Θεωρία Ομάδων

Λυμένες Ασκήσεις

Κωνσταντινος Μπιζανος

Αθήνα,
1 Φεβρουαρίου 2023

Πρόλογος

Το συγκεκριμένο αρχείο αποτελεί μια συλλογή ασκήσεων στη Θεωρία Ομάδων. Το εύρος των ασκήσεων καλύπτει την ύλη του προπτυχιακού μαθήματος Θεωρία Ομάδων καθώς και του μεταπτυχιακού μαθήματος Άλγεβρα Ι. Οι πλειοψηφία των ασκήσεων είναι από τα αντίστοιχα φυλλάδια του διδάσκοντα Μ. Συκιώτη από τα ακαδημαϊκά έτη Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 (προπτυχιακή θεωρία ομάδων) και Χειμερινό εξάμηνο 2022-23 (μεταπτυχιακή άλγεβρα Ι). Το αρχείο αυτό απέχει πολύ από το να είναι καλογραμμένο, αλλά ως μια μικρή δικαιολογία για ενδεχόμενα λάθη, να σημειώσουμε ότι το αρχείο δεν έχει σκοπό να αντικαταστήσει την ατομική μελέτη και προσπάθεια αλλά να την ενισχύσει. Οπότε ας βαφτίσουμε ενδεχόμενα λάθη ''τροφή για σκέψη''.

Παρόλα αυτά αν παρατηρήσετε κάποιο λάθος τυπογραφικό και όχι μόνο μετά χαράς να μου το επισημάνετε στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο kostasbizanos@gmail.com ή στο bizanosk@math.uoa.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η έννοια της ομάδας

1. Αν H, K είναι υποομάδες πεπερασμένου δείκτη μια ομάδας G με $K \leq H$, τότε

$$[G : K] = [G : H] \cdot [K : H].$$

Υποθέτουμε ότι $[G : K] < \infty$.

Υπόδειξη. Έστω $T_1 = \{g_1, \dots, g_n\}$ σύνολο αντιπροσώπων της H στην G, $T_2 = \{x_1, \dots, x_m\}$ σύνολο αντιπροσώπων της K στην H. Τότε, το

$$T = \{g_i x_j \mid g_i \in T_1, x_j \in T_2\}$$

είναι σύνολο αντιπροσώπων της K στην G. ∎

2. Αποδείξτε ότι αν $H, K \leq G$ με $[G : H] = m$ και $[G : K] = n$, τότε $[G : H \cap K] \geq$ ε.κ.π.(m, n). Επιπλέον, έχουμε ισότητα αν $(m, n) = 1$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $(m, n) = 1$, άρα έχουμε ότι $mn | [G : H \cap K]$.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι

$$[G : H \cap K] = [G : K] \cdot [K : H \cap K] \Rightarrow n | [G : H \cap K].$$

Ομοίως ισχύει ότι $n | [G : H \cap K]$, επομένως έχουμε ότι ε.κ.π.$(m, n) | [G : H \cap K]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $[K : H \cap K] \leq m$ και από την αρχική σχέση θα έχουμε το ζητούμενο. Θεωρούμε απεικόνιση

$$\varphi \colon K / H \cap K \to G / H, \quad kH \cap K \mapsto kH.$$

η οποία είναι 1-1. Άρα, έχουμε ότι $[K : H \cap K] \leq m$, άρα από την αρχική σχέση $[G : H \cap K] \leq mn$. ∎

3. Αποδείξτε ότι αν $H_1, \ldots, H_n$ είναι υποομάδες της G πεπερασμένου δείκτη, τότε και η τομή του είναι πεπερασμένου δείκτη στην G και

$$\left[G : \bigcap_{i=1}^{n} H_i\right] \le \prod_{i=1}^{n} [G : H_i].$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε την απεικόνιση

$$\varphi \colon G / \bigcap_{i=1}^{n} H_i \to \prod_{i=1}^{n} G/H_i, \quad g \bigcap_{i} H_i \mapsto (gH_1, \ldots, gH_n)$$

και δείξτε ότι είναι 1-1. ∎

4. Έστω H, K ένα ζεύγος υποομάδων μιας ομάδας G. Το γινόμενο $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ είναι υποομάδα της G αν και μόνο αν $HK = KH$.

Υπόδειξη. Έστω ότι $HK \le G$. Τότε, έχουμε ότι $KH \le G$ (γιατί ;). Έστω $hk \in HK$. Αφού $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$ και $KH \le G$, τότε έχουμε ότι $hk \in KH$. Ομοίως, δείξτε ότι $KH \subseteq HK$.

Αντίστροφα, έστω ότι $HK = KH$. Θα δείξουμε ότι $HK \le G$. Έστω $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$. Τότε

$$(h_2k_2)^{-1}(h_1k_1) = k_2^{-1}h_2^{-1}h_1k_1.$$

Αφού $k_2^{-1}h_2^{-1}h_1 \in KH$, τότε υπάρχει $\tilde{k} \in K, \tilde{h} \in H$ τέτοια ώστε

$$k_2^{-1}h_2^{-1}h_1 = \tilde{h}\tilde{k}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$(h_2k_2)^{-1}(h_1k_1) = \tilde{h}\tilde{k}k_2 \in HK$$

και έχουμε το ζητούμενο. ∎

5. Έστω K κυκλική πεπερασμένη υποομάδα της G και $K \lhd G$. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα της K είναι κανονική στην G.

Υπόδειξη. Έστω $K = \langle x \rangle$. Έστω $H \leq K$, δηλαδή $H = \langle x^k \rangle$ και $g \in G$. Τότε έχουμε ότι

$$g^{-1}x^k g = \left(g^{-1}xg\right)^k \in H$$

έτσι έχουμε το ζητουμενο. ∎

6. Έστω $N \lhd G$, $g \in G$ και $|G/N| = n < \infty$. Υποθέτουμε ότι $(m,n) = 1$ και $g^m \in N$. Δείξτε ότι $g \in N$.

Υπόδειξη. Αφού $(m,n) = 1$, τότε υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $xm + yn = 1$. Άρα,

$$gN = (g^m)^x N \cdot (g^n)^y N = N.$$

∎

7. Έστω G ομάδα και $Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg, \text{ για κάθε } g \in G\}$ το κέντρο της G. Αποδείξτε ότι

(α) $Z(G)$ είναι αβελιανή κανονική υποομάδα της G.

(β) Κάθε υποομάδα του κέντρου είναι κανονική στην G.

(γ) Αν η G δεν είναι αβελιανή, τότε η $G/Z(G)$ δεν είναι κυκλική.

(δ) Αν $K \lhd G$ και $|K| = 2$, τότε $K \leq Z(G)$.

(ε) Αν $\varphi: G \to G_1$ επιμορφισμός και $H \leq Z(G)$, τότε $\varphi(H) \leq Z(G_1)$.

(στ) Αν $K \lhd G$, τοτε η $Z(G)/Z(G) \cap K$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $Z(G/K)$.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο.

(β) Άμεσο.

(γ) Έστω ότι $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$. Έστω $g_1, g_2 \in G$. Τότε, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ και $z_1, z_2 \in Z(G)$ τέτοια ώστε $g_1 = g^m z_1$ και $g_2 = g^n z_2$. Δείξτε ότι $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

(δ) Αρχικά $K = \{1, k\}$ με $k \neq 1$. Τότε, για κάθε $g \in G$, από την κανονικότητα της K έχουμε ότι $g^{-1}kg = k$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ε) Άμεσο.

(στ) Άμεσο.

■

8. Έστω G ομάδα και $g, h \in G$. Ο μεταθέτης των g, h είναι το στοιχείο $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Η *παράγωγος ομάδα* G' της G ορίζεται ως η υποομάδα της G που παράγεται από όλους του μεταθέτες των στοιχείων της G. Αποδείξτε ότι :

(α) $G' \lhd G$.

(β) Αν $H \leq G$ και $G' \subseteq H$, τότε $H \lhd G$.

