Κεφάλαιο 8

Το Θεώρημα των Seifert-Van Kampen

Περιεχόμενα

Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι ο προσδιορισμός της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου X, ο οποίος εκφράζεται ως ένωση $\cup_\alpha U_\alpha$ ανοικτών υποσυνόλων του, συναρτήσει των θεμελιωδών ομάδων των U_α και των τομών τους, καθώς και των επαγόμενων ομομορφισμών που επάγονται από τις ενθέσεις $U_\alpha \hookrightarrow X$. Το βασικό εργαλείο είναι το θεώρημα των Seifert-Van Kampen το οποίο μας δίνει, με ασθενείς υποθέσεις, τη δυνατότητα να υπολογίσουμε μια παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του χώρου. Ιδιαιτέρως, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα ενός γραφήματος, μιας συμπαγούς επιφανείας και γενικότερα οποιουδήποτε πεπερασμένου συμπλέγματος κελιών.

8.1 Διατύπωση και Απόδειξη του Θεωρήματος

Αρχίζουμε διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το θεώρημα στην περίπτωση που το κάλυμμα του χώρου αποτελείται από δύο ανοικτά υποσύνολα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών, κατά τόξα συνεκτικών υποσυνόλων του U_1

[0]https://eclass.uoa.gr/courses/MATH536/

και U_2 με μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική τομή. Επιλέγουμε σημείο αναφοράς $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Το μεταθετικό διάγραμμα των ενθέσεων

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i_2"] & U_1 \arrow[d, hook, "j_1"] \\
U_2 \arrow[r, hook, "j_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

μας δίνει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα των αντίστοιχων επαγόμενων ομομορφισμών

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, "i_{1*}"] \arrow[d, "i_{2*}"] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "j_{1*}"] \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "j_{2*}"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων γινομένων, οι ομομορφισμοί j_{1*} και j_{2*} επάγουν ομομορφισμό $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[dr, hook, bend left, "\lambda_1"] \arrow[drr, bend left, "j_{1*}"] & & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[ur, hook, bend right, "\lambda_2"'] \arrow[urr, bend right, "j_{2*}"'] & &
\end{tikzcd}$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι ενθέσεις των παραγόντων στο ελεύθερο γινόμενο. Έτσι έχουμε $\Phi|_{\pi_1(U_1,x_0)} = j_{1*}$ και $\Phi|_{\pi_1(U_2,x_0)} = j_{2*}$. Για κάθε στοιχείο $g \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, παρατηρούμε ότι

$$\Phi\big(i_{1*}(g)\big) = j_{1*}\big(i_{1*}(g)\big) = j_{2*}\big(i_{2*}(g)\big) = \Phi\big(i_{2*}(g)\big).$$

Συνεπώς, ο πυρήνας της Φ περιέχει κάθε στοιχείο της μορφής $(i_{1*}(g)) \cdot (i_{2*}(g))^{-1}$, όπου $g \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. Ατύπως, αυτό μπορεί να εκφρασθεί λέγοντας ότι μια θηλειά στο x_0 που περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$, είτε την δούμε ως θηλειά στο U_1 είτε ως θηλειά στο

U_2, το στοιχείο που μας δίνει στη θεμελιώδη ομάδα του χώρου είναι το ίδιο. Το θεώρημα των Seifert-Van Kampen μας λέει ότι ο πυρήνας της Φ είναι η κανονική υπομάδα που παράγεται από αυτά ακριβώς τα στοιχεία.

Θεώρημα 8.1.1 (Seifert-Van Kampen)**.** *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και U_1, U_2 δύο ανοικτά, κατά τόξα συνεκτικά υποσύνολα του X με μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική τομή $U_1 \cap U_2$. Αν $X = U_1 \cup U_2$, τότε για κάθε $x_0 \in U_1 \cap U_2$ ο ομομορφισμός $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, που ορίσθηκε πριν, είναι επί και ο πυρήνας του* $\ker \Phi$ *είναι η κανονική υποομάδα N της $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $(i_{1*}(g)) \cdot (i_{2*}(g))^{-1}$ για $g \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. Συνεπώς,*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)\big)/N.$$

Απόδειξη. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε (χωρίς να γίνεται αναφορά) το μεταθετικό διάγραμμα και τον συμβολισμό που εισήχθει στην παράγραφο πριν τη διατύπωση του θεωρήματος. Επιπλέον, επειδή η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική, είναι χρήσιμο ο συνήθης συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί να κωδικοποιεί περισσότερες πληροφορίες από ότι συνήθως. Έστω A ένα υποσύνολο του X. Θα γράφουμε, λοιπόν, $f \underset{A}{\simeq} g$ για να υποδηλώσουμε ότι δύο μονοπάτια f και g του X είναι ομοτοπικά και ότι η ομοτοπία που θεωρούμε λαμβάνει χώρα στο υποσύνολο A του X. Θα συμβολίζουμε επίσης με $[\gamma]_A$ την κλάση μιας θηλειάς γ (που περιέχεται στο A) στην ομάδα $\pi_1(A, x_0)$. Τέλος, ως συνήθως, το γινόμενο μονοπατιών (ή κλάσεων) θα συμβολίζεται με τελεία $\cdot$ ενώ το γινόμενο στοιχείων στο ελεύθερο γινόμενο $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ θα συμβολίζεται με αστερίσκο $*$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό ο τύπος του ομομορφισμού

$$\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\Phi\big([\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}} * [\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}} * \cdots * [\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}}\big) &= j_{\varepsilon_1 *}([\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}}) \cdot j_{\varepsilon_2 *}([\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}}) \cdots j_{\varepsilon_\nu *}([\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}}) \\ &= [\gamma_1]_X \cdot [\gamma_2]_X \cdot \cdots \cdot [\gamma_\nu]_X = [\gamma_1 \cdots \gamma_\nu]_X,\end{aligned}$$

όπου $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$ και διαδοχικά ε_i διαφορετικά μεταξύ τους.

Ο ομομορφισμός Φ είναι επί, αφού $\Phi|_{\pi_1(U_1, x_0)} = j_{1*}$, $\Phi|_{\pi_1(U_2, x_0)} = j_{2*}$ και η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ παράγεται από τις εικόνες $\mathrm{Im}\, j_{1*}$, $\mathrm{Im}\, j_{2*}$ των ομομορφισμών j_{1*}, j_{2*}, αντίστοιχα (βλ. Παρατήρηση **??**).

Όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει, αν $[\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, τότε

$$\Phi\big(i_{1*}([\gamma]_{U_1\cap U_2}) * i_{2*}([\gamma]_{U_1\cap U_2})^{-1}\big) = \Phi([\gamma]_{U_1} * [\gamma]_{U_2}^{-1}) = [\gamma\gamma^{-1}]_X = 1,$$

που σημαίνει ότι $N \subseteq \ker\Phi$.

Το δύσκολο μέρος, είναι η απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού $\ker\Phi \subseteq N$. Έστω $g = [\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}} * [\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}} * \cdots * [\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}}$ ένα στοιχείο του ελευθέρου γινομένου $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$, όπου $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$ και διαδοχικά ε_i διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι το g ανήκει στον πυρήνα της Φ. Τότε $[\gamma_1 \cdots \gamma_\nu]_X = 1$, ισοδύναμα $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu \underset{X}{\simeq} C_{x_0}$. Θα αποδείξουμε ότι το στοιχείο g ανήκει στην υποομάδα N.

Έστω $H : I \times I \to X$ μια ομοτοπία από το μονοπάτι $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu$ στο C_{x_0}. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Lebesgue, υποδιαιρούμε το $I \times I$ σε "τετραγωνάκια" T_{ij} πλευράς $1/n$, έτσι ώστε καθένα από αυτά να απεικονίζεται μέσω της H στο U_1 ή στο U_2. Δηλαδή, $T_{ij} = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$, όπου $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και $H(T_{ij}) \subseteq U_1$ ή U_2. Επιλέγοντας το n καταλλήλως (αρκούντως μεγάλη δύναμη του 2) μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι τα άκρα των διαστημάτων (του [0,1]) που ορίζουν τις γ_i στον τύπο γινόμενο $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu$ είναι μέρη της υποδιαίρεσης της κάτω πλευράς του $I \times I$, δηλαδή είναι της μορφής i/n. Αν συμβολίσουμε με γ_{ij} το μονοπάτι που προκύπτει από τον περιορισμό της ομοτοπίας H στην οριζόντια κάτω πλευρά $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times \{\frac{j}{n}\}$ του τετραγώνου $T_{i(j+1)}$, καταλλήλως αναπαραμετρικοποιημένο, τότε

$$H_0 = \gamma_1 \cdots \gamma_\nu \underset{X}{\simeq} \underbrace{(\gamma_{10} \cdots \gamma_{k0})}_{\gamma_1} \cdots \underbrace{(\gamma_{m0} \cdots \gamma_{n0})}_{\gamma_\nu},$$

αφού η ομοτοπία τη χρονική στιγμή 0 μας δίνει την κάτω πλευρά του τετραγώνου $I \times I$ που είναι το μονοπάτι $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu$. Ατύπως μιλώντας, η ιδέα της απόδειξης είναι να "αντικαταστήσουμε", σταδιακά κάθε γ_{ij} με την οριζόντια πάνω πλευρά του τετραγώνου $T_{i(j+1)}$ (παραμένοντας στο ίδιο σύμπλοκο της N), χρησιμοποιώντας την ομοτοπία, καταλήγοντας έτσι στην πάνω πλευρά του $I \times I$ που είναι το σταθερό μονοπάτι στο x_0. Αυτό όμως προϋποθέτει να αντιστοιχίσουμε μια θηλειά σε κάθε γ_{ij} για να έχουμε στοιχείο που να ανήκει σε μια από της ομάδες $\pi_1(U_1, x_0)$ ή $\pi_1(U_2, x_0)$.

