το $e \in G$ των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G.*

Απόδειξη. Έστω $F : \mathbb{R} \to G$ μια μονοπαραμετρική υποομάδα της G. Αφού $\frac{d}{dt} \in Lie(\mathbb{R})$, ας ορίσουμε

$$X = F_* \left(\frac{d}{dt} \right) \in Lie(G).$$

Θα δείξουμε ότι η F είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του X από το e.

Αφού η F είναι ομομορφισμός ομάδων, $F(0) = e$. Μένει να δείξουμε ότι η F είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X. Αυτό το παίρνουμε από τον υπολογισμό

$$F'(t) = F_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = X_{F(t)}.$$

□

Πρόταση 25. *Έστω G μια ομάδα Lie και $H \subset G$ μια υποομάδα Lie. Τότε οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της H είναι οι μονοπαραμετρικές υποομάδες $\gamma : \mathbb{R} \to G$ της G με $\gamma'(0) \in T_eH$ ($\equiv \iota_*(T_eH)$), αν $\iota : H \to G$ είναι η αντίστοιχη $1-1$ immersion)*

Απόδειξη. Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to H$ είναι μια μονοπαραμετρική υποομάδα της H. Αφού η H είναι υποομάδα Lie της G, η εμφύτευση $\iota : H \to G$ είναι $1-1$ immersion αλλά και μορφισμός ομάδων. Επομένως, η $\iota \circ \gamma : H \to G$ είναι ομαλός μορφισμός ομάδων, και άρα μονοπαραμετρική υποομάδα της G, με $\gamma'(0) \in T_eH$.

Αντίστροφα, έστω $\gamma : \mathbb{R} \to G$ μια μονοπαραμετρική υποομάδα της G με $\gamma'(0) \in T_eH$. Ας θεωρήσουμε επιπλέον την μονοπαραμετρική υποομάδα $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to H$ που παράγεται από αριστερά αναλλοίωτο πεδίο $X \in Lie(H)$ με $X_e = \gamma'(0)$.

Όπως πριν, θεωρώντας την $\tilde{\gamma}$ ως απεικόνιση $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to G$, βλέπουμε ότι είναι επίσης μια μονοπαραμετρική υποομάδα της G, με $\tilde{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$. Επομένως, οι $\gamma, \tilde{\gamma}$ παράγονται από το ίδιο $X \in Lie(G)$, με $X_e = \gamma'(0)$, και επομένως ταυτίζονται. Συνεπώς, η γ είναι μονοπαραμετρική υποομάδα της H. □

20.7.1 Η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$

Ας συμβολίσουμε με X^i_k τις συντεταγμένες στην $GL(n, \mathbb{R})$, η οποία είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του διανυσματικού χώρου $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Είδαμε ότι

$$T_{I_n}GL(n, \mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Έστω $A \in T_{I_n}GL(n, \mathbb{R})$. Το αντίστοιχο αριστερά αναλλοιώτο διανυσματικό πεδίο $\tilde{A}$ με $\tilde{A}_{I_n} = A$ δίνεται στο $X \in GL(n, \mathbb{R})$ από τη σχέση

$$\tilde{A}_X = (L_X)_* (A)\,,$$

όπου $L_X(A) = XA$. Γράφοντας

$$A = A^i_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_{I_n}$$

και χρησιμοποιώντας ότι η απεικονιση $X \mapsto XA$ είναι γραμμική, υπολογίζουμε ότι

$$\tilde{A}_X = (L_X)_* (A) = X^i_m A^m_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_X \tag{20.9}$$

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει τις παραμετρικές υποομάδες της $GL(n, \mathbb{R})$, χρησιμοποιώντας, εμέσως την (20.9).

Θεώρημα 20. *Για κάθε $A \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ η μονοπαραμετρική υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ που παράγεται από το είναι η $F(t) = e^{tA}$, όπου*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Απόδειξη. Η ζητούμενη μονοπαραμετρική υποομάδα ικανοποιεί το σύστημα

$$F'(t) = \tilde{A}_{F(t)} = F(t)^i_m A^m_k \left.\frac{\partial}{\partial X^i_k}\right|_{F(t)} \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}F(t)^i_k = F(t)^i_m A^m_k \Longleftrightarrow F'(t) = F(t)A,$$
$$F(0) = I_n,$$

το οποίο έχει μοναδική λύση. Αρκεί να ελέγξουμε ότι πράγματι η $F(t) = e^{tA}$ είναι λύση. $\square$

Εφαρμογές

1. $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της $O(n)$ είναι οι $F(t) = e^{tA}$ με

$$A \in T_{I_n}O(n) = \mathfrak{o}(n) = \{A, A^T = -A\}.$$

   Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathfrak{o}(n)$ έχουμε ότι $e^{tA} \in O(n)$.

2. $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Έχουμε ότι

$$T_{I_n}SL(n, \mathbb{R}) = \{A, \text{tr}A = 0\}.$$

   Επομένως, οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της $SL(n, \mathbb{R})$ είναι της μορφής $F(t) = e^{tA}$, με $\text{tr}A = 0$.

20.8 Η εκθετική απεικόνιση μιας ομάδας Lie

Ορισμός 25. *Έστω G μια ομάδα Lie, με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Η εκθετική απεικόνιση* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *ορίζεται για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ ως*

$$\exp(X) = F(1),$$

όπου $F : \mathbb{R} \to G$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγει το X.