(γ) Αν $H \lhd G$ τότε G/H αβελιανή αν και μόνο αν $G' \leq H$. Ιδιαιτέρως $G' \leq H$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in G$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x^{-1}[g, h]x \in G'$, για κάθε $g, h \in G$. Έστω Πράγματι, αν $g, h \in G$. Τότε,

$$x^{-1}[g, h]x = x^{-1}h^{-1}g^{-x}ghx = [g, hx] \in G'.$$

(β) Έστω $g \in G$ και $h \in H$, τότε $[g, h] \in H$, άρα $g^{-1}hg \in H$.

(γ) G/H είναι αβελιανή αν και μόνο αν $[g, h] \in H$, για κάθε $g, h \in G$ αν και μόνο αν $G' \leq H$.

■

9. (α) Έστω G ομάδα και $\varphi: G \to G$ απεικόνιση τέτοια ώστε $\varphi(g) = g^{-1}$, για κάθε $g \in G$. Αποδείξτε ότι φ είναι ομομορφισμός αν και μόνο αν G είναι αβελιανή.

(β) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $\vartheta: G \to G$ αυτομορφισμός τέτοιος ώστε $\vartheta^2(g) = g$, για κάθε $g \in G$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι αν $g \in G$ και $\vartheta(g) = g$, τότε $g = 1$. Αποδείξτε ότι $\vartheta(g) = g^{-1}$, για κάθε $g \in G$ και συνεπώς G είναι αβελιανή.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο.

(β) Αφού η απεικόνιση $g \mapsto g^{-1}\vartheta(g)$ είναι 1-1 και επί έχουμε ότι

$$G = \left\{ g^{-1}\vartheta(g) \mid g \in G \right\}.$$

Έστω $g \in G$. Τότε υπάρχει $a \in G$ ώστε $g = a^{-1}\vartheta(a)$. Έτσι

$$\vartheta(g) = \vartheta(a^{-1})a = g^{-1}.$$

■

10. Υποθέτουμε ότι η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα με την ιδιότητα $(ab)^n = a^n b^n$, για κάθε $a, b \in G$, όπου n σταθερός ακέραιος μεγαλύτερος του 1. Έστω $G_n = \{a \in G \mid a^n = 1\}$ και $G^n = \{g^n \mid g \in G\}$. Αποδείξτε ότι G_n και G^n είναι κανονικές υποομάδες της G και οτι $|G^n| = [G : G_n]$.

Υπόδειξη. G_n είναι κανονική υποομάδα της G ως πυρήνας του ομομορφισμού $g \mapsto g^n$. Τώρα, αφού $x^{-1}g^n x = (x^{-1}gx)^n$ έχουμε ότι G^n είναι κανονική υποομάδα της G. Από τον παραπάνω ομομορφισμό έχουμε και τη ζητούμενη σχέση. ■

11. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και K κανονική υποομάδα της G με $(G, [G : K]) = 1$. Δείξτε ότι η K είναι η μοναδική υποομάδα της G τάξης $|K|$.

Υπόδειξη. Έστω $H \leq G$ με $|H| = |K|$. Θεωρούμε την κανονική προβολή $\pi : G \to G/K$. Τότε, ισχύει ότι $|\pi(H)| \Big| [G : K]$ και $|\pi(H)| \Big| |K|$. Άρα, έχουμε ότι $\pi(H) = \{1\}$, δηλαδή $H \subseteq \ker \pi = K$ και αφού έχουν ίσες τάξεις ισχύει ότι $H = K$. ■

12. Έστω G μια αβελιανή ομάδα και p πρώτος ώστε $o(g) = p$, για κάθε $g \in G$. Θεωρούμε το σώμα $F = \mathbb{Z}_p$ και ορίζουμε πράξεις

$$\oplus : G \times G \to G, \quad * : F \times G \to G$$

ως εξής: $g_1 \oplus g_2 = g_1 \cdot g_2$ και $[n] \cdot g = g^n$, με $[n] \in \mathbb{Z}_p$ συμβολίζουμε την κλάση ισοτιμίας του n.

(α) Να δειχθεί ότι η G, με τις παραπάνω πράξεις, γίνεται διανυσματικός χώρος επί του F. Ιδιαιτέρως, αν η G είναι πεπερασμένη, τότε $|G| = p^m$, όπου $m = \dim_F G$.

(β) Αν η G είναι πεπερασμένη, τότε $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$.

Υπόδειξη. (α) Το πρώτο σκέλος είναι άμεσο. Αν G είναι πεπερασμένη, τότε είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος με $\dim_F G = m$. Άρα, υπάρχει βάση $\{g_1, \ldots, g_m\}$ της G, όπου για κάθε $g \in G$ υπάρχουν μοναδικά $[n_1], \ldots, [n_m] \in \mathbb{Z}_p$ ώστε

$$g = [n_1] \cdot g_1 \oplus \cdots \oplus [n_m] \cdot g_m = g_1^{n_1} \cdots g_m^{n_m}.$$

Άρα, είναι σαφές ότι $|G| = p^m$.

(β) Έστω $\{g_1, \ldots, g_m\}$ βάση του F - διανυσματικού χώρου G με πράξεις όπως στο (α). Τότε, από το (α), παρατηρούμε ότι $\{g_1, \ldots, g_m\}$ είναι σύνολο γεννητόρων για την ομάδα G, άρα κάθε αυτομορφισμός της καθορίζεται πλήρως στις εικόνες των γεννητόρων. Έστω $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$, υπάρχουν μοναδικά $a_{i1}, \ldots, a_{im}$ ώστε $\varphi(g_i) = g_1^{a_{i1}} \cdots g_m^{a_{im}}$. Ορίζουμε $\psi \colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ με

$$\psi(\varphi) = \begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{21}] & \cdots & [a_{m1}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_{1m}] & [a_{2m}] & \cdots & [a_{mm}] \end{pmatrix}$$

Η ψ είναι καλά ορισμένη, αφού κάθε $\varepsilon \in \mathrm{Aut}(G)$ είναι και γραμμικός ισομομορφισμός του G, άρα απεικόνιζει κάθε βάση σε βάση. Άρα, οι στήλες του παραπάνω πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Τώρα, είναι άμεσο ότι η ψ είναι ισομορφισμός ομάδων.

■

13. Έστω F σώμα και G πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι ισόμορφη με υποομάδα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}_n(F)$, για κάποιο $n \leq |G|$.

14. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και S πεπεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G. Ορίζουμε $\|\cdot\|_S \colon G \to [0, \infty)$ ως εξής : $\|1_G\|_S = 0$ και για $1_G \neq g$

$$\|g\|_S = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n},\ \text{όπου } s_{i_j} \in S \cup S^{-1} \text{ και } \varepsilon_j \in \{-1, 1\}\right\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η ομάδα G με την συνάρτηση $d_S(g, h_= \|g^{-1}h\|_S$ γίνεται μετρικός χώρος.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα εμφυτεύεται στην ομάδα ισομετριών ενός μετρικού χώρου.

15. Έστω G ομάδα $H \leq G$ και $K \lhd G$. Αν $N \lhd H$, τότε $NK \lhd HK$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $NK \lhd H$ και $NK \lhd K$. ∎

Ορισμός 1. Μια υποομάδα H μιας ομάδος G λέγεται **χαρακτηριστική** στην G, συμβολίζουμε με $H \trianglelefteq G$, αν $\varphi(H) \leq H$, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

16. Αποδείξτε ότι :

(α) Αν $H \trianglelefteq G$, τότε $\varphi(H) = H$, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

(β) Κάθε χαρακτηριστική ομάδα είναι κανονική.

(γ) Σε αντίθεση με τις κανονικές υποομάδες, στις χαρακτηριστικές υποομάδες ισχύει η μεταβατικότητα, δηλαδή αν $H \trianglelefteq N$ και $N \trianglelefteq G$, τότε $H \trianglelefteq G$.

