Κεφάλαιο 6

Η Θεμελιώδης Ομάδα

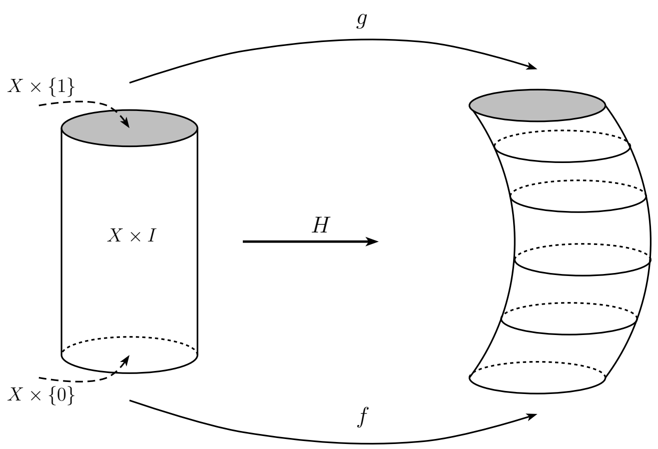
Περιεχόμενα

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε το πλέον βασικό αντικείμενο της αλγεβρικής τοπολογίας, τη θεμελιώδη ομάδα. Προκειμένου να γίνει αυτό ορίζουμε πρώτα την έννοια της ομοτοπίας μεταξύ συνεχών απεικονίσεων τοπολογικών χώρων και αποδεικνύουμε, μεταξύ άλλων, ότι η έννοια της ομοτοπίας μεταξύ μονοπατιών ενός τοπολογικού χώρου είναι σχέση ισοδυναμίας. Η θεμελιώδης ομάδα ενός χώρου X σε ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των μονοπατιών του X με αρχή και τέλος το σημείο αναφοράς εφοδιασμένο με κατάλληλο γινόμενο.

6.1 Ομοτοπία

Ορισμός 6.1.1. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \longrightarrow Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Μια **ομοτοπία** από την f στην g είναι μια συνεχής απεικόνιση $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ τέτοια, ώστε $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

[0]https://eclass.uoa.gr/courses/MATH536/



Σχήμα 6.1: Σχηματικά η έννοια της ομοτοπίας.

Αν υπάρχει ομοτοπία H από την f στην g λέμε ότι οι f και g είναι **ομοτοπικές** και συμβολίζουμε με $f \simeq g$ ή και $f \overset{H}{\simeq} g$, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε συγκεκριμένη ομοτοπία.

Μια ομοτοπία ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $H_t : X \longrightarrow Y$, $t \in [0,1]$, έτσι ώστε $H_0 = f$ και $H_1 = g$. Συνήθως σκεφτόμαστε την παράμετρο t ως χρόνο και την ομοτοπία H ως "μετασχηματισμό" της f στην g, καθώς ο χρόνος πηγαίνει από το 0 στο 1. Η συνέχεια της H εγγυάται ότι ο μετασχηματισμός γίνεται με συνεχή τρόπο χωρίς "σπασίματα" ή "άλματα".

Παράδειγμα 6.1.2. Για κάθε τοπολογικό χώρο X, κάθε δύο συνεχείς απεικονίσεις $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομοτοπικές. Πράγματι, ορίζουμε τη ("γραμμική") ομοτοπία $H : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μέσω του τύπου $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Γενικότερα, αν ο Y είναι κυρτός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε κάθε δύο συνεχείς απεικονίσεις $f,\ g : X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικές, αφού σε αυτήν την περίπτωση ο ίδιος τύπος για την ομοτοπία δίνει ότι $H(x,t) \in Y$ για κάθε $x \in X$ και $t \in [0,1]$.

Στα επόμενα δύο λήμματα παρουσιάζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της ομοτοπίας.

Λήμμα 6.1.3. *Για κάθε ζεύγος τοπολογικών χώρων X και Y, η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από τον X στον Y.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι η σχέση που ορίζεται μέσω της ομοτοπίας, όπως πριν, είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- Αν $f : X \longrightarrow Y$, τότε είναι άμεσο ότι $f \simeq f$. Πράγματι, ορίζουμε $H(x,t) = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $t \in [0,1]$.
- Αν η H είναι μια ομοτοπία από την f στην g (δηλαδή $f \overset{H}{\simeq} g$), τότε η $\widetilde{H}(x,t) = H(x, 1-t)$ είναι ομοτοπία από την g στην f και άρα $g \simeq f$.
- Αν $f \overset{F}{\simeq} g$ και $g \overset{G}{\simeq} h$, τότε ορίζουμε ομοτοπία H από την f στην h ως εξής:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{αν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ G(x, 2t-1), & \text{αν } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

  Είναι άμεσο ότι η παραπάνω ομοτοπία H είναι καλά ορισμένη, ενώ η συνέχειά της έπεται από το ακόλουθο λήμμα.

□

Λήμμα 6.1.4 (Λήμμα της συγκόλλησης). *Αν $F_1, \ldots, F_n$ είναι ένα πεπερασμένο κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X αποτελούμενο από κλειστά υποσύνολά του και $f : X \to Y$ είναι μια απεικόνιση από τον X σε έναν τοπολογικό χώρο Y τέτοια, ώστε ο περιορισμός της $f|_{F_i}$ σε κάθε F_i είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής.*

Εφόσον δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, καθένα από τα υποσύνολα F_i του X θεωρείται ότι είναι εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφει τα κλειστά υποσύνολα του Y σε κλειστά υποσύνολα του X. Αν το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Y, τότε

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \big(f^{-1}(A) \cap F_i\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big((f|_{F_i})^{-1}(A)\big).$$

