Κεφάλαιο 9

Ταξινόμηση Επικαλύψεων

Περιεχόμενα

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε πρώτα, για μια μεγάλη κατηγορία τοπολογικών χώρων, την ύπαρξη απλά συνεκτικών (καθολικών) χώρων επικάλυψης. Επίσης, δοθείσης της ύπαρξης καθολικού χώρου επικάλυψης για έναν χώρο X, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας μεταξύ των χώρων επικάλυψης του X (ως προς ισομορφισμό επικαλύψεων) και των κλάσεων συζυγίας των υποομάδων της $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 \in X$. Τέλος, μελετάμε μετασχηματισμούς χώρων επικάλυψης.

9.1 Ύπαρξη Απλά Συνεκτικών Χώρων Επικάλυψης

Έχουμε ήδη δει παραδείγματα επικαλύψεων $p : \widetilde{X} \to X$, όπου ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός (όπως οι γνωστές επικαλύψεις $\mathbb{R} \to S^1$, $S^n \to \mathbb{RP}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$) και θα μπορούσε να πει κανείς ότι αρκετά συχνά είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε έναν απλά συνεκτικό χώρο επικάλυψης για έναν συγκεκριμένο τοπολογικό χώρο. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται από το επόμενο θεώρημα του οποίου η απόδειξη που θα

[0]https://eclass.uoa.gr/courses/MATH536/

δώσουμε είναι κατασκευαστική και η κατασκευή βασίζεται στις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X, x_0 ένα σημείο αναφοράς του X και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Υποθέτουμε ότι ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός.

- Έστω U_{x_0} στοιχειώδης περιοχή του x_0 με αντίστοιχες συνιστώσες $V_j^{x_0}$, $j \in J$. Κάθε θηλειά f στο x_0 που περιέχεται στην περιοχή U_{x_0}, ανυψώνεται σε θηλειά $\tilde{f}$ στο $\tilde{x}_0$, η οποία περιέχεται στη συνιστώσα V_j που περιέχει το $\tilde{x}_0$. Συνεπώς, ο ομομορφισμός
$$p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
απεικονίζει το στοιχείο $[\tilde{f}]$ στο $[f]$. Εφόσον ο χώρος $\widetilde{X}$ έχει υποτεθεί απλά συνεκτικός, έχουμε $[\tilde{f}] = [C_{\tilde{x}_0}]$ και έτσι $[f] = [C_{x_0}]$. Δηλαδή, θηλειές του X που περιέχονται σε αρκούντως μικρές περιοχές είναι ομοτοπικές με σημείο.

- Εφόσον ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός, για κάθε $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ υπάρχει μοναδική κλάση ομοτοπίας μονοπατιών $[\tilde{f}]$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}$. Έτσι το $\tilde{x}$ μπορεί να ληφθεί ως το πέρας της ανυψώσεως με αρχή $\tilde{x}_0$ του μονοπατιού $p \circ \tilde{f}$ (κάθε άλλη ανύψωση θα έχει το ίδιο τέλος). Έχουμε λοιπόν μια αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του $\widetilde{X}$ και των κλάσεων ομοτοπίας μονοπατιών του X με αρχή το $\tilde{x}_0$.

Ορισμός 9.1.1. Ένας χώρος X λέγεται **ημιτοπικά απλά συνεκτικός** (semilocally simply connected), αν κάθε σημείο x του X έχει ανοικτή περιοχή U, έτσι ώστε ο επαγόμενος από την ένθεση ομομορφισμός $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

Παράδειγμα 9.1.2. Κάθε απλά συνεκτικός χώρος είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως διαπιστώνουμε, αν θεωρήσουμε τον κύκλο.

Παράδειγμα 9.1.3. Αν κάθε σημείο x ενός χώρου X έχει συμπτύξιμη ανοικτή περιοχή, τότε ο χώρος X είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε σύμπλεγμα κελιών και κάθε πολλαπλότητα απολαμβάνουν την παραπάνω ιδιότητα. Συνεπώς, κάθε σύμπλεγμα κελιών και κάθε πολλαπλότητα είναι χώρος ημιτοπικά απλά συνεκτικός.

Παράδειγμα 9.1.4. Για κάθε θετικό φυσικό n, θεωρούμε τον κύκλο C_n του επιπέδου ακτίνας $1/n$ με κέντρο το σημείο $(1/n, 0)$ και τον χώρο $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ με την τοπολογία που κληρονομεί ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Τότε κάθε περιοχή του $x_0 = (0, 0)$ περιέχει κύκλο και άρα ο X δεν είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός.

Ορισμός 9.1.5. Ένας χώρος X λέγεται **τοπικά κατά τόξα συνεκτικός**, αν για κάθε σημείο $x \in X$ και κάθε ανοικτή περιοχή U του x, υπάρχει κατά τόξα συνεκτική περιοχή του X που περιέχεται στην περιοχή U.

Όπως υποψιάζεται κανείς, ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος δεν είναι απαραιτήτως τοπικά κατά τόξα συνεκτικός. Πράγματι, για κάθε ρητό q στο $[0,1]$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0, q]$ του επιπέδου που ενώνει το $x_0 = (1/2, 1)$ με το $(q, 0)$ και τον χώρο $X = \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} [x_0, q]$ (με την τοπολογία που έχει ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Ο χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός αλλά όχι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός, αφού κάθε ανοικτή περιοχή ρητού στο $[0,1]$ αποτελείται από άπειρες το πλήθος κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες.

Θεώρημα 9.1.6. *Κάθε κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος X επικαλύπτεται από έναν απλά συνεκτικό χώρο $\widetilde{X}$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$. Σύμφωνα με την ανάλυση που έχει προηγηθεί, ορίζουμε ως $\widetilde{X}$ τις κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών του X με αρχή το x_0, δηλαδή,

$$\widetilde{X} = \big\{[f] : f \text{ μονοπάτι του } X \text{ με αρχή το } x_0\big\}.$$

Ορίζουμε επίσης $p : \widetilde{X} \to X$ με $p([f]) = f(1)$. Σημειώνουμε πως ο ορισμός της απεικονίσεως p δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο f της κλάσεως ομοτοπίας που θα επιλεγεί, αφού ομοτοπικά μονοπάτια έχουν το ίδιο τέλος. Επίσης, η κατά τόξα συνεκτικότητα του χώρου X συνεπάγεται ότι η p είναι επί.

Για κάθε $x \in X$, θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{U}_x$ που αποτελείται από όλες τις ανοικτές, κατά τόξα συνεκτικές περιοχές U του x για τις οποίες ο ομομορφισμός $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$, που επάγεται από την ένθεση $U \hookrightarrow X$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

Εφόσον ο X είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός, η οικογένεια $\mathcal{U}_x$ αποτελεί βάση περιοχών του x (αυτό σημαίνει ότι τις περιοχές U του Ορισμού 9.1.1 μπορούμε να τις θεωρούμε όσο "μικρές" θέλουμε). Πράγματι, αν η U είναι μια περιοχή του x της οποίας η ένθεση επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό, τότε και ο επαγόμενος ομομορφισμός κάθε περιοχής V του x με $V \subseteq U$ είναι επίσης ο τετριμμένος, όπως προκύπτει από τη μεταθετικότητα του ακόλουθου διαγράμματος που επάγεται από τις αντίστοιχες ενθέσεις.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V,x) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(U,x) \arrow[d] \\ & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, για κάθε ανοικτή περιοχή U_1 του x, η τομή $U \cap U_1$ (και άρα η U_1) περιέχει κατά τόξα συνεκτική περιοχή $V_1 \in \mathcal{U}_x$. Αυτές οι βάσεις περιοχών των σημείων του X θα χρησιμοποιηθούν για να εφοδιάσουμε το σύνολο $\widetilde{X}$ με δομή τοπολογικού χώρου.