(δ) Αν $N \trianglelefteq K$ και $K \lhd G$, τότε $N \lhd G$.

(ε) Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι χαρακτηριστική.

(στ) $Z(G) \trianglelefteq G$ και $G' \trianglelefteq G$.

(η) Υπάρχουν ομάδες για τις οποίες η κλάση των χαρακτηριστικών υποομάδων είναι γνησίως μικρότερη από την κλάση των κανονικών υποομάδων.

Υπόδειξη. (α) Αν $\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$, άρα εφαρμόζοντας τον αρχικό ορισμό για φ και φ^{-1}, τότε έχουμε ότι $\varphi(H) = H$.

(β) Έστω $g \in G$. Εφαρμόζοντας το (α) για το εσωτερικό αυτομορφισμό τ_g έχουμε το ζητούμενο.

(γ) Έστω $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Τότε, αφού N χαρακτηριστική της G, τότε $\varphi(N) = N$, δηλαδή $\varphi\Big|_N \in \mathrm{Aut}(N)$. Αφού H χαρακτηριστική στην N, τότε $\varphi(H) = H$.

(δ) Έστω $g \in G$. Τότε $g^{-1}Kg = K$. Τότε, ο εσωτερικός αυτομορφισμός τ_g περιορισμένος στο K είναι αυτομορφισμός στο K, άρα $g^{-1}Ng = \tau_g\Big|_K(N) = N$, αφού N είναι χαρακτηριστική στην K.

(ε) Έστω $G = \langle g \rangle$ και φ αυτομορφισμός της G και $H \leq G$, δηλαδή $H = \langle g^n \rangle$. Τότε, $\varphi(g) = g^k$, άρα $\varphi(g^n) = (g^n)^k \in H$.

(στ) Άμεσο ότι $Z(G), G'$ είναι χαρακτηριστικές υποομάδες της G.

(η) Αν H μια μη τετριμμένη ομάδα και $G = H \times H$ το ευθύ άθροισμα αυτών, τότε η $\{1\} \times H$ είναι κανονική στην G, αλλά λόγω του αυτομορφισμού $(x, y) \mapsto (y, x)$ παρατηρούμε ότι $\{1\} \times H$ δεν είναι χαρακτηριστική.

■

Κεφάλαιο 2

Δράσεις Ομάδων

17. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα της οποίας οι υποομάδες πεπερασμένου δείκτου έχουν τετριμμένη τομή. Δείξτε ότι κάθε επιμορφισμός $\varphi : G \to G$ είναι ισομορφισμός.

Υπόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $K = \ker\varphi \subseteq \{1\} = \bigcap_{H\leq G,\ [G:H]<\infty} \mathrm{H}$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι K περιέχεται σε κάθε υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτου. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος $H_1, \dots, H_k$, υποομάδες της G δείκτου n. Από το θεώρημα αντιστοιχίας, υπάρχουν διακεκριμένες ανά δύο $M_1, \dots, M_k$ με $K \subseteq M_i$ με

$$\varphi^{-1}(H_i) = M_i \Rightarrow [G : M_i] = \left[\frac{G/K}{M_i/K}\right] = [G : H_i] = n.$$

Άρα, οι M_i είναι μια αναδιάταξη των H_i, επομένως $K \subseteq H_i$ για κάθε i και έχουμε το ζητούμενο. ∎

18. Έστω G πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα επί ενός πεπερασμένου συνόλου X και $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

(α) Δείξτε ότι το πλήθος των τροχιών της δράσης είναι ίσο με $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$

(β) Αν η δράση είναι μεταβατική και $|X| > 1$, τότε υπάρχει στοιχείο της G που δεν σταθεροποιεί κανένα στοιχείο του X.

Υπόδειξη. (α) Έστω $A = \{(g,x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$. Τότε έχουμε ότι

$$A = \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x) \times \{x\} = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times \mathrm{Fix}(g).$$

Επομένως ισχύει ότι $\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)|$. Όμως, αν $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$ είναι σαφές ότι $|\mathrm{Stab}_G(x)| = |\mathrm{Stab}_G(y)|$, άρα αν T είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης, τότε

$$\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x \in T} |\mathcal{O}(x)| \cdot |\mathrm{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in T} |G| = |T| \cdot |G|.$$

Άρα, από την παραπάνω σχέση έχουμε το ζητούμενο.

(β) Αν η δράση είναι μεταβατική, τότε από (α) έχουμε ότι $|T| = 1$, δηλαδή $\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = |G|$. Όμως, έχουμε ότι $\mathrm{Fix}(1) = |X| > 1$, άρα

$$\sum_{g \neq 1} |\mathrm{Fix}(g)| = G - |X| < |G|.$$

Άρα, υπάρχει $g \neq 1$, τέτοιο ώστε $\mathrm{Fix}(g) = \varnothing$.

■

19. Έστω G μια ομάδα τάξεως p^n, όπου p πρώτος, και X πεπερασμένο G - σύνολο. Αν ο πρώτος p δεν διαιρεί το $|X|$, τότε $\bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g) \neq \varnothing$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$x \in \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g) \Leftrightarrow \exists x \in X: \ g \cdot x = x, \quad \forall g \in G \Leftrightarrow \exists x \in X: \ \mathcal{O}(x) = \{x\}.$$

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $|\mathcal{O}(x) > 1$, για κάθε $x \in X$ και αφού $|\mathcal{O}(x)| \Big| |G| = p^n$, τότε $p||\mathcal{O}(x)|$, για κάθε $x \in X$. Άρα, αν T σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης, τότε $p| \sum_{x \in T} |\mathcal{O}(x) = |X|$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. ■

20. Αν $G = n < \infty$ και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του n, τότε κάθε υποομάδα H της G δείκτου p είναι κανονική.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την δράση της G στο $X = G/H$. Τότε, για κάθε $xH \in X$ έχουμε ότι $|\mathcal{O}(xH)|\,|\,|G|$, δηλαδή $|\mathcal{O}(xH)| = 1$ ή $|\mathcal{O}(xH)| \geq p$, αφού p είναι ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της G. Αν T είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων της δράσης, τότε έχουμε ότι

$$p = [G:H] = \sum_{xH \in T,\ x \neq H} |\mathcal{O}(xH)| + 1.$$

Άρα, για κάθε $xH \in X$ έχουμε ότι $|\mathcal{O}(xH)| = 1$, δηλαδή για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $H = \mathrm{Stab}_G(xH)$ και έχουμε το ζητούμενο. ∎

21. Θεωρώντας δεδομένου οτι η A_5 είναι απλή, δείξτε ότι δεν περιέχει υποομάδες τάξεως 15,20 ή 30 (συνεπώς το αντίστροφο του θεωρήματος Lagrange δεν ισχύει).

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $|A_5| = 5!/2 = 60$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν υπάρχει $H \leq A_5$ με $|H| = 30$, τότε έχουμε ότι $[A_5 : H] = 2$, άρα η H είναι κανονική. Άρα, καταλήγουμε σε άτοπο αφού A_5 είναι απλή.
- Αν υπάρχει $H \leq A_5$ με $|H| = 15$, τότε $[A_5 : H] = 4$, άρα (μέσω της δράσης της A_5 στα σύμπλοκα A_5/H) επάγεται ομομορφισμός $\varphi\colon A_5 \to S_4$. Τότε, έχουμε ότι $\ker\varphi \trianglelefteq A_5$ και $4|[A_5 : \ker\varphi]$, επομένως $[A_5 : \ker\varphi] \geq 4$, άρα αφού A_5 είναι απλή έχουμε ότι $\ker\varphi = 1$. Συνεπώς, έχουμε ότι $A_5 \hookrightarrow S_4$, δηλαδή $60|4!$. Άρα, καταλήγουμε σε άτοπο.
- Αν υπάρχει $H \leq A_5$ με $|H| = 20$, τότε $[A_5 : H] = 3$. Καταλήξτε όπως παραπάνω σε άτοπο.