Εφόσον ο περιορισμός $f|_{F_i}$ της f σε κάθε F_i είναι συνεχής, έπεται ότι καθένα από τα σύνολα $(f|_{F_i})^{-1}(A)$ είναι κλειστό στον F_i και άρα κλειστό στον X. Συνεπώς, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών. □

Λήμμα 6.1.5. *Η ομοτοπία διατηρείται από συνθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, έστω f_0, $f_1 : X \longrightarrow Y$ και g_0, $g_1 : Y \longrightarrow Z$ συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων. Αν $f_0 \simeq f_1$ και $g_0 \simeq g_1$, τότε $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_0"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_0"'] & Z \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αν η F είναι ομοτοπία από την f_0 στην f_1 και η G ομοτοπία από την g_0 στην g_1, τότε η $H(x,t) = G\big(F(x,t),t\big)$, δηλαδή $H_t = G_t \circ F_t$, είναι ομοτοπία από τη σύνθεση $g_0 \circ f_0$ στην $g_1 \circ f_1$. □

Ορισμός 6.1.6. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και A ένας υπόχωρος του X. Μια ομοτοπία H μεταξύ δύο απεικονίσεων $f,\ g : X \longrightarrow Y$ λέγεται **ομοτοπία σε σχέση με το** A, αν $H(a,t) = f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in [0,1]$.

Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι οι f και g είναι ομοτοπικές σε σχέση με το A και γράφουμε $f \simeq_A g$. Σημειώνουμε ότι για να έχουμε $f \simeq_A g$, απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι f και g να ταυτίζονται στο A.

Ορισμοί 6.1.7. Ένα **μονοπάτι** σε έναν τοπολογικό χώρο X είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \rightarrow X$. Τα σημεία $f(0)$ και $f(1)$ λέγονται **άκρα** του μονοπατιού. Αν $f(0) = f(1)$, τότε το μονοπάτι λέγεται **κλειστό**. Το μονοπάτι f λέγεται **θηλειά** στο x_0, αν καθένα από τα δύο άκρα του είναι ίσο με το x_0.

Δύο μονοπάτια $f, g : [0,1] \rightarrow X$ με τα ίδια άκρα, δηλαδή $f(0) = g(0)$ και $f(1) = g(1)$, λέγονται **ομοτοπικά**, αν αυτά είναι ομοτοπικά σε σχέση με τα άκρα τους, δηλαδή $f \simeq_A g$, όπου $A = \{0,1\} = \partial I$. Πιο αναλυτικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ομοτοπία $H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$, έτσι ώστε:

- $H(s,0) = f(s)$ και $H(s,1) = g(s)$, για κάθε $s \in [0,1]$,
- $H(0,t) = f(0) = g(0)$ και $H(1,t) = f(1) = g(1)$, για κάθε $t \in [0,1]$.

Αν τα f και g είναι ομοτοπικά μονοπάτια, τότε θα συμβολίζουμε απλά με $f \simeq g$ (εννοώντας φυσικά $f \simeq_{\{0,1\}} g$). Πολλές φορές, επίσης, θα συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα $[0,1]$ απλά με I.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι αν πάρουμε ένα μονοπάτι και θεωρήσουμε μια αναπαραμέτρηση αυτού, τότε το καινούριο μονοπάτι που προκύπτει είναι ομοιοτοπικό με το αρχικό.

Λήμμα 6.1.8. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, f ένα μονοπάτι του X και $\phi : [0,1] \to [0,1]$ μια συνεχής απεικόνιση τέτοια, ώστε $\phi(0) = 0$ και $\phi(1) = 1$. Τότε το μονοπάτι f είναι ομοτοπικό με το $f \circ \phi$.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η απεικόνιση $H : [0,1]\times[0,1]\to X$ με τύπο

$$H(s,t) = f\big(t\phi(s) + (1-t)s\big)$$

είναι ομοτοπία από το μονοπάτι f στο $f \circ \phi$. □

Η απόδειξη του Λήμματος 6.1.3 στην περίπτωση των ομοτοπιών μεταξύ μονοπατιών, δίνει την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.1.9. *Η ομοτοπία μονοπατιών σε έναν τοπολογικό χώρο, είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των μονοπατιών του χώρου με τα ίδια άκρα.*

Συμβολίζουμε με $[f]$ την κλάση ομοτοπίας του μονοπατιού f.

6.2 Η Θεμελιώδης Ομάδα

Αρχίζουμε με τον ορισμό του γινομένου διαδοχικών μονοπατιών και αποδεικνύουμε τις βασικές του ιδιότητες.

Ορισμός 6.2.1 (Γινόμενο μονοπατιών). Αν f και g είναι δύο διαδοχικά μονοπάτια, δηλαδή $f(1) = g(0)$, σε έναν τοπολογικό χώρο X, τότε το **γινόμενο** των f και g είναι το μονοπάτι $f \cdot g$ που ορίζεται ως εξής:

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{αν } 0 \le s \le 1/2 \\ g(2s-1), & \text{αν } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι το γινόμενο είναι καλά ορισμένο (αφού ορίζεται για διαδοχικά μονοπάτια) και συνεχής απεικόνιση από το λήμμα της συγκόλλησης, με άλλα λόγια είναι πράγματι μονοπάτι στον X. Το γινόμενο μονοπατιών επάγει ένα γινόμενο στις αντίστοιχες κλάσεις ομοτοπίας ως εξής:

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g],$$

φυσικά, πάντα με την προϋπόθεση ότι $f(1) = g(0)$.