Έστω $v_{ij} = (i/n, j/n)$ και $\beta_{ij} = H|_{\{i/n\}\times[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]}$ η εικόνα μέσω της H της πλευράς $\{i/n\} \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ καταλλήλως αναπαραμετρικοποιημένη. Για κάθε ζεύγος δεικτών i, j θεωρούμε μονοπάτι h_{ij} από το x_0 στο v_{ij} εντός της τομής $U_1 \cap U_2$ ή εντός του U_1 ή του U_2, αν το σημείο v_{ij} ανήκει στην τομή $U_1 \cap U_2$ ή στο U_1 ή στο U_2, αντίστοιχα. Στην περίπτωση που το v_{ij} είναι το σημείο αναφοράς x_0, τότε επιλέγουμε ως h_{ij} το σταθερό μονοπάτι στο x_0. Έτσι έχουμε τις παρακάτω θηλειές στο x_0

$$\widetilde{\gamma}_{ij} = h_{i-1,j} \cdot \gamma_{ij} \cdot h_{ij}^{-1} \ \text{ και } \ \widetilde{\beta}_{ij} = h_{i,j-1} \cdot \beta_{ij} \cdot h_{ij}^{-1}$$

καθεμία από τις οποίες περιέχεται είτε στο U_1 ή στο U_2. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο g παραγοντοποιείται σε γινόμενο μικροτέρων θηλειών στο x_0 που η καθεμία περιέχεται σε ένα από U_1, U_2, ως εξής:

$$g = [\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}} * [\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}} * \cdots * [\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}} = [\widetilde{\gamma}_{10}]_{U_{\varepsilon_1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{k0}]_{U_{\varepsilon_1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{m0}]_{U_{\varepsilon_\nu}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n0}]_{U_{\varepsilon_\nu}}.$$

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η σχέση

$$gN = [\widetilde{\gamma}_{1,j-1}]_{U_{1,j-1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n,j-1}]_{U_{n,j-1}} N \tag{8.1}$$

συνεπάγεται ότι

$$gN = [\widetilde{\gamma}_{1,j}]_{U_{1,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n,j}]_{U_{n,j}} N,$$

όπου καθένα από τα $U_{i,j-1}$ και $U_{i,j}$ ισούται με U_1 ή U_2. Σημειώνουμε πρώτα, πως αν η γ είναι μια θηλειά στο x_0 που περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$, τότε τα στοιχεία $[\gamma]_{U_1}$ και $[\gamma]_{U_2}$ ορίζουν το ίδιο αριστερό σύμπλοκο της N (δηλ. $[\gamma]_{U_1} N = [\gamma]_{U_2} N$), αφού η “διαφορά” τους $[\gamma]_{U_1} \cdot [\gamma]_{U_2}^{-1}$ ανήκει στην υποομάδα N. Σε συνδυασμό με την κανονικότητα της N, αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που στο γινόμενο στην 8.1 εμφανίζεται παράγοντας $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_1}$ με θηλειά $\widetilde{\gamma}_{i,j-1}$ που περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$, τότε αυτός μπορεί να αντικατασταθεί από τον $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_2}$ χωρίς να αλλάξει η ισότητα μεταξύ των δύο αριστερών συμπλόκων.

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της ομοτοπίας H στο τετραγωνάκι T_{ij} δίνει μια ομοτοπία (η οποία λαμβάνει χώρα εντός του U_1 ή του U_2) μεταξύ των μονοπατιών $\gamma_{i,j-1}$ και $\beta_{i-1,j} \cdot \gamma_{ij} \cdot \beta_{ij}^{-1}$ και άρα μια ομοτοπία μεταξύ των αντιστοίχων θηλειών $\widetilde{\gamma}_{i,j-1}$ και $\widetilde{\beta}_{i-1,j} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij} \cdot \widetilde{\beta}_{ij}^{-1}$. Πρέπει να σημειωθεί πως αν $H(T_{ij}) \subseteq U_2$ και $U_{i,j-1} = U_1$, τότε η θηλειά $\gamma_{i,j-1}$ περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$ και όπως είδαμε πριν ο παράγοντας $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_1}$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_2}$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ασυμβιβαστότητα μεταξύ του ανοικτού εντός του οποίου πραγματοποιείται ο περιορισμός της ομοτοπίας και των ανοικτών που περιέχονται οι θηλειές κάθε φορά. Συνεπώς, από τη σχέση 8.1 και κάνοντας τις αντικαταστάσεις των ανοικτών $U_{i,j-1}$ όπου απαιτείται, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} gN &= [\widetilde{\beta}_{0,j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\beta}_{1j}^{-1}]_{U_{1,j}} * \cdots * [\widetilde{\beta}_{n-1,j}]_{U_{n,j}} * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} * [\widetilde{\beta}_{nj}^{-1}]_{U_{1,j}} N \\ &= [\widetilde{\beta}_{0,j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{2j}]_{U_{2,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} * [\widetilde{\beta}_{nj}]_{U_{n,j}}^{-1} N \\ &= [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{2j}]_{U_{2,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} N, \end{aligned}$$

αφού $\widetilde{\beta}_{0,j} = \widetilde{\beta}_{nj} = C_{x_0}$, καθώς η ομοτοπία H διατηρεί τα άκρα των μονοπατιών που "συνδέει"(εδώ είναι θηλειές στο x_0).

Τελικά, εφαρμόζοντας διαδοχικά τη συνεπαγωγή που μόλις αποδείξαμε, έχουμε

$$\begin{aligned}
gN &= [\widetilde{\gamma}_{10}]_{U_{1,0}} * [\widetilde{\gamma}_{20}]_{U_{2,0}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n0}]_{U_{n,0}}\, N \\
&= [\widetilde{\gamma}_{11}]_{U_{1,1}} * [\widetilde{\gamma}_{21}]_{U_{2,1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n1}]_{U_{n,1}}\, N \\
&\ \vdots \\
&= [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{2j}]_{U_{2,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}}\, N \\
&\ \vdots \\
&= [\widetilde{\gamma}_{1n}]_{U_{1,n}} * [\widetilde{\gamma}_{2n}]_{U_{2,n}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nn}]_{U_{n,n}}\, N \\
&= [C_{x_0}] * \cdots * [C_{x_0}]\, N \\
&= [C_{x_0}]\, N = N.
\end{aligned}$$

Έπεται λοιπόν ότι το τυχαίο στοιχείο g του πυρήνα $\ker\Phi$ ανήκει στην υποομάδα N και ως εκ τούτου $\ker\Phi \subseteq N$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παρατήρηση 8.1.2. Η υπόθεση ότι η τομή $U_1 \cap U_2$ είναι κατά τόξα συνεκτική δεν μπορεί να παραληφθεί, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, αν θεωρήσουμε τον κύκλο S^1 και τα ανοικτά $U_1 = S^1 \setminus \{1\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{-1\}$.

Με τον ίδιο τρόπο και φυσικά τις ανάλογες τροποποιήσεις προκύπτει η ακόλουθη πιο γενική εκδοχή του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen (βλ. [3]).

Θεώρημα 8.1.3. *Υποθέτουμε ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος καλύπτεται από μια οικογένεια $\{A_\alpha\}_\alpha$ ανοικτών και κατά τόξα συνεκτικών υποσυνόλων του, έτσι ώστε $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$. Έστω $x_0 \in \cap_\alpha A_\alpha$ και $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ο ομομορφισμός που επεκτείνει στο ελεύθερο γινόμενο τους ομομορφισμούς $j_{\alpha*} : \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ που επάγονται από τις ενθέσεις $j_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow X$.*

I. Αν για κάθε ζεύγος δεικτών α, β η τομή $A_\alpha \cap A_\beta$ είναι κατά τόξα συνεκτική, τότε ο ομομορφισμός Φ είναι επί.

II. Αν επιπροσθέτως, κάθε τομή $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ είναι κατά τόξα συνεκτική, τότε $\ker\Phi = N$, όπου N είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$i_{\alpha\beta *}(g) i_{\beta\alpha *}(g)^{-1}$ για $g \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)$ και $i_{\alpha\beta *}$, $i_{\beta\alpha *}$ είναι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί των ενθέσεων $i_{\alpha\beta} : A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, $i_{\beta\alpha} : A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\beta$, αντίστοιχα. Ως εκ τούτου

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0)/N.$$

Πόρισμα 8.1.4. *Έστω $X = U \cup V$, όπου U, V ανοικτά, κατά τόξα συνεκτικά υποσύνολα του χώρου X με μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική τομή και έστω $x_0 \in U \cap V$. Αν οι ενθέσεις της τομής $U \cap V$ στα U και V επάγουν μονομορφισμούς στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες, τότε*

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

Ιδιαιτέρως, αν η τομή $U \cap V$ είναι απλά συνεκτική, τότε

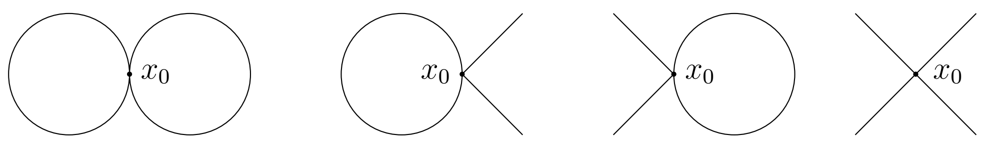
$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

Ορμώμενος κανείς από το συμπέρασμα του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen, θα μπορούσε να ορίσει την έννοια ενός "γενικευμένου" αμαλγάματος, αλλά σε αυτήν την περίπτωση δεν θα μπορούσε να εξασφαλίσει ότι οι παράγοντες εμφυτεύονται στο "γενικευμένο" αμάλγαμα, κάτι που είναι πολύ σημαντικό, όπως ήδη έχουμε επισημάνει. Με άλλα λόγια, δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα όπως τις ξέρουμε για να μελετήσει τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου. Όμως, αντί αυτού θα χρησιμοποιούσε απευθείας τον ισομορφισμό

$$\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)\big)/N$$

του θεωρήματος 8.1.1.