∎

Ορισμός 2. Έστω G ομάδα και X, Y είναι G - σύνολα. Μια απεικόνιση $\varphi\colon X \to Y$ λέγεται G **- απεικόνιση** αν $\varphi(gx) = g\varphi(x)$, για κάθε $g \in G$ και $x \in X$ και G **- ισομορφισμός** αν φ είναι επιπλέον 1-1 και επί.

22. Αποδείξτε ότι η G δρα μεταβατικά επί του X αν και μόνο αν το X είναι G ισόμορφο με το G/H για κάποια υποομάδα H της G.

Υπόδειξη. Αν G δρα μεταβατικά στο X και $x \in X$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε ότι $y = gx$, για κάποιο $g \in G$. Ορίζουμε $\varphi: X \to G/\mathrm{Stab}_G(x)$ με $gx \mapsto g\mathrm{Stab}_G(x)$. Η φ είναι G -ισομορφισμός. Αντίστροφα, αν $\varphi: X \to G/H$, τότε αν $\varphi(x) = H$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε ότι

$$\varphi(y) = gH = g\varphi(x) = \varphi(gx) \Rightarrow y = gx.$$

Άρα, η G δρα μεταβατικά επί του X. ∎

23. Το πλήθος των υποομάδων πεπερασμένου δείκτη n σε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη. Έστω $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$. Για κάθε $H \leq G$ με $[G : H] = n < \infty$ επάγεται ομομορφισμός $\varphi_H: G \to S_n$. Αφού κάθε τέτοιος ομομορφισμός καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες στους γεννήτορες της G, έχουμε πεπερασμένες το πλήθος επιλογές για τέτοιους ομομορφισμούς. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $H, K \leq G$ δείκτου n με $H \neq K$, τότε $\varphi_H \neq \varphi_K$. Έχουμε, για $h \in H$, ότι $\varphi_H(h)(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ ενώ $\varphi_K(h)(\mathrm{id}) \neq \mathrm{id}$. ∎

24. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτου περιέχει μια χαρακτηριστική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη G.

Υπόδειξη. Έστω H υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτου. Τότε, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ισχύει ότι $[G : H] = [G : \varphi(H)]$. Τότε, αν $C = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Aut}(G)} \varphi(H)$ αυτή είναι μια τομή πεπερασμένο το πλήθος ομάδων (αφού η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη), όπου ο δείκτης της είναι πεπερασμένος και είναι χαρακτηριστική στην G. ∎

25. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H, K υποομάδες της G. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη δράση, δείξτε ότι $|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$.

Υπόδειξη.

1. *Α΄ τρόπος* (με δράσεις) : Θεωρούμε την δράση $H \rightsquigarrow G/K$. Τότε έχουμε ότι

   $$|\mathcal{O}(K)| = [H : \mathrm{Stab}_H(K)] = |H|/|H \cap K|$$

   και επίσης ισχύει ότι

   $$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\} = \bigcup_{hK \in \mathcal{O}(K)} hK \Rightarrow |HK| = |K| \cdot |\mathcal{O}(K)|.$$

   Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε το ζητούμενο.

2. *Β΄ τρόπος* : Θεωρούμε σύνολο αντιπροσώπων $T = \{k_i H \cap K\}_i$ του συνόλου $H \cap K$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon H \times T \to HK, \quad (h, k_i H \cap K) \mapsto hk_i.$$

Αφού το T είναι σύνολο αντιπροσώπων είναι σαφές ότι φ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Τώρα, έστω $hk \in HK$. Τότε υπάρχει $k_i H \cap K \in T$ ώστε $k_i H \cap K = kH \cap K$. Άρα, υπάρχει $h' \in H \cap K$ ώστε $k = h'k_i$. Άρα, έχουμε ότι $hk = \varphi(hh', k_i H \cap K)$. ■

26. Έστω G ομάδα, $H \leq G$ και $C_G(H) = \{g \in G \mid hg = gh, \ \forall h \in H\}$ η κεντροποιούσα της H στην G. Δείξτε ότι $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ και ότι το πηλίκο $N_G(H)/C_G(H)$ είναι ισόμορφο με υποομάδα της $\mathrm{Aut}(H)$

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ άμεσα από τους ορισμούς. Για το δεύτερο μέρος της άσκησης θεωρήστε τον μονομορφισμό

$$\varphi\colon N_G(H)/C_G(H) \to \mathrm{Aut}(H), \quad gC_G(H) \mapsto \tau_g$$

όπου τ_g ο εσωτερικός αυτομορφισμός της H, που ορίζεται από το g. ■

27. Αν G είναι μια ομάδα τάξεως p^n, όπου p πρώτος, και $1 \neq H \trianglelefteq G$, δείξτε ότι $H \cap Z(G) \neq 1$.

Υπόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $H \cap Z(G) \neq 1$, δηλαδή ότι υπάρχει $x \in H \setminus \{1\}$ τέτοιο ώστε $ghg^{-1} = h$, για κάθε $g \in G$. Αφού H είναι κανονική, τότε ορίζεται δράση με συζυγία της G στην H και αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τροχία, εκτός της τετριμμένης, που δεν είναι μονοσύνολο. Πράγματι, αν μια τροχία $\mathcal{O}(h)$ δεν είναι μονοσύνολο, τότε $|\mathcal{O}(h)| \,|\, |G| = p^n$, άρα $p \,|\, |\mathcal{O}(h)|$. Αν T σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών, τότε

$$|H| = \sum_{x \in T, x \neq 1} |\mathcal{O}(x)| + 1.$$

Αφού $p \,|\, |H|$, από την παραπάνω σχέση είναι σαφές, ότι υπάρχει $h \neq 1$ στην H ώστε $\mathcal{O}(h) = \{h\}$. ■

28. Έστω G μια ομάδα η οποία δρα με ομοιομορφισμούς επί ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό U του X έτσι ώστε $X = \bigcup_{g\in G} gU$. Δείξτε ότι η G παράγεται από το σύνολο $S = \{g \in G \mid gU \cap U \neq \varnothing\}$.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $g \cdot x = f_g(x)$, όπου $f_g\colon X \to X$ ομοιομορφισμός. Θεωρούμε τα σύνολα $HU, (G \setminus H)U$, όπου $H = \langle S \rangle$. Τα σύνολα αυτά είναι ανοικτά ως ένωση τέτοιων και $X = HU \cup (G \setminus H)U$. Έχουμε ότι $HU \cap (G \setminus H)U = \varnothing$. Πράγματι, αν υπάρχουν $h \in H$, $g \in (G \setminus H)$ και $u_1, u_2 \in U$ τέτοια ώστε $hu_1 = gu_2$ έχουμε ότι $g^{-1}hu_1 = u_2$, δηλαδή $g^{-1}h \in H$. Έτσι προκύπτει ότι $g \in H$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Αφού $HU \neq \varnothing$ και X είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος, έχουμε ότι $(G \setminus H)U = 0$, δηλαδή $G \setminus H = \varnothing$. ∎

29. Αν G πεπερασμένη ομάδα και $H \leq G$, τότε $\left|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\right| \leq |G| - [G : H] + 1$.

Υπόδειξη. Έστω $T = \{x_1H, \ldots, x_nH\}$ σύνολο αντιπροσώπων του G/H. Τότε, για $x \in \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ υπάρχει $g \in G$ και $h \in H$ ώστε $x = ghg^{-1}$. Όμως $g \in G$, άρα υπάρχει x_i και $\tilde{h} \in H$ ώστε $g = x_i\tilde{h}$, δηλαδή $x = x_i(\tilde{h}h\tilde{h}^{-1})x_i^{-1} \in x_iHx_i^{-1}$. Έτσι καταλήγουμε ότι

$$\bigcup_{g\in G} gHg^{-1} = \bigcup_{x_iH\in T} x_iHx_i^{-1}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\left|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\right| = \left|\bigcup_{x_iH\in T} x_iHx_i^{-1}\right| \leq \sum_{x_iH\in T} \left|x_iHx_i^{-1} \setminus \{1\}\right| + 1 = [G : H]\cdot(|H| - 1) + 1 = |G| - [G : H] + 1.$$

∎

30. (α) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $H \lneqq G$. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο της G το οποίο δεν περιέχεται στην ένωση των συζυγών της H.

