

# Κεφάλαιο 10

## Ομολογία

### Περιεχόμενα

---

10.1 Οι Ομάδες Ιδιάζουσας Ομολογίας . . . . .	220
10.2 Η Μακρά Ακριβής Ακολουθία του Ζεύγους $(X, A)$ . . . . .	227
10.3 Η Ομολογία είναι Ομοτοπικό Αναλλοίωτο . . . . .	233
10.4 Η Αβελιανοποίηση της Θεμελιώδους Ομάδας . . . . .	236
10.5 Η Ακολουθία Mayer-Vietoris και Εκτομή . . . . .	239
10.6 Εφαρμογές . . . . .	249
Ασκήσεις . . . . .	260

---

Η (ιδιάζουσα) ομολογία ενός τοπολογικού χώρου είναι ένα αλγεβρικό αναλλοίωτο, για την ακρίβεια μια ακολουθία αβελιανών ομάδων, που διευκολύνει την κατανόηση της τοπολογίας των “αντικειμένων ανωτέρας διάστασης” και το οποίο έχει το πλεονέκτημα ότι υπολογίζεται σχετικά εύκολα για μεγάλες κλάσεις τοπολογικών χώρων. Σε αυτό το κεφάλαιο, κατασκευάζουμε τις ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου, αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες, μεταξύ των οποίων είναι και αυτές που είναι γνωστές ως τα αξιώματα των Eilenberg-Steenrod που ικανοποιούνται από μια συνήθη θεωρία ομολογίας, και τέλος δίνουμε διάφορες εφαρμογές.

Όπως είναι αναμενόμενο, σε μια περιορισμένου εύρους εισαγωγή στην ομολογία, δεν θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν αρκετά σημαντικά θέματα μεταξύ των οποίων είναι η αξιωματική θεμελίωση μιας θεωρίας ομολογίας, η ομολογία των πολλαπλοτήτων και η

---

<sup>0</sup><https://eclass.uoa.gr/courses/MATH536/>

προσανατολισιμότητά τους, ομολογία με συντελεστές, συνομολογία κ.α., για τα οποία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος του κεφαλαίου.

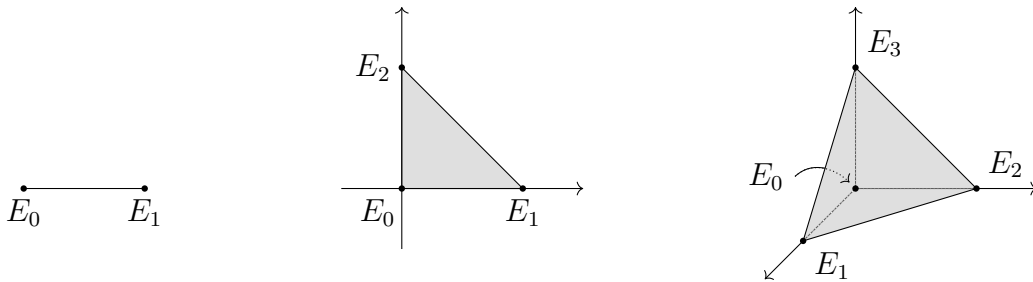
## 10.1 Οι Ομάδες Ιδιάζουσας Ομολογίας

Αρχίζουμε δίνοντας τους ορισμούς κάποιων βασικών εννοιών. Για κάθε ακέραιο  $n \geq 0$  θεωρούμε το σημείο  $E_0 = \mathbf{0}$  και για  $1 \leq i \leq n$  το διάνυσμα  $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  το οποίο έχει μονάδα στην  $i$ -θέση και μηδενικά οπουδήποτε αλλού. Το **πρότυπο  $n$ -πλέγμα** (standard  $n$ -simplex) είναι το κυρτό υποσύνολο  $\Delta_n$  του  $\mathbb{R}^n$  που παράγεται από τα  $E_0, \dots, E_n$ . Δηλαδή,

$$\Delta_n = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i E_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \text{ για κάθε } i \text{ και } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Αρκετές φορές διευκολύνει και η χρήση του συμβολισμού  $[E_0, E_1, \dots, E_n]$  για το  $\Delta_n$ .

Έτσι το  $\Delta_0$  είναι ένα σημείο, το  $\Delta_1$  το ευθύγραμμο τμήμα  $[0, 1]$ , το  $\Delta_2$  ένα τρίγωνο (με το εσωτερικό του) και το  $\Delta_3$  ένα στερεό τετράεδρο. Μέσω της κανονικής εμφύτευσης του  $\mathbb{R}^n$  στον  $\mathbb{R}^k$ , όταν  $k \geq n$ , θεωρούμε το  $\Delta_n$  και ως υποσύνολο του  $\mathbb{R}^k$  για κάθε  $k \geq n$ .



Σχήμα 10.1: Τα πρότυπα πλέγματα  $\Delta_1, \Delta_2$  και  $\Delta_3$ .

Έστω  $x$  ένα σημείο του  $\Delta_n$ . Τότε  $x = \sum_{i=0}^n t_i E_i$ , όπου  $t_i \geq 0$  για κάθε  $i$  και  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . Εφόσον τα  $E_1, \dots, E_n$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και το άθροισμα των  $t_i$  είναι ίσο με 1, έπεται ότι οι συντελεστές  $t_i$  είναι πλήρως καθορισμένοι από το  $x$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $\Delta_n$  μπορεί να ταυτισθεί με το υποσύνολο  $\{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \text{ για κάθε } i\}$  του  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Σημειώνουμε, επίσης, ότι το σύνορο του  $\Delta_1$  (με την τοπολογική έννοια) αποτελείται από δύο αντίτυπα του  $\Delta_0$ , το σύνορο του  $\Delta_2$  αποτελείται από τρία αντίτυπα του  $\Delta_1$  και

γενικότερα το σύνορο του  $\Delta_n$  αποτελείται από  $n+1$  το πλήθος αντίτυπα του  $\Delta_{n-1}$ . Πιο συγκεκριμένα, αν για  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  συμβολίσουμε με  $[E_0, \dots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \dots, E_n]$  το κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  που παράγεται από τα  $E_j, j \in \{0, \dots, n\}, j \neq i$ , τότε παρατηρούμε ότι το  $[E_0, \dots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \dots, E_n]$  είναι το υποσύνολο του  $\Delta_n$  που αποτελείται από εκείνα τα  $x = \sum_{j=0}^n t_j E_j \in \Delta_n$  για τα οποία  $t_i = 0$  και ότι η απεικόνιση  $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$  δίνει έναν ομοιομορφισμό από το  $\Delta_{n-1}$  στο  $[E_0, \dots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \dots, E_n]$ . Τα  $n+1$  αντίτυπα του  $\Delta_{n-1}$ , των οποίων η ένωση μας δίνει το σύνορο του  $\Delta_n$ , δεν είναι άλλα από τα  $[E_0, \dots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \dots, E_n]$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Παρατήρηση 10.1.1.** Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι κάθε πρότυπο  $n$ -πλέγμα  $\Delta_n, n \geq 1$ , είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο  $D^n$  του  $\mathbb{R}^n$  και συνεπώς το σύνορό του είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα  $S^{n-1}$ .

**Ορισμός 10.1.2.** Ένα **ιδιάζον  $n$ -πλέγμα** (singular  $n$ -simplex) σε έναν τοπολογικό χώρο  $X$  είναι μια συνεχής απεικόνιση  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ . Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα επί του συνόλου όλων των ιδιάζόντων  $n$ -πλεγμάτων του  $X$  καλείται ομάδα ιδιάζόντων  $n$ -αλυσίδων του  $X$  και συμβολίζεται με  $S_n(X)$ . Ένα στοιχείο της ομάδας  $S_n(X)$  ονομάζεται **ιδιάζουσα  $n$ -αλυσίδα** (singular  $n$ -chain) και είναι ένα τυπικό άθροισμα της μορφής

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \dots + k_m\sigma_m,$$

όπου οι συντελεστές  $k_1, k_2, \dots, k_m$  είναι ακέραιοι αριθμοί και τα  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  ιδιάζοντα  $n$ -πλέγματα του  $X$ .

Έτσι ένα ιδιάζον 0-πλέγμα του  $X$  είναι απλά ένα σημείο του  $X$ , ενώ ένα ιδιάζον 1-πλέγμα του  $X$  είναι ένα μονοπάτι του  $X$ . Για κάθε  $i = 0, \dots, n$ , συμβολίζουμε με  $\Phi_i^n$  τον ομοιομορφισμό που απεικονίζει το πρότυπο πλέγμα  $\Delta_{n-1}$  επί του “προσώπου”  $[E_0, \dots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \dots, E_n]$  του συνόρου του  $\Delta_n$  που βρίσκεται απέναντι από την “κορυφή”  $E_i$ , δηλαδή την εμφύτευση  $\Phi_i^n : \Delta_{n-1} \hookrightarrow \Delta_n$  που ορίζεται μέσω της απεικόνισης:  $(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$ . Με άλλα λόγια, κάθε κορυφή  $E_k$  απεικονίζεται στον εαυτό της, όταν  $k \leq i-1$  και στην  $E_{k+1}$  όταν  $k \geq i$  (και επεκτείνουμε γραμμικά). Διακρίνοντας περιπτώσεις για τους δείκτες  $k$  των  $t_k$ , κάθε φορά προκύπτει εύκολα το ακόλουθο:

**Λήμμα 10.1.3.** Αν  $0 \leq j < i \leq n+1$ , τότε  $\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n = \Phi_j^{n+1} \circ \Phi_{i-1}^n$ .

Στη συνέχεια δίνουμε τον αλγεβρικό ορισμό του συνόρου ενός πλέγματος.

**Ορισμός 10.1.4.** Έστω  $n \geq 1$  και  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  ένα ιδιάζον  $n$ -πλέγμα σε έναν τοπολογικό χώρο  $X$ . Το **σύνоро** του  $\sigma$ , συμβολίζουμε με  $\partial_n \sigma$ , είναι η ιδιάζουσα  $(n-1)$ -αλυσίδα που ορίζεται ως εξής:

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \Phi_i^n).$$

Συμβολίζουμε, επίσης, με  $\partial_n^X \sigma$  το σύνоро του  $\sigma$ , όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον χώρο  $X$ .

Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε ατύπως το περιεχόμενο του προηγούμενου ορισμού λέγοντας ότι το σύνоро του  $\sigma$  είναι η ιδιάζουσα  $(n-1)$ -αλυσίδα που δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ιδιάζόντων  $i$ -“προσώπων” του,  $\sigma \circ \Phi_i^n$ , όπου το πρόσημο  $(-1)^i$  υποδηλώνει ότι το  $i$ -“πρόσωπο”  $\sigma \circ \Phi_i^n$  φέρει τον επαγόμενο από το  $\sigma$  “προσανατολισμό”.

Εφόσον η ομάδα  $S_n(X)$  είναι ελεύθερη αβελιανή με βάση τα ιδιάζοντα  $n$ -πλέγματα του  $X$ , επεκτείνοντας την απεικόνιση του συνόρου λαμβάνουμε έναν ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X), \quad n \geq 1,$$

τον λεγόμενο **συνοριακό ομομορφισμό**, τον οποίο όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα συμβολίζουμε απλά με  $\partial$  παραλείποντας τον δείκτη  $n$ . Το σύνоро μιας ιδιάζουσας  $0$ -αλυσίδας ορίζεται να είναι μηδέν. Συνήθως, τα στοιχεία της εικόνας  $\text{Im} \partial_{n+1}$  αναφέρονται ως **σύνορα**, ενώ τα στοιχεία του πυρήνα  $\text{Ker} \partial_n$  ως **κύκλοι**.

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται η πλέον ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συνοριακών ομομορφισμών.

**Πρόταση 10.1.5.** Για κάθε  $n \geq 0$  και κάθε ιδιάζουσα αλυσίδα  $\gamma \in S_{n+1}(X)$ , ισχύει ότι  $\partial_n \circ \partial_{n+1}(\gamma) = 0$ .

*Απόδειξη.* Εφόσον η ομάδα  $S_{n+1}(X)$  παράγεται από τα ιδιάζοντα  $(n+1)$ -πλέγματα, αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = 0$ , για το τυχαίο ιδιάζον πλέγμα  $\sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow X$  του  $X$ .

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \circ \Phi_i^{n+1} \right) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) \\ &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 10.1.3 στο δεύτερο άθροισμα προκύπτει

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_j^{n+1} \circ \Phi_{i-1}^n).$$

Θέτουμε  $k = j$  και  $\lambda = i - 1$  στο δεύτερο άθροισμα. Τότε  $j < i \Leftrightarrow k \leq \lambda, i + j = k + \lambda + 1$  και με το νέο συμβολισμό έχουμε

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) + \sum_{k \leq \lambda} (-1)^{k+\lambda+1} \sigma \circ (\Phi_k^{n+1} \circ \Phi_\lambda^n) = 0,$$

γιατί οι όροι των παραπάνω δύο αθροισμάτων εμφανίζονται ανά δύο με αντίθετο πρόσημο και διαγράφονται.  $\square$

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η εικόνα  $\text{Im} \partial_{n+1}$  είναι υπομάδα του πυρήνα  $\text{Ker} \partial_n$  και έτσι έχει νόημα ο ορισμός που ακολουθεί.

**Ορισμός 10.1.6.** Η  $n$ -ιοστή ομάδα ιδιάζουσας ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι η ομάδα πηλίκο

$$H_n(X) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}.$$

Για έναν  $n$ -κύκλο  $\gamma \in \text{Ker} \partial_n$ , η αντίστοιχη κλάση  $\gamma + \text{Im} \partial_{n+1} \in H_n(X)$  συμβολίζεται με  $[\gamma]$  και λέγεται **κλάση ομολογίας** του κύκλου  $\gamma$ . Δύο κύκλοι που ανήκουν στην ίδια κλάση ομολογίας (δηλαδή, η διαφορά τους είναι σύνορο) λέγονται **ομόλογοι**.

**Παρατήρηση 10.1.7.** Η ομάδα  $H_n(X)$  είναι 0 αν και μόνο αν κάθε  $n$ -κύκλος είναι το σύνορο κάποιας  $n + 1$ -ιδιάζουσας αλυσίδας, το οποίο διασθητικά σημαίνει ότι δεν υπάρχουν  $n$ -διάστατες “τρύπες” στον χώρο  $X$ .

### Επαγόμενοι ομομορφισμοί

Αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων, τότε ορίζεται ο ομομορφισμός  $f_{\#}^n : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  ο οποίος, πάνω στους γεννήτορες  $\sigma \in S_n(X)$ , δίνεται από τη σύνθεση

$$f_{\#}^n(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_{\#}^{n-1}(\partial_n^X(\sigma)) = f_{\#}^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \Phi_i^n \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \Phi_i^n = \partial_n^X(f_{\#}(\sigma)).$$

Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}^n} & S_n(Y) \\ \partial_n^X \downarrow & & \downarrow \partial_n^Y \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}^{n-1}} & S_{n-1}(Y) \end{array} \quad (10.1)$$

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται άμεσα ότι η απεικόνιση  $f_{\#}^n$  απεικονίζει σύνορα σε σύνορα και κύκλους σε κύκλους, για κάθε  $n$ . Συνεπώς η  $f$  επάγει για κάθε  $n$ , μέσω της  $f_{\#}^n$ , έναν ομομορφισμό

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \text{ με τύπο } H_n(f)((\gamma + \text{Im}\partial_{n+1}^X)) = f_{\#}^n(\gamma) + \text{Im}\partial_{n+1}^Y,$$

ή πιο απλά  $H_n(f)([\gamma]) = [f_{\#}^n(\gamma)]$ ,  $\gamma \in \text{Ker}\partial_n^X$ . Ο ομομορφισμός  $H_n(f)$  αναφέρεται ως ο **επαγόμενος από την  $f$  ομομορφισμός** και συμβολίζεται επίσης πιο απλά με  $f_*$ , όταν είναι φανερό ποιο είναι το πεδίο ορισμού.

**Πρόταση 10.1.8.** Έστω  $X, Y$  και  $Z$  τοπολογικοί χώροι.

1. Η ταυτοτική απεικόνιση  $Id_X : X \rightarrow X$  επάγει τον ταυτοτικό ομομορφισμό στην  $H_n(X)$ , για κάθε  $n \geq 0$ , δηλ.  $H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$ .
2. Αν οι  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Y \rightarrow Z$  είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε  $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Z)$ , για κάθε  $n \geq 0$ .

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

**Παρατήρηση 10.1.9.** Στην κατηγορική γλώσσα, η προηγούμενη πρόταση λέει ακριβώς ότι έχουμε μια ακολουθία  $(H_n(-))_{n \geq 0}$  συναρτητών από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων και συνεχών απεικονίσεων στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών.

Στο επόμενο πόρισμα καταγράφεται μια ειδική, αλλά πολύ σημαντική, περίπτωση της προηγούμενης πρότασης.

**Πόρισμα 10.1.10.** Αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι ομοιομορφισμός, τότε η  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  είναι ισομορφισμός για κάθε  $n \geq 0$ . Δηλαδή, ομοιομορφικοί χώροι έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας.

## Οι πρώτοι υπολογισμοί

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ο υπολογισμός των ομάδων ομολογίας ενός χώρου ανάγεται στον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας των κατά τόξα συνεκτικών συνιστώσων του χώρου.