Η τοπολογία του $\widetilde{X}$: Για κάθε στοιχείο $[f] \in \widetilde{X}$ και $U \in \mathcal{U}_{f(1)}$, ορίζουμε

$$[f \cdot U] = \Big\{[f \cdot \alpha] \in \widetilde{X} : \text{όπου } \alpha \text{ μονοπάτι στο } U \text{ με αρχή } f(1)\Big\}$$

και

$$\mathcal{B} = \Big\{[f \cdot U] : [f] \text{ και } U \text{ όπως πριν}\Big\}.$$

Θα δείξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία του $\widetilde{X}$ με την οποία θα θεωρούμε στη συνέχεια το $\widetilde{X}$ εφοδιασμένο.

- Τα σύνολα της $\mathcal{B}$ καλύπτουν τον χώρο $\widetilde{X}$, αφού για κάθε $[f] \in \widetilde{X}$ και κάθε περιοχή $U \in \mathcal{U}_{f(1)}$, έχουμε $[f] = [f \cdot C_{f(1)}] \in [f \cdot U]$.

- Έστω $[f \cdot U], [g \cdot V] \in \mathcal{B}$ με $[f \cdot U] \cap [g \cdot V] \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $[h \cdot W] \in \mathcal{B}$ που περιέχεται στην τομή των $[f \cdot U]$ και $[g \cdot V]$. Έστω $[h] \in [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$. Τότε $h \simeq f\alpha$ και $h \simeq g\beta$, για κάποια μονοπάτια α, β εντός των περιοχών U, V, αντίστοιχα. Ιδιαιτέρως, $h(1) \in U \cap V$. Εφόσον η οικογένεια $\mathcal{U}_{h(1)}$ αποτελεί βάση περιοχών του $h(1)$, υπάρχει περιοχή $W \in \mathcal{U}_{h(1)}$ η οποία περιέχεται στην τομή $U \cap V$. Άρα, για κάθε μονοπάτι γ με αρχή $h(1)$ εντός της περιοχής W, έχουμε ότι $[h \cdot \gamma] = [f \cdot \alpha \cdot \gamma] = [g \cdot \beta \cdot \gamma] \in [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$ και ως εκ τούτου $[h \cdot W] \subseteq [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$.

Ο $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $[f] \in \widetilde{X}$ υπάρχει μονοπάτι στον $\widetilde{X}$ από το $\tilde{x}_0 = [C_{x_0}]$ στο σημείο $[f]$.

Για κάθε $t \in [0, 1]$, θεωρούμε το τμήμα f_t της f από το x_0 στο $f(t)$ καταλλήλως παραμετρικοποιημένο, δηλαδή $f_t(s) = f(ts)$, $s \in [0, 1]$. Ορίζουμε μονοπάτι $\tilde{f} : I \to \widetilde{X}$ με $\tilde{f}(t) = [f_t]$ (γιατί η $\tilde{f}$ είναι συνεχής;) και παρατηρούμε ότι $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ ενώ $\tilde{f}(1) = [f]$.

Ο $\widetilde{X}$ επικαλύπτει τον X μέσω της $p([f]) = f(1)$: Έστω $x \in X$. Σταθεροποιούμε ανοικτή περιοχή $U \in \mathcal{U}_x$. Θα δείξουμε ότι η U είναι στοιχειώδης περιοχή του x με αντίστοιχες συνιστώσες $[f \cdot U]$, καθώς το μονοπάτι f διατρέχει τις κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών από το x_0 στο x. Σημειώνουμε πρώτα ότι

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[f]} [f \cdot U]\,,\ [f] \text{ κλάση ομοτοπίας από το } x_0 \text{ στο } x.$$

Πράγματι, είναι άμεσο ότι $p([f \cdot U]) \subseteq U$ και άρα $\cup_{[f]}[f \cdot U] \subseteq p^{-1}(U)$. Επίσης, αν $[g] \in p^{-1}(U)$, τότε $g(1) \in U$ και έτσι

$$[g] = [g \cdot \beta^{-1} \cdot \beta] \in \cup_{[f]}[f \cdot U],$$

όπου β μονοπάτι εντός του U από το x στο $g(1)$ (υπάρχει αφού η περιοχή U είναι κατά τόξα συνεκτική) και $f = g \cdot \beta^{-1}$. Άρα

$$p^{-1}(U) = \cup_{[f]}[f \cdot U]\,, [f] \text{ κλάση ομοτοπίας από το } x_0 \text{ στο } x.$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η παραπάνω ένωση είναι ξένη, υποθέτουμε ότι υπάρχουν περιοχές $[f \cdot U]$ και $[g \cdot U]$ με μη κενή τομή και θεωρούμε ένα στοιχείο $[h]$ στην τομή τους. Τότε $[h] = [f \cdot \alpha] = [g \cdot \beta]$ για κάποια μονοπάτια α και β εντός της περιοχής U με αρχή το x και τέλος το $h(1)$. Από τον ορισμό της βάσης περιοχών $\mathcal{U}_x$, η θηλειά $\alpha \cdot \beta^{-1}$ που βρίσκεται εντός της περιοχής $U \in \mathcal{U}_x$, είναι ομοτοπική με το σταθερό μονοπάτι C_x. Έτσι $[f] = [f \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}] = [g \cdot \beta \cdot \beta^{-1}] = [g]$ που δίνει ότι $[f \cdot U] = [g \cdot U]$.

Από τη σχέση $p^{-1}(U) = \cup_{[f]}[f \cdot U]$, προκύπτει ότι η απεικόνιση p είναι συνεχής, αφού αντιστρέφει τα ανοικτά κάθε βάσης περιοχών $\mathcal{U}_x$ σε ανοικτά (βασικά για την ακρίβεια). Ο περιορισμός $p_{[f]} : [f \cdot U] \to U$ είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, είναι επί αφού η περιοχή U είναι κατά τόξα συνεκτική: αν $x_1 \in U$ και α είναι ένα μονοπάτι στην περιοχή U από το x στο x_1, τότε $p([f \cdot \alpha]) = x_1$. Για το $1-1$, ας υποθέσουμε ότι $p_{[f]}([f \cdot \alpha]) = p_{[f]}([f \cdot \beta])$, όπου α, β μονοπάτια εντός του U με αρχή x. Τότε $\alpha(1) = \beta(1)$ και $\alpha \simeq \beta$ (αφού $U \in \mathcal{U}_x$). Άρα $f \cdot \alpha \simeq f \cdot \beta$ και έτσι $[f \cdot \alpha] = [f \cdot \beta]$.

Τέλος, η απεικόνιση $p_{[f]}$ είναι συνεχής ως περιορισμός συνεχούς και ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό, αφού η p απεικονίζει τα βασικά σε ανοικτά (όπως πριν $p([g \cdot V]) = V$ για κάθε κλάση ομοτοπίας $[g]$ με αρχή x_0 και $V \in \mathcal{U}_{g(1)}$).