Δηλάδη, για κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X της G, το $\exp(X)$ είναι το σημείο $F(1)$ της ολοκληρωτικής καμπύλης του X από το $e \in G$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε την εκθετική απεικόνιση ως

$$\exp : T_eG \to G,$$

όπου αν $V \in T_eG$ και $X \in Lie(G)$ είναι το μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο το $X_e = V$ και Φ η ροή του, τότε

$$\exp(V) = \Phi_1(e).$$

Η εκθετική απεικόνιση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 26. *Έστω G μια ομάδα Lie με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Τότε*

1. *Η εκθετική απεικόνιση της G,* $\exp$*, είναι μια ομαλή απεικόνιση (η $\mathfrak{g}$ είναι διανυσματικός χώρος και επομένως έχει τη συνηθισμένη διαφορική δομή)*

2. *Για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ η απεικόνιση $t \mapsto \exp(tX)$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγεται από το X.*

3. *Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $\exp((t+s)X) = \exp(tX) \cdot \exp(sX)$.*

4. $\exp_* : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ *ικανοποιεί*
$$\exp_*(X) = X_e,$$
για κάθε $X \in T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

5. *Υπάρχουν $0 \in U \subset \mathfrak{g}$ και $e \in V \subset G$ ανοιχτά ώστε $\exp : U \to V$ να είναι αμφιδιαφόριση.*

6. *Για κάθε ομομορφισμό ομάδων Lie $F : G \to g$, οι απεικονίσεις $\exp \circ F_*, F \circ \exp : \mathfrak{g} \to H$ ικανοποιούν*
$$\exp \circ F_* = F \circ \exp .$$

7. *Η ροή Φ ενός αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου X της G δίνεται από*
$$\Phi_t = R_{\exp(tX)}.$$

Απόδειξη. 1. Δεν θα το αποδείξουμε - παραπέμπουμε στο βιβλίο το Lee, Κεφάλαιο 20.

2. Έστω $X \in Lie(G)$, Φ η ροή του και $F(t) = \Phi_t(e)$ η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγει το X. Έστω $t \in \mathbb{R}$, γ η καμπύλη
$$\gamma(s) = \Phi_{st}(e)$$
ικανοποιεί $\gamma(0) = e$ και
$$\gamma'(s) = t \left.\frac{d}{dt}\right|_{u=st} \Phi_t(e) = tX_{\Phi_{st}(e)}.$$
Επομένως είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $tX \in Lie(G)$ από το e με $\gamma'(0) = tX_e$ και επομένως
$$\exp(tX) = \gamma(1) = \Phi_t(e) = F(t). \tag{20.10}$$

3. Η F, ως μονοπαραμετρική υποομάδα, είναι ομομορφισμός ομάδων, οπότε το ζητούμενο αποδεικνύεται από την (20.10)και τη σχέση
$$F(t+s) = F(t) \cdot F(s).$$

4. Έστω $X \in \mathfrak{g} = T_0\mathfrak{g}$ και η καμπύλη $\sigma(t) = tX \in \mathfrak{g}$ με $\sigma'(0) = X \in \mathfrak{g}$. Τότε

$$\begin{aligned}\exp_* X &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp\circ\sigma)(t)\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)\\ &= F'(0)\\ &= X_e.\end{aligned}$$

5. Αφού $\exp_*(X) = X_e$, η $\exp_*$ είναι ισομορφισμός και επομένως το αποτέλεσμα είναι συνέπεια του Θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης.

6. Το ζητούμενο προκύπτει αν αποδείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tF_*X) = F(\exp(tX)). \tag{20.11}$$

Το αριστερό μέλος της (20.11) είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα της H που παράγει το F_*X. Αρκεί να δείξουμε ότι και το δεξί μέλος είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα της H που παράγει το F_*X.

Ορίζουμε $\sigma(t) = F(\exp(tX))$. Υπολογίζουμε ότι $\sigma(0) = F(\exp(0)) = F(e) = F$ και

$$\sigma(t+s) = F(\exp((t+s)X) = F(\exp tX \cdot \exp sX) = F(\exp tX) \cdot F(\exp sX) = \sigma(t)\cdot\sigma(s),$$

επομένως η σ είναι ομομορφισμός ομάδων. Επίσης, είναι ομαλή επειδή είναι σύνθεση ομαλών απεικονίσεων. Υπολογίζουμε τέλος ότι

$$\sigma'(t) = \frac{d}{dt}F(\exp(tX)) = F_*(\frac{d}{dt}\exp(tX)) = F_*X,$$

επομένως είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγεται από το F_*X.

7. Έστω $g \in G$. Τότε

$$R_{\exp tX}(g) = g\cdot \exp tX = L_g(\exp tX) = L_g(\Phi_t(e)) = \Phi_t(L_g(e)) = \Phi_t(g),$$

επειδή η ροή του X και η L_g μετατίθενται, λόγω του ότι το X είναι L_g-συσχετισμένο με τον εαυτό του επειδή είναι αριστερά αναλλοίωτο.

□

Συνέπεια της Πρότασης 25 είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 27. *Έστω G μια ομάδα Lie και $H \subset G$ μια υποομάδα Lie. Τότε η εκθετική απεικόνιση της H είναι ο περιορισμός της εκθετικής απεικόνισης της G στην υποάλγεβρα $Lie(H) \subset Lie(G)$.*

Ας υπολογίσουμε την εκθετική απεικόνιση σε μερικά βασικά παραδείγματα

1. Η εκθετική απεικόνιση της ομάδας Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, είναι

$$\exp(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = (v^1, \ldots, v^n).$$

2. Στην ομάδα Lie $\mathbb{C}^*$, για κάθε $z \in a = \alpha e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$

$$L_a(z) = az.$$

Επομένως, η $(L_a)_* : T_1\mathbb{C}^* \to T_a\mathbb{C}^*$ είναι για $b \in T_1\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$

$$(L_a)_* b = (L_a)_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (tb+1) \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a(tb+a) = ab.$$