**Λήμμα 10.1.11.** Έστω  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  οι κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου  $X$ . Τότε για κάθε  $n \geq 0$ ,

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda).$$

*Απόδειξη.* Ένα ιδιάζον πλέγμα έχει κατά τόξα συνεκτική εικόνα και ως εκ τούτου μπορεί να θεωρηθεί ως ιδιάζον πλέγμα μιας κατά τόξα συνεκτικής συνιστώσας  $X_\lambda$ . Συνεπώς, ομαδοποιώντας τα ιδιάζοντα πλέγματα που ανήκουν στην ίδια συνιστώσα προκύπτει ότι οι ενθέσεις των  $X_\lambda$  στον  $X$  επάγουν ισομορφισμό

$$S_n(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda).$$

Λόγω της γραμμικότητας των συνοριακών ομομορφισμών έχουμε ότι αν  $\gamma \in S_n(X)$  και  $\gamma = \sum_\lambda \gamma_\lambda$ , όπου  $\gamma_\lambda \in S_n(X_\lambda)$ , η ανάλυση της αλυσίδας  $\gamma$  (ως πεπερασμένο άθροισμα σύμφωνα με τον προηγούμενο ισομορφισμό), τότε  $\partial(\gamma) = 0$  αν και μόνο αν  $\partial(\gamma_\lambda) = 0$  για κάθε  $\lambda \in \Lambda$ . Έπεται ότι η απεικόνιση

$$\varphi : H_n(X) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda)$$

με  $\varphi([\gamma]) = \sum_\lambda [\gamma_\lambda]$  είναι καλά ορισμένη και ισομορφισμός με αντίστροφη απεικόνιση  $\sum_\lambda [\gamma_\lambda] \mapsto [\sum_\lambda \gamma_\lambda]$ .  $\square$

**Πρόταση 10.1.12.** Αν ο  $X$  είναι ένας μη-κενός και κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Άρα, αν ο  $X$  δεν είναι απαραίτητως κατά τόξα συνεκτικός, η ομάδα  $H_0(X)$  είναι ένα ευθύ άθροισμα αντιτύπων της άπειρης κυκλικής  $\mathbb{Z}$ , ένα αντίτυπο για κάθε κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του  $X$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση  $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  με  $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$ , όπου οι ακέραιοι  $n_i$  είναι μη-μηδενικοί για πεπερασμένα το πλήθος  $i$  και  $\sigma_i$  ιδιάζον 0-πλέγμα για κάθε  $i$ . Η απεικόνιση  $\varepsilon$  είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, αφού προκύπτει ως γραμμική επέκταση της απεικόνισης  $\sigma_i \mapsto 1$ , η οποία απεικονίζει κάθε ιδιάζον 0-πλέγμα

στο 1. Ο ομομορφισμός  $\varepsilon$  είναι επί. Πράγματι, αφού ο χώρος είναι μη-κενός, επιλέγουμε  $x \in X$ , θεωρούμε το ιδιάζον 0-πλέγμα  $\sigma : \Delta_0 \rightarrow x \in X$  και παρατηρούμε ότι  $\varepsilon(n\sigma) = n$ .

Θα δείξουμε ότι  $\text{Im}\partial_1 = \text{Ker}\varepsilon$ . Το συμπέρασμα τότε προκύπτει από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών, αφού  $\varepsilon$  επί και  $H_0(X) = \text{Ker}\partial_0/\text{Im}\partial_1 = S_0(X)/\text{Im}\partial_1$ .

Για κάθε (ιδιάζον) 1-πλέγμα  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$  έχουμε  $\varepsilon(\partial\sigma) = \varepsilon(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$  και άρα  $\text{Im}\partial_1 \subseteq \text{Ker}\varepsilon$ .

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω  $\sum_i n_i \sigma_i \in \text{Ker}\varepsilon$ . Τότε οι εικόνες των  $\sigma_i$  είναι τα σημεία  $\sigma_i(E_0)$  και  $\sum_i n_i = 0$  (υπενθυμίζουμε ότι στα αθροίσματα που αναφερόμαστε, από τον ορισμό των αντιστοιχών ομάδων που ανήκουν, οι συντελεστές  $n_i$  είναι σχεδόν όλοι μηδέν). Για κάθε  $i$  επιλέγουμε μονοπάτι  $\tau_i : [0, 1] = \Delta_1 \rightarrow X$  από ένα προεπιλεγμένο σημείο αναφοράς  $x_0 \in X$  στο  $\sigma_i(E_0)$ . Αν με  $\sigma_0$  συμβολίσουμε το 0-πλέγμα με εικόνα το  $x_0$ , τότε  $\partial(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_0$  και

$$\partial\left(\sum_i n_i \tau_i\right) = \sum_i n_i \partial(\tau_i) = \sum_i n_i (\sigma_i - \sigma_0) = \sum_i n_i \sigma_i - \left(\sum_i n_i\right) \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i.$$

Δηλαδή,  $\text{Ker}\varepsilon \subseteq \text{Im}\partial_1$ . □

**Πρόταση 10.1.13** (Αξίωμα της διαστάσεως). *Αν ο χώρος  $X$  είναι μονοσύνολο, τότε*

$$H_n(X) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n > 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Εφόσον ο  $X$  είναι μονοσύνολο, δηλαδή  $X = \{x_0\}$ , για κάθε  $n \geq 0$  υπάρχει μόνο ένα  $n$ -πλέγμα το  $\sigma_n : \Delta_n \rightarrow X$  με  $\sigma_n(\Delta_n) = x_0$ . Άρα  $S_n(X) = \mathbb{Z} = \langle \sigma_n \rangle$  για κάθε  $n \geq 0$ . Για το σύνορο του  $\sigma_n$  έχουμε:

$$\partial_n \sigma_n = \sum_0^n (-1)^i \sigma_n \circ \Phi_i^n = \sum_0^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \sigma_{n-1}, & \text{αν } n \text{ άρτιος } \neq 0. \end{cases}$$

Αν ο  $n$  είναι περιττός, τότε  $\partial_n = 0$ , ενώ αν ο  $n$  είναι άρτιος θετικός ο  $\partial_n$  είναι ισομορφισμός (απεικονίζει τον γεννήτορα στον γεννήτορα). Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, εύκολα διαπιστώνουμε ότι  $H_n(X) = \text{Ker}\partial_n/\text{Im}\partial_{n+1} = 0$ , για κάθε  $n > 0$ . Για  $n = 0$  έχουμε το συμπέρασμα από την προηγούμενη πρόταση. □



## 10.2 Η Μακρά Ακριβής Ακολουθία του Ζεύγους $(X, A)$

Αρχίζουμε δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς. Μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

λέγεται (μακρά) **ακριβής** αν  $\text{Im } \alpha_{n+1} = \text{Ker } \alpha_n$  για κάθε  $n$ . Μια **βραχεία ακριβής ακολουθία** (β.α.α.) είναι μια ακριβής ακολουθία πέντε όρων της μορφής

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \Gamma \longrightarrow 0.$$

Η ακρίβεια συνεπάγεται ότι ο  $\alpha$  είναι μονομορφισμός, ο  $\beta$  επιμορφισμός και  $\Gamma \cong B/\text{Im } \alpha$ ,  $\text{Im } \alpha \cong A$ . Ένα **αλυσωτό σύμπλεγμα** (chain complex) είναι μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών

$$A_* : \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} A_n \xrightarrow{\partial_n^A} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^A} \cdots,$$

έτσι ώστε  $\partial_n^A \circ \partial_{n+1}^A = 0$  για κάθε  $n$ , ισοδύναμα  $\text{Im } \partial_{n+1}^A \subseteq \text{Ker } \partial_n^A$ . Στη συνέχεια, επίσης και όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα συμβολίζουμε τους ομομορφισμούς  $\partial_n^A$  απλά με  $\partial_n$ . Η  $n$ -ιστή **ομάδα ομολογίας** του συμπλέγματος  $A_*$  ορίζεται ως

$$H_n(A_*) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Αν  $a \in \text{Ker } \partial_n$ , συμβολίζουμε με  $[a] = a + \text{Im } \partial_{n+1}$  την κλάση ομολογίας του  $a$ . Παρατηρούμε ότι το σύμπλεγμα  $A_*$  είναι ακριβές αν και μόνο αν  $H_n(A_*) = 0$  για κάθε  $n$ . Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι οι ομάδες ομολογίας σε κάθε θέση αποτελούν ένα μέτρο για το πόσο “απέχει” ένα σύμπλεγμα από το να είναι ακριβές.

**Παράδειγμα 10.2.1.** Οι ομάδες ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος

$$S_*(X) : \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

**Παράδειγμα 10.2.2.** (Ανηγμένη ομολογία) Οι **ομάδες ανηγμένης ομολογίας**  $\tilde{H}_n(X)$  ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος

$$\cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

όπου  $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$ . Έχουμε ήδη δει, στην απόδειξη της Πρότασης 10.1.12, ότι  $\text{Im } \partial_1 \subseteq \text{Ker } \varepsilon$  και έτσι η παραπάνω ακολουθία αποτελεί πράγματι σύμπλεγμα. Είδαμε επίσης ότι ο ομομορφισμός  $\varepsilon$  είναι επί, αν  $X \neq \emptyset$ . Συνεπώς, ο  $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  επάγει επιμορφισμό

$$\tilde{\varepsilon} : H_0(X) = S_0(X)/\text{Im } \partial_1 \rightarrow \mathbb{Z} \text{ με τύπο } \tilde{\varepsilon}([\gamma]) = \varepsilon(\gamma)$$

και πυρήνα  $\text{Ker } \tilde{\varepsilon} = \text{Ker } \varepsilon/\text{Im } \partial_1 = \tilde{H}_0(X)$ . Έχουμε δείξει ότι  $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ , αν ο  $X$  είναι κατά τόξα συνεκτικός, συνεπώς  $\tilde{H}_0(X) = 0$ , αν  $X$  κατά τόξα συνεκτικός. Γενικά, από το γεγονός ότι ο  $\tilde{\varepsilon}$  είναι επιμορφισμός από μια αβελιανή ομάδα σε μια ελεύθερη αβελιανή (άπειρη κυκλική για την ακρίβεια), προκύπτει (βλ. Άσκηση 2) ότι  $H_0(X) \cong \text{Ker } \tilde{\varepsilon} \oplus \mathbb{Z}$ . Άρα  $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$  και  $H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$ , αν  $n > 0$ .

Μια αλυσωτή απεικόνιση ή μορφισμός συμπλεγμάτων  $F : A_* \rightarrow B_*$  μεταξύ δύο συμπλεγμάτων  $A_*$  και  $B_*$  είναι μια οικογένεια ομομορφισμών  $(f_n)_n$  με  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  για κάθε  $n$ , έτσι ώστε να είναι μεταθετικό καθένα από τα τετράγωνα στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} & A_n & \xrightarrow{\partial_n^A} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^A} & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & \xrightarrow{\partial_n^B} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^B} & \cdots \end{array}$$

Δηλαδή  $\partial_n^B \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^A$ , για κάθε  $n$ .

**Παράδειγμα 10.2.3.** Οι ομομορφισμοί  $f_n : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  που έχουμε κατασκευάσει από μια συνεχή απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  μεταξύ τοπολογικών χώρων ορίζουν μια αλυσωτή απεικόνιση μεταξύ των συμπλεγμάτων  $S_*(X)$  και  $S_*(Y)$  (βλ. διάγραμμα 10.1).

Από τη μεταθετικότητα των παραπάνω τετραγώνων προκύπτει ότι  $f_n(\text{Ker } \partial_n^A) \subseteq \text{Ker } \partial_n^B$  και  $f_n(\text{Im } \partial_{n+1}^A) \subseteq \text{Im } \partial_{n+1}^B$ . Ως εκ τούτου κάθε  $f_n$  επάγει έναν ομομορφισμό  $H_n(f)$  στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας

$$H_n(f) : H_n(A_*) \rightarrow H_n(B_*), \quad [a] \mapsto [f_n(a)],$$

όπου  $a \in \text{Ker } \partial_n^A$ . Θα συμβολίζουμε, επίσης, με  $f_*$  τον ομομορφισμό  $H_n(f)$  χωρίς να υποδηλώνουμε την εξάρτηση από τον δείκτη  $n$ , όταν είναι φανερό ποιος είναι ο δείκτης.

Η ακόλουθη πρόταση έπεται άμεσα από τους σχετικούς ορισμούς.

**Πρόταση 10.2.4.** Έστω  $F = (f_n) : A_* \rightarrow B_*$  και  $G = (g_n) : B_* \rightarrow \Gamma_*$  δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων και  $Id_{A_*} : A_* \rightarrow A_*$  ο ταυτοτικός μορφισμός. Τότε:

1.  $H_n(Id_{A_*}) = Id_{H_n(A_*)}$ .
2.  $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ .

### Μακρά Ακριβής Ακολουθία

Μια **βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων** είναι μια ακολουθία συμπλεγμάτων και μορφισμών συμπλεγμάτων  $\alpha = (\alpha_n)$  και  $\beta = (\beta_n)$  της μορφής

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\alpha} B_* \xrightarrow{\beta} \Gamma_* \longrightarrow 0,$$

έτσι ώστε για κάθε  $n$  η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{\beta_n} \Gamma_n \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Δηλαδή έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \partial_{n+2}^A & & \downarrow \partial_{n+2}^B & & \downarrow \partial_{n+2}^\Gamma \\
 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & \Gamma_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{n+1}^A & & \downarrow \partial_{n+1}^B & & \downarrow \partial_{n+1}^\Gamma \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & B_n & \xrightarrow{\beta_n} & \Gamma_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_n^A & & \downarrow \partial_n^B & & \downarrow \partial_n^\Gamma \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & \Gamma_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{n-1}^A & & \downarrow \partial_{n-1}^B & & \downarrow \partial_{n-1}^\Gamma \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array} \tag{10.2}$$

**Πρόταση 10.2.5** (Μακρά ακριβής ακολουθία στην ομολογία). Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\alpha} B_* \xrightarrow{\beta} \Gamma_* \longrightarrow 0$$

επάγει μια μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία

$$\cdots \longrightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(B_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(\Gamma_*) \xrightarrow{\partial_*^n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\alpha)} H_{n-1}(B_*) \longrightarrow \cdots,$$

όπου  $\partial_*^n$  κατάλληλος ομομορφισμός για κάθε  $n$ , ο οποίος είναι γνωστός ως ο συνδετικός (connecting) ομομορφισμός.

*Απόδειξη.* Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, στη συνέχεια θα συμβολίζουμε απλά με  $\partial_*$ ,  $\alpha_*$  και  $\beta_*$  τους ομομορφισμούς  $\partial_*^n$ ,  $H_n(\alpha)$  και  $H_n(\beta)$ , αντίστοιχα, παραλείποντας τους δείκτες και ομοίως για καθέναν από τους ομομορφισμούς  $\partial_n^A$ ,  $\partial_n^B$ ,  $\partial_n^\Gamma$  θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\partial_n$ . Επίσης, θα κάνουμε συνεχή χρήση της μεταθετικότητας των τετραγώνων του διαγράμματος, 10.2 χωρίς να αναφερόμαστε σε αυτό.

- Ορισμός της  $\partial_* : H_n(\Gamma_*) \rightarrow H_{n-1}(A_*)$ :

Έστω  $[\gamma] = \gamma + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(\Gamma_*)$ , όπου  $\gamma \in \Gamma_n$  και  $\partial_n(\gamma) = 0$ . Εφόσον η  $\beta_n$  είναι επί, έχουμε ότι  $\gamma = \beta_n(\beta)$  για κάποιο  $\beta \in B_n$ . Τότε  $0 = \partial_n(\gamma) = \partial_n \circ \beta_n(\beta) = \beta_{n-1} \circ \partial_n(\beta)$  και έτσι  $\partial_n(\beta) \in \text{Ker } \beta_{n-1} = \text{Im } \alpha_{n-1}$ . Δηλαδή,  $\partial_n(\beta) = \alpha_{n-1}(\alpha)$  για κάποιο  $\alpha \in A_{n-1}$ . Παρατηρούμε ότι  $\alpha_{n-2} \circ \partial_{n-1}(\alpha) = \partial_{n-1} \circ \alpha_{n-1}(\alpha) = \partial_{n-1} \circ \partial_n(\beta) = 0$  και αφού η  $\alpha_{n-2}$  είναι  $1 - 1$ , έπεται ότι  $\partial_{n-1}(\alpha) = 0$ . Άρα  $\alpha \in \text{Ker } \partial_{n-1}$  και  $[\alpha] \in H_{n-1}(A_*)$ . Ορίζουμε  $\partial_*[\gamma] = [\alpha]$ .