<u>Ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός</u>: Έστω $\tilde{g}$ μια θηλειά στο $\tilde{x}_0 = [C_{x_0}]$. Τότε η θηλειά $\tilde{g}$ προβάλλεται σε θηλειά $f = p \circ \tilde{g}$ στο x_0. Το μονοπάτι $\tilde{f}(t) = [f_t]$ που ορίσαμε πιο πριν αποδεικνύοντας την κατά τόξα συνεκτικότητα του $\widetilde{X}$, αποτελεί ανύψωση της θηλειάς f με αρχή $\tilde{x}_0$ και τέλος $[f]$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έχουμε ότι $\tilde{f} = \tilde{g}$ και έτσι το μονοπάτι $\tilde{f}$ είναι επίσης θηλειά στο $\tilde{x}_0$. Δηλαδή, $[f] = \tilde{x}_0$ που σημαίνει ότι η f είναι ομοτοπική με το σταθερό μονοπάτι στο x_0. Άρα και η ανύψωσή της $\tilde{g}$ είναι ομοτοπική με το σταθερό μονοπάτι στο $C_{\tilde{x}_0}$ και συνεπώς ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός. □

Αν έχουμε μια επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$ ενός χώρου X, ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X$ και ένα σημείο $\tilde{x}_0$ στο νήμα του x_0, τότε, από την Πρόταση **??**, η ομάδα $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$

εμφυτεύεται ως υποομάδα στην $\pi_1(X, x_0)$ μέσω του επαγόμενου ομομορφισμού p_*. Το περιεχόμενο της ακόλουθης πρότασης είναι ότι κάθε υποομάδα της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου, ο οποίος ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, μπορεί να ληφθεί με αυτόν τον τρόπο, δηλαδή είναι μονομορφική εικόνα της θεμελιώδους ομάδας κατάλληλου χώρου επικάλυψης.

Πρόταση 9.1.7. *Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε υποομάδα $H \leq \pi_1(X, x_0)$, όπου $x_0 \in X$, υπάρχει επικάλυψη $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ και σημείο $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X}_H$, έτσι ώστε $(p_H)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)\big) = H$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ορολογία και τον συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης. Στον απλά συνεκτικό χώρο $\widetilde{X}$ που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο θεώρημα και του οποίου τα σημεία είναι κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών του X με αρχή x_0, ορίζουμε σχέση $\sim$ ως εξής:

$$[f] \sim [g] \text{ αν και μόνο αν } f(1) = g(1) \text{ και } [f \cdot g^{-1}] \in H.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η σχέση που μόλις ορίσαμε είναι σχέση ισοδυναμίας.

- $[f] \sim [f]$, αφού $[f \cdot f^{-1}] = [C_{x_0}] \in H$.
- Αν $[f] \sim [g]$, τότε και $[g] \sim [f]$, αφού $[g \cdot f^{-1}] \in H$ αν και μόνο αν $[f \cdot g^{-1}] \in H$ που ισχύει.
- Αν $[f] \sim [g]$ και $[g] \sim [h]$, τότε $[f \cdot g^{-1}] \in H$, $[g \cdot h^{-1}] \in H$ και έτσι $[f \cdot g^{-1}] \cdot [g \cdot h^{-1}] = [f \cdot h^{-1}] \in H$. Δηλαδή, $[f] \sim [h]$.

Συμβολίζουμε με $\big[[f]\big]_H$ την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $[f]$ και με $\widetilde{X}_H$ τον αντίστοιχο χώρο πηλίκο. Η προβολή p παραγοντοποιείται μέσω της απεικονίσεως $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ με $p_H\big(\big[[f]\big]_H\big) = f(1)$.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d] \arrow[dr, "p"] & \\ \widetilde{X}_H \arrow[r, "p_H"'] & X \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, αν έχουμε δύο συνιστώσες $[f \cdot U]$ και $[g \cdot U]$ της ίδιας στοιχειώδους περιοχής U (άρα $f(1) = g(1)$) που περιέχουν ισοδύναμα στοιχεία, έστω $[f \cdot \alpha] \sim [g \cdot \beta]$, όπου α, β μονοπάτια εντός της περιοχής U με αρχή $f(1)$, τότε $\alpha(1) = \beta(1)$ και για κάθε μονοπάτι h εντός της περιοχής U με αρχή $f(1)$ έχουμε

$$[(f \cdot h) \cdot (g \cdot h)^{-1}] = [f \cdot g^{-1}] = [(f \cdot \alpha) \cdot (\beta^{-1} \cdot g^{-1})] \in H,$$

καθώς το μονοπάτι $\alpha \cdot \beta^{-1}$ είναι θηλειά εντός του U. Άρα $[f \cdot h] \sim [g \cdot h]$ για κάθε h όπως πριν, που σημαίνει ότι οι συνιστώσες $[f \cdot U]$ και $[g \cdot U]$ ταυτοποιούνται στον χώρο $\widetilde{X}_H$. Από αυτό προκύπτει, ακολουθώντας την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, ότι η απεικόνιση $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Έστω $\tilde{x}_0 = \big[[C_{x_0}]\big]_H$. Μένει να δείξουμε ότι μέσω της $(p_H)_*$ η ομάδα $\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)$ απεικονίζεται επί της $\pi_1(X, x_0)$. Έστω, λοιπόν, h μια θηλειά στο x_0. Τότε, σύμφωνα πάλι με την προηγούμενη απόδειξη, η ανύψωσή της $\tilde{h}$ στον χώρο $\widetilde{X}$ με αρχή $[C_{x_0}]$ έχει τέλος $[h]$. Συνεπώς, η εικόνα στον χώρο $\widetilde{X}_H$ της ανύψωσης $\tilde{h}$ είναι θηλειά αν και μόνο αν $[h] \sim [C_{x_0}]$, δηλαδή, αν και μόνο αν $[h] \in H$. Άρα $(p_H)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)\big) = H$, αφού σύμφωνα με την Πρόταση **??**, η εικόνα της $(p_H)_*$ αποτελείται από εκείνες τις θηλειές στο x_0 των οποίων οι ανυψώσεις είναι θηλειές στο $\tilde{x}_0$. $\square$

Μπορεί να δειχθεί (βλ. για παράδειγμα [6]) ότι αν ο χώρος X είναι γράφημα (γενικότερα σύμπλεγμα κελιών) ή πολλαπλότητα διάστασης m, τότε και ο χώρος $\widetilde{X}_H$ κληρονομεί από τον X δομή γραφήματος (συμπλέγματος κελιών ίδιας διάστασης) ή πολλαπλότητας διάστασης m, αντίστοιχα.

9.2 Η Αντιστοιχία του Galois

Αρχίζουμε με το ακόλουθο θεώρημα του οποίου η σπουδαιότητα έγκειται, εκτός των άλλων, στο ότι ένα τοπολογικό πρόβλημα (η ύπαρξη ανυψώσεως) ανάγεται πλήρως σε αλγεβρικό.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\varphi : (A, a) \to (B, b)$, θα εννούμε ότι έχουμε μια απεικόνιση $\varphi : A \to B$ με $\varphi(a) = b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$.

Θεώρημα 9.2.1 (Κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων)**.** *Έστω $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ μια επικάλυψη και $\varphi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου ο Y είναι ένας κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει ανύψωση*

$\widetilde{\varphi} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x_0})$ *της* φ *αν και μόνο αν* $\varphi_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x_0})\big)$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Λόγω της συνεκτικότητας του Y, όταν υπάρχει η ανύψωση $\widetilde{\varphi} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x_0})$, αυτή θα είναι μοναδική.