Επομένως, τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία είναι τα πεδία X της μορφής

$$X_a = ab = \alpha r e^{i(\varphi+\theta)},$$

για κάποιο $b = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Εναλλακτικά, αν $a = u + iv$, $b = \sigma + i\tau$, έχουμε $ab = (u\sigma - v\tau) + i(u\tau + v\sigma)$, οπότε το , σαν διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \approx \mathbb{C}$ είναι το

$$X_{(u,v)} = (u\sigma - v\tau) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{(u,v)} + (u\tau + v\sigma) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(u,v)}.$$

Η ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ από το 1, με $\gamma(t) = \alpha(t)e^{i\varphi(t)}$ θα είναι η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \gamma'(t) = X_{\gamma(t)} &\iff \alpha' e^{i\varphi} + \alpha i \varphi' e^{i\varphi} = \alpha r e^{i\varphi} e^{i\theta} \iff \alpha' + i\alpha\varphi' = re^{i\theta} \\ &\iff \alpha' + i\alpha\varphi' = \alpha r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &\iff \alpha' = \alpha r\cos\theta, \varphi' = r\sin\theta, \\ \gamma(0) = 1 &\iff \alpha(0) = 1, \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\alpha = e^{rt\cos\theta}$ και $\varphi = rt\sin\theta$. Επομένως,

$$\exp(|b|e^{i\theta}) = e^{|b|\cos\theta} e^{i|b|\sin\theta} = e^{|b|(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{|b|e^{i\theta}}.$$

3. Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την υποομάδα Lie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$. Η αντίστοιχη υποάλγεβρα Lie, είναι εκείνα τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία του $\mathbb{C}^*$ που είναι της μορφής $X_a = ab$, για $b = i\beta$. Οπότε, έχουμε $\theta = \frac{\pi}{2}$, επομένως τελικά
$$\exp(i\beta) = e^{i|b|} = e^{i\beta}.$$
4. Η εκθετική απεικόνιση της $GL(n,\mathbb{R})$ είναι, για $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$
$$\exp(A) = e^A,$$
και με τον ίδιο τρόπο δίνεται και η εκθετική απεικόνιση κάθε υποομάδας Lie της $GL(n,\mathbb{R})$, περιορίζοντας την εκθετική απεικόνιση στην αντίστοιχη υποάλγεβρα Lie.

20.9 Η υποομάδα Lie μιας υποάλγεβρας Lie

Είδαμε ότι σε κάθε υποομάδα Lie μιας ομάδας Lie G αντίστοιχει, μονοσήμαντα, μια υποάλγεβρα Lie της $Lie(G)$ που είναι ισομορφική με την $Lie(H)$ - μάλιστα ο ισομορφισμός δίνεται από το pushforward της εμφύτευσης $\iota : H \to G$. Το παρακάτω θεώρημα ισχύρίζεται το αντίστροφο.

Θεώρημα 21. *Έστω G μια ομάδα Lie και $\mathfrak{h} \subset Lie(G)$ μια υποάλγεβρα Lie. Τότε υπάρχει μια μοναδική υποομάδα Lie $H \subset$ ώστε $Lie(H)$ να είναι ισομορφική με την $\mathfrak{h}$, μέσω της εμφύτευσης $\iota : H \to G$.*

Απόδειξη. Θα περιγράψουμε συνοπτικά την ιδέα της απόδειξης, η οποία βασίζεται στο ολικό Θεώρημα του Frobenius, ώστε να κατασκευαστεί η ζητούμενη υποομάδα Lie σαν το φύλλο μιας κατανομής.

1. Ορίζουμε την κατανομή D ώστε για κάθε $g \in G$
$$D_g = \{X_g \in T_g G, X \in \mathfrak{h} \subset Lie(G)\}.$$
2. Η κατανομή είναι involutive, γιατί η $\mathfrak{h}$ είναι υποάλγεβρα Lie της $Lie(G)$.
3. Από ολικό Frobenius, υπάρχει μια φύλλωση της G από ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες (φύλλα) της D - ας συμβολίσουμε με $\mathcal{H}_g$ το φύλλο που περιέχει το $g \in G$.
4. Ισχύει επίσης ότι $L_g(\mathcal{H}_{g'}) = \mathcal{H}_{gg'}$. Ο κύριος λόγος είναι ότι η D είναι αναλλοίωτη κάτω από αριστερές μετατοπίσεις.
5. Ορίζουμε $H = \mathcal{H}_e$ το φύλλο που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο e, οπότε είναι αυτομάτως immersed υποπολλαπλότητα. Προφανώς, για κάθε $h \in H$, $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_e = H$, αφού η φύλλωση είναι διαμέριση.

6. Η H είναι υποομάδα. Αν $h, h' \in H = \mathcal{H}_e$ τότε

$$hh' = L_h(h') \in L_h(\mathcal{H}_e) = \mathcal{H}_h = H.,$$

και

$$h^{-1} = h^{-1}e \in L_{h^{-1}}(\mathcal{H}_e) = L_{h^{-1}}(\mathcal{H}_h) = \mathcal{H}_e = H.$$

7. Η απόδειξη ολοκληρώνεται αν δείξουμε ότι η H είναι ομάδα Lie, αν είναι εφοδιασμένη με την διαφορική δομή ως immersed υποπολλαπλότητα.