Το παραπάνω γινόμενο στις κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών είναι καλά ορισμένο. Πράγματι, αν έχουμε άλλα μονοπάτια f', g' με $f \overset{F}{\simeq} f'$ και $g \overset{G}{\simeq} g'$, τότε $f \cdot g \overset{H}{\simeq} f' \cdot g'$, όπου

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{αν } 0 \le s \le \frac{1}{2},\ 0 \le t \le 1 \\ G(2s-1,t), & \text{αν } \frac{1}{2} \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Αν f είναι ένα μονοπάτι στον X, τότε ορίζουμε το **αντίστροφο μονοπάτι** f^{-1} μέσω του τύπου $f^{-1}(s) = f(1-s)$. Επίσης, με C_x συμβολίζουμε το **σταθερό μονοπάτι** στο $x \in X$, δηλαδή $C_x(s) = x$, για κάθε $s \in [0,1]$.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και f, g, h μονοπάτια στον X.*

1. *Αν ορίζεται το γινόμενο $[f] \cdot ([g] \cdot [h])$, τότε ορίζεται επίσης το γινόμενο $([f] \cdot [g]) \cdot [h]$ και $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [h]$.*
2. *Αν $f(0) = x_0$ και $f(1) = x_1$, τότε $[f] \cdot [C_{x_1}] = [C_{x_0}] \cdot [f] = [f]$.*
3. *$[f] \cdot [f^{-1}] = [C_{x_0}]$ και $[f^{-1}] \cdot [f] = [C_{x_1}]$.*

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $f \cdot (g \cdot h) \simeq (f \cdot g) \cdot h$, το οποίο, όπως εύκολα μπορεί να ελέγξει ο αναγνώστης, προκύπτει από την ακόλουθη ομοτοπία

$$H_1(t,s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{2-s}\right), & 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s \\ g(4t-2+s), & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s \le t \le \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s \\ h\left(\frac{4t-3+s}{1+s}\right), & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s \le t \le 1. \end{cases}$$

Για τον δεύτερο, θα δείξουμε ότι $C_{x_0} \cdot f \simeq f$ (ομοίως αποδεικνύεται ότι $f \cdot C_{x_1} \simeq f$). Παρατηρούμε ότι ο ακόλουθος τύπος ορίζει ομοτοπία από το μονοπάτι f στο $C_{x_0} \cdot f$

$$H_2(t,s) = \begin{cases} x_0, & 0 \le t \le \frac{1}{2}s \\ f\left(\frac{2t-s}{2-s}\right), & \frac{1}{2}s \le t \le 1. \end{cases}$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, η ομοτοπία που δείχνει ότι $f \cdot f^{-1} \simeq C_{x_0}$ είναι

$$H_3(t,s) = \begin{cases} f\big(2t(1-s)\big), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f\big((2-2t)(1-s)\big), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Ανάλογα ορίζεται και η ομοτοπία από το μονοπάτι $f^{-1} \cdot f$ στο C_{x_1}. □

Ορισμός 6.2.3. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και x_0 ένα σημείο του X. Ορίζουμε $\pi_1(X, x_0)$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των θηλειών του X στο x_0:

$$\pi_1(X, x_0) = \Big\{ [f] \,/\, f : [0,1] \to X \text{ συνεχής με } f(0) = f(1) = x_0 \Big\}.$$

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται άμεσα το ακόλουθο:

Θεώρημα 6.2.4. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ εφοδιασμένο με την πράξη $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ αποτελεί ομάδα, η οποία καλείται* ***θεμελιώδης ομάδα του** X **στο** x_0. *Το μοναδιαίο στοιχείο είναι η κλάση ομοτοπίας $[C_{x_0}]$ του σταθερού μονοπατιού στο x_0 και το αντίστροφο στοιχείο του $[f]$ είναι η κλάση ομοτοπίας του αντίστροφου μονοπατιού (θηλειάς) f^{-1}, δηλαδή $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.*

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ανεξαρτησία της θεμελιώδους ομάδας του X στο x_0 (ως προς ισομορφισμό) από το σημείο αναφοράς x_0 με την προϋπόθεση ότι περιοριζόμαστε στην ίδια κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα.

Θεώρημα 6.2.5 (Αλλαγή σημείου αναφοράς)**.** *Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος, x_0, x_1 δύο σημεία του X και $h : [0,1] \to X$ ένα μονοπάτι από το x_0 στο x_1. Η απεικόνιση*

$$\Phi_h : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \ \ \text{με} \ \ \Phi_h([f]) = [h^{-1} f h]$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Για κάθε ζεύγος θηλειών f, g στο x_0, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Phi_h([f] \cdot [g]) &= \Phi_h([f \cdot g]) = [h^{-1}] \cdot [f \cdot g] \cdot [h] \\
&= [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [g] \cdot [h] = [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [C_{x_0}] \cdot [g] \cdot [h] \\
&= [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [h] \cdot [h^{-1}] \cdot [g] \cdot [h] = \Phi_h([f]) \cdot \Phi_h([g]).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η απεικόνιση Φ_h είναι ομομορφισμός ομάδων. Επιπλέον, είναι ισομορφισμός γιατί, όπως εύκολα παρατηρούμε, επιδέχεται αντίστροφη την $\Phi_{h^{-1}}$. □

Παρατήρηση 6.2.6. Λόγω του προηγούμενου θεωρήματος, αν ο χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε πολλές φορές γράφουμε για τη θεμελιώδη ομάδα του X απλά $\pi_1(X)$, χωρίς να προσδιορίζουμε σημείο αναφοράς.

Ορισμός 6.2.7. Ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος X λέγεται **απλά συνεκτικός**, αν κάθε κλειστό μονοπάτι στον X είναι ομοτοπικό με σημείο (σταθερό μονοπάτι), με άλλα λόγια, αν $\pi_1(X) = \{1\}$.

Παρατήρηση 6.2.8. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς ότι ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος X είναι απλά συνεκτικός αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο μονοπάτια του X με τα ίδια άκρα είναι ομοτοπικά.