Παράδειγμα 8.1.5. (Σφήνα δύο κύκλων) Υπενθυμίζουμε ότι η σφήνα μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων X_i, $i \in I$, με σημεία αναφοράς $x_i \in X_i$, είναι ο χώρος πηλίκο $\vee_i X_i$ που προκύπτει από την ξένη ένωση $\sqcup_i X_i$ ταυτοποιώντας όλα τα σημεία x_i μεταξύ τους σε ένα μόνο σημείο, δηλαδή, ο χώρος πηλίκο $\sqcup_i X_i / \sim$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις σχέσεις $x_i \sim x_j$ για κάθε $i, j \in I$. Η (κοινή) εικόνα των x_i στον χώρο πηλίκο είναι η βάση της σφήνας.



$S^1 \vee S^1$ $\quad$ $U \cong$ $\quad$ $V \cong$ $\quad$ $U \cap V \cong$

Θεωρούμε τη σφήνα $S^1 \vee S^1$ δύο αντιτύπων του μοναδιαίου κύκλου με σημείο αναφοράς τη βάση x_0 της σφήνας. Έστω U και V τα ανοικτά που προκύπτουν, αν από κάθε αντίτυπο (την εικόνα του μέσα στη σφήνα για την ακρίβεια) αφαιρέσουμε ένα σημείο διαφορετικό από το x_0. Δηλαδή,

$$U = S^1 \vee (S^1 \setminus \{x_1\}) \text{ και } V = (S^1 \setminus \{x_2\} \vee S^1),$$

όπου $x_1 \neq x_0 \neq x_2$. Καθένα από τα U και V περιστέλλεται σε κύκλο και έτσι $U \simeq V \simeq S^1$, ενώ η τομή τους $U \cap V$ περιστέλλεται στο x_0 και άρα είναι συμπτύξιμη (ιδιαιτέρως απλά συνεκτική). Εφόσον τα ανοικτά U και V καλύπτουν τον χώρο και ικανοποιούνται, οι υποθέσεις του προηγούμενου πορίσματος, έχουμε

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z} *_1 \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2.$$

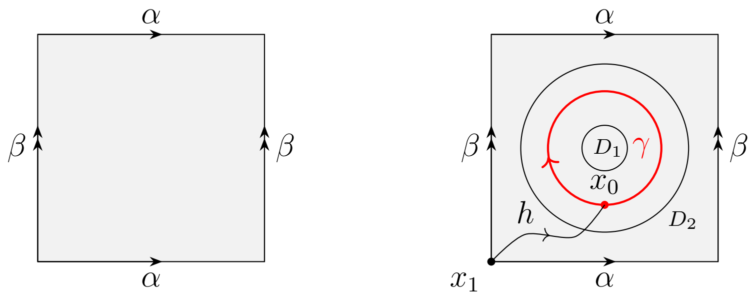
Παράδειγμα 8.1.6. Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται ως εξής. Έστω $X = \vee_{i \in I} S^1_i$ η σφήνα μιας οικογένειας αντιτύπων του κύκλου S^1 με σημείο αναφοράς τη βάση x_0 της σφήνας. Δηλαδή, κάθε χώρος S^1_i είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο S^1. Από κάθε αντίτυπο S^1_i αφαιρούμε ένα σημείο x_i διαφορετικό από τη βάση της σφήνας, θεωρούμε το συμπλήρωμά τους $N = X \setminus \{x_i, i \in I\}$ και ορίζουμε τα ανοικτά $U_i = S^1_i \cup N$, $i \in I$. Καθένα από τα ανοικτά U_i περιστέλλεται σε κύκλο, ενώ η τομή τους (που είναι το N) είναι συμπτύξιμη και έτσι απλά συνεκτική. Από τη γενική εκδοχή του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen προκύπτει ότι

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{i \in I} \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή, η θεμελιώδης ομάδα μιας σφήνας αντιτύπων του κύκλου είναι το ελεύθερο γινόμενο αντιτύπων της άπειρης κυκλικής, ένα αντίτυπο της άπειρης κυκλικής για κάθε αντίτυπο του κύκλου, με άλλα λόγια είναι η ελεύθερη τάξης $|I|$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το θεώρημα των Seifert-Van Kampen για να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα της σπείρας. Αναλύουμε λεπτομερώς τη διαδικασία στο παράδειγμα αυτό, προκειμένου να προιδεάσουμε τον αναγνώστη για τα επόμενα, γιατί στη γενική περίπτωση επισύναψης ενός κελιού διάστασης 2, ο υπολογισμός της θεμελιώδους ομάδας του χώρου που προκύπτει γίνεται επί της ουσίας με τον ίδιο τρόπο.

Παράδειγμα 8.1.7. (Η θεμελιώδης ομάδα της σπείρας (torus)) Θεωρούμε ως συνήθως την "πολυγωνική" αναπαράσταση της σπείρας $T = S^1 \times S^1$ και δύο κλειστούς δίσκους



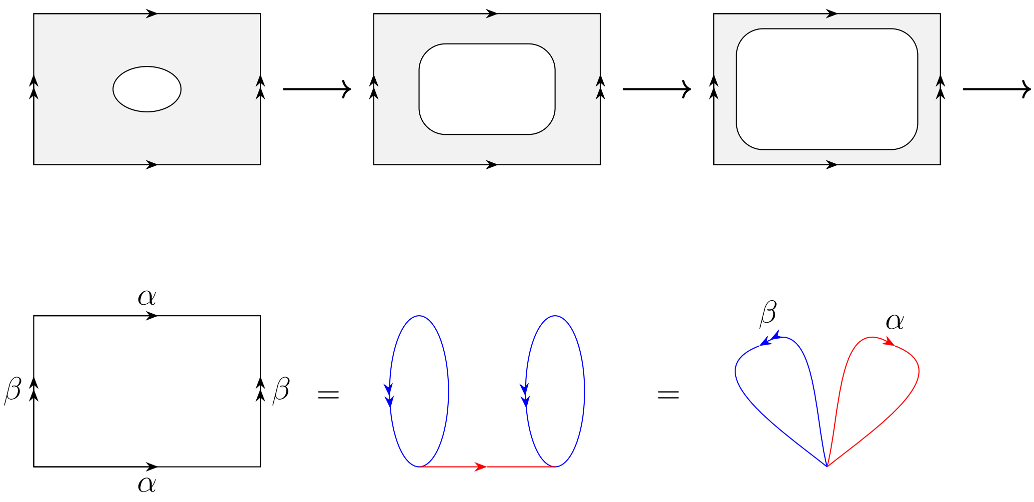
Σχήμα 8.1: Η σπείρα (torus).

D_1, D_2 με τον έναν να περιέχεται στον άλλο όπως στο σχήμα 8.1. Έστω U το εσωτερικό του D_2 και $V = T \setminus D_1$ το συμπλήρωμα του κλειστού δίσκου D_1. Τα U και V είναι ανοικτά, καλύπτουν τον χώρο T και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen.

Εφόσον η τομή $U \cap V$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με κύκλο (αφού περιστέλλεται σε κύκλο), η θεμελιώδης ομάδα της είναι άπειρη κυκλική. Επιλέγουμε θηλειά γ εντός της τομής και σημείο αναφοράς x_0 επί της εικόνας αυτής, έτσι ώστε η κλάση ομοτοπίας της γ να παράγει τη θεμελιώδη ομάδα της τομής, δηλαδή, $\pi_1(U \cap V, x_0) = \mathbb{Z} = \langle[\gamma]\rangle$. Συμβολίζουμε με x_1 την εικόνα (μέσω της απεικόνισης πηλίκο) της κορυφής του τετραγώνου που βρίσκεται κάτω, αριστερά και επιλέγουμε μονοπάτι h εντός του V από το x_1 στο x_0. Εφόσον το U είναι απλά συνεκτικό (συμπτύξιμο μάλιστα), από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen έπεται ότι η ένθεση $V \hookrightarrow T$ επάγει επιμορφισμό $\Phi_0 : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$ του οποίου ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα της $\pi_1(V, x_0)$ που παράγεται από την κλάση ομοτοπίας $[\gamma]$ (εντός του χώρου T) της θηλειάς γ. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς, διαπιστώνουμε ότι ο Φ_0 επάγει επιμορφισμό $\Phi_1 : \pi_1(V, x_1) \to \pi_1(T, x_1)$ του οποίου ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα της $\pi_1(V, x_1)$ που παράγεται από το στοιχείο $[h\gamma h^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V, x_1) \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\Phi_h"'] & \pi_1(T, x_1) \\ \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "\Phi_0"] & \pi_1(T, x_0) \arrow[u, "\Phi_{h^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

Από την περιστολή του V στην εικόνα (μέσω της απεικόνισης πηλίκο) του συνόρου του τετραγώνου (που είναι σφήνα δύο κύκλων), όπως αυτή περιγράφεται στο σχήμα 8.2, έπεται ότι $[\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}] = [h\gamma h^{-1}]$. Η ίδια περιστολή δείχνει ότι $\pi_1(V, x_1) = \langle[\alpha]\rangle * \langle[\beta]\rangle \cong F_2$. Συνεπώς, μέσω του επιμορφισμού Φ_1 λαμβάνουμε την ακόλουθη παράσταση για τη



Σχήμα 8.2: Η περιστολή του V στη σφήνα των δύο κύκλων.