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι άμεση: αν υπάρχει η ανύψωση $\widetilde{\varphi}$, τότε

$$\varphi_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) = (p \circ \widetilde{\varphi})_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) = p_* \circ \widetilde{\varphi}_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x_0})\big).$$

Για το αντίστροφο, έστω $y \in Y$ και f ένα μονοπάτι από το y_0 στο y (ο Y είναι κατά τόξα συνεκτικός). Για το μονοπάτι $\varphi \circ f$ του X θεωρούμε τη μοναδική ανύψωσή του $\widetilde{\varphi \circ f}$ με αρχή $\tilde{x}_0$. Ορίζουμε

$$\widetilde{\varphi}(y) = \widetilde{\varphi \circ f}(1)$$

και παρατηρούμε ότι

$$p \circ \widetilde{\varphi}(y) = p \circ \widetilde{\varphi \circ f}(1) = \varphi \circ f(1) = \varphi(y).$$

Δηλαδή, ο ορισμός μας δίνει πράγματι ανύψωση της φ. Πρέπει όμως να δείξουμε ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Για το καλώς ορισμένο της $\widetilde{\varphi}$, θεωρούμε ένα άλλο μονοπάτι g του Y από το y_0 στο y και την ανύψωση όπως πριν $\widetilde{\varphi \circ g}$ του $\varphi \circ g$ με αρχή $\tilde{x}_0$. Τότε ορίζεται το γινόμενο $f \cdot g^{-1}$ που είναι θηλειά στο y_0 και

$$[\varphi \circ (f \cdot g^{-1})] \in \varphi_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x_0})\big).$$

Συνεπώς, υπάρχει θηλειά $\tilde{h}$ στο $\tilde{x}_0$, έτσι ώστε $p_*[\tilde{h}] = [\varphi \circ (f \cdot g^{-1})]$. Όμως

$$\varphi \circ (f \cdot g^{-1}) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)^{-1} \simeq p \circ \tilde{h}$$

και έτσι $\varphi \circ f \simeq (p \circ \tilde{h}) \cdot (\varphi \circ g)$. Έπεται ότι και οι ανυψώσεις αυτών με αρχή το $\tilde{x}_0$ θα είναι ομοτοπικές, δηλαδή $\widetilde{\varphi \circ f} \simeq \tilde{h} \cdot \widetilde{\varphi \circ g}$. Έτσι, $\widetilde{\varphi \circ f}(1) = \widetilde{\varphi \circ g}(1)$ που αποδεικνύει την ανεξαρτησία του ορισμού της $\widetilde{\varphi}$ από την επιλογή του μονοπατιού f.

Δείχνουμε τώρα ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι συνεχής. Έστω $y \in Y$, U στοιχειώδης περιοχή του $\varphi(y)$ και $\widetilde{U}$ η αντίστοιχη συνιστώσα που περιέχει το $\widetilde{\varphi}(y) \in p^{-1}\big(\varphi(y)\big)$. Από υπόθεση, υπάρχει ανοικτή, κατά τόξα συνεκτική περιοχή V του y με $\varphi(V) \subseteq U$. Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε, όπως στον ορισμό της $\widetilde{\varphi}$, μονοπάτι f από το y_0 στο y. Για κάθε $z \in V$, θεωρούμε μονοπάτι h εντός της περιοχής V από το y στο z. Τότε το μονοπάτι $f \cdot h$ έχει αρχή y_0, τέλος z και η εικόνα του $\varphi \circ (f \cdot h) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ h)$ έχει ανύψωση (με αρχή $\tilde{x}_0$) το μονοπάτι

$$\widetilde{\varphi \circ f} \cdot \widetilde{\varphi \circ h}, \text{ όπου } \widetilde{\varphi \circ h} = \big(p|_{\widetilde{U}}\big)^{-1} \circ \varphi \circ h.$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι, από την επιλογή της συνιστώσας $\widetilde{U}$, το μονοπάτι $\widetilde{\varphi \circ h}$ έχει αρχή $\widetilde{\varphi}(y)$ (δηλαδή, το τέλος του μονοπατιού $\widetilde{\varphi \circ f}$) και ότι το μονοπάτι $\varphi \circ h$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού του περιορισμού της $\big(p|_{\widetilde{U}}\big)^{-1}$ αφού $\varphi(V) \subseteq U$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανύψωση για να "υπολογίσουμε" την εικόνα $\widetilde{\varphi}(z)$, έχουμε ότι

$$\widetilde{\varphi}(z) = \big(\widetilde{\varphi \circ f} \cdot \widetilde{\varphi \circ h}\big)(1) = \widetilde{\varphi \circ h}(1) = \big(p|_{\widetilde{U}}\big)^{-1} \circ \varphi(z) \in \widetilde{U}.$$

Τελικά, $\widetilde{\varphi}|_V = \big(p|_{\widetilde{U}}\big)^{-1} \circ \varphi$ και άρα η $\widetilde{\varphi}$ είναι συνεχής (η συνέχεια είναι τοπική έννοια). □

Ορισμός 9.2.2. Έστω $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ και $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου X. Ένας **ομομορφισμός** (επικαλύψεων) από την πρώτη επικάλυψη στη δεύτερη είναι μια συνεχής απεικόνιση $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, τέτοια ώστε $p_2 \circ \varphi = p_1$. Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ο ομομορφισμός φ θα λέγεται **ισομορφισμός** (επικαλύψεων), αν επιπροσθέτως η φ είναι ομοιομορφισμός.

Πρόταση 9.2.3. *Έστω $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ και $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου X, όπου οι χώροι X, $\widetilde{X}_1$ και $\widetilde{X}_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Τότε υπάρχει ισομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ με $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, αν και μόνο αν*

$$(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big).$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει ισομορφισμός φ όπως παραπάνω, τότε ο φ επάγει ισομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες και αφού $p_2 \circ \varphi = p_1$, έχουμε

$$(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_* \circ \varphi_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_2(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big)$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο ανυψώσεως δύο φορές, βρίσκουμε ανυψώσεις $\widetilde{p_1}$ και $\widetilde{p_2}$ των p_1 και p_2, αντίστοιχα, όπως στα παρακάτω διαγράμματα:

$$
\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \arrow[d, "p_2"] \\
(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \arrow[ur, "\widetilde{p_1}"] \arrow[r, "p_1"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p_1"] \\
(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \arrow[ur, "\widetilde{p_2}"] \arrow[r, "p_2"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
$$

Τότε $p_2 \circ \widetilde{p_1} \circ \widetilde{p_2} = p_1 \circ \widetilde{p_2} = p_2$ και $\widetilde{p_1} \circ \widetilde{p_2}(\tilde{x}_2) = \widetilde{p_1}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έπεται ότι $\widetilde{p_1} \circ \widetilde{p_2} = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_2}$. Ομοίως προκύπτει ότι $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1} = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_1}$ και η ανύψωση $\widetilde{p_1}$ είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός. □

Λήμμα 9.2.4. *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του X, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ και $\tilde{\gamma}$ ένα μονοπάτι του $\widetilde{X}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$. Υποθέτουμε ότι οι χώροι $\widetilde{X}$ και X είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί.*

1. *Αν $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, τότε $[\gamma]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$. Δηλαδή, οι $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ και $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)$ είναι συζυγείς υποομάδες της $\pi_1(X, x_0)$.*

2. *Κάθε υποομάδα H της $\pi_1(X, x_0)$ που είναι συζυγής με την $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ είναι της μορφής $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$ για κάποιο $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε πρώτα ότι το μονοπάτι γ είναι θηλειά στο x_0, αφού τα άκρα του μονοπατιού $\tilde{\gamma}$ ανήκουν στο νήμα του x_0. Θεωρούμε τον ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς

$$\Phi_{\tilde{\gamma}} : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) \to \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \text{ με } \Phi_{\tilde{\gamma}}([\tilde{f}]) = [\tilde{\gamma}\tilde{f}\tilde{\gamma}^{-1}].$$