$\square$

20.10 Αντιστοιχία ομάδων Lie και αλγεβρών Lie

Βασικό είναι το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 22. *Έστω G και H δύο* ***απλά συνεκτικές*** *ομάδες Lie, με άλγεβρες Lie $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$ αντίστοιχα. Τότε κάθε μορφισμός αλγεβρών Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ επάγει έναν μοναδικό μορφισμό ομάδων Lie $\Phi : G \to H$ ώστε $\Phi_* = \varphi$.*

Συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το πόρισμα:

Πόρισμα 5. *Αν δύο* ***απλά συνεκτικές*** *ομάδες Lie έχουν ισόμορφες άλγεβρες Lie τότε είναι ισομορφικές.*

Η υπόθεση ότι οι ομάδες Lie είναι απλά συνεκτικές είναι αναγκαία. Για παράδειγμα, ο κύκλος $\mathbb{S}^1$ και το $\mathbb{R}$ έχουν ισόμορφες ομάδες Lie, αλλά δεν είναι ισόμορφες ομάδες Lie.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ομάδα Lie G μας δίνει μια άλγεβρα Lie $Lie(G)$. Μάλιστα, ισόμορφες ομάδες Lie έχουν ισόμορφες άλγεβρες Lie. Ορίζεται έτσι μια απεικόνιση

$$Lie : \left\{ \begin{array}{c} \text{Ομάδες Lie} \\ \text{(mod ισομορφισμούς)} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Άλγεβρες Lie πεπερασμένης διάστασης} \\ \text{(mod ισομορφισμούς)} \end{array} \right\}.$$

Το Πόρισμα 5 μας επομένως μας λέει ότι ο περιορισμός της Lie

$$Lie : \left\{ \begin{array}{c} \text{Απλά συνεκτικές ομάδες Lie} \\ \text{(mod ισομορφισμούς)} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Άλγεβρες Lie πεπερασμένης διάστασης} \\ \text{(mod ισομορφισμούς)} \end{array} \right\}$$

είναι $1-1$. Είναι όμως και επί, έχουμε δηλαδή το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 23. *Η απεικόνιση Lie ορίζει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ κλάσεων ισομορφισμών απλά συνεκτικών ομάδων Lie και κλάσεων ισομορφισμών αλγεβρών Lie πεπερασμένης διάστασης.*

Η δυσκολία στην απόδειξη του θεωρήματος είναι ότι ξεκινάμε από κάποια άλγεβρα Lie και πρέπει να κατασκευάσουμε μια ομάδα Lie από αυτήν, με τις σωστές ιδιότητες.

Η ιδέα είναι ότι κάθε άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}(V)$ για κάποιο διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, από το Θεώρημα του Ado. Επομένως μπορούμε να δούμε την $\mathfrak{g}$ σαν υποάλγεβρα της $Lie(GL(V))$.

Από το Θεώρημα 21 υπάρχει μια υποομάδα G της $GL(V)$ με $Lie(G) = \mathfrak{g}$. Αν πάρουμε τον καθολικό χώρο επικάλυψης $\tilde{G}$ της G, μπορούμε να δούμε ότι είναι επίσης ομάδα Lie και $Lie(\tilde{G}) = Lie(G) = \mathfrak{g}$.

21 Το Θεώρημα του Sard και εφαρμογές

21.1 Υποσύνολα μέτρου μηδέν

Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν αριθμήσιμες στο πλήθος μπάλες $B_i = B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta} B_i$$

και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_i) < \delta.$$

Η ιδιότητα να είναι ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ μέτρου μηδέν είναι αναλλοίωτη κάτω από αμφιδιαφορίσεις - ακόμα περισσότερο, διατηρείται κάτω από λείες απεικονίσεις.

Λήμμα 23. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα υποσύνολο μέτρου μηδέν και $F : A \to \mathbb{R}^n$ μια λεία απεικόνιση. Τότε το $F(A)$ έχει μέτρο μηδέν.*

Απόδειξη. $F : A \to \mathbb{R}^n$ λεία σημαίνει ότι για κάθε $p \in A$ υπάρχει λεία τοπική επέκταση $F_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, $p \in U_p$ - U_p ανοιχτό - της F γύρω από το p. Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι το $\bar{U}_p$ είναι συμπαγές και ότι η F_p επεκτείνεται στο $\bar{U}_p$. Τότε οι μερικές παράγωγοι της F_p να είναι φραγμένες στο $\bar{U}_p$ και επομένως η $F_p : \bar{U}_p \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz, δηλαδή

$$|F_p(x) - F_p(y)| \leq C|x - y|,$$

για κάθε $x, y \in \bar{U}_p$.
<u>Το μέτρο του $F(A \cap \bar{U}_p) = F_p(A \cap \bar{U}_p)$ είναι μηδέν:</u>
Έστω $B_i = B(x_i, r_i)$ μπάλες που καλύπτουν το $A \cap U_p$ με $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_i) < \delta$. Λόγω της Lipschitz συνθήκης, τα σύνολα $F_p(B_i)$ περιέχονται σε μπάλες $\tilde{B}_i$ ακτίνας Cr_i, οι οποίες καλύπτουν το $F_p(A \cap \bar{U}_p)$ και

$$\sum_i \mathrm{vol}(\tilde{B}_i) = \sum_i C^n \mathrm{vol}(B_i) < C^n \delta < \varepsilon,$$

επομένως το $F_p(A \cap \bar{U}_p) = F(A \cap \bar{U}_p)$ έχει μέτρο μηδέν.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αν δείξουμε ότι μπορούμε να καλύψουμε το A με αριθμήσιμα στο πλήθος σύνολα $\bar{U}_p$. $\square$

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε πότε ένα υποσύνολο μιας διαφορικής πολλαπλότητας έχει μέτρο μηδέν ως εξής:

Ορισμός 26. *Ένα υποσύνολο A μιας διαφορικής πολλαπλότητας M λέγεται ότι έχει μέτρο μηδέν αν για κάθε C^∞ χάρτη (U, ϕ) το σύνολο $\phi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ έχει μέτρο μηδέν.*