θεμελιώδη ομάδα της σπείρας στο x_1:

$$\pi_1(T, x_1) = \langle [\alpha], [\beta] \,:\, [\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}] = 1\rangle = \langle [\alpha], [\beta] \,:\, [\beta][\alpha] = [\alpha][\beta]\rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Τελικά, η θεμελιώδης ομάδα της σπείρας είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης δύο.

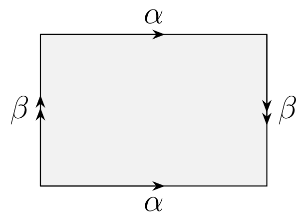
Παράδειγμα 8.1.8. (Η θεμελιώδης ομάδα της μποτίλιας του Klein) Ακολουθώντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος με το αντίστοιχο ανοικτό κάλυμμα και συμβολισμό γενικότερα, προκύπτει ότι οι θηλειές $h\gamma h^{-1}$ και $\beta\alpha\beta\alpha^{-1}$ είναι ομοτοπικές και καταλήγουμε στην ακόλουθη παράσταση για την μποτίλια του Klein K:

$$\pi_1(K, x_1) = \langle x, y \,:\, xyxy^{-1} = 1\rangle,$$

όπου x και y είναι οι κλάσεις ομοτοπίας των θηλειών α και β, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η αβελιανοποίηση της ομάδας $\pi_1(K, x_1)$ έχει παράσταση

$$\pi_1(K, x_1)_{ab} = \langle x, y \,:\, xyxy^{-1} = 1, xy = yx\rangle = \langle x, y \,:\, x^2 = 1, xy = yx\rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2.$$

Συμπεραίνουμε πρώτον ότι η ομάδα $\pi_1(K, x_1)$ είναι μη τετριμμένη και δεύτερον ότι η μποτίλια του Klein δεν είναι ομοιομορφική με τη σπείρα (οι θεμελιώδεις ομάδες τους έχουν μη ισόφορφες αβελιανοποιήσεις).



Σχήμα 8.3: Η μποτίλια του Klein.

8.2 Θεμελιώδης Ομάδα και Επισύναψη Κελιών

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να μελετήσουμε την επίπτωση που έχει στη θεμελιώδη ομάδα ενός χώρου η επισύναψη κελιών και να δείξουμε πώς υπολογίζεται μια παράσταση της θεμελιώδους ομάδας ενός πεπερασμένου συμπλέγματος κελιών. Πρώτα, όμως, αποδεικνύουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα κάθε γραφήματος είναι ελεύθερη.

Ένα **γράφημα**, με την τοπολογική έννοια, είναι ένα σύμπλεγμα κελιών X διάστασης μικρότερης ή ίσης του 1. Οι **κορυφές** του γραφήματος είναι τα 0-κελιά του X. Για κάθε 1-κελί e^1_α του X ορίζεται, μέσω της αντίστοιχης χαρακτηριστικής απεικονίσεως $\tilde{\varphi}_\alpha : D^1_\alpha \to X$, ένα ζεύγος μονοπατιών f και f^{-1}, με άκρα τις κορυφές $\tilde{\varphi}_\alpha(-1)$ και $\tilde{\varphi}_\alpha(1)$, τα οποία στη συνέχεια θα αναφέρονται ως **ακμές**. Η εικόνα κάθε ακμής είναι η κλειστότητα του αντίστοιχου κελιού στον χώρο X. Ένα **υπογράφημα** του X είναι ένα υποσύμπλεγμα, δηλαδή, ένας υπόχωρος Y του X ο οποίος είναι ένωση κορυφών και (εικόνων) ακμών, ο οποίος για κάθε ακμή που περιέχει, περιέχει και τα άκρα της. Ένα **δέντρο** είναι ένα απλά συνεκτικό γράφημα. Ένα **μονοπάτι ακμών** είναι μια ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ διαδοχικών ακμών. Το πλήθος n των ακμών είναι το μήκος του μονοπατιού. Ένα μονοπάτι ακμών μήκους μηδέν είναι μια κορυφή.

Πρόταση 8.2.1. *Κάθε δέντρο T είναι συμπτύξιμος χώρος.*

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε ακολουθία υποδέντρων $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_n \subseteq T_{n+1} \subseteq \cdots$, έτσι ώστε $T = \cup_n T_n$ ως εξής: το T_1 είναι μια κορυφή του δέντρου και το T_n λαμβάνεται από το T_{n-1} επισυνάπτοντάς του κάθε ακμή y του T που έχει τουλάχιστον ένα άκρο στο T_{n-1}. Εφόσον το T είναι δέντρο, κάθε τέτοια ακμή δεν είναι θηλειά και έχει ακριβώς ένα άκρο στο T_{n-1}. Συμπτύσσοντας (στον ίδιο χρόνο) κάθε τέτοια ακμή y στο άκρο της που ανήκει στο T_{n-1}, προκύπτει περιστολή $r_n : T_n \to T_{n-1}$. Για κάθε $n > 1$, συμβολίζουμε με $H_n : T_n \times I \to T_n$ την αντίστοιχη ομοτοπία. Φυσικά, αν το δέντρο T είναι πεπερασμένο (γενικότερα φραγμένης "διαμέτρου"), η ανωτέρω αύξουσα ακολουθία των υποδέντρων είναι τελικά σταθερή και η ομοτοπία H_n, όταν $T_n = T_{n-1}$, επιλέγεται να είναι η ταυτοτική απεικόνιση σε κάθε χρονική στιγμή. Με κατάλληλη, κάθε φορά, αναπαραμέτρηση του $[0,1]$, προκύπτουν ομοτοπίες $F_n : T_n \times [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] \to T_n$, έτσι ώστε $F_n(x,t) = x$, αν $x \in T_{n-1}$ ή $t = 1/n$ και $F_n(x, \frac{1}{n-1}) = r_n(x)$. Ορίζουμε ομοτοπία $G_n : T_n \times I \to T_n$ μέσω της οποίας το δέντρο T_n περιστέλλεται στο T_1 ως ακολούθως: Η ομοτοπία $G_n(x,t)$ δίνεται από τον τύπο x στο $T_n \times [0, \frac{1}{n}]$, από τον τύπο της F_n στο $T_n \times [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$, από τον τύπο $F_{n-1} \circ (r_n \times \mathrm{Id})$ στο $T_n \times [\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}]$, από τον τύπο $F_{n-2} \circ (r_{n-1} \times \mathrm{Id}) \circ (r_n \times \mathrm{Id})$ στο $T_n \times [\frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3}]$ και ούτω καθεξής. Παρατηρούμε ότι η G_n ταυτίζεται με την G_{n-1} στο $T_{n-1} \times I$. Έτσι ορίζεται ομοτοπία $G : T \times I \to T$ με $G = G_n$ στο $T_n \times I$, της οποίας η συνέχεια έπεται από το γεγονός ότι ο χώρος T είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία. Τελικά, μέσω της ομοτοπίας G, το δέντρο T περιστέλλεται στο T_1 που είναι κορυφή. □

Λήμμα 8.2.2. *Κάθε συνεκτικό γράφημα X περιέχει μεγιστικό δέντρο (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι).*

Απόδειξη. Το σύνολο των υποδέντρων του X είναι μη κενό (το X θεωρείται μη κενό) και μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι. Αν έχουμε ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $T_i, i \in I$, υποδέντρων του X (δηλαδή, για κάθε ζεύγος δεικτών i, j είτε $T_i \subseteq T_j$ ή $T_j \subseteq T_i$), τότε η ένωσή τους $\cup_i T_i$ είναι υποδέντρο του X. Πράγματι, είναι άμεσο ότι η ένωση είναι κατά τόξα συνεκτική, ενώ λόγω συμπάγειας, κάθε θηλειά στην ένωση θα περιέχεται στις κλειστότητες πεπερασμένων το πλήθος 1-κελιών. Συνεπώς, κάθε θηλειά θα περιέχεται σε κάποιο T_i και ως εκ τούτου θα είναι ομοτοπική με σημείο. Το λήμμα του Zorn ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Έστω X ένα συνεκτικό γράφημα, T ένα μεγιστικό δέντρο του X και v_0 μια κορυφή του X (λόγω μεγιστικότητας το T περιέχει κάθε κορυφή του X). Για κάθε κορυφή v του X θεωρούμε μονοπάτι ακμών ελαχίστου μήκους p_v εντός του T, από την κορυφή v_0 στην v (το οποίο είναι μοναδικό, εφόσον το T είναι δέντρο). Για κάθε 1-κελί που δεν ανήκει στο T επιλέγουμε μια ακμή e_a του X από το αντίστοιχο ζεύγος ακμών και ορίζουμε θηλειά f_a μέσω του γινομένου $p_{v_a} \cdot e_a \cdot p_{u_a}^{-1}$, όπου v_a και u_a είναι τα άκρα της ακμής e_a (όχι απαραιτήτως διαφορετικά). Σημειώνουμε ότι η κλάση ομοτοπίας $[f_a]$ δεν εξαρτάται από τα μονοπάτια που θα επιλέξουμε, εντός του T, για να "ενώσουμε" τα άκρα της e_a με την κορυφή v_0, αφού το T είναι απλά συνεκτικό (ως συμπτύξιμο).