Τότε

$$[\gamma]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[\gamma]^{-1} = \Big\{[p\circ(\tilde{\gamma}\cdot\tilde{f}\cdot\tilde{\gamma}^{-1})] \;:\; \tilde{f} \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)\Big\} = p_*\big(\mathrm{Im}\,\Phi_{\tilde{\gamma}}\big) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, υποθέτουμε ότι $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = [\alpha]H[\alpha]^{-1}$, όπου α θηλειά στο x_0. Θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{\alpha}$ της θηλειάς α με αρχή το $\tilde{x}_0$ και έστω $\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1)$. Ακριβώς όπως πριν, προκύπτει ότι $[\alpha]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})[\alpha]^{-1} = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ και ως εκ τούτου $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$. □

Αυτό που διαπιστώνουμε από την προηγούμενη απόδειξη είναι ότι ο ισομορφισμός $\Phi_{\tilde{\gamma}}$ "προβάλλεται" στον εσωτερικό αυτομορφισμό Φ_γ της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$ και έτσι οι εικόνες (μέσω της p_*) των ισόμορφων υποομάδων καθίστανται συζυγείς στην $\pi_1(X, x_0)$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[r, "\Phi_{\tilde{\gamma}}"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\Phi_\gamma"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 9.2.5. Επί της ουσίας, το προηγούμενο λήμμα λέει ότι καθώς το $\tilde{x}_0$ διατρέχει το νήμα $p^{-1}(x_0)$, οι εικόνες των αντίστοιχων υπομάδων διατρέχουν μια ολόκληρη κλάση συζυγίας στην $\pi_1(X, x_0)$.

Θεώρημα 9.2.6. *Έστω $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ και $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου X, όπου οι χώροι X, $\widetilde{X}_1$ και $\widetilde{X}_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Οι επικαλύψεις $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ και $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ είναι ισόμορφες αν και μόνο αν οι υποομάδες $(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big)$ και $(p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big)$ της $\pi_1(X, x_0)$ είναι συζυγείς.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει ισομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, τότε, από την Πρόταση 9.2.3, $(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1))\big)$. Όμως από το προηγούμενο λήμμα οι υποομάδες $(p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1))\big)$ και $(p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big)$ είναι συζυγείς, αφού τα σημεία $\varphi(\tilde{x}_1)$ και $\tilde{x}_2$ ανήκουν στο ίδιο νήμα.

Αντίστροφα, αν οι υποομάδες είναι συζυγείς, τότε αλλάζοντας στοιχείο στο νήμα και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, εξασφαλίζουμε ισότητα των υποομάδων που προκύπτουν και το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 9.2.3. □

Θεώρημα 9.2.7. *Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος και x_0 ένα σημείο αναφοράς του X. Τότε υπάρχει μια $1-1$ και επί απεικόνιση Ψ μεταξύ των κλάσεων ισομορφίας των κατά τόξα συνεκτικών επικαλύψεων $p : \widetilde{X} \to X$ του X και των κλάσεων συζυγίας των υποομάδων της $\pi_1(X, x_0)$, η οποία λαμβάνεται αντιστοιχίζοντας την κλάση ισομορφίας της επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ στην κλάση συζυγίας της υποομάδος $p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$, όπου $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 9.2.4, ο ορισμός της απεικονίσεως Ψ δεν εξαρτάται από την επιλογή του $\tilde{x}_0$ στο νήμα του x_0 και από το προηγούμενο θεώρημα δεν εξαρτάται, επίσης, από την επιλογή του αντιπροσώπου στην κλάση ισομορφίας της επικαλύψεως $p : \widetilde{X} \to X$. Το $1-1$ προκύπτει επίσης από το προηγούμενο θεώρημα, ενώ το επί είναι συνέπεια της ύπαρξης απλά συνεκτικού χώρου επικάλυψης (βλ. Πρόταση 9.1.7). □

Στη συνέχεια, ο στόχος μας είναι να δείξουμε (με τις συνήθεις υποθέσεις συνεκτικότητας) την καθολικότητα των απλά συνεκτικών χώρων επικάλυψης, δηλαδή, ότι κάθε χώρος επικάλυψης ενός χώρου X επικαλύπτεται από ένα απλά συνεκτικό χώρος επικάλυψης του X.

Λήμμα 9.2.8. *Έστω $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ και $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου X, όπου οι χώροι X, $\widetilde{X}_1$ και $\widetilde{X}_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Κάθε ομομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ είναι προβολή επικάλυψης.*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η φ είναι επί. Έστω $\tilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$ και $x = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Για το τυχαίο $\tilde{x} \in \widetilde{X}_2$, θεωρούμε μονοπάτι $\tilde{\gamma}$ στον $\widetilde{X}_2$ από το $\tilde{x}_2$ στο $\tilde{x}$. Τότε η σύνθεση $p_2 \circ \tilde{\gamma}$ είναι μονοπάτι του X με αρχή το x. Αν $\tilde{f}$ είναι η μοναδική ανύψωση του $p_2 \circ \tilde{\gamma}$ με αρχή $\tilde{x}_1$, τότε $p_2 \circ \varphi \circ \tilde{f} = p_1 \circ \tilde{f} = p_2 \circ \tilde{\gamma}$ και $\varphi \circ \tilde{f}(0) = \tilde{x}_2 = \tilde{\gamma}(0)$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων έπεται ότι $\varphi \circ \tilde{f} = \tilde{\gamma}$ και άρα $\varphi\big(\tilde{f}(1)\big) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$. Δηλαδή, η φ είναι επί.

Στη συνέχεια θα βρούμε στοιχειώδη περιοχή (ως προς φ) για το τυχαίο $\tilde{x} \in \widetilde{X}_2$. Εφόσον ο χώρος X είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός, μπορούμε να βρούμε κατά τόξα συνεκτική περιοχή U του $x = p_2(\tilde{x})$ η οποία να είναι στοιχειώδης περιοχή και ως προς την προβολή p_1 και ως προς την p_2. Έστω V η συνιστώσα της αντίστροφης εικόνας $p_2^{-1}(U)$ που περιέχει το $\tilde{x}$. Θα δείξουμε ότι η V είναι στοιχειώδης περιοχή του $\tilde{x}$ ως προς φ.

Παρατηρούμε ότι κάθε συνιστώσα U_α της αντίστροφης εικόνας $p_1^{-1}(U)$, απεικονίζεται μέσω της φ στην αντίστροφη εικόνα $p_2^{-1}(U)$. Επιπροσθέτως, αφού κάθε συνιστώσα U_α είναι συνεκτική (ως ομοιομορφική με την περιοχή U), η φ την απεικονίζει σε μια μόνο από τις συνιστώσες της αντίστροφης εικόνας $p_2^{-1}(U)$. Συνεπώς, η αντίστροφη εικόνα $\varphi^{-1}(V)$ είναι η ξένη ένωση εκείνων των συνιστωσών U_α που απεικονίζονται μέσω της φ στην V, αφού

$$\sqcup_\alpha U_\alpha = p_1^{-1}(U) = \varphi^{-1}\big(p_2^{-1}(U)\big) \text{ και έτσι } \varphi^{-1}(V) = \sqcup_\alpha\big(U_\alpha \cap \varphi^{-1}(V)\big).$$

Τέλος, από τη μεταθετικότητα του ακόλουθου διάγραμματος (των αντίστοιχων περιορισμών), προκύπτει ότι για κάθε τέτοια συνιστώσα U_α ο περιορισμός $\varphi| : U_\alpha \to V$ είναι ομοιομορφισμός