- Η απεικόνιση  $\partial_*$  είναι καλά ορισμένη:

Αποδεικνύουμε ότι ο ορισμός της  $\partial_*$ , δηλαδή η κλάση  $[\alpha]$ , δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου της κλάσεως  $[\gamma]$ . Έστω  $\gamma, \gamma' \in \Gamma_n$  με  $[\gamma] = [\gamma']$ , ισοδύναμα  $\gamma - \gamma' \in \text{Im } \partial_{n+1}$ . Με τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου έχουμε  $\gamma = \beta_n(\beta)$ ,  $\partial_n(\beta) = \alpha_{n-1}(\alpha)$  και  $\gamma' = \beta_n(\beta')$ ,  $\partial_n(\beta') = \alpha_{n-1}(\alpha')$ . Έτσι  $\gamma - \gamma' = \partial_{n+1}(\gamma'')$  για κάποιο  $\gamma'' \in \Gamma_{n+1}$  και, αφού η  $\beta_{n+1}$  είναι επί,  $\gamma'' = \beta_{n+1}(\beta'')$  για κάποιο  $\beta'' \in B_{n+1}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\beta_n(\beta - \beta') = \gamma - \gamma' = \partial_{n+1}(\gamma'') = \partial_{n+1}\beta_{n+1}(\beta'') = \beta_n\partial_{n+1}(\beta''),$$

από όπου έπεται ότι  $\beta - \beta' - \partial_{n+1}(\beta'') \in \text{Ker } \beta_n = \text{Im } \alpha_n$ , δηλαδή,  $\beta - \beta' - \partial_{n+1}(\beta'') = \alpha_n(\alpha'')$ , για κάποιο  $\alpha'' \in A_n$ . Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό  $\partial_n$  στην προηγούμενη ισότητα και χρησιμοποιώντας τις αρχικές σχέσεις, προκύπτει ότι  $\alpha_{n-1}(\alpha - \alpha') = \partial_n\beta - \partial_n\beta' = \partial_n\alpha_n(\alpha'') = \alpha_{n-1}\partial_n(\alpha'')$ . Αφού η  $\alpha_{n-1}$  είναι  $1 - 1$ , έχουμε ότι  $\alpha - \alpha' = \partial_n(\alpha'') \in \text{Im } \partial_n$ , ισοδύναμα,  $[\alpha] = [\alpha']$ . Σημειώνουμε

ότι από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει πως ο ορισμός της  $\partial_*$  δεν εξαρτάται ούτε από την επιλογή του  $\beta$ .

- Η απεικόνιση  $\partial_*$  είναι ομομορφισμός:

Έστω  $\gamma, \gamma_1 \in \Gamma_n$  και  $\partial_*[\gamma] = [\alpha], \partial_*[\gamma_1] = [\alpha_1]$ . Τότε, υιοθετώντας τον συμβολισμό του ορισμού, έχουμε  $\gamma = \beta_n(\beta), \partial_n(\beta) = \alpha_{n-1}(\alpha)$  και  $\gamma_1 = \beta_n(\beta_1), \partial_n(\beta_1) = \alpha_{n-1}(\alpha_1)$ . Συνεπώς  $\gamma + \gamma_1 = \beta_n(\beta + \beta_1)$  και  $\partial_n(\beta + \beta_1) = \alpha_{n-1}(\alpha + \alpha_1)$ . Άρα  $\partial_*[\gamma + \gamma_1] = [\alpha + \alpha_1] = [\alpha] + [\alpha_1] = \partial_*[\gamma] + \partial_*[\gamma_1]$ .

- Ακρίβεια στη θέση  $H_n(A_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(B_*) \xrightarrow{\beta_*} H_n(\Gamma_*)$  :

Εφόσον  $\beta_n \circ \alpha_n = 0$ , έπεται ότι  $\beta_* \circ \alpha_* = 0$  και προκύπτει άμεσα η σχέση  $\text{Im } \alpha_* \subseteq \text{Ker } \beta_*$ . Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι  $\text{Ker } \beta_* \subseteq \text{Im } \alpha_*$ . Έστω  $[\beta] \in H_n(B_*)$  με  $[\beta] \in \text{Ker } \beta_*$ . Τότε  $0 = \beta_*[\beta] = [\beta_n(\beta)] \in H_n(\Gamma_*)$  που σημαίνει ότι  $\beta_n(\beta) \in \text{Im } \partial_{n+1}$  και έτσι  $\beta_n(\beta) = \partial_{n+1}(\gamma)$  για κάποιο  $\gamma \in \Gamma_{n+1}$ . Εφόσον η  $\beta_{n+1}$  είναι επί, υπάρχει  $\beta' \in B_{n+1}$  με  $\gamma = \beta_{n+1}(\beta')$  και  $\beta_n(\beta - \partial_{n+1}\beta') = \beta_n(\beta) - \beta_n\partial_{n+1}(\beta') = \beta_n(\beta) - \partial_{n+1}\beta_{n+1}(\beta') = \beta_n(\beta) - \partial_{n+1}(\gamma) = 0$ . Δηλαδή  $\beta - \partial_{n+1}\beta' \in \text{Ker } \beta_n = \text{Im } \alpha_n$ . Έπεται ότι  $\beta - \partial_{n+1}\beta' = \alpha_n(\alpha)$ , όπου  $\alpha \in A_n$  και  $\partial_n(\alpha) = 0$ . Πράγματι, εφόσον  $[\beta] \in H_n(B_*)$ , έχουμε ότι  $\partial_n\beta = 0$  και άρα  $\alpha_{n-1}\partial_n(\alpha) = \partial_n\alpha_n(\alpha) = \partial_n(\beta - \partial_{n+1}\beta') = \partial_n\beta - \partial_n\partial_{n+1}\beta' = 0$ . Η υπόθεση ότι η  $\alpha_{n-1}$  είναι 1 - 1 δίνει ότι  $\partial_n(\alpha) = 0$ . Τελικά,  $[\alpha] \in H_n(A_*)$  και  $\beta - \alpha_n(\alpha) = \partial_{n+1}(\beta') \in \text{Im } \partial_{n+1}$ . Συνεπώς,  $[\beta] = [\alpha_n(\alpha)] = \alpha_*([\alpha]) \in \text{Im } \alpha_*$ .

- Ακρίβεια στη θέση  $H_n(B_*) \xrightarrow{\beta_*} H_n(\Gamma_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\alpha_*)$  :

Έστω  $[\gamma] \in H_n(\Gamma_*)$  και  $\partial_*[\gamma] = [\alpha]$ . Από τον ορισμό της  $\partial_*$  το στοιχείο  $\alpha \in A_{n-1}$  καθορίζεται από τις σχέσεις  $\gamma = \beta_n(\beta)$  και  $\partial_n\beta = \alpha_{n-1}(\alpha)$ . Αποδεικνύουμε πρώτα ότι  $\text{Ker } \partial_* \subseteq \text{Im } \beta_*$ . Αν το στοιχείο  $[\gamma]$  ανήκει στον πυρήνα  $\text{Ker } \partial_*$  της  $\partial_*$ , τότε  $[\alpha] = 0$ , άρα  $\alpha \in \text{Im } \partial_n$  και υπάρχει  $\alpha' \in A_n$  με  $\alpha = \partial_n\alpha'$ . Παρατηρούμε ότι  $\partial_n(\beta - \alpha_n(\alpha')) = \partial_n\beta - \partial_n\alpha_n\alpha' = \partial_n\beta - \alpha_{n-1}\partial_n\alpha' = \partial_n\beta - \alpha_{n-1}(\alpha) = 0$ . Δηλαδή  $\beta - \alpha_n(\alpha')$  κύκλος και  $\beta_n(\beta - \alpha_n(\alpha')) = \beta_n(\beta) - \beta_n\alpha_n(\alpha') = \beta_n(\beta) = \gamma$ . Έπεται ότι  $[\gamma] \in \text{Im } \beta_*$  και ο εγκλεισμός  $\text{Ker } \partial_* \subseteq \text{Im } \beta_*$  έχει αποδειχθεί.

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη σχέση του περιέχεσθαι, δηλ.  $\text{Im } \beta_* \subseteq \text{Ker } \partial_*$ , υποθέτουμε ότι  $[\gamma] \in \text{Im } \beta_*$ . Τότε  $[\gamma] = \beta_*[\beta] = [\beta_n(\beta)]$ , όπου  $[\beta] \in H_n(B_*)$ . Αφού το  $[\beta]$  είναι κύκλος έχουμε ότι  $\partial_n\beta = 0$  και έτσι  $\alpha = 0$ , αφού η  $\alpha_{n-1}$  είναι 1 - 1. Άρα  $\partial_*[\gamma] = [\alpha] = 0$ , δηλαδή  $[\gamma] \in \text{Ker } \partial_*$  και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

### Σχετική Ομολογία

Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $A$  ένας υπόχωρος του  $X$ . Συμβολίζουμε με  $S_n(A)$  τους γραμμικούς συνδυασμούς των (ιδιαιζόντων)  $n$ -πλεγμάτων του  $X$  των οποίων η εικόνα περιέχεται στο  $A$ , δηλαδή  $S_n(A)$  είναι οι ιδιαιζουσες  $n$ -αλυσίδες στον υπόχωρο  $A$ . Είναι άμεσο ότι  $S_n(A) \leq S_n(X)$ . Ορίζουμε ως  $S_n(X, A)$  την ομάδα πηλίκου  $S_n(X)/S_n(A)$ . Εφόσον η συνοριακή απεικόνιση  $\partial : S_n(X) \rightarrow S_n(A)$  απεικονίζει την υποομάδα  $S_n(A)$  στην  $S_{n-1}(A)$ , επάγεται ομομορφισμός, για τον οποίο διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό,  $\partial : S_n(X, A) \rightarrow S_{n-1}(X, A)$  με τύπο  $\partial(\gamma + S_n(A)) = \partial\gamma + S_{n-1}(A)$ , ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση  $\partial \circ \partial = 0$ . Δηλαδή έχουμε ένα αλυσωτό σύμπλεγμα

$$S_*(X, A) : \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} S_n(X, A) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

**Ορισμός 10.2.6.** Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Οι ομάδες σχετικής ομολογίας  $H_n(X, A)$  του ζεύγους  $(X, A)$  είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος  $S_*(X, A)$ . Δηλαδή  $H_n(X, A) = H_n(S_*(X, A))$ .

Από τον τρόπο ορισμού των συνοριακών απεικονίσεων, το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε  $n$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_n(A) & \xrightarrow{i} & S_n(X) & \xrightarrow{j} & S_n(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & S_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & S_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

όπου  $i$  είναι η ένθεση της υποομάδας  $S_n(A)$  στην  $S_n(X)$  και  $j : S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)$  ο φυσικός επιμορφισμός στην αντίστοιχη ομάδα πηλίκου. Συνεπώς, έχουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i_*} S_*(X) \xrightarrow{j_*} S_*(X, A) \longrightarrow 0.$$

Η μακρά ακριβής ακολουθία του ζεύγους  $(X, A)$  είναι η μακρά ακριβής ακολουθία που αντιστοιχεί στην προηγούμενη βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων, σύμφωνα με την Πρόταση 10.2.5. Πιο συγκεκριμένα, είναι η παρακάτω μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

η οποία εκφράζει με σαφήνεια την ιδέα ότι οι ομάδες  $H_n(X, A)$  αποτελούν ένα μέτρο της διαφοράς μεταξύ των ομάδων  $H_n(X)$  και  $H_n(A)$ , εφόσον από την παραπάνω μακρά ακριβή ακολουθία προκύπτει ότι  $H_n(X, A) = 0$  αν και μόνο αν η ένθεση του  $A$  στον  $X$  επάγει ισομορφισμούς μεταξύ των ομάδων ομολογίας  $H_n(X)$  και  $H_n(A)$  για κάθε  $n$ .

**Παρατήρηση 10.2.7.** Στην περίπτωση της μακράς ακριβούς ακολουθίας του ζεύγους  $(X, A)$  μπορούμε να “δούμε” πιο εύκολα τον τύπο του συνδετικού ομομορφισμού  $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ : Αν  $[\gamma + S_n(A)] = [\gamma] \in H_n(X, A)$ , τότε (ως κύκλος)  $\partial(\gamma + S_n(A)) = \partial\gamma + S_{n-1}(A) = 0$  και έτσι  $\partial\gamma \in S_{n-1}(A)$ . Εφόσον  $\partial \circ \partial = 0$ , έπεται ότι  $[\partial\gamma] \in H_{n-1}(A)$  και από τον ορισμό της  $\partial_*$  στην Πρόταση 10.2.5 έχουμε ότι  $\partial_*[\gamma] = [\partial\gamma]$ . Αυτή η έκφραση δικαιολογεί και τη χρήση του συγκεκριμένου συμβολισμού για τον συνδετικό ομομορφισμό.

### 10.3 Η Ομολογία είναι Ομοτοπικό Αναλλοίωτο

**Ορισμός 10.3.1.** Έστω  $X, Y$  ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων,  $f, g : X \rightarrow Y$  συνεχείς απεικονίσεις και  $f_\#, g_\# : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  οι επαγόμενες αλυσωτές απεικονίσεις. Μια **αλυσωτή ομοτοπία** (chain homotopy) μεταξύ των  $f_\#$  και  $g_\#$  είναι μια ακολουθία ομομορφισμών  $\{p_n : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)\}$ , έτσι ώστε  $\partial_{n+1}p_n + p_{n-1}\partial_n = g_\# - f_\#$ , για κάθε  $n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow p_n & \downarrow g_\# - f_\# & \swarrow p_{n-1} & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι οι  $f$  και  $g$  είναι **αλυσωτά ομοτοπικές**.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει ο αναγνώστης ότι η αλυσωτή ομοτοπία ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από έναν τοπολογικό χώρο σε έναν άλλο. Στη συνέχεια, σημειώνουμε ότι αλυσωτά ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν τους ίδιους ομομορφισμούς στις ομάδες ομολογίας.

**Πρόταση 10.3.2.** Αν οι  $f, g : X \rightarrow Y$  είναι αλυσωτά ομοτοπικές απεικονίσεις, τότε  $H_n(f) = H_n(g)$  για κάθε  $n$ .

*Απόδειξη.* Για κάθε κύκλο  $\gamma \in S_n(X)$ , δηλαδή  $\partial_n \gamma = 0$ , έχουμε:

$$g_{\#}(\gamma) - f_{\#}(\gamma) = \partial_{n+1} p_n(\gamma) + p_{n-1} \partial_n(\gamma) = \partial_{n+1} p_n(\gamma) \in \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Έπεται ότι  $H_n(f)[\gamma] = H_n(g)[\gamma]$ . □

**Θεώρημα 10.3.3.** *Ομοτοπικές απεικονίσεις  $f, g : X \rightarrow Y$  επάγουν την ίδια απεικόνιση στην ομολογία. Δηλαδή,  $H_n(f) = H_n(g)$  για κάθε  $n$ .*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα δούμε κάποια πορίσματα.

**Πόρισμα 10.3.4.** *Αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι ομοτοπική ισοδυναμία, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  είναι ισομορφισμός για κάθε  $n$ .*

*Απόδειξη.* Έπεται άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα και την Πρόταση 10.1.8. □

**Πόρισμα 10.3.5.** *Αν ο χώρος  $X$  είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο, τότε*

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n > 0. \end{cases}$$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 10.3.3.* Αν τα  $u_0, \dots, u_k$  είναι σημεία ενός Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^m$ , τότε συμβολίζουμε με  $[u_0, \dots, u_j, \dots, u_k]$  το μικρότερο κυρτό του  $\mathbb{R}^m$  που τα περιέχει και με  $[u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k]$  το μικρότερο κυρτό που περιέχει τα σημεία  $u_i, i = 0, \dots, k$  με  $i \neq j$ , δηλαδή όλα αυτά τα σημεία εκτός από το  $u_j$ .

Αρκεί να δείξουμε ότι οι  $f_{\#}$  και  $g_{\#}$  είναι αλυσωτά ομοτοπικές. Έστω  $F : X \times I \rightarrow Y$  μια ομοτοπία από την  $f$  στην  $g$ . Για κάθε ιδιάζον  $n$ -πλέγμα  $\sigma : \Delta_n = [E_0, \dots, E_n] \rightarrow X$ , θεωρούμε το “πρίσμα”  $\Delta_n \times I$ , τις κορυφές  $v_i = (E_i, 0)$  του  $\Delta_n \times \{0\}$  και τις κορυφές  $w_i = (E_i, 1)$  του  $\Delta_n \times \{1\}$ . Υποδιαιρούμε το πρίσμα  $\Delta_n \times I$  στα  $n+1$  το πλήθος πλέγματα  $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ , καθένα από τα οποία είναι αντίτυπο του  $\Delta_{n+1}$ , και συμβολίζουμε με  $\sigma_i^{n+1}$  την εικόνα του καθενός από αυτά μέσω της  $\sigma \times \text{Id}_I$ . Δηλαδή,  $\sigma_i^{n+1} = (\sigma \times \text{Id}_I)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$ . Για κάθε  $n$ , ορίζουμε τις απεικονίσεις  $p_n : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)$  του ορισμού 10.3.1 (στα “βασικά” στοιχεία της ελεύθερης αβελιανής  $S_n$ ) ως εξής:

$$p_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ \sigma_i^{n+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id}_I)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$



Υπολογίζουμε το σύνορο του  $p_n(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}p_n(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} + \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι  $i = j = \alpha$  στο πρώτο άθροισμα απλοποιούνται με τους όρους  $i = j = \alpha - 1$  του δευτέρου, εκτός από τις τιμές  $\alpha = 0$  για το πρώτο και  $\alpha = n$  για το δεύτερο.