Θεώρημα 8.2.3. *Αν το X είναι ένα συνεκτικό γράφημα με μεγιστικό δέντρο T και v_0 κορυφή του X, τότε η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, v_0)$ είναι ελεύθερη με έναν γεννήτορα για κάθε 1-κελί εκτός του μεγιστικού δέντρου T. Πιο συγκεκριμένα, η $\pi_1(X, v_0)$ είναι ελεύθερη επί των κλάσεων $[f_a]$ που κατασκευάσαμε πριν και που αντιστοιχούν στις ακμές e_a εκτός του μεγιστικού δέντρου.*

Απόδειξη. Για κάθε ακμή e_a (που έχουμε επιλέξει και) που αντιστοιχεί σε 1-κελί εκτός του T, όπως πριν, θεωρούμε το ανοικτό U_a που προκύπτει από το γράφημα, αφαιρώντας ένα εσωτερικό σημείο από κάθε άλλη ακμή εκτός του T που είναι διαφορετική από την e_a. Αν v_a και u_a είναι τα άκρα της e_a, τότε συμβολίζουμε με p_a το μονοπάτι ακμών (εντός του T) ελαχιστικού μήκους στην κλάση ομοτοπίας του $p_{v_a}^{-1} \cdot p_{u_a}$ και με K_a την ένωση $p_a \cup e_a$, η οποία είναι ομοιομορφική με κύκλο. Παρατηρούμε ότι η κλειστότητα κάθε συνιστώσας του $\big(T \cup e_a\big) \setminus K_a$ είναι δέντρο που τέμνει τον κύκλο K_a σε ένα μόνο σημείο (κορυφή) και συνεπώς κάθε τέτοια συνιστώσα περιστέλλεται σε αυτήν την κορυφή. Έπεται ότι η ένωση $T \cup e_a$ (άρα και η εικόνα $\mathrm{Im}\, f_a$) περιστέλλεται στον κύκλο K_a και ιδιαιτέρως $\pi_1(T \cup e_a) = \pi_1(\mathrm{Im}\, f_a) = \langle [f_a] \rangle \cong \mathbb{Z}$. Εφόσον κάθε ανοικτό U_a περιστέλλεται στην ένωση $T \cup e_a$, έχουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του U_a είναι άπειρη κυκλική με γεννήτορα $[f_a]$. Από την άλλη, τα ανοικτά U_a καλύπτουν το γράφημα, ενώ η τομή περισσοτέρων από δύο διαφορετικών τέτοιων ανοικτών είναι συμπτύξιμη, αφού περιστέλλεται στο T. Τελικά, από τη γενική εκδοχή του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen προκύπτει ότι $\pi_1(X, v_0) \cong *_a \pi_1(U_a, v_0) = *_a \langle [f_a] \rangle$. $\square$

Λήμμα 8.2.4. *Έστω A ένας τοπολογικός χώρος και $X = A \cup_\varphi D^n$, όπου $\varphi : S^{n-1} \to A$ συνεχής. Αν το x_0 είναι ένα σημείο του συμπληρώματος $X \setminus A$, τότε ο υπόχωρος $X \setminus \{x_0\}$ περιστέλλεται στον A.*

Εδώ έχουμε ταυτίσει τον A με την εικόνα του $\pi(A)$ μέσω της απεικόνισης πηλίκο $\pi : A \sqcup_\varphi D^n \to A \cup_\varphi D^n$.

Απόδειξη. Αν $\psi : D^n \to X$ είναι η αντίστοιχη χαρακτηριστική απεικόνιση, τότε $\psi|_{\partial D^n} = \varphi$ και $\psi|_{\mathring{D}^n}$ ομοιομορφισμός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = \psi(\mathbf{0})$, όπου $\mathbf{0}$ είναι το κέντρο του δίσκου (γιατί;). Ορίζουμε ομοτοπία $H : X \times I \to X$ με

$$H(x,t) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \psi\bigg((1-t)y + t\dfrac{y}{\|y\|}\bigg), & x \in \psi(D^n) \setminus \{x_0\},\ y \in \psi^{-1}(\{x\}). \end{cases}$$

Η απεικόνιση H είναι καλά ορισμένη, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή του y στην αντίστροφη εικόνα του x_0 (όταν αυτή περιέχει περισσότερα από ένα σημεία). Πράγματι, αν $y_1 \neq y_2$ και $\psi(y_1) = \psi(y_2)$, τότε, αφού η ψ είναι ομοιομορφισμός στο εσωτερικό του δίσκου, έχουμε ότι $y_1, y_2 \in \partial D^n = S^{n-1}$, άρα $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$ και

$$\psi\Big((1-t)y_1 + t\frac{y_1}{\|y_1\|}\Big) = \psi\Big((1-t)y_2 + t\frac{y_2}{\|y_2\|}\Big) = \psi(y_2) = x.$$

Έπεται επίσης ότι και οι δύο "τύποι" μέσω των οποίων ορίζεται η H δίνουν την ταυτοτική σε κάθε $x \in \psi(S^{n-1})$ (δηλαδή στα κοινά σημεία συμφωνούν). Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $H(a,t) = a$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$, ενώ $H(x,0) = x$ για κάθε $x \in X$. Τέλος, για $x \in \psi(D^n) \setminus \{x_0\}$ και $y \in \psi^{-1}(\{x\})$, έχουμε ότι

$$H(x,1) = \psi\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) = \varphi\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) \in A.$$

Άρα $H(x,1) \in A$ για κάθε $x \in X$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Υπενθυμίζουμε ότι για ένα υποσύνολο S μιας ομάδας G, συμβολίζουμε με $\langle\langle R\rangle\rangle$ την κανονική υποομάδα της G που παράγεται από το R.

Θεώρημα 8.2.5. *Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος στον οποίο επισυνάπτουμε ένα n-κελί D^n, όπου $n \geq 2$, μέσω μιας (συνεχούς) απεικονίσεως $\varphi : S^{n-1} \to X$ και έστω $Y = X \cup_\varphi D^n$ ο χώρος που προκύπτει. Έστω x_1 ένα σημείο στην εικόνα της φ και $\Phi : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$ ο ομομορφισμός που επάγεται από την ένθεση του X στον Y.*

1. *Αν $n \geq 3$, τότε η απεικόνιση Φ είναι ισομορφισμός. Δηλαδή, η επισύναψη κελιών διάστασης μεγαλύτερης του 2 σε έναν χώρο δεν αλλάζει τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου.*

2. *Αν $n = 2$, τότε η Φ είναι επιμορφισμός του οποίου ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από το στοιχείο $[\varphi]$.*

Συμπερασματικά,

$$\pi_1(X \cup_\varphi D^n, x_1) = \begin{cases} \pi_1(X, x_1), & n \geq 3 \\ \pi_1(X, x_1)/\langle\langle[\varphi]\rangle\rangle, & n = 2. \end{cases}$$

Απόδειξη. Σημειώνουμε ξανά, ότι η απεικόνιση πηλίκο $\pi : X \sqcup_\varphi D^n \to X \cup_\varphi D^n = Y$ εμφυτεύει το εσωτερικό του δίσκου και τον X ομοιομορφικά στον Y. Έτσι μπορούμε να

θεωρούμε το εσωτερικό του δίσκου και τον X ως υπόχωρους του Y ταυτίζοντάς τους με τις εικόνες τους μέσω της π.
Θεωρούμε τα ανοικτά και κατά τόξα συνεκτικά

$$U = \{x \in \mathrm{Int}D^n \,:\, \|x\| < 2/3\} \quad \text{και} \quad V = Y \setminus \{x \in \mathrm{Int}D^n \,:\, \|x\| \leq 1/3\}.$$

Το U είναι ομοιομορφικό με ανοικτή μπάλα, άρα συμπτύξιμο, ενώ η τομή $U \cap V$ είναι ομοιομορφική με τον χώρο $S^{n-1} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ο οποίος είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τη σφαίρα S^{n-1}. Η ομοτοπία που ορίσθηκε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος δείχνει ότι το V περιστέλλεται στον X και έτσι είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με τον X.

Αν $n \geq 3$, τότε, εκτός από το U, είναι και το $U \cap V$ απλά συνεκτικό και συνεπώς $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(U \cap V, x_0) = \{1\}$ για κάθε $x_0 \in U \cap V$. Από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen έπεται ότι η ένθεση του V στον Y επάγει ισομορφισμό $\pi_1(V, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$. Επιλέγοντας μονοπάτι h (εντός του V) από το x_1 στο x_0 και χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς, διαπιστώνουμε ότι η ένθεση του V στον Y επάγει ισομορφισμό $\pi_1(V, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$. Εφόσον ο V περιστέλλεται στον X, η ένθεση του X στον V επάγει ισομορφισμό $\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(V, x_1)$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού.