Στον παραπάνω ορισμό απαιτούμε τα σύνολα $\phi(U \cap A)$ να είναι μέτρου μηδέν για κάθε C^∞ χάρτη (U, ϕ), κάτι που σε πρώτη ματιά ενδέχεται να κάνει τον ορισμό υπερβολικά ισχυρό - δηλαδή να μην υπάρχουν εν τέλει υποσύνολα μέτρου μηδέν. Από την άλλη, σίγουρα θα επιθυμούσαμε να θεωρήσουμε ότι ένα υποσύνολο $A \subset U$, όπου το (U, ϕ) είναι ένας C^∞ χάρτης με $\phi(A)$ μέτρου μηδέν, έχει μέτρο μηδέν. Αυτό πράγματι ισχύει, λόγω του προηγούμενου λήμματος. Έχουμε δηλαδή

Λήμμα 24. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $A \subset M$ ώστε να υπάρχουν αριθμήσιμοι στο πλήθος C^∞ χάρτες (U_i, ϕ_i) με $\phi_i(U_i \cap A)$ μέτρου μηδέν. Τότε το A είναι μέτρου μηδέν.*

Παρατηρούμε ότι ένα υποσύνολο $A \subset M$ μέτρου μηδέν δεν μπορεί να περιέχει κάποιο μη κενό ανοιχτό υποσύνολο - με άλλα λόγια, το συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου μέτρου μηδέν είναι πυκνό στην M. Επομένως, αν δείξουμε ότι κάποιο υποσύνολο έχει μέτρο μηδέν, αυτομάτως γνωρίζουμε ότι το συμπλήρωμά του είναι μη κενό (και μάλιστα είναι αρκετά “μεγάλο”, με την έννοια ότι έχει μη κενό εσωτερικό)

21.2 Το Θεώρημα του Sard

Ορισμός 27. *Έστω $F : M \to N$ μια C^∞ απεικόνιση ανάμεσα σε δύο διαφορικές πολλαπλότητες. Λέμε ότι $p \in M$ είναι κρίσιμο σημείο της F αν το pushforward*

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$$

δεν είναι επιμορφισμός. Σε αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι το $p \in M$ είναι ομαλό σημείο της F.

Αν $p \in M$ είναι κρίσιμο σημείο της F, τότε το $F(p)$ ονομάζεται κρίσιμη τιμή της F. Αν κάθε $p \in F^{-1}(q)$ είναι ομαλό σημείο, λέμε ότι το q είναι ομαλή τιμή της F.

Παραδείγματα:

1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $F(x, y) = x^2 - y^2$. Έχει ένα κρίσιμο σημείο, το $(0, 0)$ και κρίσιμη τιμή $F(0, 0) = 0$. Τότε η
$$F_* : T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 \to T_0\mathbb{R}.$$
και $F_* = 0$.

2. $\gamma : \mathbb{R} \to N$ μια C^∞ καμπύλη, και γενικότερα κάθε $F : M \to N$ με $\dim M < \dim N$. Τότε κάθε $p \in M$ είναι κρίσιμο σημείο ένω κάθε στοιχείο του $F(M)$ είναι κρίσιμη τιμή.

3. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x, y) = (x^2 - y^2, x^2)$. Τότε
$$F_* \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \right) = (2xa - 2yb)\frac{\partial}{\partial x} + 2xa\frac{\partial}{\partial y}$$
με αντίστοιχο Ιακωβιανό πίνακα
$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$
ο οποίος έχει rank $= 1$ αν και μόνο αν $xy = 0$ και $(x, y) \neq (0, 0)$, rank $= 0$ για $x = y = 0$ και σε κάθε άλλη περίπτωση έχει rank $= 2$.

   Τα κρίσιμα σημεία είναι επομένως τα στοιχεία του συνόλου $\{(x, y), y = 0\}$, ενώ οι κρίσιμες τιμές της F είναι το σύνολο $\{(x^2, x^2), x \in \mathbb{R}\}$.

Σε αυτά τα παραδείγματα παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το σύνολο των κρίσιμων τιμών είναι μικρό - έχει μάλιστα μέτρο μηδέν. Αυτό ισχύει γενικά:

Θεώρημα 24 (Θεώρημα του Sard)**.** *Έστω $F : M \to N$ μια C^∞ απεικόνιση ανάμεσα σε δυο διαφορικές πολλαπλότητες. Τότε το σύνολο των κρίσιμων τιμών της F έχει μέτρο μηδέν στην N.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στη διάσταση m του πεδίου ορισμού. Το θεώρημα είναι αληθές στην περίπτωση που $m = 0$, αφού αν $n = 0$ η F δεν έχει κρίσιμα σημεία (το pushforward είναι πάντα επίμορφισμός), ενώ αν $n > 0$ η εικόνα της F είναι αριθμήσιμο σύνολο, και άρα μέτρου μηδέν - δεν το δείξαμε αυτό, αλλά μπορεί κανείς να το δείξει καλύπτοντας ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\{x_i\}$με μπάλες με κέντρο τα x_i και ακτίνα $r_i = 2^{-i}\delta$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για απεικονίσεις με πεδίο ορισμού διάστασης $< m$ και αρκεί να το δείξουμε όταν $\dim M = m$.

Θα περιγράψουμε μερικές από τις ιδέες της απόδειξης, χωρίς να περιπλέξουμε την εικόνα με τεχνικές λεπτομέρειες. Γι'αυτό, έστω $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ λεία, C το σύνολο των κρίσιμων σημείων της F και $C_k \subset C$ τέτοιο ώστε
$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^m, \text{κάθε μερική παράγωγος τάξης} \leq k \text{ της } F \text{ μηδενίζεται στο } x\}.$$
και αντίστοιχα $F(C_k) \subset F(C) = \{\text{σύνολο κρίσιμων τιμών}\}$.