(β) Αν η G είναι πεπερασμένη και όλες οι μεγιστικές υποομάδες της είναι συζυγείς, τότε η G είναι κυκλική.

Υπόδειξη. (α) Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την Άσκηση 29.

(β) Αν η G δεν έχει γνήσιες μη τετριμμένες υποομάδες, τότε είναι σαφές ότι είναι κυκλική. Αλλιώς, έστω H μια μεγιστική (γνήσια) υποομάδα της G. Αφού κάθε μεγιστική υποομάδα της G είναι συζυγής με την H, τότε από (α) υπάρχει $g \in G$ που δεν περιέχεται σε καμία μεγιστική υποομάδα της G. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $G = \langle g \rangle$.

■

31. Αν H γνήσια υποομάδα πεπερασμένου δείκτη σε μια ομάδα G, τότε η ένωση των συζυγών $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ της H περιέχεται γνήσια στην G.

Υπόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $G = \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$. Θεωρούμε την δράση της G στα σύμπλοκα G/H. Από τον συνήθη ομομορφισμό φ που επάγεται υπάρχει $K = \ker\varphi \lhd G$ με $K \subseteq H$ και $[G : K] < \infty$. Αφού H είναι γνήσια υποομάδα της G, τότε $H/K \subsetneq G/K$ και μάλιστα $G/K = \bigcup_{g\in G} g(H/K)g^{-1}$. Αφού G/K είναι πεπερασμένη καταλήγουμε σε άτοπο από την Άσκηση 29. ■

32. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και r το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G.

(α) Δείξτε ότι $|C_G(a)| \geq |G/G'|$ για κάθε $a \in G$, όπου G' η παράγωγος υποομάδα της G.

(β) Αν p_0 είναι ο μικρότερος πρώτος που διαιρεί την τάξη της G και $rp_0 > |G|$, τότε $Z(G) \neq 1$.

(γ) Αν η G δεν είναι αβελιανή, τότε $r > |Z(G)| + 1$.

(δ) Αν $|G| = p^3$, p πρώτος και η G δεν είναι αβελιανή, τότε $G' = Z(G)$, $|Z(G)| = p$ και $r = p^2 + p - 1$.

Υπόδειξη. (α) Για να δείξουμε ότι $|C_G(a)| \geq |G/G'|$ ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι $|G'| \geq |\mathrm{Cl}_G(a)|$. Ορίζουμε $\varphi\colon \mathrm{Cl}_G(a) \to G'$ με $\varphi(g^{-1}ag) = [a, g]$ η οποία είναι 1-1, άρα έχουμε το ζητούμενο.

(β) Για κάθε μη τετριμμένη κλάση έχουμε ότι $p_0 \leq [G : C_G(a)| = |\mathrm{Cl}_G(a)|$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $Z(G) = \{1\}$, δηλαδή η μοναδική κλάση συζυγίας που είναι μονοσύνολο είναι αυτό του 1. Αν T ένα σύνολο αντιπροσώπων (που περιέχει το 1) έχουμε ότι

$$|G| = 1 + \sum_{x\in T\setminus\{1\}} |\mathrm{Cl}_G(x)| \geq 1 + (r-1)p_0.$$

Τώρα, αφού $p_0||G|$ και $|G| < rp_0$ έχουμε ότι $|G| \leq (r-1)p_0$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

(γ) Αφού G δεν είναι αβελιανή, υπάρχει κλάση συζυγίας που δεν είναι μονοσύνολο επομένως $|Z(G)| \leq r-1$. Έτσι ότι $|Z(G)| = r-1$ επομένως από το θεώρημα του Lagrange υπάρχει $k \geq 2$ τέτοιο ώστε $|G| = k(r-1)$. Αφού $|Z(G)| = r-1$ υπάρχει μοναδική κλάση συζυγίας $\mathrm{Cl}_G(x)$ που δεν είναι μονοσύνολο δηλαδή

$$|G| = |Z(G)| + |\mathrm{Cl}_G(x)| \Leftrightarrow k(r-1) = (r-1) + |G|/|C_G(x)| \Leftrightarrow |C_G(x)| = \frac{k}{k-1} \notin \mathbb{N}$$

αφού $k \neq 1$ συνεπώς καταλήγουμε σε άτοπο.

(δ) Αφού G δεν είναι αβελιανή από την Άσκηση 7 έχουμε ότι $|Z(G)| = 1$ ή $|Z(G)| = p$. Αν $Z(G) = \{1\}$, τότε αφού κάθε κλάση $\mathrm{Cl}_G(x)$ που δεν είναι μονοσύνολο ισχύει ότι $p||\mathrm{Cl}_G(x)|$, τότε αν T σύνολο αντιπροσώπων των κλάσων έχουμε ότι

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in T,\ \mathrm{Cl}_G(x) \neq \{x\}} |\mathrm{Cl}_G(x)| \Rightarrow p \,\Big|\, |G| - \sum_{x \in T,\ \mathrm{Cl}_G(x) \neq \{x\}} |\mathrm{Cl}_G(x)| = 1 \quad (2.1)$$

άτοπο. Άρα, έχουμε ότι $|Z(G)| = p$, δηλαδή $|G/Z(G)| = p^2$ αβελιανή. Από την Άσκηση 8 έχουμε ότι $G' \subseteq Z(G)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $|G'| = p$. Αφού G δεν είναι αβελιανή υπάρχει κλάση συζυγίας $\mathrm{Cl}_G(x)$ που δεν είναι μονοσύνολο επομένως από το (α)

$$|G'| \geq |\mathrm{Cl}_G(x)| \geq p$$

συνεπώς έχουμε ότι $|G'| = p$. Τώρα, αν T σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας έχουμε ότι $r = |T| = |Z(G)| + n = p + n$, όπου n είναι το πλήθος των κλάσεων με αντιπρόσωπους από το T που δεν είναι μονοσύνολα. Από (α) έχουμε ότι κάθε τέτοια κλάση έχει πλήθος p άρα από την σχέση 2.1 έχουμε ότι

$$p^3 = p + np \Rightarrow n = p^2 - 1.$$

Έτσι ισχύει ότι $r = p^2 + p - 1$.

■

33. Αν $G = \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \mathbb{Z}_p}_{n}$, όπου p πρώτος, τότε η ομάδα $\mathrm{Aut}(G)$ δρα μεταβατικά (με την φυσική δράση) στο σύνολο $G \setminus \{1_G\}$. Ισχύει το αντίστροφο ;

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάποιος $x \in G$ ισχύει ότι $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, για κάθε $y \in G$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in G$, υπάρχει $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ώστε $\varphi(x) = y$. Αν θεωρήσουμε την G ως $\mathbb{Z}_p$ - διανυσματικό χώρο (βλέπε Άσκηση 1.2), τότε έχει μια βάση $x_1, \dots, x_n$ η οποία μάλιστα αποτελεί και σύνολο γεννητόρων για την G. Αν $x = x_1 \cdots x_n$, αναζητούμε $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ώστε

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda^n}$$

αν υποθέσουμε ότι $y = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda^n}$, όπου για κάποιο k ισχύει $\lambda_k \neq 0$. Αφού $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, τότε αρκεί να βρούμε κατάλληλο πίνακα $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ που να αντιστοιχεί σε ένα φ που ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, όπου ορίζεται ως εξής :

$$a_{ii} = [\lambda_i] \text{ αν } \lambda_i \neq 0 \quad \text{και} \quad a_{jj} = [\lambda_k],\ a_{j,j+1} = -[\lambda^k] \text{ αν } \lambda_j = 0$$

και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0. Ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος και επάγει ένα $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ που ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση. ∎

Κεφάλαιο 3

Θεωρήματα Sylow

34. Έστω G πεπερασμένη p - ομάδα και H μεγιστική (γνήσια) υποομάδα της G. Τότε $H \lhd G$ και $[G:H] = p$.