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[rr, "\varphi|"] \arrow[dr, "p_1|"'] & & V \arrow[dl, "p_2|"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πρόταση 9.2.9. *Έστω X ένας ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος και $p : \widetilde{X} \to X$ ένας απλά συνεκτικός χώρος επικάλυψης του χώρου X, όπου ως συνήθως υποθέτουμε ότι οι χώροι $\widetilde{X}$ και X είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Αν $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ είναι μια άλλη επικάλυψη του X, τότε υπάρχει επικάλυψη $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$.*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \widetilde{X} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Εφόσον ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός, από το κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων υπάρχει ομομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$, ο οποίος από το προηγούμενο λήμμα είναι απεικόνιση επικάλυψης. □

Παρατήρηση 9.2.10. Λόγω της προηγούμενης πρότασης, ένας απλά συνεκτικός χώρος επικάλυψης $\widetilde{X}$ του X επικαλύπτει κάθε άλλο χώρο επικάλυψης του X. Αυτός είναι ο λόγος που ο $\widetilde{X}$ λέγεται **καθολικός** χώρος επικάλυψης του X. Επίσης, ο $\widetilde{X}$ είναι μοναδικός ως προς ισομορφισμό επικαλύψεων, αφού δύο απλά συνεκτικοί χώροι επικάλυψης του X είναι μεταξύ τους ισόμορφοι (αντιστοιχούν στην τετριμμένη υποομάδα).

9.3 Μετασχηματισμοί Επικαλύψεων

Για έναν χώρο επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ ένας ισομορφισμός επικάλυψης $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ λέγεται **μετασχηματισμός** της επικάλυψης.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Οι μετασχηματισμοί της επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ αποτελούν ομάδα με πράξη τη σύνθεση, την οποία συμβολίζουμε με $G(\widetilde{X}, p)$ ή πιο απλά με $G(\widetilde{X})$.

Αν ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι συνεκτικός, τότε ένας μετασχηματισμός $\varphi \in G(\widetilde{X})$ καθορίζεται πλήρως από την εικόνα του σε ένα μόνο σημείο. Πράγματι, αν $\varphi, \psi \in G(\widetilde{X})$ και $\varphi(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x})$ για κάποιο $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, τότε, από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έπεται ότι $\varphi = \psi$, αφού οι μετασχηματισμοί φ και ψ είναι ανυψώσεις της προβολής p.

Παράδειγμα 9.3.1. Για τον χώρο επικάλυψης $p : \mathbb{R} \to S^1$ με $p(x) = e^{2\pi i x}$ η ομάδα μετασχηματισμών αποτελείται από τις απεικονίσεις

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } L_n(x) = x + n, n \in \mathbb{Z},$$

η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι άπειρη κυκλική.

Παράδειγμα 9.3.2. Οι μετασχηματισμοί της συνήθους επικάλυψης $S^n \to \mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και η αντιποδική απεικόνιση.

Παρατηρούμε ότι κάθε μετασχηματισμός μιας επικάλυψης απεικονίζει κάθε στοιχείο ενός νήματος στο ίδιο νήμα (ως ομομορφισμός επικάλυψης) και έτσι μεταθέτει τα στοιχεία κάθε νήματος, αφού είναι $1-1$ και επί.

Ορισμός 9.3.3. Ένας χώρος επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ ενός χώρου X λέγεται **κανονικός**, αν η ομάδα $G(\widetilde{X})$ δρα μεταβατικά στο νήμα $p^{-1}(x)$ του x για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, για κάθε $x \in X$ και κάθε ζεύγος σημείων $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, υπάρχει μετασχηματισμός $\varphi \in G(\widetilde{X})$ με $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (για κατά τόξα συνεκτικούς χώρους) ότι αν η ομάδα $G(\widetilde{X})$ δρα μεταβατικά σε ένα νήμα, τότε δρα και σε κάθε άλλο νήμα.

Πρόταση 9.3.4. *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος επικάλυψης ενός κατά τόξα συνεκτικού και τοπικά κατά τόξα συνεκτικού χώρου X, $x_0 \in X$ και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Αν συμβολίσουμε με H την υποομάδα $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ της $\pi_1(X, x_0)$, τότε:*

1. *Η ανωτέρω επικάλυψη είναι κανονική αν και μόνο αν η H είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(X, x_0)$.*

2. *Η ομάδα μετασχηματισμών $G(\widetilde{X})$ της επικάλυψης είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $N(H)/H$, όπου $N(H)$ είναι η κανονικοποιούσα της H στην $\pi_1(X, x_0)$. Ιδιαιτέρως, $G(\widetilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$, αν η επικάλυψη είναι κανονική. Άρα $G(\widetilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$, στην περίπτωση που ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Μια υποομάδα είναι κανονική αν και μόνο αν η κλάση συζυγίας της είναι μονοσύνολο. Από το Λήμμα 9.2.4, η κλάση συζυγίας της H αποτελείται από τις εικόνες $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$, καθώς το $\tilde{x}$ διατρέχει το νήμα του x_0. Συνεπώς η υποομάδα H είναι κανονική αν και μόνο αν $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_2)$ για κάθε ζεύγος στοιχείων $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, το οποίο, λόγω της Πρότασης 9.2.3, είναι ισοδύναμο με το να δρα η $G(\widetilde{X})$ μεταβατικά στο νήμα του x_0.

Για την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού, ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : N(H) \to G(\widetilde{X})$$

ως εξής: Για κάθε $[g] \in N(H)$, όπου g θηλειά στο x_0, θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{g}$ της g με αρχή το $\tilde{x}_0$. Αν $\tilde{x}_1$ είναι το τέλος της ανυψώσεως $\tilde{g}$, τότε

$$[g]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[g]^{-1} = [p \circ \tilde{g}]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[p \circ \tilde{g}]^{-1} = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Εφόσον το στοιχείο $[g]$ ανήκει στην κανονικοποιούσα της H, έπεται ότι

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)$$

και άρα υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός $\varphi_g \in G(\widetilde{X})$ με $\varphi_g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Σημειώνουμε πως το σημείο $\tilde{x}_1$ και κατ' επέκταση ο μετασχηματισμός φ_g, δεν εξαρτάται από την επιλογή της θηλειάς g στην κλάση ομοτοπίας της, γιατί όλοι οι αντιπρόσωποι είναι ομοτοπικά μονοπάτια και συνεπώς οι ανυψώσεις αυτών με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι επίσης ομοτοπικές και ιδιαιτέρως έχουν τα ίδια άκρα. Ορίζουμε $\Phi([g]) = \varphi_g$.