Παράδειγμα 6.2.9. Κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, αν η $f : I = [0,1] \to X$ είναι θηλειά στο $x_0 \in X$, τότε, λόγω κυρτότητας, ορίζεται η ομοτοπία $H : I \times I \to X$ με τύπο $H(s,t) = (1-t)f(s) + tx_0$, που δείχνει ότι $f \simeq C_{x_0}$.

Πρόταση 6.2.10. *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων και $x_0 \in X$, η απεικόνιση*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

που ορίζεται με $\varphi([f]) = [\varphi \circ f]$, είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός ομάδων.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
I \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\varphi\circ f"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Για το καλώς ορισμένο, αν $[f] = [g]$, τότε υπάρχει ομοτοπία H από την f στην g και η σύνθεση $\varphi \circ H$ δίνει ομοτοπία από την $\varphi \circ f$ στην $\varphi \circ g$ που σημαίνει ότι $[\varphi \circ f] = [\varphi \circ g]$. Το ότι είναι ομομορφισμός έπεται εύκολα από τους σχετικούς ορισμούς ως εξής: $\varphi_*\big([f] \cdot [g]\big) = \varphi_*\big([f \cdot g]\big) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g])$. □

Ο ομομορφισμός $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ καλείται ο **ομομορφισμός που επάγεται από την** φ ή απλά ο **επαγόμενος ομομορφισμός**.

Πρόταση 6.2.11. *Έστω $\varphi : X \to Y$ και $\psi : Y \to Z$ δύο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων, $x_0 \in X$ και $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$, $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1\big(Z, \psi(\varphi(x_0))\big)$ οι αντίστοιχοι επαγόμενοι ομομορφισμοί.*

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

2. $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x_0)}$.

3. *Αν $\varrho : X \to Y$ συνεχής και $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \varrho$, τότε $\varphi_* = \varrho_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$.*

Απόδειξη. Έστω $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.
1. $\big(\psi \circ \varphi\big)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi(\varphi \circ f)] = \psi_*\big([\varphi \circ f]\big) = \big(\psi_* \circ \varphi_*\big)([f])$.
2. $\mathrm{Id}_*([f]) = [\mathrm{Id} \circ f] = [f]$.
3. Αν $\varphi \overset{F}{\simeq}_{\{x_0\}} \varrho$, τότε $\varphi \circ f \overset{H}{\simeq}_{\{0,1\}} \varrho \circ f$, όπου $H(s,t) = F\big(f(s), t\big)$. □

Πόρισμα 6.2.12. *Η θεμελιώδης ομάδα είναι τοπολογικό αναλλοίωτο. Δηλαδή, αν ο $\varphi : X \to Y$ είναι ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων και $x_0 \in X$, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αφού ο $\varphi : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός, υπάρχει ομοιομορφισμός $\psi : Y \to X$ τέτοιος, ώστε $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ και $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$. Συνεπώς, για τους αντίστοιχους επαγόμενους ομομορφισμούς έχουμε $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}$ και $\psi_* \circ \varphi_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Έπεται ότι ο ομομορφισμός $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ είναι $1-1$ και επί, αφού επιδέχεται αριστερό και δεξί αντίστροφο, δηλαδή είναι ισομορφισμός. □

6.3 Συστολές και Ομοτοπικές Ισοδυναμίες

Αρχίζουμε με τον ορισμό της ομοτοπικής ισοδυναμίας, η οποία ως έννοια είναι πολύ ασθενέστερη από αυτή του ομοιομορφισμού.

Ορισμός 6.3.1. Μια συνεχής απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων λέγεται **ομοτοπική ισοδυναμία**, αν υπάρχει συνεχής $\psi : Y \to X$, έτσι ώστε $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_Y$ και $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_X$. Η ψ καλείται ομοτοπική αντίστροφος της φ.

Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι οι χώροι X και Y είναι **ομοτοπικά ισοδύναμοι** ή ότι έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας και συμβολίζουμε με $X \simeq Y$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η έννοια της ομοτοπικής ισοδυναμίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων.

Λήμμα 6.3.2. *Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι, $\varphi, \psi : X \to Y$ δύο ομοτοπικές (πάντα συνεχείς) απεικονίσεις και H μια ομοτοπία από την φ στην ψ. Για ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X$, θεωρούμε το μονοπάτι $h(t) = H(x_0, t)$ από το $\varphi(x_0)$ στο $\psi(x_0)$ και τον ισομορφισμό $\Phi_h : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ που ορίζεται από το μονοπάτι h, δηλαδή, $\Phi_h([f]) = [h^{-1} f h]$. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[d, "\Phi_h"] \\
& \pi_1(Y, \psi(x_0))
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω f θηλειά στο x_0. Θα δείξουμε ότι $\psi_*([f]) = \Phi_h\big(\varphi_*([f])\big)$, ισοδύναμα, $\varphi \circ f \simeq h \cdot (\psi \circ f) \cdot h^{-1}$. Έστω h_t ο περιορισμός του μονοπατιού h στο $[0, t]$, δηλαδή,

$h_t(s) = h(st)$ και $H_t \circ f$ το μονοπάτι $H(f(s), t)$, όπου $s \in I$. Μέσω της μονοπαραμετρικής οικογένειας μονοπατιών $h_t \cdot (H_t \circ f) \cdot h_t^{-1}$, $t \in I$, ορίζεται ομοτοπία από το μονοπάτι $C_{\varphi(x_0)} \cdot (\varphi \circ f) \cdot C_{\varphi(x_0)}$ στο $h \cdot (\psi \circ f) \cdot h^{-1}$. Όμως τα μονοπάτια $C_{\varphi(x_0)} \cdot (\varphi \circ f) \cdot C_{\varphi(x_0)}$ και $\varphi \circ f$ είναι ομοτοπικά, γιατί το ένα προκύπτει από το άλλο με μια αναπαραμέτρηση (βλ. Λήμμα 6.1.8). Τελικά, $\varphi \circ f \simeq h \cdot (\psi \circ f) \cdot h^{-1}$. □