Για  $i = j = 0$ , το πρώτο άθροισμα δίνει τον όρο

$$F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{[w_0, \dots, w_n]} = F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{\Delta_n \times \{1\}} = F(\sigma, 1) = g_{\#}(\sigma),$$

ενώ για  $i = j = n$  το δεύτερο δίνει

$$-F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{[v_0, \dots, v_n]} = -F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{\Delta_n \times \{0\}} = -F(\sigma, 0) = -f_{\#}(\sigma).$$

Υπολογίζουμε, επίσης, την εικόνα του συνόρου του  $\sigma$  μέσω της  $p_{n-1}$ :

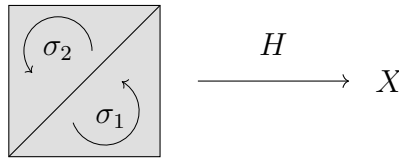
$$\begin{aligned} p_{n-1}\partial_n(\sigma) &= p_{n-1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma \Big|_{[E_0, \dots, \widehat{E}_j, \dots, E_n]} \right) \\ &= \sum_{i > j} (-1)^{(i-1)+j} F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι όροι που παραμένουν μετά τις απλοποιήσεις στο άθροισμα που εκφράζει το  $\partial_{n+1}p_n(\sigma)$  είναι ακριβώς οι  $-p_{n-1}\partial_n(\sigma)$ ,  $g_{\#}(\sigma)$  και  $-f_{\#}(\sigma)$ . Δηλαδή έχουμε ότι

$$\partial_{n+1}p_n(\sigma) = -p_{n-1}\partial_n(\sigma) + g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma) \quad (10.3)$$

και ως εκ τούτου η ακολουθία των απεικονίσεων  $\{p_n\}$  είναι μια αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ των  $g_{\#}(\sigma)$  και  $f_{\#}(\sigma)$ .  $\square$

**Παρατήρηση 10.3.6.** Η σχέση 10.3 εκφράζει το γεγονός ότι το σύνορο του πρίσματος  $\Delta_n \times I$  αποτελείται από το “πάνω” μέρος  $\Delta_n \times \{1\}$ , το “κάτω”  $\Delta_n \times \{0\}$  και τις “πλευρές”  $\partial\Delta_n \times I$  του πρίσματος.



Σχήμα 10.2: Ομοτοπικά μονοπάτια είναι ομόλογα.

## 10.4 Η Αβελιανοποίηση της Θεμελιώδους Ομάδας

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να αποδείξουμε ότι η αβελιανοποίηση της θεμελιώδους ομάδας ενός κατά τόξα συνεκτικού χώρου είναι ισόμορφη με την πρώτη ομάδα ομολογίας του χώρου.

Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος. Κάθε μονοπάτι  $f : I \rightarrow X$  μπορεί να θεωρηθεί και ως ιδιάζον 1-πλέγμα. Αν  $f, g$  είναι δύο μονοπάτια του  $X$ , τότε γράφουμε  $f \sim g$ , αν το 1-πλέγμα  $f - g$  είναι σύνορο (δηλαδή  $f - g \in \text{Im } \partial$ ). Με άλλα λόγια  $f \sim g$  σημαίνει ότι τα μονοπάτια  $f$  και  $g$  είναι ομόλογα.

**Λήμμα 10.4.1.** *Αν  $f$  και  $g$  είναι δύο ομοτοπικά μονοπάτια του  $X$ , τότε  $f \sim g$ .*

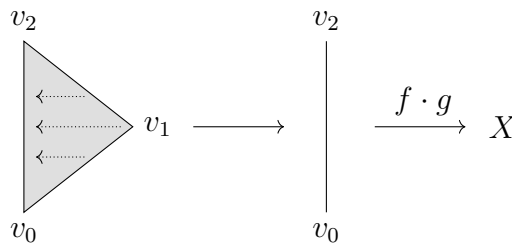
*Απόδειξη.* Έστω  $H$  ομοτοπία από το  $f$  στο  $g$ . Διασπώντας το τετράγωνο  $I \times I$  σε δύο τρίγωνα (θεωρώντας τη διαγώνιο  $\delta$ ), μπορούμε να θεωρήσουμε την ομοτοπία  $H$  ως ιδιάζουσα 2-αλυσίδα αποτελούμενη από δύο πλέγματα  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  όπως φαίνεται στο σχήμα 10.2. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= -H(0, t) + H(s, 1) + \delta - H(s, 0) + H(1, t) - \delta \\ &= -f + C_{f(1)} + \delta - C_{f(0)} + g - \delta \\ &= g - f + C_{f(1)} - C_{f(0)}. \end{aligned}$$

Εφόσον το σταθερό μονοπάτι  $C_x$ , για κάθε  $x \in X$ , είναι σύνορο της ίδιας σταθερής απεικόνισης  $\Delta_2 \rightarrow X$ , έπεται ότι  $C_{f(1)} - C_{f(0)} \in \text{Im } \partial$  και άρα  $g - f \in \text{Im } \partial$ .  $\square$

**Λήμμα 10.4.2.** *Αν  $f$  και  $g$  είναι δύο μονοπάτια του  $X$  με  $f(1) = g(0)$ , τότε  $f \cdot g \sim f + g$ . Ιδιαιτέρως,  $f + f^{-1} \sim 0$  και  $f^{-1} \sim f$ .*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ιδιάζον 2-πλέγμα  $\sigma : [v_0, v_1, v_2] \rightarrow X$ , έτσι ώστε ο περιορισμός της  $\sigma$  στα  $[v_0, v_1]$ ,  $[v_1, v_2]$  και  $[v_0, v_2]$  να δίνεται από την  $f, g$  και  $f \cdot g$ , αντίστοιχα, ενώ στα υπόλοιπα σημεία η  $\sigma$  είναι η σύνθεση της “ορθογώνιας” προβολής του  $[v_0, v_1, v_2]$  στην



Σχήμα 10.3

πλευρά  $[v_0, v_2]$  με το μονοπάτι  $f \cdot g : [v_0, v_2] \rightarrow X$  (βλ. σχήμα 10.3). Τότε  $\text{Im } \partial \ni \partial\sigma = f + g - f \cdot g$  και έτσι  $f \cdot g \sim f + g$ .  $\square$

Έστω  $x_0$  ένα σημείο του  $X$ . Κάθε θηλειά  $f : I \rightarrow X$  στο  $x_0$  αντιπροσωπεύει έναν κύκλο στην ομάδα  $S_1(X)$ , αφού  $\partial f = f(1) - f(0) = 0$ . Συνεπώς, από τα δύο προηγούμενα λήμματα προκύπτει ότι έχουμε έναν (καλώς ορισμένο) ομομορφισμό  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ , που ορίζεται μέσω του τύπου

$$\varphi([f]) = f + \text{Im } \partial.$$

**Λήμμα 10.4.3.** *Ο ομομορφισμός  $\varphi$  είναι επί, αν ο χώρος  $X$  είναι κατά τόξα συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Αν ο χώρος είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε για κάθε  $x \in X$  μπορούμε να επιλέξουμε ένα μονοπάτι  $\omega_x$  από το  $x_0$  στο  $x$ , όπου ως  $\omega_{x_0}$  επιλέγεται το σταθερό μονοπάτι  $C_{x_0}$  στο  $x_0$ . Εφόσον κάθε μονοπάτι  $\omega_x$  είναι ένα ιδιαίζον 1-πλέγμα, η απεικόνιση  $x \mapsto \omega_x$  επεκτείνεται, κατά μοναδικό τρόπο, σε ομομορφισμό

$$\omega : S_0(X) \rightarrow S_1(X).$$

Για κάθε μονοπάτι  $h$  του  $X$ , θεωρούμε τη θηλειά  $\omega_{h(0)} \cdot h \cdot \omega_{h(1)}^{-1}$  στο  $x_0$ . Τότε

$$\begin{aligned} \varphi([\omega_{h(0)} \cdot h \cdot \omega_{h(1)}^{-1}]) &= \omega_{h(0)} \cdot h \cdot \omega_{h(1)}^{-1} + \text{Im } \partial \\ &= h - \omega(\partial h) + \text{Im } \partial \\ &= \varphi([h]) - (\omega(\partial h) + \text{Im } \partial). \end{aligned}$$

Πρέπει να τονισθεί ότι εδώ δεν υπονοούμε πως το μονοπάτι  $h$  είναι θηλειά. Ο τύπος της  $\varphi$  έχει νόημα σε κλάσεις ομοτοπίας γενικότερα, με τη διαφορά ότι η εικόνα δεν είναι απαραίτητως στοιχείο της  $H_1(X)$ .

Για μια τυχαία ιδιάζουσα 1-αλυσίδα  $\gamma = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ , θεωρούμε το στοιχείο  $g = [\prod_{i=1}^k (\omega_{\sigma_i(0)} \cdot \sigma_i \cdot \omega_{\sigma_i(1)}^{-1})^{n_i}]$  της ομάδας  $\pi_1(X, x_0)$  και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi([g]) &= \sum_{i=1}^k n_i (\sigma_i - \omega(\partial \sigma_i)) + \text{Im } \partial \\ &= \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i - \omega(\partial(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i)) + \text{Im } \partial \\ &= \gamma - \omega(\partial \gamma) + \text{Im } \partial. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η αλυσίδα  $\gamma$  είναι κύκλος, προκύπτει ότι  $\varphi([g]) = \gamma + \text{Im } \partial$ , που σημαίνει ότι η  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  είναι επιμορφισμός.  $\square$

Συμβολίζουμε με  $G$  τη θεμελιώδη ομάδα  $\pi_1(X, x_0)$ , με  $G'$  την παράγωγο υποομάδα της  $G$  και με  $G_{ab}$  την αβελιανοποίηση της  $G$ , δηλαδή  $G_{ab}$  είναι η ομάδα πηλίκο  $G/G'$ . Εφόσον η ομάδα  $H_1(X)$  είναι αβελιανή, ο παραπάνω επιμορφισμός  $\varphi$  παραγοντοποιείται μέσω της  $G_{ab}$ . Δηλαδή, υπάρχει επιμορφισμός  $\tilde{\varphi} : G_{ab} \rightarrow H_1(X)$ , έτσι ώστε  $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ , όπου  $\pi : G \rightarrow G_{ab}$  είναι ο φυσικός επιμορφισμός.

**Θεώρημα 10.4.4.** Έστω  $X$  ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος και  $x_0$  ένα σημείο του  $X$ . Ο επιμορφισμός

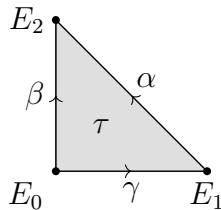
$$\tilde{\varphi} : \pi_1(X, x_0)_{ab} \rightarrow H_1(X)$$

είναι ισομορφισμός.

*Απόδειξη.* Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της απόδειξης του προηγούμενου λήμματος. Για το τυχαίο ιδιάζον 1-πλέγμα  $\sigma$ , ορίζουμε ένα στοιχείο  $\psi(\sigma)$  της ομάδας  $\pi_1(X, x_0)_{ab}$  ως εξής:  $\psi(\sigma) = \pi([\omega_{\sigma(0)} \cdot \sigma \cdot \omega_{\sigma(1)}^{-1}])$ . Εφόσον η ομάδα  $S_1(X)$  είναι ελεύθερη αβελιανή πάνω στα ιδιάζοντα 1-πλέγματα, η απεικόνιση  $\psi$  επεκτείνεται σε ομομορφισμό

$$\psi : S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{ab}.$$

Έστω  $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$  ένα ιδιάζον 2-πλέγμα, όπου για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό συμβολίζουμε με  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  τον περιορισμό της απεικόνισης  $\tau$  στα  $[E_1, E_2]$ ,  $[E_0, E_2]$  και  $[E_0, E_1]$ , αντίστοιχα, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σημειώνουμε ότι το πλέγμα  $\tau$  δίνει ομοτοπία  $\gamma\alpha \simeq \beta$  και υπολογίζουμε την εικόνα του συνόρου του  $\tau$  μέσω της  $\psi$ .

$$\begin{aligned}\psi(\partial\tau) &= \psi(\gamma + \alpha - \beta) = \psi(\gamma)\psi(\alpha)\psi(\beta)^{-1} \\ &= \pi([\omega_{\gamma(0)} \cdot \gamma \cdot \omega_{\gamma(1)}^{-1}][\omega_{\alpha(0)} \cdot \alpha \cdot \omega_{\alpha(1)}^{-1}][\omega_{\beta(1)} \cdot \beta^{-1} \cdot \omega_{\beta(0)}^{-1}]) \\ &= \pi([\omega_{\gamma(0)}\gamma\alpha\beta^{-1}\omega_{\gamma(0)}^{-1}]) = \pi([\omega_{\gamma(0)} \cdot \omega_{\gamma(0)}^{-1}]) \\ &= \pi([\omega_{x_0}]) = \pi([C_{x_0}]) = 1.\end{aligned}$$

Έπεται ότι  $\text{Im } \partial \subseteq \text{Ker } \psi$  και έτσι επάγεται ομομορφισμός

$$\tilde{\psi} : S_1(X)/\text{Im } \partial \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{ab},$$

έτσι ώστε  $\tilde{\psi} \circ q = \psi$ , όπου με  $q$  συμβολίζουμε τον φυσικό επιμορφισμό  $S_1(X) \rightarrow S_1(X)/\text{Im } \partial$ .

Διατηρούμε επίσης το ίδιο συμβολισμό  $\tilde{\psi}$  για τον περιορισμό της  $\tilde{\psi}$  στην  $H_1(X)$ . Για κάθε θηλειά  $f$  στο  $x_0$ , έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}([f] + G') &= \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} \circ \pi([f]) = \tilde{\psi} \circ \varphi([f]) \\ &= \tilde{\psi}(f + \text{Im } \partial) = \tilde{\psi} \circ q(f) = \psi(f) \\ &= \pi([\omega_{f(0)} \cdot f \cdot \omega_{f(1)}^{-1}]) = \pi([f]) = [f] + G',\end{aligned}$$

αφού  $f$  θηλειά στο  $x_0$ . Τελικά,  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = \text{Id}_{G_{ab}}$  από όπου έπεται ότι η  $\tilde{\varphi}$  είναι  $1 - 1$ .  $\square$

## 10.5 Η Ακολουθία Mayer-Vietoris και Εκτομή

Ένα από τα κύρια εργαλεία για τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας ενός χώρου είναι η ακολουθία Mayer-Vietoris η οποία αποτελεί το ανάλογο του θεωρήματος Seifert-Van Kampen. Το κλειδί για την απόδειξη είναι μια διαδικασία υποδιαίρεσης ιδιάζοντων πλεγμάτων η οποία μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε μια ιδιάζουσα αλυσίδα με μια άλλη της οποίας τα πλέγματα είναι “μικρά”, δηλαδή η εικόνα του καθενός περιέχεται σε ένα ανοικτό μιας δοθείσης ανοικτής κάλυψης του χώρου.

Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  μια συλλογή υπόχωρων του  $X$  των οποίων τα εσωτερικά αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Συμβολίζουμε με  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  την υποομάδα της  $S_n(X)$  που παράγεται από όλα τα ιδιάζοντα πλέγματα  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  των οποίων η εικόνα περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα της κάλυψης. Δηλαδή,

$$S_n^{\mathcal{U}}(X) = \left\{ \gamma = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i \in S_n(X) \mid \text{για κάθε } i = 1, \dots, k \text{ υπάρχει } U_{j(i)} \in \mathcal{U} \text{ με } \sigma_i \subseteq U_{j(i)} \right\}.$$

**Παράδειγμα 10.5.1.** Αν  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ , τότε  $S_n^{\{A, B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B)$ .

Η συνοριακή απεικόνιση  $\partial$  απεικονίζει την ομάδα  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  στην  $S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$  και έτσι έχουμε ένα σύμπλεγμα

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) : \cdots \longrightarrow S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} S_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow \cdots$$

Συμβολίζουμε με  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$  τις ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ . Είναι φανερό ότι  $S_n^{\mathcal{U}}(X) \neq S_n(X)$ , ισχύει όμως το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 10.5.2.** Οι ενθέσεις  $S_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_n(X)$  επάγουν ισομορφισμούς στην ομολογία  $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$  για κάθε  $n$ .

Η ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος είναι απλή: κάθε ιδιάζουσα αλυσίδα μπορεί με υποδιαίρεσεις να “σπάσει” σε πλέγματα που βρίσκονται στα σύνολα της  $\mathcal{U}$ . Παρουσιάζει όμως πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Υπενθυμίζουμε ότι αν τα  $v_0, v_1, \dots, v_n$  είναι σημεία ενός Ευκλειδείου χώρου  $\mathbb{R}^m$ , τότε με  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  συμβολίζουμε το μικρότερο κυρτό (κυρτή θήκη) του  $\mathbb{R}^m$  που τα περιέχει. Ένα  $n$ -πλέγμα της μορφής  $\sigma : \Delta_n \rightarrow [v_0, v_1, \dots, v_n]$ , όπου  $\sigma(\sum_{i=0}^n t_i E_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$  θα λέγεται **ιδιάζον γραμμικό  $n$ -πλέγμα** ή απλά γραμμικό πλέγμα. Στην περίπτωση που τα  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, παρατηρούμε ότι η  $\sigma$  είναι “γραμμικός” ομοιομορφισμός και το αντίστοιχο πλέγμα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως “μη ιδιάζον”. Συνήθως ταυτίζουμε ένα ιδιάζον γραμμικό πλέγμα με την εικόνα του  $[\sigma(E_0), \sigma(E_1), \dots, \sigma(E_n)] = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ .

Το **κέντρο βάρους** ενός γραμμικού πλέγματος  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ , όπου τα διανύσματα  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, είναι το σημείο  $b = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$  του εσωτερικού του  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ .

**Ορισμός 10.5.3** (Βαρυκεντρική υποδιαίρεση). Για κάθε  $n = 0, 1, \dots$ , η **βαρυκεντρική υποδιαίρεση** ενός γραμμικού  $n$ -πλέγματος  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ , όπου τα  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ορίζεται επαγωγικά ως εξής: για  $n = 0$ , η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του  $[v_0]$  είναι το ίδιο το  $[v_0]$ . Υποθέτουμε ότι η βαρυκεντρική υποδιαίρεση έχει οριστεί για γραμμικά  $(n-1)$ -πλέγματα της παραπάνω μορφής. Η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του πλέγματος  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  ορίζεται να είναι η ανάλυσή του στα  $n$ -πλέγματα  $[b, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}]$ , όπου  $b$  είναι το κέντρο βάρους του  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  και το  $[w_0, \dots, w_{n-1}]$  (γραμμικό)  $(n-1)$ -πλέγμα στη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του προσώπου  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  για  $0 \leq i \leq n$ .

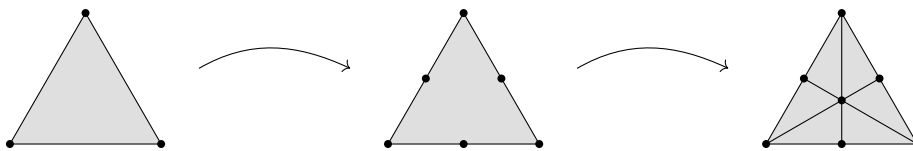
**Παράδειγμα 10.5.4.** Αν έχουμε το 1-πλέγμα



τότε η βαρυσκεντρική του υποδιαίρεση λαμβάνεται θεωρώντας το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος και είναι



Στην περίπτωση που έχουμε ένα 2-πλέγμα, πρώτα βαρυσκεντρικώς υποδιαιρούμε το σύνορο και έπειτα προσθέτουμε το βαρύκεντρο το οποίο ενώνουμε με κάθε 0-πλέγμα στο σύνορο.



Υπενθυμίζουμε ότι με  $\delta(A)$  συμβολίζουμε τη διάμετρο ενός υποσυνόλου  $A$  ενός μετρικού χώρου  $X$ . Για την απόδειξη του επόμενου λήμματος σημειώνουμε ότι αν το  $x$  είναι σημείο ενός γραμμικού πλέγματος  $\sigma$ , τότε η συνάρτηση της απόστασης του  $x$  από το τυχαίο  $y \in \sigma$ , μεγιστοποιείται όταν το  $y$  είναι κορυφή του  $\sigma$ . Πράγματι, αν θεωρήσουμε το μέγιστο  $M$  της προηγούμενης συνάρτησης στις κορυφές του  $\sigma$ , τότε από τον ορισμό του  $\sigma$  και την κυρτότητα της κλειστής μπάλας  $\bar{B}$  με κέντρο  $x$  και ακτίνα  $M$ , η οποία περιέχει όλες τις κορυφές του  $\sigma$ , έπεται ότι  $\sigma \subseteq \bar{B}$  που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

**Λήμμα 10.5.5.** Έστω  $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  ένα γραμμικό πλέγμα, όπου τα  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και  $\Delta'$  ένα πλέγμα στη βαρυσκεντρική υποδιαίρεση του  $\Delta$ . Τότε  $\delta(\Delta') \leq \frac{n}{n+1} \delta(\Delta)$ .

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του  $n$ . Για  $n = 0$  είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι  $n \geq 1$  και ότι το συμπέρασμα ισχύει για φυσικούς μικρότερους από το  $n$ . Αν  $b$  είναι το κέντρο βάρους του  $\Delta$  και  $\Delta' = [b = w_0, w_1, \dots, w_n]$ , τότε, προκειμένου να εκτιμήσουμε τη διαφορά  $|w_i - w_j|$ , υπολογίζουμε πρώτα

$$|b - v_i| = \left| \frac{v_0 + \dots + v_n - (n+1)v_i}{n+1} \right| = \left| \frac{(v_0 - v_i) + (v_1 - v_i) + \dots + (v_n - v_i)}{n+1} \right|.$$

Παρατηρούμε ότι ένας από τους όρους στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος είναι ίσος με μηδέν και συνεπώς

$$|b - v_i| \leq \frac{n}{n+1} \max_{i,j} |v_i - v_j| = \frac{n}{n+1} \delta(\Delta).$$

Εφόσον  $w_i \in \Delta$ , έχουμε ότι

$$|b - w_i| \leq \max_i |b - v_i| \leq \frac{n}{n+1} \delta(\Delta).$$

Για τις άλλες περιπτώσεις (δηλαδή κάθε  $i, j \neq 0$ ), οι κορυφές  $w_i$  και  $w_j$  είναι κορυφές ενός προσώπου του  $\Delta'$  που βρίσκεται σε ένα πρόσωπο του  $\Delta$  και συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$|w_i - w_j| \leq \frac{n-1}{n} \delta(\Delta) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\Delta).$$

□

Έστω  $K$  ένα κυρτό υποσύνολο κάποιου Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^m$ . Μια **γραμμική ιδιάζουσα αλυσίδα** στο  $K$  είναι μια ιδιάζουσα αλυσίδα στο  $K$  της οποίας κάθε ιδιάζον πλέγμα είναι γραμμικό. Αν  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  είναι ένα ιδιάζον γραμμικό  $n$ -πλέγμα στο  $K$  και  $v$  σημείο του  $K$ , τότε ο **κώνος** του  $\sigma$  ως προς το  $v$  είναι το ιδιάζον γραμμικό  $(n+1)$ -πλέγμα  $v * \sigma = [v, v_0, v_1, \dots, v_n]$ , το οποίο λόγω κυρτότητας περιέχεται στο  $K$ . Δηλαδή,

$$(v * \sigma) \left( \sum_{i=0}^n t_i E_i \right) = \begin{cases} t_0 v + (1 - t_0) \sigma \left( \frac{(t_1 E_0 + \dots + t_{n+1} E_n)}{1 - t_0} \right), & \text{αν } t_0 < 1 \\ v, & \text{αν } t_0 = 1. \end{cases}$$

Η απεικόνιση του κώνου ως προς το  $v$  επεκτείνεται γραμμικά σε ιδιάζουσες γραμμικές αλυσίδες του  $K$ , δηλαδή  $v * (\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i (v * \sigma_i)$ .

**Λήμμα 10.5.6.** Έστω  $\gamma$  μια ιδιάζουσα γραμμική αλυσίδα σε ένα κυρτό υποσύνολο  $K$  του  $\mathbb{R}^m$  και  $v \in K$ . Τότε  $\partial(v * \gamma) = \gamma - v * \partial\gamma$ .

*Απόδειξη.* Λόγω γραμμικότητας αρκεί να δειχθεί η ισότητα για το τυχαίο ιδιάζον γραμ-



μικό πλέγμα  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  του  $K$ .

$$\begin{aligned}
 \partial(v * \sigma) &= \partial[v, v_0, v_1, \dots, v_n] \\
 &= [v_0, v_1, \dots, v_n] - \sum_{i=0}^n (-1)^i [v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \\
 &= [v_0, v_1, \dots, v_n] - \sum_{i=0}^n (-1)^i v * [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \\
 &= [v_0, v_1, \dots, v_n] - v * \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \right) \\
 &= [v_0, v_1, \dots, v_n] - v * (\partial[v_0, v_1, \dots, v_n]).
 \end{aligned}$$

□

Επί της ουσίας, η προηγούμενη ισότητα εκφράζει το γεγονός ότι η έννοια του κώνου μας δίνει μια αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ της ταυτοτικής και της μηδενικής απεικόνισης στο σύμπλεγμα του Παραδείγματος 10.2.2 των ομάδων ομολογίας των γραμμικών πλεγμάτων του κυρτού  $K$ .

Στη συνέχεια θα δούμε πως η κατασκευή του κώνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε επαγωγικά τον **τελεστή υποδιαίρεσης**  $S : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$  επί των ιδιάζοντων  $n$ -αλυσίδων ενός χώρου  $X$ . Τον ορίζουμε πρώτα για τα πρότυπα  $n$ -πλέγματα  $i_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ , όπου  $i_n$  είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Όταν  $n = 0$ , θέτουμε  $S$  να είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Για  $n > 0$ , ορίζουμε

$$S(i_n) = b_n * S(\partial i_n),$$

όπου  $b_n$  είναι το κέντρο βάρους του  $\Delta_n$ . Για το τυχαίο ιδιάζον  $n$ -πλέγμα  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ , ορίζουμε

$$S(\sigma) = \sigma_{\#}(S(i_n)),$$

όπου  $\sigma_{\#}$  είναι η αλυσωτή απεικόνιση που επάγεται από τη συνεχή απεικόνιση  $\sigma$  (φυσικά, επεκτείνουμε γραμμικά σε ιδιάζουσες αλυσίδες). Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι  $S \circ f_{\#} = f_{\#} \circ S$  για κάθε συνεχή απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$ . Πράγματι,

$$S \circ f_{\#}(\sigma) = S(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_{\#}(S(i_n)) = f_{\#} \circ \sigma_{\#} S(i_n) = f_{\#} S(\sigma),$$

εφόσον  $\sigma = \sigma_{\#} i_n$ .

Στην περίπτωση ενός γραμμικού  $n$ -πλέγματος  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ , όπου τα  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, παρατηρούμε ότι η αλυσίδα  $S(\sigma)$  αποτελείται από τα  $n$ -πλέγματα της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του ορισμού 10.5.3, τα οποία εμφανίζονται στο αντίστοιχο άθροισμα με πρόσημο 1 ή  $-1$  (το οποίο κάθε φορά μπορεί να υπολογιστεί).

**Λήμμα 10.5.7.** *Ο τελεστής υποδιαίρεσης  $S : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$  στις ιδιάζουσες αλυσίδες ενός χώρου  $X$  είναι αλυσωτή απεικόνιση, δηλ.  $\partial \circ S = S \circ \partial$ .*

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του  $n$ . Για  $n = 0$  είναι άμεσο. Για  $n > 0$ , παρατηρούμε πως αρκεί να δείξουμε ότι  $\partial S(i_n) = S\partial(i_n)$ , αφού τότε για το τυχαίο πλέγμα  $\sigma$  προκύπτει ότι

$$\partial S(\sigma) = \partial S(\sigma_{\#} i_n) = \sigma_{\#} \partial S(i_n) = \sigma_{\#} S\partial(i_n) = S\partial(\sigma_{\#} i_n) = S\partial\sigma.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \partial S(i_n) &= \partial(b_n * S\partial i_n) \\ &= S\partial i_n - b_n * \partial S\partial i_n \\ &= S\partial i_n - b_n * S\partial\partial i_n \\ &= S\partial i_n - 0 \\ &= S\partial i_n, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το Λήμμα 10.5.6 και η τρίτη από την επαγωγική υπόθεση.  $\square$

**Λήμμα 10.5.8.** *Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  μια συλλογή υπόχωρων του  $X$  των οποίων τα εσωτερικά αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του  $X$ . Για κάθε ιδιάζουσα  $n$ -αλυσίδα  $\gamma$  του  $X$  υπάρχει δύναμη  $S^k$  του τελεστή υποδιαίρεσης  $S$  έτσι ώστε  $S^k(\gamma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ .*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αλυσίδα  $\gamma$  αποτελείται μόνο από ένα πλέγμα  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  (διαφορετικά θεωρούμε τη μέγιστη δύναμη των δυνάμεων που προκύπτουν από κάθε πλέγμα της αλυσίδας). Από το λήμμα του Lebesgue για το ανοικτό κάλυμμα  $\{\sigma^{-1}(\text{Int}(U_j)), j \in J\}$  του συμπαγούς μετρικού χώρου  $\Delta_n$ , υπάρχει θετικός αριθμός  $\delta$ , έτσι ώστε κάθε υποσύνολο του  $\Delta_n$  με διάμετρο μικρότερη από  $\delta$  να περιέχεται σε ένα από τα ανοικτά  $\sigma^{-1}(\text{Int}(U_j))$  του καλύμματος, ισοδύναμα, να απεικονίζεται μέσω της  $\sigma$  εντός του  $\text{Int}(U_j)$ . Από το Λήμμα 10.5.5 έπεται ότι κατά την εφαρμογή επαναλαμβανόμενων υποδιαίρεσεων προκύπτουν πλέγματα με αυθαιρέτως μικρή διάμετρο, εφόσον

η ποσότητα  $(n/(n+1))^k$  τείνει στο μηδέν, καθώς ο εκθέτης τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε αρκούντως μεγάλο εκθέτη  $k$ , έτσι ώστε η διάμετρος κάθε πλέγματος της αλυσίδας  $S^k(i_n)$  να είναι μικρότερη από  $\delta$  και ως εκ τούτου  $S^k(\sigma) = \sigma_{\#}(S^k i_n) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ .  $\square$

**Πρόταση 10.5.9.** Για κάθε  $k \geq 1$ , οι απεικονίσεις  $S^k, Id : S_*(X) \rightarrow S_*(X)$  είναι αλυσωτά ομοτοπικές.

*Απόδειξη.* Πρώτα θα ορίσουμε επαγωγικά αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ της  $S$  και της ταυτοτικής. Δηλαδή, θα ορίσουμε ακολουθία ομομορφισμών  $T = T_n : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ , για  $n \geq 0$ , έτσι ώστε

$$\partial T + T\partial = S - Id. \quad (10.4)$$

Φυσικά αρκεί να ορίσουμε την  $T$  σε ιδιάζοντα πλέγματα (επεκτείνουμε γραμμικά). Για  $n = 0$ ,  $T$  είναι ο μηδενικός ομομορφισμός και η παραπάνω ισότητα ισχύει, αφού η  $S$  είναι η ταυτοτική όταν  $n = 0$ . Για  $n > 0$  και ένα ιδιάζον  $n$ -πλέγμα  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ , ορίζουμε

$$T\sigma = \sigma_{\#}(b_n * (S i_n - i_n - T\partial i_n)) \in S_{n+1}(X). \quad (10.5)$$

Από τους ορισμούς έπεται άμεσα ότι  $T \circ \sigma_{\#} = \sigma_{\#} \circ T$ . Αν υποθέσουμε ότι η σχέση 10.5 ισχύει για κάθε ιδιάζουσα  $(n-1)$ -αλυσίδα, τότε, αφού  $\partial i_n$  ιδιάζουσα  $(n-1)$ -αλυσίδα, έχουμε

$$\begin{aligned} \partial T\partial i_n &= -T\partial\partial i_n + S\partial i_n - \partial i_n \\ &= S\partial i_n - \partial i_n \\ &= \partial S i_n - \partial i_n \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \partial T\sigma &= \partial\sigma_{\#}(b_n * (S i_n - i_n - T\partial i_n)) \\ &= \sigma_{\#}\partial(b_n * (S i_n - i_n - T\partial i_n)) \\ &= \sigma_{\#}(S i_n - i_n - T\partial i_n - b_n * \partial(S i_n - i_n - T\partial i_n)) \\ &= S(\sigma) - \sigma - T\partial\sigma - \sigma_{\#}(b_n * (\partial S i_n - \partial i_n - \partial T\partial i_n)) \\ &= S(\sigma) - \sigma - T\partial\sigma, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι μέσω του τύπου 10.5 ορίζεται πράγματι αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ των  $S$  και  $Id$ .