Αν $n = 2$, τότε η θεμελιώδης ομάδα της τομής $U \cap V$ είναι άπειρη κυκλική. Επιλέγουμε θηλειά γ στην τομή και x_0 στην εικόνα της γ, έτσι ώστε $\pi_1(U \cap V, x_0) = \mathbb{Z} = \langle [\gamma] \rangle$. Από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen, η ένθεση του V στον X επάγει επιμορφισμό $\Phi_0 : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ του οποίου ο πυρήνας είναι η υποομάδα $\langle\langle [\gamma] \rangle\rangle$. Ο ισομορφισμός αλλαγής σημείου αναφοράς, που ορίζεται επιλέγοντας μονοπάτι h (εντός του V) από το x_1 στο x_0, όπως πριν, δείχνει ότι η ένθεση του V στον X επάγει επιμορφισμό $\Phi_1 : \pi_1(V, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$ με πυρήνα την κανονική υποομάδα $\langle\langle [h\gamma h^{-1}] \rangle\rangle$ που παράγεται από την κλάση ομοτοπίας της θηλειάς $h\gamma h^{-1}$. Μέσω της περιστολής του V στον X, η θηλειά $h\gamma h^{-1}$ απεικονίζεται στην φ, δηλαδή $h\gamma h^{-1} \simeq \varphi$, και ως εκ τούτου ο πυρήνας της Φ ισούται με $\langle\langle [\varphi] \rangle\rangle$. □

Επαγωγικά, προκύπτει άμεσα, από το προηγούμενο θεώρημα το ακόλουθο:

Θεώρημα 8.2.6. *Έστω X ένα συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών, $v \in X^0$ και $\varphi_i : S^1 \to X^1$, $i = 1, \ldots, k$, οι απεικονίσεις επισύναψης των κελιών διάστασης 2. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ επιλέγουμε μονοπάτι γ_i, εντός του X^1, από την κορυφή v στο σημείο $\varphi_i\big((1,0)\big)$. Τότε η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, v)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο*

$$\pi_1(X^1, v) / \langle\langle [\gamma_1 \varphi_1 \gamma_1^{-1}], \ldots, [\gamma_k \varphi_k \gamma_k^{-1}] \rangle\rangle.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν αντικαταστήσουμε κάθε γ_i με άλλο μονοπάτι λ_i από την κορυφή v στο σημείο $\varphi_i\big((1,0)\big)$, τότε τα στοιχεία $[\gamma_i\varphi_i\gamma_i^{-1}]$ και $[\lambda_i\varphi_i\lambda_i^{-1}]$ είναι συζυγή στην ομάδα $\pi_1(X^1,v)$, αφού $[\gamma_i\varphi_i\gamma_i^{-1}] = [\gamma_i\lambda_i^{-1}][\lambda_i\varphi_i\lambda_i^{-1}][\lambda_i\gamma_i^{-1}]$, και συνεπώς η παραγόμενη από αυτά κανονική υποομάδα δεν εξαρτάται από την επιλογή των γ_i. Εφόσον η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X^1,v)$ του 1-σκελετού X^1 είναι ελεύθερη, το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει επί της ουσίας μια παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του συμπλέγματος X.

Πόρισμα 8.2.7. *Για κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα G, υπάρχει συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών διάστασης ≤ 2 με θεμελιώδη ομάδα G.*

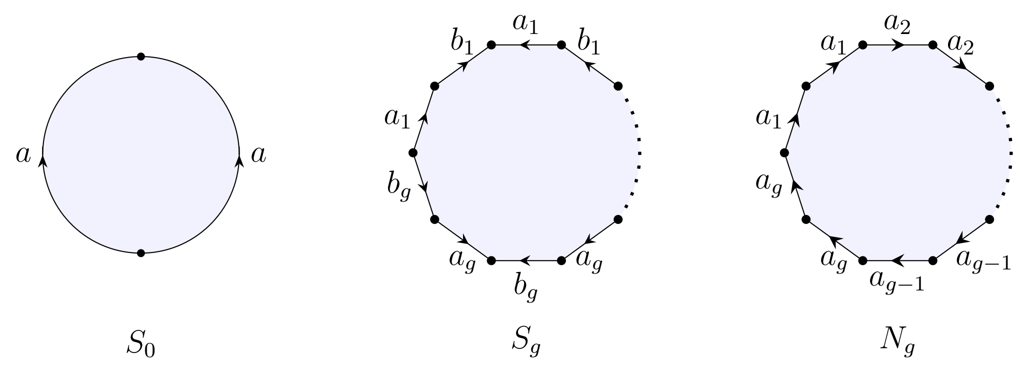
Απόδειξη. Έστω $\langle x_1,\dots,x_m \,|\, r_1,\dots,r_k\rangle$ μια πεπερασμένη παράσταση της G, όπου κάθε r_i είναι μια λέξη στα $x_j^{\pm 1}$, $j=1,\dots,m$. Θεωρούμε ένα μπουκέτο X^1 που αποτελείται από m το πλήθος κύκλους $K_1,\dots,K_m$, έναν για κάθε γεννήτορα x_i, με κοινή κορυφή v. Στο γράφημα X^1 επισυνάπτουμε κελιά διάστασης δύο κατά μήκος των λέξεων r_i. Δηλαδή, αν $r_i = x_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots x_{i_{k_i}}^{\varepsilon_k}$, όπου $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$, τότε η απεικόνιση επισύναψης φ_i απεικονίζει το σύνορο του αντίστοιχου δίσκου στο μονοπάτι $K_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots K_{i_{k_i}}^{\varepsilon_k}$. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα σύμπλεγμα κελιών διάστασης 2 του οποίου, από το προηγούμενο θεώρημα, η θεμελιώδης ομάδα είναι ισόμορφη με την G. Αν δεν υπάρχουν σχέσεις, δηλαδή κάθε λέξη r_i είναι η κενή λέξη, τότε η ομάδα είναι ελεύθερη και είναι η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος X^1. □

Παρατήρηση 8.2.8. Μπορεί να αποδειχθεί, βλ. [2] άρθρα 3 και 4, ότι κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα G είναι η θεμελιώδης ομάδα μιας κλειστής τετραδιάστατης πολλαπλότητας.

8.3 Θεμελιώδεις Ομάδες Κλειστών Επιφανειών

Στη συνέχεια, με τον όρο **επιφάνεια** θα εννοούμε μια πολλαπλότητα διάστασης 2 χωρίς σύνορο. Πιο συγκεκριμένα, μια επιφάνεια είναι ένας Hausdroff τοπολογικός χώρος με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, του οποίου κάθε σημείο έχει ανοικτή περιοχή ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^2$. Μια κλειστή επιφάνεια είναι μια συμπαγής επιφάνεια. Ο όρος κλειστή χρησιμοποιείται συνήθως, γενικότερα, για να υποδηλώσει ότι η υπό μελέτη πολλαπλότητα δεν έχει σύνορο. Για το επόμενο θεώρημα (τοπολογικής) ταξινόμησης, που θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, καθώς και για περισσότερα σχετικά με τη θεωρία επιφανειών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [7, 9, 4]. Αξίζει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι η απόδειξη, από τον Perelman το 2003, της εικασίας της γεωμετρικοποίησης του Thurston μας δίνει έναν τρόπο για την ταξινόμηση των πολλαπλοτήτων διάστασης 3 (βλ. [1]). Δεν είναι εφικτή η ταξινόμηση πολλαπλοτήτων διάστασης $n \geq 4$, εφόσον κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα είναι η θεμελιώδης ομάδα μιας κλειστής πολλαπλότητας διάστασης 4 και το πρόβλημα του ισομορφισμού δεν είναι επιλύσιμο για πεπερασμένα παριστώμενες ομάδες [5, 6].

Θεώρημα 8.3.1. *Κάθε κλειστή, συνεκτική επιφάνεια S επιδέχεται μια από τις ακόλουθες πολυγωνικές παραστάσεις. Δηλαδή, είναι ομοιομορφική με τον χώρο πηλίκο που προκύπτει*



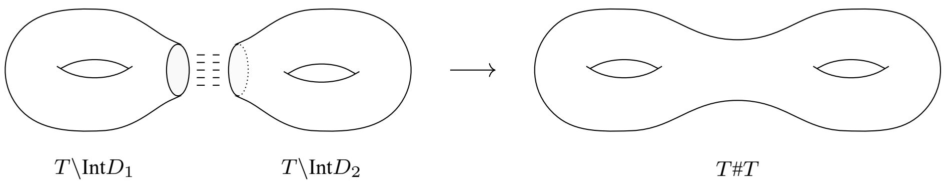
Σχήμα 8.4: Οι πολυγωνικές παραστάσεις των επιφανειών.

ταυτοποιώντας τις πλευρές (με την ίδια ετικέτα) του αντίστοιχου πολυγώνου κατά ζεύγη σύμφωνα με τον προσανατολισμό που υποδηλώνεται από τα βέλη στις πλευρές του πολυγώνου.

Ο πυρήνας της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος είναι ένα αποτέλεσμα του Radó από το 1925, το οποίο λέει ότι κάθε επιφάνεια μπορεί να "τριγωνοποιηθεί", δηλαδή, ατύπως μιλώντας, κάθε επιφάνεια λαμβάνεται από τρίγωνα ταυτοποιώντας πλευρές τους. Μια απόδειξη παρουσιάζεται στο [8].

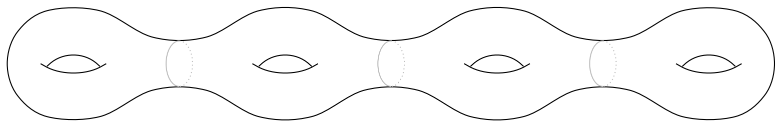
Η επιφάνεια S_g, $g \geq 0$ αναφέρεται ως η *προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους* g, ενώ η N_g, $g \geq 1$ ως η *μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους* g. Παρατηρούμε ότι η πολυγωνική παράσταση του διγώνου μας δίνει χώρο ομοιομορφικό με τη σφαίρα, δηλαδή $S_0 = S^2$, η S_1 είναι ομοιομορφική με τη σπείρα $T = S^1 \times S^1$, ενώ η N_1 με το προβολικό επίπεδο $\mathbb{RP}^2$. Μπορεί να δειχθεί ότι από τη σφαίρα, τη σπείρα και το προβολικό επίπεδο προκύπτει κάθε άλλη συνεκτική κλειστή επιφάνεια μέσω του συνεκτικού αθροίσματος. Δοθέντων δύο επιφανειών Σ_1 και Σ_2 το *συνεκτικό τους άθροισμα* $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ είναι η επιφάνεια που λαμβάνεται, αφαιρώντας το εσωτερικό $\mathrm{Int}D_i$ μιας "μικρής" περιοχής D_i, ομοιομορφικής με κλειστό δίσκο του επιπέδου, από κάθε Σ_i, $i = 1, 2$ και ταυτοποιώντας τα $\Sigma_1 \setminus \mathrm{Int}D_1$ και $\Sigma_2 \setminus \mathrm{Int}D_2$ κατά μήκος των συνόρων K_i των D_i. Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε ομοιομορφισμό $h : K_1 \to K_2$ (κάθε K_i είναι ομοιομορφικό με κύκλο), τότε το συνεκτικό άθροισμα $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ είναι ο χώρος πηλίκο

$$\big(\Sigma_1 \setminus \mathrm{Int}D_1\big) \sqcup \big(\Sigma_2 \setminus \mathrm{Int}D_2\big)/a \sim h(a),\ a \in K_1.$$



Σχήμα 8.5: Το συνεκτικό άθροισμα δύο αντιτύπων της σπείρας T.