Θεώρημα 6.3.3. *Έστω $\varphi : X \to Y$ μια ομοτοπική ισοδυναμία και $x_0 \in X$. Τότε η φ επάγει ισομορφισμό $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$.*

Απόδειξη. Έστω $\psi : Y \to X$ μια ομοτοπική αντίστροφος της φ. Τότε υπάρχουν ομοτοπίες H και H', έτσι ώστε $\varphi \circ \psi \overset{H}{\simeq} \mathrm{Id}_Y$ και $\psi \circ \varphi \overset{H'}{\simeq} \mathrm{Id}_X$. Από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει μονοπάτι h_1 από το x_0 στο $\psi(\varphi(x_0))$, έτσι ώστε:

$$\Phi_{h_1} = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big),$$

όπου Φ_{h_1} είναι ο ισομορφισμός που ορίζεται από το μονοπάτι h_1. Άρα η $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big)$ είναι $1-1$ και η $\psi_* : \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \to \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big)$ επί. Εφαρμόζοντας ξανά το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει μονοπάτι h_2 από το $\varphi(x_0)$ στο $\varphi\big(\psi(\varphi(x_0))\big)$, έτσι ώστε:

$$\Phi_{h_2} = \varphi_* \circ \psi_* : \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1\big(X, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))\big),$$

όπου Φ_{h_2} είναι ο ισομορφισμός που ορίζεται από το μονοπάτι h_2. Έπεται ότι ο ομομορφισμός $\psi_* : \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \to \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big)$ είναι $1-1$ και άρα είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, η $\varphi_* = \psi_*^{-1} \circ \Phi_{h_1} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big)$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. □

Ορισμός 6.3.4. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και A ένας υπόχωρος του X. Μια συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$ λέγεται **συστολή** (retraction), αν $r(a) = a$ για κάθε $a \in A$.

Αν συμβολίσουμε με $i : A \hookrightarrow X$ την ένθεση του A στον X, τότε η $r : X \to A$ είναι συστολή αν και μόνο αν $r \circ i = \mathrm{Id}_A$, δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "Id_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 6.3.5. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε συστολή είναι απεικόνιση πηλίκο, αφού επιδέχεται δεξιό αντίστροφο.

Πρόταση 6.3.6. *Αν η $r : X \to A$ είναι συστολή, τότε η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει μονομορφισμό $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ και η συστολή r επάγει επιμορφισμό $r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$, για κάθε στοιχείο a του A.*

Απόδειξη. Από τη σχέση $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ προκύπτει ότι $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}$. □

Ορισμός 6.3.7. Μια συστολή $r : X \to A$ λέγεται **περιστολή** ή **συστέλλουσα παραμόρφωση** (deformation retraction), αν επιπροσθέτως $i \circ r \simeq_A \mathrm{Id}_X$ (η σύνθεση $i \circ r$ είναι ομοτοπική με την Id_X σε σχέση με το A). Δηλαδή, υπάρχει ομοτοπία $H : X \times I \to X$, τέτοια ώστε:

1. $H(x, 0) = x$, για κάθε $x \in X$.

2. $H(x, 1) = r(x)$, για κάθε $x \in X$.

3. $H(a, t) = a$, για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$.

Αν υπάρχει περιστολή $r : X \to A$, λέμε ότι ο χώρος X περιστέλλεται στον υπόχωρο A. Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ του A στον X είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπική αντίστροφο την r.

Παρατήρηση 6.3.8. Για να περιστέλλεται ο χώρος X σε έναν υπόχωρό του A αρκεί να υπάρχει ομοτοπία $H : X \times I \to X$ με αρχή Id_X και τέλος εντός του A, η οποία να αφήνει αναλλοίωτο κάθε στοιχείο του A, δηλαδή:

$1'$. $H(x, 0) = x$, για κάθε $x \in X$.

$2'$. $H(x, 1) \in A$, για κάθε $x \in X$.

$3'$. $H(a, t) = a$, για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$.

Με άλλα λόγια, ο χώρος X μπορεί να μετασχηματισθεί συνεχώς στον A με τέτοιο τρόπο, ώστε τα σημεία του A να μένουν σταθερά κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε συστολή μέσω του τύπου $r(x) = H(x, 1) \in A$.

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω A ένας υπόχωρος ενός χώρου X και $r : X \to A$ μια συστέλλουσα παραμόρφωση. Τότε η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει ισομορφισμό $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$, για κάθε $a \in A$.*

Αν και το θεώρημα αποτελεί πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.3, αφού η ένθεση είναι ομοτοπική ισοδυναμία, δίνουμε μια ανεξάρτητη πιο άμεση απόδειξη.

Απόδειξη. Όπως πριν, από τη σχέση $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ προκύπτει ότι $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}$, όπου $r_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ και $i_* : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$. Εφόσον $i \circ r \simeq_A \mathrm{Id}_X$, έχουμε ιδιαιτέρως ότι $i \circ r \simeq_{\{a\}} \mathrm{Id}_X$ και έτσι $i_* \circ r_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,a)}$ λόγω της Πρότασης 6.2.11. Έπεται ότι η i_* είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την r_*. □

Ορισμός 6.3.10. Ένας χώρος X λέγεται **συμπτύξιμος** (contractible) ή **συσταλτός**, αν περιστέλλεται σε σημείο του, δηλαδή, αν υπάρχει περιστολή $r : X \to \{x_0\}$, όπου x_0 σημείο του X.

Κάθε συμπτύξιμος χώρος είναι λοιπόν ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο. Η συμπτυξιμότητα, ως έννοια, είναι ισχυρότερη από την απλή συνεκτικότητα.