Υπόδειξη. Αφού G είναι p - ομάδα και $H \lneqq G$, τότε ικανοποιείται η συνθήκη της κανονικοποιούσας, δηλαδή $H \lneqq N_G(H)$. Αφού H είναι μεγιστική, τότε $N_G(H) = G$. Από το θεώρημα Sylow και το θεώρημα αντιστοιχίας είναι άμεσο ότι $[G:H] = p$. ∎

35. Έστω G μια περιοδική ομάδα (δηλαδή κάθε στοιχείο είναι πεπερασμένης τάξης) και Π το σύνολο των πρώτων διαιρετών των τάξεων των στοιχείων της ομάδας. Αν για κάθε $p \in \Pi$ υπάρχει μοναδική Sylow p - υποομάδα G_p, τότε η G είναι το ευθύ γινόμενο των $G_p,\ p \in \Pi$.

Υπόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι κάθε G_p είναι κανονική. Έστω $g \in G$. Τότε, gG_pg^{-1} είναι μια p - ομάδα, οπότε περιέχεται σε μια Sylow p - υποομάδα της G. Έτσι έχουμε ότι $gG_pg^{-1} \subseteq G_p$. Λόγω της μεγιστικότητας της G_p έχουμε ότι $gG_pg^{-1} = G_p$. Τώρα, είναι σαφές ότι κάθε δύο Sylow G_p, G_q με $p \neq q$ έχουν τετριμμένη τομή. Αρκεί να δείξουμε ότι $G = \langle G_p \mid p \in \Pi \rangle$. Έστω $g \in G$. Έχουμε ότι $o(g) = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$. Έχουμε ότι $\langle g \rangle = \langle g_1 \rangle \cdot \langle g_2 \rangle \cdots \langle g_k \rangle$ όπου $g_i \in \langle g \rangle$ με $o(g_i) = p_i^{n_i}$. Έτσι έχουμε ότι $\langle g_i \rangle \subseteq G_{p_i}$ επομένως

$$g \in \langle g \rangle \subseteq G_{p_1} \cdots G_{p_k} \subseteq \langle G_p \mid p \in \Pi \rangle$$

∎

36. (α) Έστω G ομάδα, K πεπερασμένη κανονική υποομάδα της G και P Sylow p - υποομάδα της K. Δείξτε ότι $G = N_G(P)K$.

(β) Αν κάθε μεγιστική υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G είναι κανονική (στην G), τότε κάθε Sylow υποομάδα της G είναι κανονική.

Υπόδειξη. (α) Αφού $P \subseteq K$ και K είναι κανονική, τότε για κάθε $g \in G$ έχουμε ότι $gPg^{-1} \subseteq K$. Έστω $g \in G$. Τότε, gPg^{-1} είναι Sylow της K, επομένως υπάρχει $x \in K$ ώστε $gPg^{-1} = xPx^{-1}$, δηλαδή

$$g^{-1}x \in N_G(P) \Rightarrow g^{-1} \in N_G(P)K \Rightarrow g \in N_G(P)K.$$

(β) Έστω P Sylow p - υποομάδα της G. Έστω, προς άτοπο, ότι $N_G(P) \subsetneq G$, δηλαδή υπάρχει μεγιστική υποομάδα M της G ώστε

$$P \subseteq N_G(P) \subseteq M \subsetneq G.$$

Από αρχική υπόθεση M είναι κανονική, άρα για κάθε $g \in G$ ισχύει $gPg^{-1} \subseteq M$, δηλαδή $gPg^{-1} \in \mathrm{Syl}_p(M)$, για κάθε $g \in G$. Έστω $g \in G$. Τότε, υπάρχει $x \in M$ ώστε $gPg^{-1} = xPx^{-1}$, δηλαδή $x^{-1}g \in N_G(P) \subseteq M$. Άρα, $g \in M$ και αφού g ήταν τυχόν καταλήγουμε σε άτοπο.

∎

37. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και P μια Sylow p - υποομάδα της G.

(α) Αν $N_G(P) \leq H \leq G$, τότε $[G : H] \equiv 1 \mod p$.

(β) Αν $K \lhd G$, τότε $K \cap P$ Sylow p - υποομάδα της K και PK/K Sylow p - υποομάδα της G/K.

(γ) Αν $K \lhd G$, τότε $n_p(G/K) \leq n_p(G)$, όπου n_p συμβολίζει τον αριθμό των Sylow p - υποομάδων.

Υπόδειξη. (α) Έστω T σύνολο αντιπροσώπων της G/K. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi: T \to \mathrm{Syl}_p(G), \quad xH \mapsto xPx^{-1}.$$

Η φ είναι επί και 1-1 αφού για $xPx^{-1} = x'Px^{-1} \Rightarrow x^{-1}x' \in N_G(P) \subseteq H$. Άρα, έχουμε ότι

$$[G : H] = |T| = n_p(G) \equiv 1 \mod p.$$

(β) Έστω Q μια Sylow p - υποομάδα της K. Τότε,για κάποιο $g \in G$ αυτή γράφεται στη μορφή

$$Q = K \cap \left(gPg^{-1}\right) = g\left(K \cap P\right)g^{-1} \Rightarrow |Q| = |K \cap P|.$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα, $|PK/K| = |P : K \cap P|$, άρα PK/K είναι μια p - υποομάδα της G/K με

$$p \nmid \ |G/K : PK/K| = |G : PK| \ ,$$

άρα Sylow p - υποομάδα της G/K.

(γ) Αν Q μια Sylow p - υποομάδα της G/K, τότε από (β) θα είναι της μορφής

$$Q = gK\left(PK/K\right)g^{-1}K = (gPKg^{-1})/K = \left(gPg^{-1}\right)K/K$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω της κανονικότητας της K. Άρα, κάθε Sylow p - υποομάδα της G/K είναι της μορφής $P'K/K$, όπου P' μια Sylow p - υποομάδα της G. Έτσι είναι σαφές ότι $n_p(G/K) \leq n_p(G)$.

■

38. Έστω D_n η διεδρική ομάδα τάξεως $2n$. Δείξτε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε όλες οι Sylow υποομάδες της D_n είναι κυκλικές. Ισχύει το συμπέρασμα αν το n είναι άρτιος ;

Υπόδειξη. Έστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ περιττός. Αν R_n η ομάδα στροφών της D_n γνωρίζουμε ότι είναι κυκλική τάξεως n. Αν $P \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, τότε είναι συζυγής με Sylow - p_i υποομάδα της R_n, δηλαδή $P = x\langle g\rangle x^{-1} = \langle xgx^{-1}\rangle$.

Αν $n = 4$, τότε $|D_4| = 2^3$, όμως δεν είναι κυκλική, αφού D_4 δεν είναι αβελιανή. ■

39. Έστω $P_1, \ldots, P_m$ οι Sylow p υποομάδες μια πεπερασμένης ομάδας G και S_P η ομάδα μεταθέσεων του συνόλου $\{P_1, \ldots, P_m\}$. Ορίζουμε απεικόνιση $\varphi : G \to S_P$, έτσι ώστε $\varphi(g)$ να είναι η μετάθεση $P_i \mapsto gP_ig^{-1}$.

(α) Δείξτε ότι η φ είναι ομομορφισμός και βρείτε τον πυρήνα της.

(β) Δείξτε ότι η διεδρική D_n είναι ισόμορφη με υποομάδα της S_n, αν ο n είναι περιττός.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο ότι η φ είναι ομομορφισμός. Δείξτε ότι $\ker\varphi = \bigcap_{i=1}^{m} N_G(P_i)$.