Αποδεικνύεται ότι το συνεκτικό άθροισμα δεν εξαρτάται (ως προς ομοιομορφισμό) από την επιλογή των D_1, D_2 και h. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η επιφάνεια S_g, $g \geq 1$, είναι το συνεκτικό άθροισμα g το πλήθος αντιτύπων της σπείρας T, ενώ η N_g, $g \geq 1$, είναι το συνεκτικό άθροισμα g το πλήθος αντιτύπων του προβολικού επιπέδου.



Σχήμα 8.6: Η επιφάνεια S_4 είναι το συνεκτικό άθροισμα τεσσάρων σπειρών.

Πρόταση 8.3.2. *Οι θεμελιώδεις ομάδες των επιφανειών S_g και N_g, $g \geq 1$, επιδέχονται τις ακόλουθες παραστάσεις:*

1. $\pi_1(S_g) = \langle \alpha_1, \beta_1 \ldots \alpha_g \beta_g \,|\, \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1 \rangle$.

2. $\pi_1(N_g) = \langle \alpha_1, \ldots \alpha_g \,|\, \alpha_1^2 \cdots \alpha_g^2 = 1 \rangle$.

Απόδειξη. Από την πολυγωνική παράσταση της S_g, προκύπτει ότι η S_g είναι ένα σύμπλεγμα κελιών με ένα 0-κελί (όλες οι κορυφές του πολυγώνου ταυτοποιούνται σε μία),

$2g$ το πλήθος 1-κελιά και ένα 2-κελί το οποίο επισυνάπτεται στον 1-σκελετό (που είναι ένα μπουκέτο $2g$ το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$) κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Αν συμβολίσουμε με α_i και β_i τις κλάσεις ομοτοπίας των θηλειών (στη μοναδικη κορυφή) a_i και b_i, αντίστοιχα, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.2.6 λαμβάνουμε την παραπάνω παράσταση για την $\pi_1(S_g)$.

Ομοίως, η επιφάνεια N_g είναι ένα σύμπλεγμα κελιών με ένα 0-κελί, g το πλήθος 1-κελιά και ένα 2-κελί το οποίο επισυνάπτεται σε ένα μπουκέτο g το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1, \ldots, a_g$ κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_g a_g$. Πάλι, από το Θεώρημα 8.2.6 προκύπτει η παραπάνω παράσταση για την $\pi_1(N_g)$, όπου, όπως πριν, οι γεννήτορες $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ είναι οι κλάσεις ομοτοπίας των θηλειών $a_1, \ldots, a_g$. □

Με τη βοήθεια των παραπάνω παραστάσεων για τις θεμελιώδεις ομάδες επιφανειών, το προηγούμενο θεώρημα συμπληρώνεται ως εξής:

Θεώρημα 8.3.3. *Κάθε συνεκτική κλειστή επιφάνεια S είναι ομοιομορφική με μια ακριβώς από τις S^2, S_g και N_g, $g \geq 1$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι οι θεμελιώδεις ομάδες των επιφανειών S^2, S_g και N_g, $g \geq 1$, δεν είναι ισόμορφες ανά δύο και ως εκ τούτου αυτές δεν είναι ομοιομορφικές μεταξύ τους. Η θεμελιώδης επιφάνεια της σφαίρας S^2 είναι τετριμμένη, ενώ για τις άλλες έχουμε παραστάσεις από τις οποίες δεν μπορούμε απευθείας να διαπιστώσουμε αν μας δίνουν ισόμορφες ή μη ομάδες. Υπενθυμίζουμε ότι η αβελιανοποίηση μιας ομάδας G είναι η ομάδα πηλίκο $G_{ab} = G/G'$, όπου G' είναι η παράγωγος υποομάδα της G, δηλαδή η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλους τους μεταθέτες $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$. Από τις παραστάσεις της προηγούμενης πρότασης προκύπτουν εύκολα παραστάσεις των αβελιανοποιήσεων. Πράγματι,

$$\pi_1(S_g)_{ab} = \langle \alpha_1, \beta_1 \ldots \alpha_g \beta_g \mid \alpha_i \beta_j = \beta_j \alpha_i,\ i, j = 1, \ldots, g \rangle = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Εφόσον η αβελιανοποίηση της $\pi_1(S_g)$ είναι ελεύθερη αβελιανή τάξεως $2g$, οι ομάδες $\pi_1(S_g)$ και $\pi_1(S_h)$ δεν έχουν ισόμορφες αβελιανοποιήσεις για $g \neq h$ και συνεπώς οι $\pi_1(S_g)$ και $\pi_1(S_h)$ δεν είναι ισόμορφες. Ιδαιτέρως, οι επιφάνειες S_g και S_h δεν είναι ομοιομορφικές, αν $g \neq h$. Για τις μη προσανατολίσιμες έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
\pi_1(N_g)_{ab} &= \langle \alpha_1, \dots \alpha_g \,|\, \alpha_1^2 \cdots \alpha_g^2 = 1,\ \alpha_i \alpha j = \alpha_j \alpha_i,\ i,j = 1,\dots,g \rangle \\
&= \langle \alpha_1, \dots \alpha_g \,|\, (\alpha_1 \cdots \alpha_g)^2 = 1,\ \alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i,\ i,j = 1,\dots,g \rangle \\
&= \langle \alpha_1, \dots \alpha_{g-1}, \beta \,|\, \beta^2 = 1,\ \alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i,\ \alpha_i \beta = \beta \alpha_i,\ i,j = 1,\dots,g-1 \rangle \\
&= \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Από τη μορφή των αβελιανοποιήσεων, έπεται ότι οι επιφάνειες N_g και N_h δεν είναι ομοιομορφικές, αν $g \neq h$, καθώς επίσης ότι οι S_g, N_h δεν είναι ομοιομορφικές. Τέλος, εφόσον οι θεμελιώδεις ομάδες των S_g, N_g, $g \geq 1$, δεν είναι τετριμμένες, καμία από αυτές δεν είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα. □

Ασκήσεις

8.1 Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών. Αποδείξτε ότι ο n-σκελετός X^n του X, όπου $n \geq 1$, είναι κατά τόξα συνεκτικός αν και μόνο αν ο $(n+1)$-σκελετός X^{n+1} του X είναι κατά τόξα συνεκτικός. Ιδιαιτέρως, το X είναι κατά τόξα συνεκτικό αν και μόνο αν ο 1-σκελετός X^1 είναι κατά τόξα συνεκτικός. [Υπόδειξη: Αν D_ε είναι μια κλειστή μπάλα που περιέχεται στο εσωτερικό ενός $(n+1)$-κελιού, τότε, χρησιμοποιώντας τη συμπάγεια του D_ε, μπορούμε να παρακάμψουμε κάθε τμήμα ενός μονοπατιού γ (με άκρα στο X^n) που βρίσκεται εντός του D_ε μέσω ενός μονοπατιού πάνω στο σύνορο του D_ε το οποίο διέρχεται από τα σημεία του συνόρου του D_ε που διέρχεται και το γ. Σημειώστε ότι η τομή $\mathrm{Im}\gamma \cap e_a^{n+1}$ είναι μη κενή για πεπερασμένους το πλήθος δείκτες a και χρησιμοποιήστε τη συστέλλουσα παραμόρφωση του Λήμματος 8.2.4 για να βρείτε μονοπάτι εντός του X^n που έχει τα ίδια άκρα με το γ.]

8.2 Έστω X και Y πολλαπλότητες (όχι απαραιτήτως ίδιας διάστασης), $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$. Ορίζουμε τη σφήνα τους $X \vee Y$ να είναι ο χώρος που λαμβάνεται από την ξένη ένωση των X και Y, ταυτοποιώντας το x_0 με το y_0. Δηλαδή, $X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$. Αποδείξτε ότι $\pi_1(X \vee Y, [x_0]) = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$.

8.3 Συμβολίζουμε με B^n την ανοικτή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, με B_a τη μικρότερη ανοικτή μπάλα ακτίνας 1/2 και με S_a τη σφαίρα ακτίνας 1/2, δηλαδή το σύνορο της B_a.