Η ομοτοπία  $T_k$  μεταξύ των  $S$  και  $\text{Id}$  κατασκευάζεται ως ακολούθως. Για  $k = 1$ , ορίζουμε  $T_1 = T$ . Εφαρμόζοντας τον τελεστή  $S$  στην εξίσωση  $\partial T + T\partial = S - \text{Id}$  προκύπτει η εξίσωση  $S\partial T + ST\partial = S^2 - S$  και αθροίζοντας τις δύο εξισώσεις λαμβάνουμε ότι

$$\partial T + T\partial + S\partial T + ST\partial = S^2 - \text{Id},$$

ισοδύναμα, λόγω του Λήμματος 10.5.7,

$$\partial(ST + T) + (ST + T)\partial = S^2 - \text{Id}.$$

Ορίζουμε λοιπόν  $T_2 = ST + T$  και συνεχίζοντας διαπιστώνουμε ότι η ομοτοπία  $T_k$  μπορεί να ορισθεί μέσω του τύπου  $T_k = S^{k-1}T + S^{k-2}T + \dots + T$ .  $\square$

*Απόδειξη του θεωρήματος 10.5.2.* Είναι άμεσο ότι η ένθεση  $\iota : S_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_n(X)$  είναι αλυσωτή απεικόνιση και έτσι επάγει ομομορφισμό  $\iota_* : H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$ . Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η  $\iota_*$  είναι επί, θεωρούμε την κλάση ομολογίας  $[\gamma] \in H_n(X)$  ενός  $n$ -κύκλου  $\gamma$ . Από το Λήμμα 10.5.8 μπορούμε να επιλέξουμε εκθέτη  $k$ , έτσι ώστε  $S^k(\gamma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Σημειώνουμε ότι η αλυσίδα  $S^k(\gamma)$  είναι κύκλος, αφού η  $S$  ( και άρα η  $S^k$ ) είναι αλυσωτή απεικόνιση. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης έχουμε:

$$S^k(\gamma) - \gamma = \partial T_k \gamma + T_k \partial \gamma = \partial T_k \gamma,$$

αφού  $\gamma$  κύκλος. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι  $S^k(\gamma)$  και  $\gamma$  είναι ομόλογοι και συνεπώς η  $\iota_*$  είναι επί. Για το 1 - 1, θεωρούμε  $[\gamma] \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$  με  $\iota_*[\gamma] = 0$ . Δηλαδή, υπάρχει  $(n + 1)$ -αλυσίδα  $\beta \in S_{n+1}(X)$ , έτσι ώστε  $\gamma = \partial\beta$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι η  $\gamma$  είναι το σύνορο μιας αλυσίδας στην  $S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Πρώτα κάνουμε την αλυσίδα  $\beta$  “ $\mathcal{U}$ -μικρή” επιλέγοντας όπως πριν εκθέτη  $k$  αρκούντως μεγάλο, έτσι ώστε  $S^k(\beta) \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Τότε εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\partial$  στη σχέση

$$S^k\beta - \beta = \partial T_k \beta + T_k \partial \beta$$

προκύπτει ότι

$$\partial S^k \beta - \gamma = \partial T_k \partial \beta = \partial T_k \gamma$$

ισοδύναμα

$$\gamma = \partial(S^k \beta - T_k \gamma).$$

Εφόσον  $S^k(\beta) \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ , η απόδειξη θα ολοκληρωθεί, αν δείξουμε ότι  $T_k \gamma \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Αν  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  είναι ένα ιδιάζον πλέγμα της  $\gamma$ , τότε υπάρχει  $U \in \mathcal{U}$  το οποίο περιέχει

την εικόνα του  $\sigma$ , αφού  $[\gamma] \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Άρα  $T_k \sigma = T_k \sigma_{\#} i_n = \sigma_{\#} T_k i_n \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$  και έτσι  $T_k \gamma \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ .  $\square$

**Θεώρημα 10.5.10** (Ακολουθία Mayer-Vietoris). Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $A, B$  υπόχωροι του  $X$ , έτσι ώστε ο  $X$  είναι η ένωση των εσωτερικών τους. Τότε υπάρχει μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\kappa_* - \lambda_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots \quad (10.6)$$

όπου  $(i_* \oplus j_*)[\gamma] = (i_*[\gamma], j_*[\gamma])$ ,  $(\kappa_* - \lambda_*)([\gamma], [\gamma']) = \kappa_*[\gamma] - \lambda_*[\gamma']$ ,  $\partial_*$  είναι ο “συνδετικός” ομομορφισμός και  $i_*, j_*, \kappa_*, \lambda_*$  είναι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί των ενθέσεων  $i : A \cap B \hookrightarrow A$ ,  $j : A \cap B \hookrightarrow B$ ,  $\kappa : A \hookrightarrow X$ ,  $\lambda : B \hookrightarrow X$ , αντίστοιχα.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα αλυσωτά συμπλέγματα  $S_*(A \cap B)$ ,  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ , όπου  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ , και  $S_*(A) \oplus S_*(B)$  (με συνοριακό τελεστή  $(\partial, \partial)$ ) και τη βραχεία ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow S_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} S_*(A) \oplus S_*(B) \xrightarrow{\psi} S_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0, \quad (10.7)$$

όπου  $\varphi = i_{\#} \oplus j_{\#}$  και  $\psi = \kappa_{\#} - \lambda_{\#}$ , δηλαδή, επί της ουσίας,  $\varphi(\gamma) = (\gamma, \gamma)$  και  $\psi(\gamma, \gamma') = \gamma - \gamma'$ . Ισχυριζόμαστε ότι η ανωτέρω βραχεία ακολουθία συμπλεγμάτων 10.7 είναι ακριβής. Αρκεί ότι για κάθε φυσικό  $n \geq 0$ , η βραχεία ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow S_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} S_n(A) \oplus S_n(B) \xrightarrow{\psi} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Πράγματι, είναι άμεσο ότι η  $\varphi$  είναι 1-1 και η  $\psi$  επί (αφού  $S_n^{\mathcal{U}}(X) = S_n^{\{A, B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B)$ ). Επίσης, για κάθε  $\gamma \in S_n(A \cap B)$  έχουμε  $\psi \circ \varphi(\gamma) = 0$  και άρα  $\text{Im} \varphi \subseteq \text{Ker} \psi$ . Από την άλλη, αν  $(\gamma, \gamma') \in \text{Ker} \psi$ , τότε  $\gamma = \gamma' \subseteq A \cap B$  άρα  $(\gamma, \gamma') = (\gamma, \gamma) \in \text{Im} \varphi$  και τελικά  $\text{Im} \varphi = \text{Ker} \psi$ .

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από τη μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία (πρόταση 10.2.5) που αντιστοιχεί στη βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων 10.7 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 10.5.2.  $\square$

**Παρατήρηση 10.5.11.** Αν χρησιμοποιήσουμε ανηγμένη ομολογία, τότε προκύπτει η ακολουθία Mayer-Vietoris για την ανηγμένη ομολογία, η οποία είναι ίδια με την προηγούμενη στις θετικές διαστάσεις και τελειώνει ως:

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_0(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0,$$

με την προϋπόθεση ότι οι υπόχωροι  $A$  και  $B$  έχουν μη κενή τομή.

**Θεώρημα 10.5.12** (Εκτομή-Excision). Έστω  $A, U$  δύο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου  $X$ . Αν η κλειστότητα του  $U$  περιέχεται στο εσωτερικό του  $A$ , τότε η ένθεση  $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  επάγει ισομορφισμούς στην ομολογία  $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$  για κάθε  $n$ . Με άλλα λόγια, το σύνολο  $U$  μπορεί να εκμηθεθεί από το ζεύγος  $(X, A)$  χωρίς να αλλάξουν οι ομάδες ομολογίας του ζεύγους.

*Απόδειξη.* Εφόσον  $\bar{U} \subseteq \text{Int}A$ , έχουμε ότι  $X = \text{Int}A \cup \text{Int}(X - U)$ . Αν θέσουμε  $B = X - U$ , τότε  $(X - U, A - U) = (B, A \cap B)$  και θέλουμε να δείξουμε ότι η ένθεση  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  επάγει ισομορφισμούς στην ομολογία. Οι (αλυσωτές) απεικονίσεις, μέσω των οποίων αποδεικνύεται ότι οι ενθέσεις  $S_n^{\{A, B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B) \hookrightarrow S_n(X)$  επάγουν ισομορφισμούς στην ομολογία (Θεώρημα 10.5.2 για  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ ), απεικονίζουν αλυσίδες του  $A$  σε αλυσίδες του  $A$ . Άρα ορίζονται οι αντίστοιχες απεικονίσεις πηλίκο και συνεπώς οι ενθέσεις

$$\frac{S_n(A) + S_n(B)}{S_n(A)} \hookrightarrow \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

επάγουν ισομορφισμούς στη (σχετική) ομολογία. Επιπλέον, οι απεικονίσεις

$$\frac{S_n(B)}{S_n(A \cap B)} = \frac{S_n(B)}{S_n(A) \cap S_n(B)} \rightarrow \frac{S_n(A) + S_n(B)}{S_n(A)}$$

που επάγονται από την ένθεση  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ , επίσης επάγουν ισομορφισμούς στην ομολογία, αφού τα αντίστοιχα αλυσωτά συμπλέγματα είναι ισόμορφα (αμφότερες οι ομάδες πηλίκο παράγονται ελευθέρως από τα ιδιάζοντα  $n$ -πλέγματα του  $B$  που δεν ανήκουν στο  $A$ ). Συνθέτοντας αυτούς τους δύο ισομορφισμούς προκύπτει ότι  $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$  και ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

**Παρατήρηση 10.5.13.** Επί της ουσίας στην προηγούμενη απόδειξη δείξαμε το εξής: αν ο  $X$  είναι η ένωση των εσωτερικών δύο υπόχωρων του  $A$  και  $B$  (δηλ.  $X = \text{Int}A \cup \text{Int}B$ ), τότε η ένθεση  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  επάγει ισομορφισμούς  $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$  για κάθε  $n$ . Αυτό αποτελεί μια δεύτερη ισοδύναμη εκδοχή του θεωρήματος της εκτομής, αφού, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης, για  $U = X - B$  (και  $B = X - U$ ) έχουμε  $A \cap B = A - U$ ,  $X - \text{Int}B = \overline{X - B} = \bar{U}$  και η συνθήκη  $\bar{U} \subseteq \text{Int}A$  είναι ισοδύναμη με την ισότητα  $X = \text{Int}A \cup \text{Int}B$ .

## 10.6 Εφαρμογές

### Η ομολογία των σφαιρών

Αρχίζουμε με τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας του κύκλου.

**Θεώρημα 10.6.1.** *Ο κύκλος  $S^1$  έχει τις ακόλουθες ομάδες (ιδιάζουσας) ομολογίας*

$$H_n(S^1) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n > 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0 \text{ ή } 1. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα σημεία του κύκλου  $N = (0, 1)$ ,  $S = (0, -1)$  και τα ανοικτά  $A = S^1 \setminus \{N\}$ ,  $B = S^1 \setminus \{S\}$  τα οποία καλύπτουν τον κύκλο. Καθένα από τα  $A, B$  είναι συμπτύξιμο, ως ομοιομορφικό με τον  $\mathbb{R}$ , και ως εκ τούτου έχει την ομολογία σημείου.

Έτσι

$$H_n(A) = H_n(B) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n > 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Η τομή  $A \cap B$  αποτελείται από δύο συμπτύξιμες συνιστώσες, άρα

$$H_n(A \cap B) = H_n(*) \oplus H_n(*) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \geq 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 10.5.10, έχουμε το ακόλουθο τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(S^1) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Για  $n > 1$ , το παραπάνω τμήμα γίνεται

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(S^1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

από όπου προκύπτει ότι  $H_n(S^1) = 0$  για  $n > 1$ .

Για  $n = 1$ , θεωρούμε το ακόλουθο τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας

$$\cdots \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow H_0(S^1) \longrightarrow 0,$$

το οποίο, χρησιμοποιώντας τους υπολογισμούς για τις ομάδες ομολογίας των  $A, B$  και την κατά τόξα συνεκτικότητα του κύκλου, μας δίνει

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Λόγω ακρίβειας, ο ομομορφισμός  $\omega$  είναι 1-1, ενώ ο  $\varphi$  είναι επί. Αφού ο  $\varphi$  είναι επί της άπειρης κυκλικής με πεδίο ορισμού την  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , έπεται ότι  $\text{Ker } \varphi \cong \mathbb{Z}$  και έτσι, από ακρίβεια,  $\text{Im } \psi \cong \mathbb{Z}$ . Ομοίως, αφού ο  $\psi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Im } \psi \cong \mathbb{Z}$  είναι επιμορφισμός, έχουμε ότι  $\text{Ker } \psi \cong \mathbb{Z}$ .

Τελικά,  $H_1(S^1) \cong \text{Im } \omega = \text{Ker } \psi \cong \mathbb{Z}$  και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Για τη γενική περίπτωση έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 10.6.2.** Για κάθε  $n \geq 1$ , οι ομάδες ομολογίας της σφαίρας  $S^n$  δίνονται από τον ακόλουθο τύπο

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } k = n, k = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με  $N$  και  $S$  τον “βόρειο” και “νότιο” πόλο, αντίστοιχα, της σφαίρας  $S^n$ . Τα υποσύνολα  $A = S^n \setminus \{N\}$ ,  $B = S^n \setminus \{S\}$  της σφαίρας είναι ανοικτά, την καλύπτουν και το καθένα είναι ομοιομορφικό με τον χώρο  $\mathbb{R}^n$ . Ιδιαίτερως είναι συμπτύξιμα και έτσι

$$H_k(A) = H_k(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } k = 0 \\ 0, & \text{αν } k > 0. \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Για  $k > 1$ , έχουμε το παρακάτω τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow H_{k-1}(A) \oplus H_{k-1}(B) \rightarrow \cdots$$

το οποίο, λόγω της συμπτυξιμότητας των  $A, B$ , γίνεται

$$0 \rightarrow H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow 0$$

από όπου έπεται ότι οι ομάδες  $H_k(S^n)$  και  $H_{k-1}(A \cap B)$  είναι ισόμορφες. Εφόσον  $A \cap B = S^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\text{σημείο}\}$  και ο τελευταίος χώρος έχει τον ίδιο τύπο ομοτοπίας με τη σφαίρα  $S^{n-1}$ , προκύπτει ότι  $H_k(A \cap B) \cong H_k(S^{n-1})$ . Συνεπώς

$$H_k(S^n) \cong H_{k-1}(A \cap B) \cong H_{k-1}(S^{n-1}), \text{ για } k > 1. \quad (10.8)$$

Για  $k = 1$  και  $n > 1$ , έχουμε το ακόλουθο ακριβές τμήμα

$$\cdots \rightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(S^n) \rightarrow H_0(A \cap B) \rightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \rightarrow H_0(S^n) \rightarrow 0$$



το οποίο (αφού γνωρίζουμε την ομολογία των  $A, B$  και της τομής τους) λαμβάνει τη μορφή

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Λόγω ακρίβειας, ο ομομορφισμός  $\omega$  είναι 1-1, ο  $\varphi$  είναι επί και ακριβώς όπως πριν προκύπτει ότι  $\text{Im } \psi \cong \mathbb{Z}$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\text{Ker } \psi = 0$  και συνεπώς

$$H_1(S^n) \cong \text{Im } \omega = 0, \text{ για } n > 1. \tag{10.9}$$

Το συμπέρασμα τώρα έπεται με επαγωγή επί του  $n$ , το προηγούμενο θεώρημα και τις σχέσεις 10.8, 10.9. □

**Πόρισμα 10.6.3.** Για  $m \neq n$  οι σφαίρες  $S^m$  και  $S^n$  δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμες.

### Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer

**Θεώρημα 10.6.4.** Αν  $n \geq 0$ , τότε δεν υπάρχει συστολή  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ .

*Απόδειξη.* Αν υπήρχε συστολή, για  $n \geq 1$ , τότε θα είχαμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} S^n \hookrightarrow D^{n+1} & & H_n(S^n) \xrightarrow{i_*} H_n(D^{n+1}) \\ \searrow Id & \downarrow r & \searrow Id \quad \downarrow r_* \\ & S^n & H_n(S^n) \end{array}$$

όπου με  $i$  συμβολίζουμε, ως συνήθως, την ένθεση της σφαίρας  $S^n = \partial D^{n+1}$  στον αντίστοιχο δίσκο  $D^{n+1}$ . Εφόσον ο χώρος  $D^{n+1}$  είναι συμπτύξιμος, έχουμε ότι  $H_n(D^{n+1}) = 0$ , για κάθε  $n \geq 1$ , και άρα ο επαγόμενος ομομορφισμός  $i_*$  είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός. Από τη μεταθετικότητα του δεύτερου διαγράμματος έπεται ότι ο ταυτοτικός ομομορφισμός  $Id : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  είναι επίσης τετριμμένος, άτοπο.

Στην περίπτωση που  $n = 0$ , το συμπέρασμα έπεται από το γεγονός ότι η εικόνα κάθε συνεχούς απεικόνισης  $g : D^1 \rightarrow S^0 = \{-1, 1\}$  είναι μονοσύνολο και κατά συνέπεια δεν μπορεί να ισχύει η σχέση  $g \circ i(x) = x$  για κάθε  $x \in \{-1, 1\}$ . □

**Πόρισμα 10.6.5** (Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer). Για κάθε  $n \geq 0$ , κάθε συνεχής απεικόνιση  $f : D^n \rightarrow D^n$  έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει  $x \in D^n$  με  $f(x) = x$ .

*Απόδειξη.* Για  $n = 0$  είναι προφανές. Θεωρούμε  $n$  θετικό και υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, ακριβώς όπως στην περίπτωση για  $n = 2$ , εξασφαλίζουμε την ύπαρξη συστολής  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$  και οδηγούμαστε σε άτοπο σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Πιο συγκεκριμένα, αν  $f(x) \neq x$  για κάθε  $x \in D^n$ , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την ημιευθεία με αρχή το  $f(x)$  που διέρχεται από το  $x$  και να ορίσουμε τη συστολή, θέτοντας  $r(x)$  να είναι το σημείο τομής της ημιευθείας με το σύνορο  $S^n = \partial D^{n+1}$ .  $\square$

### Το αναλλοίωτο της διαστάσεως

Αποδεικνύουμε το αναλλοίωτο της διαστάσεως πρώτα στην περίπτωση των Ευκλείδειων χώρων και στη συνέχεια γενικότερα για πολλαπλότητες.