Πρόταση 6.3.11. *Κάθε συμπτύξιμος χώρος είναι απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Εφόσον κάθε περιστολή επάγει ισομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες και $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = \{1\}$, μένει να δείξουμε ότι ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός. Αν $H : X \times I \to X$ είναι η αντίστοιχη ομοτοπία, τότε για κάθε σημείο x_1 του X ο τύπος $f(t) = H(x_1, t)$ ορίζει μονοπάτι από το x_1 στο x_0 και άρα ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός. □

Παράδειγμα 6.3.12. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ δεν είναι μόνο απλά συνεκτικός, όπως ήδη έχουμε δει, είναι συμπτύξιμος. Αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε η απεικόνιση $r : \mathbb{R}^n \to \{x_0\}$ με $r(x) = x_0$ είναι περιστολή. Πράγματι, η σχετική ομοτοπία ορίζεται ως εξής $H(x,t) = x(1-t) + x_0 t$, $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$.

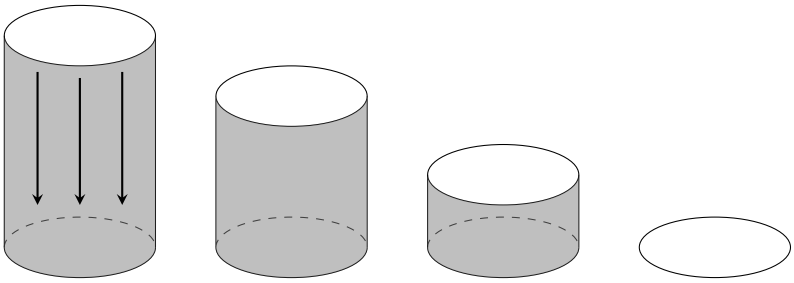
Παράδειγμα 6.3.13. Θεωρούμε την κλειστή μοναδιαία σφαίρα S^n και την ένθεση $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Η απεικόνιση $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ με

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}\,,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η συνήθης Ευκλείδεια νόρμα, είναι συστολή. Μέσω του ακόλουθου τύπου ορίζεται ομοτοπία $H : \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big) \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ που δείχνει ότι είναι περιστολή:

$$H(x,t) = x(1-t) + \frac{x}{\|x\|} \cdot t\,.$$

Άρα ο χώρος $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ περιστέλλεται στη σφαίρα S^n και έτσι $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq S^n$.



Σχήμα 6.2: Κάθε κύλινδρος περιστέλλεται σε κύκλο.

Παράδειγμα 6.3.14. Η ομοτοπία $H : \big(S^1 \times I\big) \times I \to S^1 \times I$ με τύπο $H\big((x, s), t\big) = \big(x, s(1-t)\big)$ δείχνει ότι ο κύλινδρος $S^1 \times I$ περιστέλλεται στη βάση του που είναι κύκλος. Ομοίως προκύπτει ότι κάθε κύλινδρος περιστέλλεται σε κύκλο και έτσι έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου.

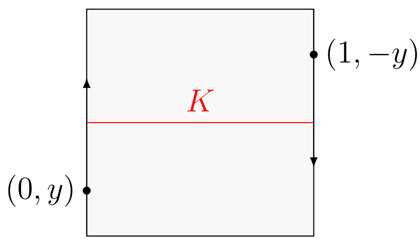
Παράδειγμα 6.3.15. Υπενθυμίζουμε ότι η ταινία του Möbius είναι (ως προς ομοιομορφισμό) ο χώρος πηλίκο

$$M = [0, 1] \times [-1, 1]/ \sim ,$$

όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις σχέσεις $(0, y) \sim (1, -y)$, για κάθε $y \in [-1, 1]$. Η ομοτοπία $H : M \times I \to M$ που δίνεται από τον τύπο

$$H\big([(x, y)], t\big) = [(x, y(1-t))] ,$$

όπου με $[(x, y)]$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του (x, y) και της οποίας η συνέχεια έπεται από το Θεώρημα **??**, δείχνει ότι η ταινία του Möbius περιστέλλεται στον "κεντρικό" κύκλο $K = [0, 1] \times \{0\}$ και συνεπώς είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τον κύκλο.



Ως εφαρμογή των προηγουμένων θα αποδείξουμε ότι η σφαίρα S^n είναι απλά συνεκτικός χώρος για $n > 1$, αρχίζοντας από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.3.16 (Lebesgue)**.** *Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο A του X με διάμετρο μικρότερη του δ περιέχεται σε ένα από τα ανοικτά σύνολα της κάλυψης.*

Ο αριθμός δ καλείται **αριθμός του Lebesgue** για το κάλυμμα $\mathcal{U}$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι η διάμετρος του A ορίζεται ως το sup $\{d(x,y),\ x,y \in A\}$. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει ανοικτό $U_x \in \mathcal{U}$ με $x \in U_x$. Αφού το ανοικτό U_x περιέχει το x, υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x, 2r_x)$ με $B(x, 2r_x) \subseteq U_x$, για κάποιο $r_x > 0$. Εφόσον οι μπάλες $B(x, r_x)$, $x \in X$, αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X, από τη συμπάγεια του X έπεται ότι $X = \cup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i})$ για κάποια $x_1, \ldots, x_n \in X$. Έστω $\delta = \min\{r_{x_i}, i = 1, \ldots, n\}$ και A υποσύνολο του X με διάμετρο μικρότερη από δ. Έστω $y \in A$. Τότε $y \in B(x_i, r_{x_i})$ για κάποιο i. Για κάθε $z \in A$, έχουμε ότι $d(z,y) \leq \delta$ και άρα $d(x_i, z) \leq d(x_i, y) + d(y,z) < r_{x_i} + \delta \leq 2r_{x_i}$. Δηλαδή, $A \subseteq B(x_i, 2r_{x_i}) \subseteq U_{x_i} \in \mathcal{U}$. □