<u>Η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων</u>: Έστω $[g_1], [g_2] \in N(H)$ και $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$, $\widetilde{g_1 g_2}$ οι ανυψώσεις των g_1, g_2, $g_1 g_2$, αντίστοιχα, με αρχή το $\tilde{x}_0$. Θα δείξουμε ότι

$$\varphi_{g_1 g_2}(\tilde{x}_0) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(\tilde{x}_0)$$

από όπου προκύπτει ότι $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1}\varphi_{g_2}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2(0) = \varphi_{g_1}(\tilde{x}_0) = \tilde{g}_1(1)$. Δηλαδή, ορίζεται το γινόμενο $\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)$ και

$$p \circ \big(\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)\big) = (p \circ \tilde{g}_1) \cdot (p \circ \varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2) = g_1 \cdot (p \circ \tilde{g}_2) = g_1 \cdot g_2.$$

Αυτό σημαίνει ότι το μονοπάτι $\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)$ είναι ανύψωση του μονοπατιού $g_1 \cdot g_2$ με αρχή $\tilde{x}_0$ και ως εκ τούτου ισούται με την ανύψωση $\widetilde{g_1 g_2}$. Έτσι,

$$\varphi_{g_1 g_2}(\tilde{x}_0) = \widetilde{g_1 g_2}(1) = \varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2(1) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(\tilde{x}_0).$$

Ο ομομορφισμός Φ είναι επί: Έστω $\varphi \in G(\widetilde{X})$ και $\tilde{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_0)$. Τότε

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1).$$

Από την άλλη, αν επιλέξουμε μονοπάτι $\tilde{g}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$, τότε για την προβολή του $g = p \circ \tilde{g}$, έχουμε ότι

$$[g]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[g^{-1}] = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι το στοιχείο $[g]$ ανήκει στην κανονικοποιούσα της H και $\Phi([g]) = \varphi$.

$\ker \Phi = H$: Ένα στοιχείο $[g] \in N(H)$ ανήκει στον πυρήνα της Φ αν και μόνο αν ο μετασχηματισμός φ_g είναι η ταυτοτική απεικόνιση, ισοδύναμα, $\varphi_g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ανύψωση $\tilde{g}$ της g με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειά. Συνεπώς, ο πυρήνας της Φ αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία $[g]$ των οποίων οι ανυψώσεις με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειές. Αυτά όμως είναι τα στοιχεία της εικόνας $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ (βλ.Πρόταση **??**).

Η απόδειξη ολοκληρώνεται από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών. □

Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια επικάλυψη και $G(\widetilde{X})$ η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών. Αν ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι συνεκτικός, τότε η φυσική δράση της $G(\widetilde{X})$ στον χώρο $\widetilde{X}$ ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

> Για κάθε $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του $\tilde{x}$, έτσι ώστε για κάθε ζεύγος διαφορετικών μετασχηματισμών $g_1, g_2 \in G(\widetilde{X})$, οι "μεταφορές" $g_1(U)$ και $g_2(U)$ της περιοχής U είναι ξένες, δηλαδή, $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$.

Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε ως U μια συνιστώσα κάποιας στοιχειώδους περιοχής του $p(\tilde{x})$. Τότε η U περιέχει το πολύ ένα στοιχείο από κάθε νήμα. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$, τότε $g_1\tilde{x}_1 = g_2\tilde{x}_2$, για κάποια $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in U$ και άρα $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$. Έπεται ότι $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ και έτσι $g_1\tilde{x}_1 = g_2\tilde{x}_1$ που συνεπάγεται ότι $g_1 = g_2$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κανονική επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$. Τότε η ομάδα $G(\widetilde{X})$ δρα μεταβατικά σε κάθε νήμα και συνεπώς $p(x) = p(y)$ αν και μόνο αν $\varphi(x) = y$ για κάποιο μετασχηματισμό $\varphi \in G(\widetilde{X})$. Εφόσον η προβολή p είναι απεικόνιση πηλίκο προκύπτει ότι ο χώρος πηλίκο $\widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ είναι ομοιομορφικός με τον X. Το περιεχόμενο της επόμενης πρότασης είναι ότι κανονικές επικαλύψεις προκύπτουν μέσω μιας τέτοιας διαδικασίας.

Πρόταση 9.3.5. *Υποθέτουμε ότι μια ομάδα G δρα με ομοιομορφισμούς σε έναν χώρο Y, έτσι ώστε η δράση ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα. Δηλαδή, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του y, έτσι ώστε $g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων g_1 και g_2 της G. Τότε:*

1. *Η απεικόνιση πηλίκο $p : Y \to Y/G$ είναι προβολή κανονικής επικάλυψης.*

2. *Αν ο χώρος Y είναι συνεκτικός, τότε η G είναι η ομάδα μετασχηματισμών της κανονικής επικάλυψης $p : Y \to Y/G$.*

3. *Η ομάδα G είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $\pi_1(Y/G)/p_*\big(\pi_1(Y)\big)$, αν ο Y είναι κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση p είναι επί και συνεχής ως απεικόνιση πηλίκο. Επιπροσθέτως, η p είναι ανοικτή. Πράγματι, έστω U ανοικτό υποσύνολο του Y. Αφού η p είναι απεικόνιση πηλίκο, το $p(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y/G αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}\big(p(U)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, το οποίο όμως είναι ανοικτό ως ένωση των ανοικτών $g \cdot U$, $g \in G$.

Για να δείξουμε ότι είναι απεικόνιση επικάλυψης, θεωρούμε τυχαίο $[y] \in Y/G$ και ανοικτή περιοχή U του y τέτοια, ώστε $U \cap g \cdot U = \emptyset$ για κάθε $g \neq 1$. Θα δείξουμε ότι το ανοικτό $p(U)$ είναι στοιχειώδης περιοχή της τροχιάς $[y]$ του y. Όπως ήδη έχουμε σημειώσει

$$p^{-1}\big(p(U)\big) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

Από την επιλογή της περιοχής U, προκύπτει ότι η παραπάνω ένωση είναι ξένη, εφόσον $g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$ αν και μόνο αν $U \cap g_1^{-1} g_2 \cdot U = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός $p : g \cdot U \to p(U)$ είναι $1-1$: αν $p(gx_1) = p(gx_2)$, για κάποια $x_1, x_2 \in U$, τότε τα gx_1 και gx_2 ανήκουν στην ίδια τροχιά και άρα υπάρχει στοιχείο $g_1 \in G$ με $g_1 g x_1 = g x_2$. Από την επιλογή της περιοχής U, έπεται ότι $g_1 g = g$ δηλαδή $g_1 = 1$ και έτσι $g_1 = g_2$. Τελικά, ο περιορισμός $p : g \cdot U \to p(U)$ είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι συνεχής ως περιορισμός συνεχούς, επί, ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό και $1-1$.

Είναι άμεσο ότι $G \subseteq G(Y)$, αφού $p \circ g = p$ για κάθε στοιχείο g της ομάδας G. Εφόσον η G δρα μεταβατικά σε κάθε νήμα (δύο στοιχεία ανήκουν στο ίδιο νήμα αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια τροχιά) το ίδιο κάνει και η ομάδα $G(Y)$ που την περιέχει, το οποίο σημαίνει ότι η επικάλυψη είναι κανονική.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αν $\varphi \in G(Y)$ και $y \in Y$, τότε, αφού $p \circ \varphi = p$, τα y και $\varphi(y)$ ανήκουν στην ίδια τροχιά. Δηλαδή, υπάρχει $g \in G$ με $gy = \varphi(y)$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έπεται ότι $g = \varphi$ και έτσι $G = G(Y)$.

Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη πρόταση. □

Ασκήσεις

9.1 Αποδείξτε ότι αν $n > 1$, κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^n \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση. [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων.]

9.2 Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

9.3 Ποιος είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης της σφήνας $S^1 \vee S^2$;

9.4 Έστω $Y = [0,1] \times \mathbb{R}$ και $\varphi : Y \to Y$ ο ομοιομορφισμός που δίνεται από τον τύπο $\varphi(x,y) = (1-x, 1+y)$.

(i) Αν συμβολίσουμε με $\langle\varphi\rangle$ την κυκλική υποομάδα της ομάδας ομοιομορφισμών του Y που παράγεται από τον ομοιομορφισμό φ, τότε η απεικόνιση πηλίκο $p : Y \to Y/\langle\varphi\rangle$ είναι προβολή κανονικής επικάλυψης και $\langle\varphi\rangle \cong \pi_1(Y/\langle\varphi\rangle)$.