(β) Έστω $P = \langle a\rangle$ μια Sylow 2 - υποομάδα της D_n. Θεωρούμε την δράση της D_n στα σύμπλοκα της D_n/P η οποία επάγει ομομορφισμό $\varphi\colon D_n \to S_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\ker\varphi = 1$. Γνωρίζουμε ότι $\ker\varphi \subseteq P$ και μάλιστα

$$\ker\varphi = \bigcap_{g\in D_n} g^{-1}Pg = \bigcap_{g\in D_n} \langle g^{-1}ag\rangle.$$

Αν $\ker\varphi \neq 1$, τότε υπάρχει $h \in \ker\varphi$ με $h = g^{-1}ag = a$, για κάθε $g \in D_n$. Άρα, $P \subseteq Z(D_n)$. Αν $\mathrm{Rot}_n = \langle r\rangle$, τότε αφού $D_n = \langle r, a\rangle$, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι D_n είναι αβελιανή και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, $\ker\varphi = 1$ και έχουμε το ζητούμενο.

■

40. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα με τάξη $|G| = 2n$, όπου n περιττός. Τότε υπάρχει κανονική υποομάδα N της G με $|N| = n$. Ιδιαιτέρως, η G δεν είναι απλή.

Υπόδειξη. Έστω ότι $n = p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_k}$. Τότε, υπάρχουν $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ και προκύπτει ότι $|N| = n$, όπου $N = P_1\cdots P_k$. Θεωρούμε την δράση της G στα σύμπλοκα της G/N. Τότε επάγεται μονομορφισμός $G/K \hookrightarrow S_2$, όπου $K \subseteq N$ ο πυρήνας του αντίστοιχου ομομορφισμού που επάγει η δράση. Επομένως $|G/K| = 1$ ή 2 και αφού $N \neq G$, τότε $G/K = 2$ και $N = K$, δηλαδή $N \lhd G$. ■

41. Αν η G είναι πεπερασμένη ομάδα τάξεως pq, όπου p και q πρώτοι με $p \le q$, τότε η G έχει κανονική υποομάδα τάξεως q (άρα κυκλική). Ιδιαιτέρως, η G δεν είναι απλή.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $n_q \equiv 1 \mod q$ και $n_q | p$. Αν $n_q = p$, τότε $q | p-1$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς $n_q = 1$, άρα η G έχει μοναδική κανονική Sylow q - υποομάδα. ■

42. Ταξινομήστε τις ομάδες τάξεως $2p$, όπου p περιττός πρώτος.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι οι μοναδικές (ως προς ισομορφισμό) ομάδες τάξεως $2p$ είναι οι $\mathbb{Z}_{2p}$ και D_p (διεδρική τάξεως $2p$). ■

43. Μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως p^2q, όπου p και q πρώτοι, δεν είναι απλή.

Υπόδειξη. Έστω G ομάδα με τάξη $|G| = p^2 q$, όπου p και q πρώτοι.

- Προφανώς, αν $p = q$, τότε η G δεν είναι απλή, αφού έχει μη τετριμμένο κέντρο.
- Διαφορετικά, αν $q < p$ το ζητούμενο αποδεικνύεται όμοια με την Άσκηση 3.5.
- Αν $p < q$ έχουμε ότι $n_p = 1$ ή q. Αν $n_p = 1$, τότε έχουμε το ζητούμενο. Αν $n_p = q$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις :
  - (α) Αν κάθε δύο Sylow p έχουμε τετριμμένη τομή, τότε έχουμε $q(p^2-1)$ στοιχεία με τάξη δύναμη του p, άρα υπάρχει μοναδική Sylow q - υποομάδα της G.
  - (β) Αν υπάρχουν διαφορετικές P, Q Sylow p - υποομάδες της G με $P \cap Q \neq \{1\}$, τότε ισχύει ότι $P, Q \subsetneq N_G(P \cap Q)$, άρα $G = N_G(P \cap Q)$, συνεπώς η $P \cap Q$ είναι κανονική στην G.

■

44. Αν η G είναι απλή ομάδα τάξεως 60, τότε $G \cong A_5$.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Αν n_p το πλήθος των Sylow p - υποομάδων της G, κατά τα γνωστά, έχουμε ότι $n_5 = 6$ και $n_3 = 4$ ή 10. Άρα, το πλήθος των στοιχείων τάξης 5 είναι ίσο με $6 \cdot (5-1) = 24$ και το πλήθος των στοιχείων τάξης 3 είναι μεταξύ του $4 \cdot (3-1) = 12$ και $10 \cdot (3-1) = 20$. Άρα, το πλήθος των στοιχείων τάξεως 3 ή 5 είναι μεταξύ 36 και 44. Τώρα, αφού G είναι απλή και από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $n_2 = 15$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν κάθε δύο διαφορετικές Sylow 2- υποομάδες της G έχουν τετριμμένη τομή, τότε υπάρχουν $(2^2 - 1) \cdot 15 = 45$ στοιχεία τάξεως 2 ή 2^2 και από την παραπάνω παρατήρηση καταλήγουμε σε άτοπο.
- Άρα, υπάρχουν $P, Q \in \mathrm{Syl}_2(G)$ με $P \neq Q$ και $1 \neq P \cap Q$. Τότε, έχουμε ότι αν $N = N_G(P \cap Q)$, τότε $P, Q \subsetneq N$ (αφού P, Q είναι αβελιανές και διαφορετικές μεταξύ τους). Άρα, έχουμε ότι $|N| = 2^2 \cdot 5$ ή $|N| = 2^2 \cdot 3$ ή $|N| = |G|$
  - (α) Αν $|N| = 2^2 \cdot 3$, τότε $[G : N] = 3$, και από την δράση της G στα σύμπλοκα της G/N επάγεται ομομορφισμός $\varphi\colon G \to S_3$ με $\ker\varphi \lhd G$ και $\ker\varphi \subseteq N$. Επομένως, έχουμε ότι $\ker\varphi = \{1\}$ και $G \hookrightarrow S_3$, άτοπο.
  - (β) Αν $|N| = |G|$, τότε $N = G$, επομένως $1 \neq P \cap Q \lhd G$, άτοπο.

(γ) Άρα, η μοναδική πιθανή περίπτωση είναι $|N| = 3^2{\cdot}2$. Θεωρούμε την δράση της G στα σύμπλοκα της G/N. Τότε, επάγεται ομομορφισμός $\varphi\colon G \to S_5$. Αφού $\ker\varphi \trianglelefteq G$ και $\ker\varphi \subseteq N$, τότε $\ker\varphi = \{1\}$, άρα $G \hookrightarrow S_5$. Αφού, η μοναδική απλή υποομάδα τάξεως 60 της S_5 είναι η A_5 έχουμε ότι $G \cong \mathrm{Im}\varphi = A_5$.

■

45. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξεως 90, 132, 144, 150.

Υπόδειξη. 1. Έστω G απλή ομάδα τάξεως $|G| = 90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$. Με γνωστούς υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι $n_5 = 6$ και $n_3 = 10$. Άρα, $(5-1)\cdot 6 = 24$ στοιχεία τάξεως 5. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν κάθε δύο διαφορετικές Sylow 3 - υποομάδες της G έχουν τετριμμένη τομή, τότε υπάρχουν $10\cdot(3^2-1) = 80$ στοιχεία τάξεως 3 ή 3^2, όπου καταλήγουμε σε άτοπο από την αρχική υπόθεση.
- Έστω ότι υπάρχουν $P, Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$ με $P \neq Q$ και $1 \neq P\cap Q$. Τότε, έχουμε ότι αν $N = N_G(P\cap Q)$, τότε $P, Q \subsetneqq N$ (αφού P, Q είναι αβελιανές και διαφορετικές μεταξύ τους). Άρα, έχουμε ότι $|N| = 3^2\cdot 5$ ή $|N| = 3^2\cdot 2$ ή $|N| = |G|$

  (α) Αν $|N| = 3^2\cdot 5$, τότε $[G:N] = 2$, άρα έχουμε ότι $1 \neq N$ είναι κανονική στην G, άτοπο.