**Θεώρημα 10.6.6.** *Οι χώροι  $\mathbb{R}^m$  και  $\mathbb{R}^n$  είναι ομοιομορφικοί αν και μόνο αν  $m = n$ .*

*Απόδειξη.* Εφόσον ο χώρος  $\mathbb{R}^m \setminus \{\text{σημείο}\}$ , όπου  $m \geq 2$ , είναι συνεκτικός, ενώ ο χώρος  $\mathbb{R} \setminus \{\text{σημείο}\}$  δεν είναι, έπεται ότι οι χώροι  $\mathbb{R}^m$  και  $\mathbb{R}$  δεν είναι ομοιομορφικοί. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $m, n \geq 2$ . Αν υπάρχει ομοιομορφισμός  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , τότε οι χώροι  $\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  και  $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(\mathbf{0})\}$  είναι ομοιομορφικοί. Όμως ο χώρος  $\mathbb{R}^k \setminus \{\text{σημείο}\}$  έχει τον ίδιο τύπο ομοτοπίας με τη σφαίρα  $S^{k-1}$ . Έπεται ότι οι σφαίρες  $S^{m-1}$  και  $S^{n-1}$  έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας και έτσι  $m = n$ .  $\square$

**Λήμμα 10.6.7.** *Εστω  $U$  ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , όπου  $n \geq 2$ . Αν  $x \in U$ , τότε  $H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq 0$ .*

*Απόδειξη.* Εφόσον το  $U$  είναι ανοικτό, υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , έτσι ώστε η σφαίρα  $S_\varepsilon(x)$  ακτίνας  $\varepsilon$  με κέντρο το  $x$  να περιέχεται στο  $U$ . Θεωρούμε τα ακόλουθα δύο μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc}
 S_\varepsilon(x) & \xleftarrow{i} & \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 U \setminus \{x\} & & 
 \end{array}
 \quad \curvearrowright \quad
 \begin{array}{ccc}
 H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 H_{n-1}(U \setminus \{x\}) & & 
 \end{array}$$

όπου στο πρώτο έχουμε τις αντίστοιχες ενθέσεις και στο δεύτερο τους επαγόμενους ομομορφισμούς στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας. Η ένθεση  $i$  επάγει ισομορφισμό, γιατί είναι ομοτοπική ισοδυναμία (υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \rightarrow S_\varepsilon(x)$ ) και  $H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$ . Από τη μεταθετικότητα του δεύτερου διαγράμματος έπεται ότι  $H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq 0$ .  $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι μια πολλαπλότητα διάστασης  $n$  είναι ένας Hausdorff, δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος  $X$  του οποίου κάθε σημείο  $x$  έχει ανοικτή περιοχή ομοιομορφική με τον  $\mathbb{R}^n$ .

**Θεώρημα 10.6.8.** Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  δεν μπορεί να είναι πολλαπλότητα διάστασης  $m$  και πολλαπλότητα διάστασης  $n$ , αν  $n \neq m$ ,  $n, m \geq 1$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι ο χώρος  $X$  είναι πολλαπλότητα διάστασης  $m$  και πολλαπλότητα διάστασης  $n$  με  $n > m \geq 1$ . Αν  $x \in X$ , τότε το  $x$  έχει ανοικτή περιοχή  $U \subseteq X$  ομοιομορφική με τον  $\mathbb{R}^n$ . Εφόσον το  $U$  είναι ανοικτό υποσύνολο του  $X$  και ο  $X$  είναι πολλαπλότητα διάστασης  $m$ , έχουμε ότι το  $U$  είναι επίσης πολλαπλότητα διάστασης  $m$  και άρα υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V$  του  $x$  με  $V \subseteq U$  και  $V \cong \mathbb{R}^m$ . Αφού  $U \cong \mathbb{R}^n$ , το  $V$  είναι ομοιομορφικό με ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι  $H_{n-1}(V \setminus \{x\}) \neq 0$ . Όμως  $V \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  και έτσι  $H_{n-1}(V \setminus \{x\}) = H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}) = H_{n-1}(S^{m-1}) = 0$ , το οποίο μας δίνει την επιθυμητή αντίφαση που ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## Η ομολογία των επιφανειών

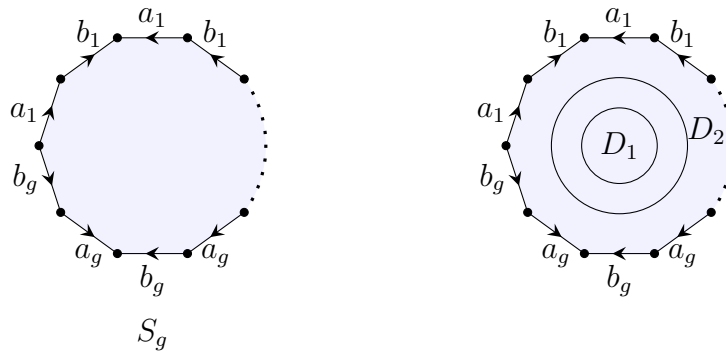
Υπολογίζουμε πρώτα τις ομάδες ομολογίας των κλειστών (δηλαδή, συμπαγών χωρίς σύνορο) προσανατολίσιμων επιφανειών.

**Θεώρημα 10.6.9.** Έστω  $S_g$  η κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους  $g \geq 1$ . Τότε

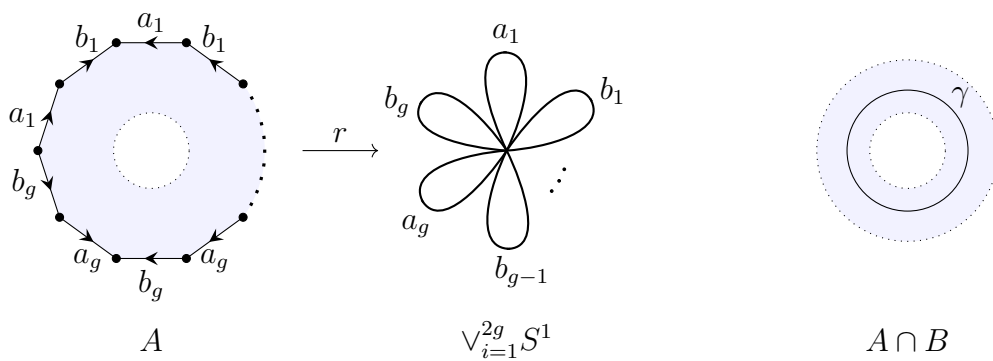
$$H_n(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0 \text{ ή } 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & \text{αν } n = 1 \\ 0, & \text{αν } n \geq 3. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι η επιφάνεια  $S_g$  προκύπτει από μια σφήνα  $\bigvee_{i=1}^{2g} S^1$ ,  $2g$  το πλήθος κύκλων με ετικέτες  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ , επισυνάπτοντας ένα κελί διάστασης 2 κατά μήκος του μονοπατιού  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Δηλαδή επιδέχεται μια πολυγωνική παράσταση όπως φαίνεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος 10.4. Με άλλα λόγια, η  $S_g$  προκύπτει ως χώρος πηλίκο από ένα πολύγωνο με  $4g$  το πλήθος πλευρές, ταυτοποιώντας ζεύγη πλευρών σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.

Θεωρούμε κλειστούς δίσκους  $D_1$  και  $D_2$  στην επιφάνεια, ο ένας εντός του άλλου, όπως φαίνεται στη δεξιά πλευρά του σχήματος 10.4 και τα ανοικτά  $A = S_g \setminus D_1$ ,  $B =$



Σχήμα 10.4



Σχήμα 10.5

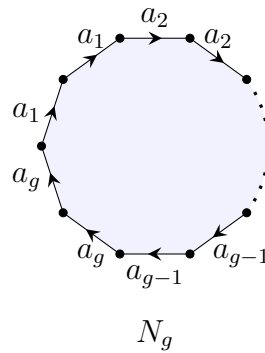
$\text{Int}D_2$ . Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση  $r$  από το  $A$  στο σύνορό του πολυγώνου  $\bigvee_{i=1}^{2g} S^1$  και ως εκ τούτου το  $A$  έχει τον τύπο ομοτοπίας της σφίνας  $\bigvee_{i=1}^{2g} S^1$  των  $2g$  κύκλων της οποίας την ομολογία υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας την Άσκηση 7. Το  $B$  έχει τον τύπο ομοτοπίας σημείου (περιστέλλεται σε σημείο) και η τομή  $A \cap B$  έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου (περιστέλλεται στον κύκλο  $\gamma$ , βλέπε σχήμα 10.5). Συνεπώς, εφόσον οι ομάδες ομολογίας είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο, έχουμε

$$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad H_n(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$H_n(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} . \end{cases}$$





Σχήμα 10.6

και έτσι  $\varphi([\gamma]) = [a_1^2 \cdots a_g^2] = [a_1]^2 \cdots [a_g]^2 \neq 0$ . Εφόσον η απεικόνιση  $\varphi$  είναι μονομορφισμός από το ακριβές τμήμα

$$0 \longrightarrow H_2(N_g) \xrightarrow{\omega} H_1(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{\psi} H_1(N_g) \longrightarrow 0$$

προκύπτει ότι  $H_2(N_g) \cong \text{Im } \omega = \text{Ker } \varphi = 0$ . Για τον υπολογισμό της  $H_1(N_g)$ , έχουμε

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^g / \text{Ker } \psi = \mathbb{Z}^g / \text{Im } \varphi = \frac{\langle [a_1] \rangle \oplus \cdots \oplus \langle [a_g] \rangle}{\langle [a_1]^2 \cdots [a_g]^2 \rangle} = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

□

Για τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας πεπερασμένων συμπλεγμάτων κελιών, γενικότερα, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [5].

### Το γενικευμένο θεώρημα της καμπύλης του Jordan

Το κλασικό θεώρημα της καμπύλης του Jordan μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Έστω  $K$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  ομοιομορφικό με τον κύκλο  $S^1$ . Τότε το συμπλήρωμά του  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  αποτελείται από δύο ακριβώς συνιστώσες και το  $K$  είναι το σύνορο (με την τοπολογική έννοια) της καθεμιάς.

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε, με τη βοήθεια της ακολουθίας Mayer-Vietoris, μια γενίκευση του θεωρήματος αυτού στον  $\mathbb{R}^n$ .

**Θεώρημα 10.6.11.** Δοθείσης μιας εμφυτεύσεως  $f : D^k \rightarrow S^n$ , όπου  $0 \leq k \leq n$ , έχουμε ότι  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$ , για κάθε  $i$ . Ιδιαίτερος, το κλειστό κελί  $f(D^k)$  δεν διαχωρίζει τη σφαίρα  $S^n$ , δηλαδή, ο χώρος  $S^n \setminus f(D^k)$  είναι συνεκτικός.

*Απόδειξη.* Στη συνέχεια, ταυτίζουμε τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο  $D^k$  με τον αντίστοιχο κύβο  $I^k$  και συμβολίζουμε την εικόνα  $f(D^k)$  με  $B$ . Σταθεροποιούμε το  $n$  και αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος με επαγωγή επί του  $k$ . Για  $k = 0$  το  $B$  είναι σημείο. Αν  $n = 0$ , τότε το  $S^n \setminus B$  είναι μονοσύνολο και το συμπέρασμα ισχύει. Αν  $n > 0$ , τότε  $S^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n$  και το συμπέρασμα έπεται πάλι άμεσα, αφού ο  $\mathbb{R}^n$  έχει τον τύπο ομοτοπίας σημείου. Αν  $k \geq 1$ , τότε, προχωρώντας επαγωγικά, υποθέτουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα για  $k - 1$  και εκφράζουμε το  $B$  ως ένωση  $B = B_1 \cup B_2$ , όπου  $B_1 = f(I^{k-1} \times [0, 1/2])$  και  $B_2 = f(I^{k-1} \times [1/2, 1])$ . Σημειώνουμε ότι τα  $B_i$  είναι κλειστά  $k$ -κελιά στην  $S^n$ . Θεωρούμε επίσης το κλειστό  $(k-1)$ -κελί  $\Gamma = f(I^{k-1} \times \{1/2\}) = B_1 \cap B_2$  και το συμπλήρωμά του  $X = S^n \setminus \Gamma$  (για το οποίο ισχύει το συμπέρασμα από επαγωγική υπόθεση).

Έστω  $a = [\sigma]$  ένα μη μηδενικό στοιχείο της ομάδας  $\tilde{H}_i(S^n \setminus B)$ . Τα  $X_i = S^n \setminus B_i$ , για  $i = 1, 2$ , είναι ανοικτοί υπόχωροι του  $X$  και  $X = X_1 \cup X_2$ . Από την ακολουθία Mayer-Vietoris προκύπτει το ακόλουθο ακριβές τμήμα

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_i(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_i(X_1) \oplus \tilde{H}_i(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_i(X) \longrightarrow \cdots,$$

όπου  $\varphi(a) = (i_*(a), j_*(a))$  και  $i_*, j_*$  είναι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί (στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας) των ενθέσεων  $i : S^n \setminus B \hookrightarrow S^n \setminus B_1$  και  $j : S^n \setminus B \hookrightarrow S^n \setminus B_2$ , αντίστοιχα. Από την επαγωγική υπόθεση  $\tilde{H}_{i+1}(X) = \tilde{H}_i(X) = 0$ . Άρα  $\tilde{H}_i(X_1 \cap X_2) \cong \tilde{H}_i(X_1) \oplus \tilde{H}_i(X_2)$  και συνεπώς ένα από τα στοιχεία  $i_*(a), j_*(a)$  είναι επίσης μη τετριμμένο (αφού  $a \neq 0$  και  $X_1 \cap X_2 = S^n \setminus B$ ). Ας υποθέσουμε ότι  $i_*(a) \neq 0$ . Γράφουμε το  $B_1$  ως ένωση κλειστών  $k$ -κελιών  $B_1 = B_{11} \cup B_{12}$ , όπου  $B_{11} = f(I^{k-1} \times [0, 1/4])$  και  $B_{12} = f(I^{k-1} \times [1/4, 1/2])$ . Όπως πριν, η εικόνα (της εικόνας) του  $a$  θα είναι μη τετριμμένη σε τουλάχιστον μια από τις ομάδες  $\tilde{H}_i(S^n \setminus B_{11}), \tilde{H}_i(S^n \setminus B_{12})$ .

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μια (γνησίως) φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων

$$[x_1, y_1] \supseteq [x_2, y_2] \supseteq \cdots [x_m, y_m] \supseteq \cdots$$

του  $I = [0, 1]$ , όπου το μήκος του κάθε διαστήματος είναι το μισό του προηγούμενου, έτσι ώστε η εικόνα του  $a$  είναι μη τετριμμένο στοιχείο στην ομάδα  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I^{k-1} \times [x_m, y_m]))$ . Εφόσον τα μήκη των παραπάνω κλειστών διαστημάτων τείνουν στο μηδέν, η τομή τους είναι μονοσύνολο, δηλαδή  $\bigcap_{i=1}^{\infty} [x_i, y_i] = \{p\}$ . Το σύνολο  $f(I^{k-1} \times \{p\})$  είναι κλειστό  $(k-1)$ -κελί στην  $S^n$  το οποίο ισούται με την τομή  $\bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$  της γνησίως φθίνουσας ακολουθίας των  $k$ -κελιών  $D_m = f(I^{k-1} \times [x_m, y_m])$ . Από επαγωγική υπόθεση  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(I^{k-1} \times \{p\})) = 0$ . Συνεπώς, η εικόνα του  $\sigma$  στον υπόχωρο  $S^n \setminus f(I^{k-1} \times \{p\})$

είναι σύνορο, δηλαδή  $\sigma \in \text{Im } \partial_{i+1}$ . Έστω, λοιπόν,  $\tau$  μια ιδιάζουσα  $(i+1)$ -αλυσίδα στον  $S^n \setminus f(I^{k-1} \times \{p\})$  με  $\partial\tau = \sigma$ . Το  $K = \text{Im } \tau$  είναι συμπαγές ως πεπερασμένη ένωση συμπαγών, αφού είναι η εικόνα των συνεχών απεικονίσεων που ορίζουν τα πεπερασμένα το πλήθος πλέγματα που απαρτίζουν την αλυσίδα  $\tau$ . Παρατηρούμε ότι η σφαίρα γράφεται ως ένωση ανοικτών ως εξής:

$$S^n = (S^n \setminus K) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} (S^n \setminus D_m) \right).$$

Εφόσον  $S^n \setminus D_m \subseteq S^n \setminus D_{m+1}$  για κάθε  $m$ , από τη συμπάγεια της  $S^n$  έπεται ότι  $K \subseteq S^n \setminus D_m$  για κάποιο  $m$  και ως εκ τούτου  $\partial\tau = \sigma$  στο  $S^n \setminus D_m$ , το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι η εικόνα του  $a = [\sigma]$  είναι μη τετριμμένο στοιχείο στην  $\tilde{H}_i(S^n \setminus D_m)$ .  $\square$

**Θεώρημα 10.6.12.** Έστω  $f : S^k \rightarrow S^n$  μια εμφύτευση, όπου  $n > k \geq 0$ . Τότε

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } i = n - k - 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Αν  $k = 0$ , τότε  $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Αφού ο  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  έχει τον τύπο ομοτοπίας της  $S^n$ , προκύπτει ότι

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^0)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } i = n - 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για  $k \geq 1$ , χρησιμοποιούμε επαγωγή και εκφράζουμε τη σφαίρα  $S^k$  ως ένωση των δύο ημισφαιρίων  $D_+^k$  (άνω) και  $D_-^k$  (κάτω) με  $D_+^k \cap D_-^k = S^{k-1}$ . Σημειώνουμε ότι καθένα από τα δύο ημισφαίρια είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο  $D^k$ . Έστω  $A = S^n \setminus f(D_+^k)$  και  $B = S^n \setminus f(D_-^k)$ . Τα  $A, B$  είναι ανοικτά, η ένωσή τους ισούται με  $S^n \setminus f(S^{k-1})$  και η τομή τους με  $S^n \setminus f(S^k)$ . Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα τα  $A, B$  έχουν τετριμμένες ομάδες ανηγμένης ομολογίας. Συνεπώς, από την ακολουθία Mayer-Vietoris προκύπτει ότι  $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^k)) \cong \tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^{k-1}))$  που μαζί με την επαγωγική υπόθεση ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Θεώρημα 10.6.13** (Το γενικευμένο θεώρημα της καμπύλης του Jordan). Έστω  $n > 0$  και  $K$  υποσύνολο της σφαίρας  $S^n$  ομοιομορφικό με την  $S^{n-1}$ . Τότε το συμπλήρωμα  $S^n \setminus K$  έχει ακριβώς δύο συνιστώσες, οι οποίες έχουν κοινό σύνορο το  $K$ .