Συγκεκριμένα, στο παράδειγμα 1, $C = C_1$, στο παράδειγμα 2 αν η F είναι immersion $C_j = \emptyset$ για κάθε j, ενώ στο παράδειγμα 3
$$\begin{aligned} C &= \{(x, y), xy = 0\} \\ C_1 &= \{(0, 0)\}, \\ C_2 &= C_3 = \cdots = \emptyset. \end{aligned}$$
Οι παρακάτω περιπτώσεις καθοδηγούν την απόδειξη του θεωρήματος.

1. Έστω $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ λεία, και $C_k \subset \mathbb{R}^n$. Είναι συνέπεια του θεωρήματος Taylor ότι το $F(C_k)$ έχει μέτρο μηδέν, αν το k είναι αρκετά μεγάλο.

   Για απλότητα, θα δείξουμε ότι το $F(C_k \cap [0,1]^m)$ έχει μέτρο μηδέν. Για κάθε $j = 1, 2, \ldots$, χωρίζουμε τον κύβο $[0,1]^m$ σε κύβους $E_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{mj}$, με πλευρά 2^{-j}.

   Από το θεώρημα του Taylor, για αρκετά μεγάλο j, αν $a \in C_k \cap E_{ij}$, υπάρχει $L > 0$ έτσι ώστε

$$|F(x) - F(a)| \leq L|x - a|^{k+1}$$

   για κάθε $x \in E_{ij} \subset B(a, c(n)2^{-j})$. Επομένως,

$$|F(x) - F(a)| \leq L|x - a|^{k+1} \leq L(c(n)2^{-j})^{k+1} = Lc^{k+1}2^{-j(k+1)},$$

   οπότε $F(E_{ij}) \subset B(F(a), Lc^{k+1}2^{-j(k+1)})$.

   Μπορούμε επομένως να καλύψουμε το

$$F(C_k \cap [0,1]^m) = \bigcup_i F(C_k \cap E_{ij})$$

   με το πολύ 4^j μπάλες ακτίνας $Lc^{k+1}2^{-i(k+1)}$, και συνολικού όγκου το πολύ

$$4^j(Lc^{k+1}2^{-i(k+1)})^n = L^n c^{n(k+1)}2^{mj-nj(k+1)} = L^n c^{n(k+1)}2^{j(m-n(k+1))}$$

   Αν $m < n(k+1)$, δηλαδή $k > \frac{m}{n} - 1$, μπορούμε να κάνουμε την παραπάνω ποσότητα όσο μικρή θέλουμε, δείχνοντας ότι το $F(C_k \cap [0,1]^m)$ έχει μέτρο μηδέν.

2. $F(C \setminus C_1)$ είναι υποσύνολο μέτρου μηδέν. Έστω ότι $F = (F^1, \ldots, F^m)$, με $F^l : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ και $0 \in C_1$.

   Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) \neq 0$. Μπορεί τότε να γίνει μια αλλαγή συντεταγμένων γύρω από το $0 \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\begin{aligned} u &= F_1(x^1, \ldots, x^n), \\ v^i &= x^i, \quad i = 2, \ldots, m, \end{aligned}$$

   και αυτό γιατί η απεικόνιση $\psi(x^1, \ldots, x^m) = (F^1(x^1, \ldots, x^m), x^2, \ldots, x^m)$ έχει αντιστρέψιμο Ιακωβιανό πίνακα στο 0, τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix},$$

   επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για να βρούμε μια τοπική αντίστροφο.

Μπορούμε επομένως να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι η $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ έχει τη μορφή

$$F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, F^2(x^1, \ldots, x^n), \ldots, F^n(x^1, \ldots, x^m)).$$

Σε αυτή την περίπτωση, ορίζοντας για κάθε $c \in \mathbb{R}$ την $F_c : \mathbb{R}^{m-1} \to \{y^1 = c\} \subset \mathbb{R}^n$ ως

$$F_c(x^2, \ldots, x^m) = F(c, x^2, \ldots, x^m),$$

ο Ιακωβιανός πίνακας $JF(x^1, \ldots, x^m)$ της F στο $(x^1, \ldots, x^m)$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & JF_{x^1}(x^2, \ldots, x^m). \end{pmatrix}.$$

Επομένως, για κάθε $c \in \mathbb{R}$, οι κρίσιμες τιμές της F στο υπερεπιπεδο $y^1 = c$ είναι ίδιες με τις κρίσιμες τιμές της F_c.

Όμως το πεδίο ορισμού της F_c έχει διάσταση $< m$, και επομένως από την επαγωγική υπόθεση οι κρίσιμες τιμές της είναι υποσύνολο του $\{y^1 = c\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$μέτρου μηδέν. Αυτό ισχύει για κάθε c, επομένως το σύνολο των κρίσιμων τιμών της F τέμνει κάθε υπερεπίπεδο $\{y^1 = c\}$ σε σύνολο μέτρου μηδέν, επομένως έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^n$.

3. $F(C_j \setminus C_{j+1})$ είναι υποσύνολο μέτρου μηδέν. Έστω $a \in C_j \setminus C_{j+1}$ και $y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ μια μερική παράγωγος τάξης j μιας συντεταγμένης της F, ώστε $y(a) = 0$ αλλά $dy|_a \neq 0$. Τότε υπάρχει V_a ανοιχτό, $a \in V_a$ ώστε κάθε σημείο του V_a να είναι ομαλό σημείο της y.

   Επομένως, το σύνολο $Y = y^{-1}(0)$ είναι μια ομαλή υπερεπιφάνεια διάστασης $m - 1$ στο V_a. Επιπλέον,

   $$C_j \cap V_a \subset Y \cap V_a$$

   αφού σε κάθε σημείο του C_j μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι τάξης $\leq j$, άρα και η y.