(ii) Ποιος είναι ο χώρος επικάλυψης του $Y/\langle\varphi\rangle$ που αντιστοιχεί στην υποομάδα $\langle\varphi^2\rangle$;

(iii) Να δειχθεί ότι ο κύλινδρος $[0,1] \times S^1$ είναι χώρος επικάλυψης της ταινίας του Möbius δείκτου 2 (δηλαδή κάθε νήμα αποτελείται από δύο ακριβώς στοιχεία).

9.5 Έστω G η υποομάδα της ομάδας ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τους ομοιομορφισμούς (ισομετρίες μάλιστα) φ και ψ, όπου $\varphi(x,y) = (1+x, y)$ και $\psi(x,y) = (1-x, 1+y)$.

(i) Να δειχθεί ότι ο χώρος τροχιών $\mathbb{R}^2/G$ είναι ομοιομορφικός με την μποτίλια του Klein K.

(ii) Η θεμελιώδης ομάδα του χώρου K δεν είναι αβελιανή.

(iii) Να δειχθεί ότι η μποτίλια του Klein επικαλύπτεται από τη σπείρα $S^1 \times S^1$, έτσι ώστε κάθε νήμα αποτελείται από δύο ακριβώς στοιχεία.

9.6 Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης, όπου ο χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός και έστω $x_0 \in X$. Για κάθε στοιχείο $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ και σημείο $\tilde{x}$ στο νήμα $p^{-1}(x_0)$ του x_0, θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{\gamma}$ με αρχή το $\tilde{x}$.

(i) Αποδείξτε ότι ο τύπος $\tilde{x}\cdot[\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$ ορίζει μια δεξιά δράση της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$ στο νήμα $p^{-1}(x_0)$.

(ii) Αποδείξτε ότι η παραπάνω δράση είναι μεταβατική αν και μόνο αν ο $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός.

(iii) Ποια είναι η σταθεροποιούσα του σημείου $\tilde{y} \in p^{-1}(x_0)$;

9.7 Έστω $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ μια προβολή επικάλυψης, όπου ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός και ο X κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(X, x_0)$.

(ii) Για κάθε θηλειά του X στο x_0, είτε όλες οι ανυψώσεις της είναι θηλειές ή καμία ανύψωσή της δεν είναι θηλειά.

9.8 Έστω $X = S^1 \vee S^1$ η σφήνα δύο κύκλων και x_0 η βάση της σφήνας. Κάθε κύκλος της σφήνας μας δίνει από έναν γεννήτορα της $\pi_1(X, x_0)$. Αν συμβολίσουμε με α, β αυτούς τους γεννήτορες, τότε $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(\alpha, \beta)$. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\phi : F(\alpha, \beta) \to \mathbb{Z}_3 = \langle g \rangle$ που επάγεται από την απεικόνιση $\alpha \mapsto g$ και $\beta \mapsto g$. Να βρεθεί ο χώρος επικάλυψης του X που αντιστοιχεί στον πυρήνα $\ker\phi$.

9.9 Χρησιμοποιήστε χώρους επικάλυψης για να αποδείξετε ότι οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

9.10 Έστω $p_2 : X_2 \to X_1$ και $p_1 : X_1 \to X$ δύο απεικονίσεις επικάλυψης. Αν το νήμα $p_1^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο για κάθε $x \in X$, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Υπόδειξη: Για το τυχαίο $x \in X$ επιλέξτε p_1-στοιχειώδη περιοχή U με αντίστοιχες συνιστώσες U_i καθεμία από τις οποίες να περιέχει p_2-στοιχειώδη περιοχή V_i. Η τομή $\cap_i p_1(V_i)$ είναι στοιχειώδης περιοχή του x για τη σύνθεση.

9.11 Έστω $X = S^1 \times S^1 \times \cdots$ ο χώρος γινόμενο αριθμησίμου (όχι πεπερασμένου) πλήθους αντιτύπων του S^1, $\widetilde{X}_n = \mathbb{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \cdots$, $n \geq 1$, και $p_n : \widetilde{X}_n \to X$ η προβολή επικάλυψης που ορίζεται ως

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_n}, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots).$$

Θεωρούμε τη σφήνα $\vee_n \widetilde{X}_n$ και τον χώρο γινόμενο $\mathbb{N}_+ \times X$, όπου το $\mathbb{N}_+$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Η απεικόνιση $p : \vee \widetilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X$ που ορίζεται με $p|_{\widetilde{X}_n} = (n, p_n) : \widetilde{X}_n \to \{n\} \times X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης η $q : \mathbb{N}_+ \times X \to X$, όπου $q(m, x) = x$, είναι επίσης απεικόνιση επικάλυψης, ενώ η σύνθεση τους $\vee \widetilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X \to X$ δεν είναι.
Υπόδειξη: κανένα ανοικτό υποσύνολο του X δεν μπορεί να αποτελεί στοιχειώδη περιοχή για τη σύνθεση.

9.12 Έστω $p_2 : X_2 \to X_1$ και $p_1 : X_1 \to X$ απεικονίσεις επικάλυψης. Αν ο X είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.
Υπόδειξη: Για το τυχαίο $x \in X$, κάθε περιοχή U με την ιδιότητα η ένθεση της U στο X να επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ αποτελεί στοιχειώδη περιοχή του x, της οποίας οι συνιστώσες απολαμβάνουν την ίδια ιδιότητα (δηλαδή η ένθεση επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό).

9.13 Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος. Μια επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$, όπου $\widetilde{X}$ κατά τόξα συνεκτικός, λέγεται *αβελιανή*, αν είναι κανονική, και η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών είναι αβελιανή. Αποδείξτε ότι ο X επιδέχεται μια (“καθολική”) αβελιανή επικάλυψη η οποία επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή επικάλυψη του X (για αυτό “καθολική”) και είναι μοναδική, ως προς ισομορφισμό (επικαλύψεων), με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή να επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή.

9.14 Έστω H διακριτή υποομάδα (δηλαδή είναι διακριτός χώρος με τη σχετική τοπολογία) μιας συνεκτικής και τοπικά κατά τόξα συνεκτικής τοπολογικής ομάδας G. Αποδείξτε ότι η δράση της H στην G με πολλαπλασιασμό από δεξιά είναι δράση χώρου επικάλυψης υπό την έννοια ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει περιοχή U του x, έτσι ώστε $g = 1$ οποτεδήποτε $U \cap U \cdot g \neq \emptyset$, και ως εκ τούτου η απεικόνιση πηλίκο $G \to G/H$ ορίζει κανονικό χώρο επικάλυψης. Αν επιπλέον η G είναι απλά συνεκτική, τότε $\pi_1(G/H, 1) \cong H$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε περιοχή V της μονάδας με την ιδιότητα $V \cap H = \{1\}$, την

αντίστροφή της εικόνα $\mu^{-1}(V)$ μέσω της συνεχούς $\mu(g,h) = g^{-1}h$ και μια βασική ανοικτή περιοχή $U_1 \times U_2$ του $(1,1)$ εντός της αντίστροφης εικόνας $\mu^{-1}(V)$.

Βιβλιογραφία

[1] M. J. Greenberg and J. R. Harper. Algebraic Topology: A First Course, Addison-Wesley, 1981.

[2] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[3] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[4] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[5] J. R. Munkres. Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesiley, 1984.

[6] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.

[7] E. H. Spanier. Algebraic Topology, New York, McGraw–Hill, 1966.