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι η  $S^n$  είναι χώρος τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και έτσι οι συνιστώσες ενός υπόχωρου ταυτίζονται με τις κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες αυτού.



Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για  $k = n - 1$ , έχουμε ότι  $\tilde{H}_0(S^n \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ . Αυτό σημαίνει ότι το συμπλήρωμα  $S^n \setminus K$  αποτελείται από δύο ακριβώς συνιστώσες, έστω  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , οι οποίες είναι ανοικτά υποσύνολα της  $S^n$  (αφού  $S^n$  τοπικά κατά τόξα συνεκτικός χώρος). Έτσι για το (τοπολογικό) σύνορο του  $\Sigma_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , έχουμε:  $\text{Bd}\Sigma_i = \overline{\Sigma}_i \setminus \text{Int}(\Sigma_i) = \overline{\Sigma}_i \setminus \Sigma_i$ .

Συνεπώς, για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να δείξουμε ότι  $\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1 = K = \overline{\Sigma}_2 \setminus \Sigma_2$ . Αρκεί να δειχθεί η μία ισότητα (λόγω συμμετρίας). Εφόσον το  $\Sigma_2$  είναι ανοικτό, κανένα σημείο του δεν είναι οριακό σημείο του  $\Sigma_1$  (διαφορετικά κάθε περιοχή του υποτιθέμενου οριακού σημείου θα έτεμνε το  $\Sigma_1$  το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ ). Ως εκ τούτου  $\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1 \subseteq K$ .

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι  $K \subseteq \overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1$ , αποδεικνύοντας ότι κάθε σημείο του  $K$  ανήκει στην κλειστότητα του  $\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1$  (το οποίο όμως είναι κλειστό). Δηλαδή, θα δείξουμε ότι για κάθε  $x \in K$  και κάθε ανοικτή περιοχή  $U$  του  $x$ , έχουμε ότι  $U \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1) \neq \emptyset$ . Εφόσον το  $K$  είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα  $S^{n-1}$ , μπορούμε να το εκφράσουμε ως ένωση δύο κλειστών  $(n - 1)$ -κελιών  $K_1$  και  $K_2$  (ομοιομορφικά αντίτυπα ημισφαιρίων), έτσι ώστε  $K_1 \subset U$  (αρκεί να θεωρήσουμε το  $K_1$  εντός μιας “μικρής” μπάλας εντός του  $U$ ). Από το Θεώρημα 10.6.11, το κελί  $K_2$  δεν διαχωρίζει την  $S^n$  και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε μονοπάτι  $p$  στο συμπλήρωμα  $S^n \setminus K_2$  από σημείο του  $\Sigma_1$  σε σημείο του  $\Sigma_2$ . Αυτό μπορεί να γίνει γιατί  $(S^n \setminus K_2) \cap \Sigma_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i \in \{1, 2\}$ , αφού  $\Sigma_i \cap K = \emptyset$ . Παρατηρούμε ότι  $\text{Im } p \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1) \neq \emptyset$ . Πράγματι, διαφορετικά η εικόνα  $\text{Im } p$  θα περιείχε στην ένωση των  $\Sigma_1$  και  $(S^n \setminus \overline{\Sigma}_1)$  τα οποία είναι ανοικτά, ξένα, και το καθένα από αυτά τέμνει μη τετριμμένα την εικόνα  $\text{Im } p$  του μονοπατιού  $p$  (το  $p$  ενώνει σημείο του  $\Sigma_1$  με σημείο του  $\Sigma_2$ ). Αυτό όμως αντιφάσκει στη συνεκτικότητα της εικόνας  $\text{Im } p$ .

Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε σημείο  $y \in \text{Im } p \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1)$ . Τότε  $y \in \overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1 \subseteq K = K_1 \cup K_2$  και αφού  $\text{Im } p \subseteq S^n \setminus K_2$ , έπεται ότι  $y \in K_1$  και άρα  $y \in U$ . Δηλαδή,  $U \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Παρατήρηση 10.6.14.** Ενδεχομένως ο αναγνώστης θα περίμενε ότι, υπό τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, τα σύνολα  $\overline{\Sigma}_1$  και  $\overline{\Sigma}_2$  είναι  $n$ -κελιά. Αυτό όμως δεν ισχύει εν γένει, όπως δεν ισχύει ότι οι συνιστώσες είναι ανοικτές μπάλες. Υπάρχει παράδειγμα εμφύτευσης  $S^2 \hookrightarrow S^3$  για την οποία η μια από τις δύο συνιστώσες δεν είναι απλά συνεκτική [3, Example 2B.2].

Τέλος, διατυπώνουμε μια εκδοχή του θεωρήματος για σφαίρες που εμφυτεύονται στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$  αντί για τη σφαίρα  $S^n$ .

**Πόρισμα 10.6.15.** Έστω  $K$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  ομοιομορφικό με τη σφαίρα  $S^{n-1}$ , όπου  $n > 1$ . Τότε το συμπλήρωμα  $\mathbb{R}^n \setminus K$  αποτελείται από δύο ακριβώς συνιστώσες, οι οποίες έχουν κοινό σύνορο (τοπολογικά) το  $K$ .

*Απόδειξη.* Ταυτίζουμε (ομοιομορφικά) τον χώρο  $\mathbb{R}^n$  με τον υπόχωρο  $S^n \setminus \{N\}$  της σφαίρας  $S^n$ , όπου ως συνήθως  $N$  είναι ο “βόρειος” πόλος της σφαίρας. Έχουμε αποδείξει ότι το συμπλήρωμα  $S^n \setminus K$  έχει δύο συνιστώσες  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με κοινό σύνορο  $K$ . Αφού το  $N$  δεν ανήκει στο  $K$ , θα ανήκει είτε στο  $\Sigma_1$  είτε στο  $\Sigma_2$ . Ας υποθέσουμε ότι ανήκει στο  $\Sigma_1$  (ομοίως η άλλη περίπτωση). Τότε το  $\Sigma_1 \setminus \{N\}$  είναι συνεκτικό, γιατί το  $\Sigma_1$  είναι ανοικτό, συνεκτικό και  $n > 1$ . Έπεται ότι τα σύνολα  $\Sigma_1 \setminus \{N\}$  και  $\Sigma_2$  είναι οι συνιστώσες του  $\mathbb{R}^n \setminus K$  και το  $K$  είναι το κοινό σύνορό τους.  $\square$

## Ασκήσεις

10.1 (**Φυσικότητα**) Έστω  $X, Y$  δύο τοπολογικοί χώροι και  $A, B$  υπόχωροι των  $X, Y$ , αντίστοιχα. Μια απεικόνιση  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  μεταξύ των ζευγών, είναι μια συνεχής απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$ , έτσι ώστε  $f(A) \subseteq B$ . Να δειχθεί ότι κάθε απεικόνιση  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  επάγει ομομορφισμούς  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  στις αντίστοιχες ομάδες σχετικής ομολογίας για τους οποίους το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(Οι απεικονίσεις  $i$  και  $j$ , για κάθε ζεύγος, είναι αυτές που εισάγονται μετά τον Ορισμό 10.2.6.)

10.2 Έστω  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \Gamma \longrightarrow 0$  μια βραχεία ακολουθία αβελιανών ομάδων. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

- (1) Η υποομάδα  $\varphi(A)$  είναι ευθύς προσθετός της  $B$ . Δηλαδή υπάρχει υποομάδα  $K$  της  $B$  τέτοια, ώστε  $B = \varphi(A) \oplus K$ .
- (2) Υπάρχει ομομορφισμός  $\pi : B \rightarrow A$ , έτσι ώστε  $\pi \circ \varphi = \text{Id}_A$ .
- (3) Υπάρχει ομομορφισμός  $\tau : \Gamma \rightarrow B$ , έτσι ώστε  $\psi \circ \tau = \text{Id}_\Gamma$ .

Αν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις τρεις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε λέμε ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία είναι **διασπώμενη**. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων αβελιανών ομάδων, προκύπτει εύκολα ότι η β.α.α. είναι διασπώμενη αν η ομάδα  $\Gamma$  είναι ελεύθερη αβελιανή.

10.3 Έστω  $r : X \rightarrow A$  μια συστολή (retraction) από έναν χώρο  $X$  σε έναν υπόχωρο  $A$ . Αποδείξτε ότι  $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$  για κάθε  $n$ .

10.4 Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος,  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  οι κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες του  $X$  και  $A$  ένας υπόχωρος του  $X$ . Τότε

$$(1) \quad H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A \cap X_\lambda).$$

(2) Η ομάδα  $H_0(X, A)$  είναι ελεύθερη αβελιανή με διάσταση ίση με το πλήθος των συνιστωσών  $X_\lambda$  που έχουν κενή τομή με το  $A$ .

10.5 Υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας  $H_n(S^2, A)$  του ζεύγους  $(S^2, A)$ , όπου το  $A$  αποτελείται από δύο σημεία της σφαίρας  $S^2$ . Υπόδειξη: η απεικόνιση  $H_0(A) \rightarrow H_0(S^2)$  που επάγεται από την αντίστοιχη ένθεση, απεικονίζει κάθε γεννήτορα της  $H_0(A)$  στον γεννήτορα της  $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ .

10.6 Να βρεθεί τύπος για τη συστολή που περιγράφεται στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer.

10.7 Έστω  $X, Y$  ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων και  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  με την ιδιότητα ότι υπάρχουν ανοικτές περιοχές  $U, V$  των σημείων  $x_0, y_0$ , αντίστοιχα, και συστέλλουσες παραμορφώσεις  $U \rightarrow \{x_0\}, V \rightarrow \{y_0\}$ . Αν με  $X \vee Y$  συμβολίσουμε τη σφήνα των δύο χώρων που προκύπτει, ταυτοποιώντας το  $x_0$  με το  $y_0$  (δηλαδή τον χώρο πηλίκου  $X \sqcup Y / (x_0 \equiv y_0)$ ), τότε  $H_n(X \vee Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y)$ , για κάθε  $n > 0$ . Γενικεύστε για πεπερασμένο το πλήθος χώρους.

10.8 Οι χώροι  $S^1 \times S^1$  και  $S^1 \vee S^1 \vee S^2$  έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας (σε όλες τις διαστάσεις), όμως τα καθολικά τους καλύμματα όχι. Υπόδειξη: το ένα κάλυμμα είναι συμπτύξιμος χώρος ενώ το άλλο όχι.

10.9 Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε πεπερασμένο γράφημα είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με μια σφήνα πεπερασμένων το πλήθος κύκλων και την προηγούμενη άσκηση, υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας ενός τυχαίου πεπερασμένου γραφήματος  $X$ .

- 10.10 Για έναν τοπολογικό χώρο  $X$  θεωρούμε τον χώρο  $Y = X \sqcup_f D^k$  που λαμβάνεται επισυνάπτοντας ένα  $k$ -κελί στον  $X$  μέσω μιας (συνεχούς πάντα) απεικόνισης  $f : S^{k-1} \rightarrow X$ . Αποδείξτε ότι  $H_n(X \sqcup_f D^k) = H_n(X)$  αν  $n \neq k, k-1$ .
- 10.11 Η **ανάρτηση** (suspension)  $\Sigma X$  ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι ο χώρος πηλίκο που λαμβάνεται από τον  $X \times [-1, 1]$ , θεωρώντας τα υποσύνολα  $X \times \{-1\}$  και  $X \times \{1\}$  ως μονοσύνολα. Δηλαδή είναι δύο κώνοι του  $X$  κολλημένοι στις βάσεις τους. Αποδείξτε ότι για κάθε χώρο  $X$  και κάθε  $n$  υπάρχει ισομορφισμός  $\tilde{H}_n(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{n-1}(X)$ .
- 10.12 Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση και την Πρόταση 10.1.13 για να υπολογίσετε εκ νέου τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών.
- 10.13 Έχοντας υπολογίσει τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών, η έννοια του βαθμού που είδαμε για απεικονίσεις από τον κύκλο στον εαυτό του γενικεύεται ως εξής. Δοθείσης μιας (πάντα συνεχούς) απεικόνισης  $f : S^n \rightarrow S^n$ , θεωρούμε τον επαγόμενο ομομορφισμό  $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ . Εφόσον η ομάδα  $H_n(S^n)$  είναι άπειρη κυκλική, ο επαγόμενος ομομορφισμός θα δίνεται με πολ/μό με έναν ακέραιο. Δηλαδή θα είναι της μορφής  $f_*([\sigma]) = k[\sigma]$ . Ο ακέραιος  $k$  ονομάζεται **βαθμός** της  $f$  και συμβολίζεται με  $\deg f$ . Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες:
- (i)  $\deg \text{Id}_{S^n} = 1$ .
  - (ii) Ομοτοπικές απεικονίσεις  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  έχουν τον ίδιο βαθμό.
  - (iii)  $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$ .
  - (iv) Αν η  $f : S^n \rightarrow S^n$  επεκτείνεται σε συνεχή απεικόνιση  $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow S^n$ , τότε  $\deg f = 0$ .
  - (v) Αν η  $f$  είναι ανάκλαση ως προς κάποιο υπερεπίπεδο του  $\mathbb{R}^{n+1}$ , τότε  $\deg f = -1$ .
  - (vi) Αν η  $f = \alpha$  είναι η αντιποδική απεικόνιση, τότε  $\deg \alpha = (-1)^{n+1}$ .
  - (vii) Αν η  $f : S^n \rightarrow S^n$  δεν είναι επί, τότε  $\deg f = 0$ .
  - (viii) Αν η  $f : S^n \rightarrow S^n$  δεν έχει σταθερά σημεία, τότε  $\deg f = (-1)^{n+1}$ .
- Υπόδειξη για το (v): έστω ότι η  $f$  είναι η  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Κατά τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας των σφαιρών, αποδείξαμε την ύπαρξη ισομορφισμού  $\varphi : H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1})$ . Έστω  $\mu_0 = [+1] - [-1] \in H_0(S^0)$ ,  $\mu_1 \in H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1)$  ο συνήθης γεννήτορας ( $t \mapsto e^{2\pi it}$ ) της  $H_1(S^1)$  και ορίζουμε τον γεννήτορα  $\mu_n$  της  $H_n(S^n)$  μέσω της σχέσης  $\varphi(\mu_n) = \mu_{n-1}$ . Η “φυσικότητα” του  $\varphi$  δίνει ότι  $f_*(\mu_n) = -\mu_n$ .

- 10.14 Έστω  $f : S^n \rightarrow S^n$  μια απεικόνιση μηδενικού βαθμού. Αποδείξτε ότι υπάρχουν σημεία  $x, y \in S^n$ , έτσι ώστε  $f(x) = x$  και  $f(y) = -y$ .
- 10.15 Για έναν τοπολογικό Hausdorff χώρο και  $x \in X$ , οι ομάδες **τοπικής ομολογίας** του  $X$  στο  $x$  είναι οι ομάδες  $H_n(X, X - \{x\})$ . Να δειχθεί ότι:
- (1)  $H_n(X, X - \{x\}) \cong H_n(U, U - \{x\})$ , για κάθε ανοικτή περιοχή  $U$  του  $x$ .
- (2)  $H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } n \neq m \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$
- 10.16 Αποδείξτε ότι κάθε ομοιομορφισμός  $f : D^n \rightarrow D^n$  απεικονίζει το σύνορο επί του συνόρου, δηλαδή  $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$ .
- 10.17 Χρησιμοποιήστε ομάδες τοπικής ομολογίας για να αποδείξετε ότι μια πολλαπλότητα διάστασης  $m$  και μια πολλαπλότητα διάστασης  $n$  δεν είναι ομοιομορφικές, αν  $m \neq n$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] G. E. Bredon. *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 139, Springer, 1993.
- [2] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.
- [3] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at <http://www.math.cornell.edu/hatcher>
- [4] P. J. Hilton and S. Wylie. *Homology Theory*, Cambridge University Press, 1967.
- [5] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.
- [6] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.
- [7] J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.