   Επίσης, τα κρίσιμα σημεία της $F|_{Y \cap V_a}$ είναι όλο το $Y \cap V_a$ επειδή και η F έχει κρίσιμα σημεία τα $Y \cap V_a$. Συνεπώς, επειδή $\dim(Y \cap V_a) < m$, από την επαγωγική υπόθεση το σύνολο $F(Y \cap V_a)$ έχει μέτρο μηδέν στο $\mathbb{R}^n$. Άρα και το $F(C_j \cap V_a)$ έχει μέτρο μηδέν στο $\mathbb{R}^n$.

   Μπορούμε να καλύψουμε το $C_j \setminus C_{j+1}$ με αριθμήσιμα στο πλήθος τέτοια V_a, επομένως το $F(C_j \setminus C_{j+1})$ έχει επίσης μέτρο μηδέν στο $\mathbb{R}^n$.

21.3 Το θεώρημα εμφύτευσης του Whitney

Ένας τυπικός τρόπος εφαρμογής του θεωρήματος του Sard είναι ο εξής. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε διατυπώσει το πρόβλημά μας με τέτοιο τρόπο ώστε η επίλυσή του να εξαρτάται από τον προσδιορισμό κάποιων παραμέτρων ώστε να ικανοποιούνται κάποιες επιθυμητές συνθήκες, και έστω ότι γνωρίζουμε ότι οι τιμές των παραμέτρων που δεν πληρούν αυτές τις συνθήκες αποτελούν κρίσιμες τιμές κάποιας λείας συνάρτησης. Τότε το θεώρημα του Sard μας λέει ότι αυτές οι ανεπιθύμητες τιμές των παραμέτρων έχουν μέτρο μηδέν, και επομένως μπορούμε να βρούμε πολλές τιμές ώστε να ικανοποιούνται οι επιθυμητές συνθήκες.

Ένα παράδειγμα είναι το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 25. *Έστω ότι η M είναι μια διαφορική πολλαλότητα διάστασης n, και ότι για κάποιο N υπάρχει $1-1$ immersion της M στον $\mathbb{R}^N$, $F : M \to \mathbb{R}^N$. Ας ορίσουμε για κάποιο $v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$ την προβολή $\pi_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ με πυρήνα* $\mathrm{span}(v)$ *- δηλαδή ο πίνακας ως προς τις βάσεις $(e_1, \dots, e_{N-1}, v)$ και $(e_1, \dots, e_N)$ των $\mathbb{R}^N$ και $\mathbb{R}^{N-1}$ αντίστοιχα είναι*

$$\begin{pmatrix} I_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε αν $N > 2n+1$, υπάρχει ένα πυκνό υποσύνολο $D \subset \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$ ώστε για κάθε $v \in D$, η σύνθεση $\pi_v \circ F : M \to \mathbb{R}^{N-1}$ είναι $1-1$ immersion.

Απόδειξη. Η σύνθεση $\pi_v \circ F$ δεν είναι $1-1$ immersion αν ένα από τα παρακάτω συμβαίνει:

1. Υπάρχουν $p, q \in M$ ώστε το $F(p) - F(q)$ να είναι συγγραμμικό με το v.

2. Υπάρχει $p \in M$ ώστε $\mathrm{Im}F_*|_{T_pM} \cap \ker \pi_v = \mathrm{Im}F_*|_{T_pM} \cap \mathrm{span}(v) \neq \emptyset$.

Έστω $\Delta_M = \{(x, x) \in M \times M\}$ και $M_0 = \{0_x \in T_xM, x \in M\}$. Ορίζουμε

$$\kappa : (M \times M) \setminus \Delta_M \to \mathbb{R}P^{N-1}$$
$$\kappa(p, q) = [F(p) - F(q)] \in \mathbb{R}^N/\sim \approx \mathbb{R}P^{N-1}.$$

Για να είναι $1-1$ η $\pi_v \circ F$ πρέπει $[v] \notin \mathrm{Im}\kappa$, από το (1) παραπάνω.

Ορίζουμε επίσης $\tau : TM \setminus M_0 \to \mathbb{R}P^{N-1}$ ως

$$\tau(X_p) = [F_* X_p],$$

όπου έχουμε ταυτίσει το $T_x\mathbb{R}^N \approx \mathbb{R}^N$, με $v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \mapsto (v^1, \dots, v^N)$

Για να είναι immersion η $\pi_v \circ F$ πρέπει $[v] \notin \mathrm{Im}\tau$, από το (2) παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι $\dim (M \times M) \setminus \Delta_M = \dim TM \setminus M_0 = 2n$, ενώ $\dim \mathbb{R}P^{N-1} = N-1$. Συνεπώς, αν $2n < N-1$, κάθε σημείο στις εικόνες των κ και τ είναι κρίσιμη τιμή. Επομένως, το σύνολο

$$\mathrm{Im}\tau \cap \mathrm{Im}\kappa$$

έχει μέτρο μηδέν στο $\mathbb{R}P^{N-1}$, και επομένως το σύνολο των $[v] \in \mathbb{R}P^{N-1}$ που δεν ανήκει στο $\mathrm{Im}\tau \cap \mathrm{Im}\kappa$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}P^{N-1}$. □

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα όσες φορές χρειάζεται, παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 6. *Αν η M είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και υπάρχει $1-1$ immersion $F : M \to \mathbb{R}^N$ για κάποιο $N > 2n+1$, τότε υπάρχει $1-1$ immersion $\hat{F} : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.*

Μάλιστα, αν στο παραπάνω πόρισμα υποθέσουμε ότι η F είναι επιπλέον ομαλή εμφύτευση τότε και μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ομαλή εμφύτευση $\hat{F} : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ - θα παραλείψουμε όμως την απόδειξη. Αυτό αποδεικνύεται όμως εύκολα στην περίπτωση που η M είναι συμπαγής, αφού τότε κάθε $1-1$ immersion είναι ομαλή εμφύτευση, αφού κάθε συνεχής απεικόνιση από μια συμπαγή πολλαπλότητα είναι και κλειστή απεικόνιση, αφού τα κλειστά υποσύνολα είναι και συμπαγή.