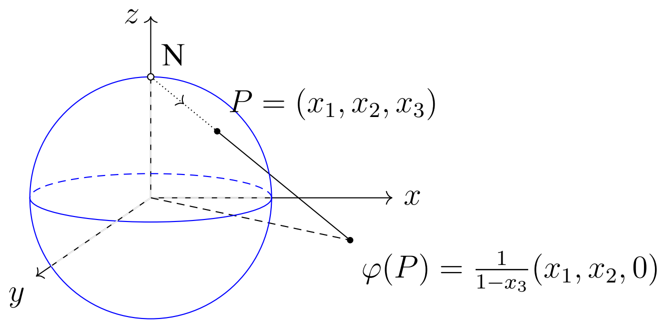
Πρόταση 6.3.17. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών και απλά συνεκτικών υποσυνόλων του U και V. Αν η τομή $U \cap V$ είναι μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική, τότε ο X είναι απλά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε πρώτα ότι ο χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός ως ένωση κατά τόξα συνεκτικών με μη-κενή τομή. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε θηλειά είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση. Έστω $x_0 \in U \cap V$ και $\lambda : [0,1] \to X$ μια θηλειά στο x_0. Εφόσον η λ είναι συνεχής, οι αντίστροφες εικόνες $\lambda^{-1}(U)$ και $\lambda^{-1}(V)$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $[0,1]$. Έστω δ ο αριθμός του Lebesgue αυτού του καλύμματος και n ένας φυσικός τέτοιος, ώστε $\frac{1}{n} < \delta$. Θεωρούμε τη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ του διαστήματος $[0,1]$, σε τμήματα με μήκος μικρότερο του δ, όπου $t_i = i/n$. Τότε $\lambda([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$, όπου $U_i = U$ ή V. Ενώνουμε το x_0 με το $\lambda(t_i)$ μέσω ενός μονοπατιού γ_i που βρίσκεται εντός της τομής $U_i \cap U_{i-1}$ (αυτό μπορεί να γίνει αφού τα σημεία x_0, $\lambda(t_i)$ ανήκουν στην τομή που είναι κατά τόξα συνεκτική). Για κάθε $i \geq 1$, συμβολίζουμε με λ_i το τμήμα του μονοπατιού λ από το $\lambda(t_{i-1})$ στο $\lambda(t_i)$, δηλαδή $\lambda_i(s) = \lambda\big((1-s)t_{i-1} + st_i\big)$, $s \in [0,1]$. Τότε το μονοπάτι $\gamma_{i-1}\lambda_i\gamma_i^{-1}$ περιέχεται στο U_{i-1} το οποίο είναι απλά συνεκτικό και

$$\begin{aligned}
\lambda &\simeq \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \\
&\simeq (\lambda_1\gamma_1^{-1}) \cdot (\gamma_1\lambda_2\gamma_2^{-1}) \cdots (\gamma_{i-1}\lambda_i\gamma_i^{-1}) \cdots (\gamma_{n-1}\lambda_n) \\
&\simeq C_{x_0} \cdots C_{x_0}.
\end{aligned}$$

Άρα $[\lambda] = [C_{x_0}] = 1$ και συνεπώς η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ είναι τετριμμένη. □

Παρατήρηση 6.3.18. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών υποσυνόλων του U και V, με μη-κενή τομή, έτσι ώστε τα U, V και $U \cap V$ είναι κατά



Σχήμα 6.3: Η στερεογραφική προβολή.

τόξα συνεκτικά. Αν $x_0 \in U \cap V$, τότε από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι

$$\pi_1(X, x_0) = \big\langle \pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_0) \big\rangle$$

που για την ακρίβεια σημαίνει πως η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ παράγεται από τις υποομάδες της $(i_U)_*\big(\pi_1(U, x_0)\big)$ και $(i_V)_*\big(\pi_1(V, x_0)\big)$, όπου με i_U και i_V συμβολίζουμε τις ενθέσεις των U και V στον X, αντίστοιχα.

Πρόταση 6.3.19. *Η σφαίρα S^n είναι απλά συνεκτικός χώρος, για $n \geq 2$.*

Απόδειξη. Έστω $N = (0, \dots, 0, 1)$ και $S = (0, \dots, 0, -1)$ ο "βόρειος" και "νότιος" πόλος της S^n, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα ανοικτά σύνολα $U = S^n \setminus \{N\}$ και $V = S^n \setminus \{S\}$, καθένα από τα οποία είναι ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}^n$. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τη στερεογραφική προβολή $\varphi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ που είναι η συνεχής απεικόνιση που δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}.$$

Η απεικόνιση φ είναι ομοιομορφισμός, καθώς επιδέχεται αντίστροφη ψ που δίνεται από τον τύπο

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = \frac{(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1)}{\|y\|^2 + 1},$$

όπου $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Έτσι $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$. Οι χώροι $S^n \setminus \{N\}$ και $S^n \setminus \{S\}$ είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους μέσω της ανακλάσεως $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. Έπεται ότι τα U και V είναι συμπτύξιμα και ιδιαιτέρως απλά συνεκτικά. Επίσης, η τομή τους είναι κατά τόξα συνεκτική, αφού $U \cap V \cong S^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ και $n \geq 2$. Το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση. $\square$

Πόρισμα 6.3.20. *Ο χώρος* $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *είναι απλά συνεκτικός, για* $n \geq 3$.