(i) Έστω X μια συνεκτική πολλαπλότητα διάστασης $n \geq 3$ και $h : B^n \to U$ ομοιομορφισμός από την B^n σε ένα ανοικτό $U \subset X$. Να δειχθεί ότι $\pi_1(X - h(B_a)) = \pi_1(X)$.
(ii) Έστω X_1 και X_2 συνεκτικές πολλαπλότητες της ίδιας διαστάσεως $n \geq 3$ και $h_i : B^n \to U_i$ ομοιομορφισμός από τη B^n σε ένα ανοικτό $U_i \subset X_i$, για $i = 1, 2$. Το συνεκτικό άθροισμα των X_1 και X_2 είναι ο χώρος πηλίκο

$$X_1 \# X_2 = \big(X_1 - h_1(_a)\big) \sqcup \big(X_2 - h_1(_a)\big)/h_1(x) \sim h_2(x) \text{ για κάθε } x \in S_a.$$

Αποδείξτε ότι $\pi_1(X_1 \# X_2) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

8.4 Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου που προκύπτει:
(i) από τον κύλινδρο $S^1 \times \mathbb{R}$ βγάζοντας ένα σημείο. [Υπόδειξη: ο κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ περιστέλλεται στον $S^1 \times [\alpha, \beta]$ για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha < \beta$.]
(ii) από τη σπείρα $S^1 \times S^1$ βγάζοντας δύο σημεία.
(iii) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας k ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
(iv) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας ένα κύκλο K. [Υπόδειξη: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, \, z = 0\}$. Θεωρήστε $U = \mathbb{R}^3 \setminus D$ και V το εσωτερικό του $K \times D$, όπου D δίσκος με σύνορο K.]
(v) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας δύο ευθείες γραμμές L_1 και L_2 που δεν τέμνονται.
(vi) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας έναν κύκλο K και μια ευθεία γραμμή L, υποθέτοντας ότι ο κύκλος και η γραμμή δεν τέμνονται και επιπλέον η γραμμή δεν διέρχεται "μέσα" από τον κύκλο.

8.5 Έστω $x_1, \ldots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι απλά συνεκτικός αν $n \geq 3$.

8.6 Αποδείξτε ότι ο χώρος X του Παραδείγματος **??** (σκουλαρίκι της Χαβάης) δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σύμπλεγμα κελιών. [Υπόδειξη: κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός συμπλέγματος κελιών περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα.]

8.7 Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου X που προκύπτει από δύο σπείρες $S^1 \times S^1$, ταυτοποιώντας τον κύκλο $S^1 \times \{x_0\}$ στη μία σπείρα με τον αντίστοιχο κύκλο $S^1 \times \{x_0\}$ στην άλλη.

8.8 Έστω $X = S^1 \vee S^1$ και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση η οποία διατηρεί το σημείο αναφοράς x_0 (δηλαδή το κοινό σημείο των δύο κύκλων). Θεωρούμε τον χώρο (mapping torus) $T_f = X \times I/(x,0) \sim (f(x),1)$. Αποδείξτε ότι $\pi_1(T_f) = \langle a,b,t \,|\, tat^{-1}f_*(a)^{-1}, tbt^{-1}f_*(b)^{-1}\rangle$, όπου a,b γεννήτορες των θεμελιωδών ομάδων των δύο κύκλων, t η κλάση ομοτοπίας της εικόνας στον χώρο πηλίκο του υποσυνόλου $\{x_0\} \times I$ και f_* ο επαγώμενος ομομορφισμός. [Υπόδειξη: αντιμετωπίστε τον χώρο T_f ως σύμπλεγμα κελιών με μια μόνο κορυφή και του οποίου ο 1-σκελετός αποτελείται (εκτός από την κορυφή) από τρεις κύκλους, έναν για κάθε γεννήτορα στην παραπάνω παράσταση, που τέμνονται στη μοναδική κορυφή. Μένει να βρείτε πόσα είναι τα 2-κελιά και πως επισυνάπτονται.]

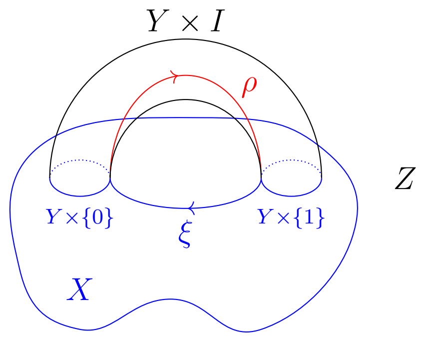
8.9 Έστω $G = \pi_1(S_g)$ η θεμελιώδης ομάδα της κλειστής προσανατολίσιμης επιφάνειας S_g γένους $g \geq 1$.
(i) Να δειχθεί ότι $d(G) = 2g$ (με $d(G)$ συμβολίζουμε το ελάχιστο πλήθος γεννητόρων της G). Δηλαδή, η G δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από $2g$ στοιχεία.
(ii) Να δειχθεί ότι η G δεν είναι ελεύθερη ομάδα.

8.10 Για μια ομάδα G (όχι απαραιτήτως πεπερασμένα παριστώμενη), θεωρούμε το σύμπλεγμα κελιών X με θεμελιώδη ομάδα G, που κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας μια δοθείσα παράσταση της G, όπως στην απόδειξη του πορίσματος 8.2.7. Για κάθε κατά τόξα συνεκτικό χώρο Y, κάθε ομομορφισμός $\varphi : G \to \pi_1(Y, y_0)$ επάγεται από μια συνεχή απεικόνιση μεταξύ των συμπλεγμάτων. Δηλαδή, υπάρχει συνεχής $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$, έτσι ώστε $\varphi = f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X θα λέμε ότι επιδέχεται **περιστέλλουσα περιοχή** αν υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ που περιέχει το A και μια περιστολή $r : U \to A$. Ένα ζεύγος υποσυνόλων (A, B) του X λέγεται **περιστέλλον**, αν υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U, V του X τα οποία περιστέλλονται στα A, B, αντίστοιχα (άρα τα περιέχουν) και επιπλέον η τομή $U \cap V$ περιστέλλεται στην τομή $A \cap B$. Λέμε επίσης ότι το ζεύγος ανοικτών (U, V) **περιστέλλεται** στο (A, B).

8.11 Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και (U, V) ένα ζεύγος υποσυνόλων του X, που περιστέλλεται στο ζεύγος των υποσυνόλων (A, B). Τα A, B και $A \cap B$ είναι κατά τόξα συνεκτικά αν και μόνο αν τα U, V και $U \cap V$ είναι.

8.12 Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και (A, B) ένα περιστέλλον ζεύγος υποσυνόλων του X, όπου τα A, B και $A \cap B$ είναι κατά τόξα συνεκτικά. Αν $X = A \cup B$ και $x_0 \in A \cap B$, τότε $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$.



Σχήμα 8.7: Αντισυνεκτική τομή και το Θεώρημα Seifert-Van Kampen.

8.13 Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών διάστασης 2.

(i) Κάθε υποσύμπλεγμα του X επιδέχεται μια περιστέλλουσα περιοχή.

(ii) Κάθε ζεύγος (K, Λ) υποσυμπλεγμάτων του X είναι περιστέλλον.

8.14 Υποθέτουμε ότι τα K, Λ είναι κατά τόξα συνεκτικά υποσυμπλέγματα ενός συμπλέγματος κελιών X με μη κενή, κατά τόξα συνεκτική τομή $K \cap \Lambda$ και έστω $x_0 \in K \cap \Lambda$. Αν $X = K \cup \Lambda$, τότε $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(K, x_0) *_{\pi_1(K\cap\Lambda, x_0)} \pi_1(\Lambda, x_0)$.

8.15 Έστω Z ένα κατά τόξα συνεκτικό σύμπλεγμα κελιών το οποίο είναι η ένωση δύο κατά τόξα συνεκτικών υποσυμπλεγμάτων $X, Y \times [0,1]$ με τομή $X \cap (Y \times [0,1]) = Y \times \{0,1\}$ (εδώ υποθέτουμε ότι τα $Y \times \{0\}, Y \times \{1\}$ είναι ξένα). Δηλαδή, επί της ουσίας το σύμπλεγμα Z προκύπτει ως χώρος πηλίκο από την ξένη ένωση των συμπλεγμάτων X και $Y \times [0,1]$, ταυτοποιώντας καθένα από τα $Y \times \{0\}, Y \times \{1\}$ με υποσυμπλέγματα B, Γ του X (ομοιομορφικά ως συμπλέγματα μεταξύ τους), αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με f τη σύνθεση $Y \times \{0\} \to Y \times \{1\} \hookrightarrow X, (y,0) \mapsto (y,1)$. Έστω $v = (y,0)$ κορυφή του $Y \times \{0\}$ και $\xi : I \to X$ μια εμφύτευση (ομοιομορφισμός επί της εικόνας) με αρχή $(y,1)$ και τέλος $(y,0)$. Συμβολίζουμε με φ_1 τον επαγώμενο ομομορφισμό της ένθεσης $Y \times \{0\} \hookrightarrow X$, με f_* τον επαγόμενο ομομορφισμό της f (στο σημείο αναφοράς v) και με Φ_ξ τον αντίστοιχο ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς. Αν ρ είναι η εικόνα του μονοπατιού (y,t) και $t = [\rho \cdot \xi]$, τότε

$$\pi_1(Z, v) = \big\langle \pi_1(X, v),\, t \,|\, t^{-1}\varphi_1(\gamma)t = \varphi_2(\gamma),\, \gamma \in \pi_1(Y \times \{0\}, v) \big\rangle,$$

όπου $\varphi_2 = \Phi_\xi \circ f_*$.

Βιβλιογραφία

[1] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot and J. Porti. Geometrisation of 3-manifolds, EMS Tracts in Mathematics, 13, European Mathematical Society, 2010.

[2] M. Dehn. Papers on group theory and topology, translated and introduced by John Stillwell, Springer, 1987.

[3] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[4] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[5] A. A. Markov. The insolubility of the problem of homeomorphy, Dokl. Akad. Nauk SSSR 121 (1958), pp. 218–220.

[6] A. A. Markov. Insolubility of the problem of homeomorphy, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 300–306.

[7] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[8] E. E. Moise. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] J. R. Munkres. Topology, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.