Επομένως, αν μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n εμφυτεύεται σε κάποιον $\mathbb{R}^N$ για κάποιο N, τότε το παραπάνω πόρισμα μας λέει ότι εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^{2n+1}$. Αυτό είναι το θεώρημα εμφύτευσης του Whitney.

Θεώρημα 25. *Κάθε διαφορική πολλαπλότητα M διάστασης n επιδέχεται ομαλή εμφύτευση στον $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Απόδειξη. Θα περιγράψουμε την απόδειξη μόνο για την περίπτωση που η M είναι συμπαγής.

Αρχικά, μπορεί κανείς να δείξει ότι η M μπορεί να καλυφθεί με C^∞ χάρτες (B_i', ϕ_i), $i = 1, \ldots, m$ έτσι ώστε να υπάρχουν ανοιχτά $B_i \subset B_i'$ με $\bar{B}_i \subset B_i$ τα οποία επίσης καλύπτουν την M.

Έστω $\psi_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ bump functions με $\text{supp}(\psi_i) \subset B_i'$ και $\psi_i|_{\bar{B}_i} = 1$. Ορίζουμε τότε την $F : M \to \mathbb{R}^{nm+m}$ ως

$$F(p) = (\psi_1(p)\phi_1(p), \ldots, \psi_m(p)\phi_m(p), \psi_1(p), \ldots, \psi_m(p)).$$

Θα δείξουμε ότι η F είναι $1-1$ immersion, η οποία, επειδή η M είναι συμπαγής, είναι αυτομάτως ομαλή εμφύτευση.

<u>Η F είναι $1-1$:</u> Έστω $F(p) = F(q)$. Αφου τα ανοιχτά B_i' καλύπτουν την M, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ ώστε $p \in B_{i_0}'$ και άρα $\psi_{i_0}(p) = 1$. Επομένως, $\psi_{i_0}(q) = 1$, οπότε $q \in \text{supp}\psi_{i_0} \subset B_{i_0}'$, αφού από τον ορισμό της F έχουμε ότι $\psi_{i_0}(q) = \psi_{i_0}(p) = 1 > 0$. Έχουμε επίσης ότι

$$\phi_{i_0}(p) = \psi_{i_0}(p)\phi_{i_0}(p) = \psi_{i_0}(q)\phi_{i_0}(q) = \phi_{i_0}(q),$$

και επειδή η ϕ_{i_0} είναι $1-1$ παίρνουμε ότι $p = q$.

<u>Η F είναι immersion:</u> Αν $p \in B_{i_0}$, τότε επειδή $\psi_{i_0}|_{B_{i_0}} = 1$, έχουμε ότι η

$$(\psi_{i_0}\phi_{i_0})_* = (\phi_{i_0})_* : T_pM \to T_{\phi_{i_0}(p)}\mathbb{R}^n$$

είναι $1-1$. Επομένως και η $F_* : T_pM \to T_{F(p)}\mathbb{R}^{nm+m}$ είναι $1-1$. $\square$

Θεώρημα 26. *Για κάθε διαφορική πολλαπλότητα M διάστασης n υπάρχει immersion $F : M \to \mathbb{R}^{2n}$.*

Απόδειξη. Δείξαμε ότι υπάρχει ομαλή εμφύτευση $F : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Τότε, η απεικόνιση

$$F_* : TM \to T\mathbb{R}^{2n+1}$$

είναι C^∞.

Ορίζουμε στην $T\mathbb{R}^{2n+1}$ την C^∞ συνάρτηση

$$f\left(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right) = \sum_{i=1}^{2n+1} (v^i)^2,$$

και αντίστοιχα την $\hat{f} : TM \setminus M_0 \to \mathbb{R}$ ως

$$\hat{f}(X_p) = f(F_* X_p).$$

Η $\hat{f}$ είναι submersion: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X_p \in TM \setminus M_0$, έστω η καμπύλη $\gamma(t) = (\lambda t+1)X_p \in TM \setminus M_0$, με $\gamma(0) = X_p$ και $\gamma'(0) = \lambda X_p$.

Τότε

$$\hat{f}(\gamma(t)) = f(F_*\gamma(t)) = f(F_*((\lambda t+1)X_p)) = f((\lambda t+1)F_*(X_p)) = (\lambda t+1)^2 f(F_* X_p) = (\lambda t+1)^2 \hat{f}(X_p),$$

επομένως

$$\hat{f}_*(\lambda X_p) = \hat{f}_*(\gamma'(0)) = (\hat{f} \circ \gamma)'(0) = 2\lambda \hat{f}(X_p),$$

που δείχνει το ζητούμενο.

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $UM := \hat{f}^{-1}(1) \subset TM \setminus M_0$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης $2n-1$.

Έστω η απεικόνιση

$$G : UM \to \mathbb{R}P^{2n}$$

με $G(x, w) = [F_* w]$. Αφού $\dim UM = 2n - 1 < 2n = \dim \mathbb{R}P^{2n}$, από το θεώρημα του Sard το σύνολο των κρίσιμων τιμών είναι το ImG, και επομένως έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}P^{2n}$.

Συνεπώς, υπάρχει $[v] \notin \mathrm{Im}G$, και επομένως η $\pi_v \circ F$ είναι immersion. □

Θεώρημα 27 (Ισχυρά θεωρήματα εμφύτευσης και immersion του Whitney)**.** *Κάθε διαφορική πολλαπλότητα M διάστασης n επιδέχεται ομαλή εμφύτευση στον $\mathbb{R}^{2n}$, και immersion στον $\mathbb{R}^{2n-1}$.*