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ περιστέλλεται στη σφαίρα S^{n-1} και άρα έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας. □

Ασκήσεις

6.1 Αποδείξτε ότι ο ισομορφισμός του θεωρήματος 6.2.5 είναι φυσικός με την ακόλουθη έννοια. Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων και $x_1, x_2 \in X$. Αν με y_1 και y_2 συμβολίσουμε τις εικόνες των x_1 και x_2 μέσω της f, αντίστοιχα, τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Phi_h"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "\Phi_{f\circ h}"] \\ \pi_1(X, x_2) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, y_2) \end{tikzcd}$$

6.2 Μια *τοπολογική ομάδα* είναι μια ομάδα G εφοδιασμένη με μια τοπολογία, έτσι ώστε οι απεικονίσεις του πολλαπλασιασμού $\mu : G \times G \to G$ και της αντιστροφής $i : G \to G$ που δίνονται από $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $i(g) = g^{-1}$, αντίστοιχα, να είναι συνεχείς. Έστω x_0 το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Αν $f, g \in \pi_1(G, x_0)$, ορίζουμε $f \circ g \in \pi_1(G, x_0)$ ως εξής: $(f \circ g)(s) = f(s)g(s) = \mu\big(f(s), g(s)\big)$.
(α) Δείξτε ότι η πράξη $\circ$ επάγει πράξη ομάδας στο $\pi_1(G, x_0)$, η οποία ταυτίζεται με τον συνήθη πολλαπλασιασμό της θεμελιώδους ομάδας. (Υπόδειξη: υπολογίστε το γινόμενο $(f \cdot c_{x_0}) \circ (c_{x_0} \cdot g)$.)
(β) Δείξτε ότι η ομάδα $\pi_1(G, x_0)$ είναι αβελιανή.

6.3 Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Ο χώρος X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο.
(β) Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_X : X \to X$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.
(γ) Κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$, για αυθαίρετο χώρο Y, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
(δ) Κάθε απεικόνιση $g : Y \to X$, για αυθαίρετο χώρο Y, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

6.4 Έστω $f : S^n \to Y$ μια (συνεχής) απεικόνιση σε έναν χώρο Y. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Η f είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.
(β) Η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : D^{n+1} \to Y$.

6.5 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_0 \in A$, Y ένας τοπολογικός χώρος και $\phi : (A, a_0) \to (Y, y_0)$ συνεχής (δηλ. $\phi(a_0) = y_0$). Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to Y$ της ϕ, τότε η ϕ επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες.

6.6 Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Ο *κύλινδρος* M_f της f είναι ο χώρος πηλίκο $(X \times I) \bigsqcup Y / \sim$, όπου $(x, 0) \sim f(x)$ για κάθε $x \in X$.
(α) Δείξτε ότι ο περιορισμός της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο π σε καθένα από τα $X \times \{1\}$ και Y είναι ομοιομορφισμός.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση $r : M_f \to \pi(Y)$.
(γ) Κάθε απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων παραγοντοποιείται ως μια εμφύτευση ακολουθούμενης από μια ομοτοπική ισοδυναμία.

6.7 Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ο *κώνος επί του* X, CX είναι ο χώρος πηλίκο $X \times [0, 1]/ \sim$, όπου $(x, t) \sim (y, s)$ αν και μόνο αν $(x, t) = (y, s)$ ή $s = t = 1$. Αποδείξτε ότι ο χώρος CX είναι συμπτύξιμος. [Υπόδειξη: θεωρήστε δεδομένο ότι (λόγω της συμπάγειας του $I = [0, 1]$) η απεικόνιση $\pi \times \mathrm{Id} : X \times I \times I \to CX \times I$ είναι απεικόνιση πηλίκο, όπου $\pi : X \times I \to CX$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.]

6.8 Έστω A, B υποσύνολα των $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $-A = A$ και $-B = B$. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται *περιττή*, αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Για κάθε απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S^n$, έτσι ώστε $f(x) = f(-x)$.
2. Για κάθε περιττή απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S^n$ έτσι ώστε $f(x) = 0$.
3. Δεν υπάρχει περιττή απεικόνιση $f : S^n \to S^{n-1}$.
4. Δεν υπάρχει απεικόνιση $f : D^n \to S^{n-1}$, η οποία να είναι περιττή στο σύνορο S^{n-1} του δίσκου.
5. Κάθε περιττή απεικόνιση $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ δεν είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

6.9 Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και CX ο κώνος του X. Ταυτίζουμε τον X με τον υπόχωρο $X \times \{0\}$ του κώνου μέσω της εμφύτευσης $X \ni x \mapsto [(x, 0)]$. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής επέκταση $g : CX \to Y$ της f.

6.10 Αποδείξτε ότι $CS^n \cong D^{n+1}$. Αυτό δείχνει ότι η προηγούμενη άσκηση γενικεύει την Άσκηση 4.

6.11 Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, A κλειστό υποσύνολο του X, $f : A \to Y$ συνεχής και $Z_f = X \bigcup_f Y$ ο χώρος που προκύπτει από τον Y με την επισύναψη του X κατά μήκος του A μέσω της f. Αν υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον X στον A, τότε υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον $X \bigcup_f Y$ στον Y (εδώ θεωρούμε τον Y ως υπόχωρο του $X \bigcup_f Y$, αφού γνωρίζουμε ότι εμφυτεύεται μέσω της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο).

6.12 Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων. Ο *κώνος* $C(f)$ της f είναι ο χώρος πηλίκο $M_f/(X \times \{1\})$, διαφορετικά $C(f) = \dfrac{CX \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)}$. Αποδείξτε ότι ομοτοπικές απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ δίνουν ομοτοπικά ισοδύναμους κώνους. [Υπόδειξη: αν H είναι η ομοτοπία, τότε θεωρήστε την απεικόνιση με $y \mapsto y \in Y$ και $(x, t) \mapsto (x, 2t)$, για $t \in [0, 1/2]$, $(x, t) \mapsto H(x, 2t - 1)$, για $t \in [1/2, 1]$.]

Βιβλιογραφία

[1] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[2] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[3] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[4] J. R. Munkres. Topology, 2nd end., Prentice-Hall, 2000.

[5] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.