  (β) $|N| = 3^2\cdot 2$, τότε ομοίως με την παραπάνω άσκηση, η G εμφυτεύεται στην S_5, ενώ $|G| = 90 \not\mid 5!$, άτοπο.

  (γ) Αν $|N| = |G|$, τότε $N = G$ και $1 \neq P\cap Q$ κανονική στην G, άτοπο.

2. Έστω ότι υπάρχει απλή ομάδα G με $|G| = 132 = 2^2\cdot 3\cdot 11$. Με τους συνήθεις υπολογισμούς ισχύει ότι $n_{11} = 12$, δηλαδή υπάρχουν $12\cdot(11-1) = 120$ στοιχεία τάξεως 11. Τώρα, αφού G είναι απλή, έχουμε ότι $n_3 = 4$ ή 22. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

   - Αν $n_3 = 4$, υπάρχουν $4\cdot(3-1) = 8$ στοιχεία τάξεως 3. Άρα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική Sylow 2 - υποομάδα της G, δηλαδή κανονική, άτοπο.
   - Αν $n_3 = 22$, υπάρχουν $22\cdot(3-1) = 44$ στοιχεία τάξεως 3. Άρα, το πλήθος των στοιχείως τάξης 3 ή 11 ισούται με $44 + 120 = 165 > |G|$, άτοπο.

3. Έστω ότι υπάρχει απλή ομάδα G με $|G| = 144 = 2^4\cdot 3^2$. Έχουμε ότι $n_3 = 4$ ή 16. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Έστω ότι $n_3 = 4$. Αν $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$, τότε έχουμε ότι $n_3 = [G : N_G(P)]$, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι G εμφυτεύται στην S_4 (γιατί ;), άτοπο.
- Αν $n_3 = 16$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :
  (α) Αν κάθε δύο Sylow 3- υποομάδες έχουν τετριμμένη τομή, τότε υπάρχουν $16 \cdot (3^2 - 1) = 128$, δηλαδή υπάρχει μοναδική Sylow 2 - υποομάδα της G, άτοπο.
  (β) Έστω ότι υπάρχουν $P, Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$ με $P \neq Q$ και $1 \neq P \cap Q$. Τότε, έχουμε ότι αν $N = N_G(P \cap Q)$, τότε $P, Q \subsetneq N$ (αφού P, Q είναι αβελιανές και διαφορετικές μεταξύ τους). Άρα, έχουμε ότι $|N| = 3^2 \cdot 2^i$ με $i = 1, \ldots, 4$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :
    (α) Αν $|N| = 3^2 \cdot 2$, τότε $[N : P] = [N : Q] = 2$, δηλαδή P, Q κανονικές στην N. Αφού P, Q είναι Sylow 3 - υποομάδες τις N και μάλιστα κανονικές, έχουμε ότι $P = Q$, άτοπο.
    (β) Αν $|N| = 3^2 \cdot 2^2$, τότε $G \hookrightarrow S_4$ (γιατί ;), άτοπο.
    (γ) Αν $|N| = 3^2 \cdot 2^3$, τότε $[G : N] = 2$, συνεπώς $1 \neq N$ κανονική στην G, άτοπο.
    (δ) Αν $|N| = 3^2 \cdot 2^4$, τότε $N = G$ επομένως $1 \neq P \cap Q$ είναι κανονική στην G, άτοπο.

4. Ομοίως με τα προηγούμενα.

■

Σκοπός των επόμενων ασκήσεων είναι να δώσουν μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος του Sylow.

46. Έστω $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p πρώτος, το σώμα με p στοιχεία, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ η ομάδα των αντιστρεψίμων $n \times n$ πινάκων επί του $\mathbb{F}_p$ και $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ η υποομάδα της που αποτελείται από εκείνους τους πίνακες των οποίων τα στοιχεία κάτω της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν και κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου είναι ίσο με 1. Δηλαδή, κάθε πίνακας στην $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι η $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ είναι Sylow p - υποομάδα της $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ αν και μόνο αν A έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, και από το γεγονός αυτό έχουμε ότι

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p)\cdots\left(p^n - p^{n-1}\right) = p \cdot p^2 \cdots p^{n-1} \cdot m = p^{n(n-1)/2}m$$

με $(p^{n(n-1)/2}, m) = 1$. Τώρα, είναι σαφές ότι $|\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)| = p \cdot p^2 \cdots p^{n-1} = p^{n(n-1)/2}$, δηλαδή η $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ είναι Sylow p - υποομάδα της $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. ■

47. Έστω H μια Sylow p - υποομάδα μια πεπερασμένης ομάδας G και K μια υποομάδα της G της οποίας η τάξη είναι πολλαπλάσιο του p. Δείξτε ότι υπάρχει x της G έτσι ώστε η $K \cap xHx^{-1}$ είναι Sylow p - υποομάδα της K.

Υπόδειξη. Έστω P μια Sylow p - υποομάδα μια πεπερασμένης ομάδας K. Τότε, ως p - ομάδα της G περιέχεται σε κάποια Sylow p - υποομάδα της G, δηλαδή υπάρχει $x \in G$ ώστε $P \subseteq xHx^{-1}$. Επομένως, $P \subseteq K \cap xHx^{-1}$, όπου $K \cap xHx^{-1}$ μια p - ομάδα της K. Άρα, έχουμε ότι $P = K \cap xHx^{-1}$. ■

48. Έστω G ομάδα τάξεως $p^k m$, όπου p πρώτος που δεν διαιρεί το m. Τότε, υπάρχει τουλάχιστον μια Sylow p - υποομάδα της G.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η G εμφυτεύεται στην $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ μέσω μιας φ, όπου $n = |G|$. Άρα, υπάρχει υποομάδα H της $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ με τάξη πολλαπλάσιο του p. Από την Άσκηση 3.11, 3.12 έχουμε ότι υπάρχει $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ώστε $P = H \cap A\left(\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)\right)A^{-1} \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Επομένως, έχουμε ότι $\varphi^{-1}(P) \in \mathrm{Syl}_p(G)$. ■

Κεφάλαιο 4

Ευθέα γινόμενα

49. (α) Έστω a, b δύο στοιχεία πεπερασμένης τάξης μιας ομάδας G. Αν τα a, b μετατίθενται και οι τάξεις $o(a)$ και $o(b)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$.

(β) Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα F^* ενός πεπερασμένου σώματος F είναι κυκλική.

Υπόδειξη. (α) Έστω $o(a) = m,\ o(b) = n$ και $o(ab) = k$. Τότε, $(ab)^{mn} = a^{mn}b^{mn} = 1$, άρα $k|mn$. Αρκεί να δείξουμε ότι $mn|k$ και αφού $(m,n) = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι $m|k$ και $n|k$. Έχουμε ότι

$$(ab)^k = a^k b^k = 1 \Rightarrow a^k = b^{-k}.$$

Αφού

$$o\left(a^k\right) = o\left(b^{-k}\right)|n \quad \text{και} \quad o\left(a^k\right)|m \quad \Rightarrow o\left(a^k\right) = 1$$

Άρα, έχουμε ότι $a^k = b^{-k} = 1$ και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $|F^*| = p^n - 1 = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, όπου p_i διακεκριμένοι πρώτοι. Από το θεμελιώδες θεώρημα δομής αβελιανών ομάδων έχουμε ότι

$$F^* \cong A_1 \times \cdots \times A_k$$

όπου $|A_i| = p_i^{a_i}$ και κάθε $A \in \{A_1, \ldots, A_k\}$ είναι της μορφής

$$A = \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_t}}$$

με $\beta_1 + \cdots + \beta_t = a$. Αν υποθέσουμε προς άτοπο, ότι υπάρχει τέτοια A με κάποιο $\beta_i < a$, τότε από (α), κάθε στοιχείο της F^* θα έχει τάξη που διαιρεί ένα $\ell < p^n - 1$. Τότε το πολυώνυμο $x^\ell - 1$ θα έχει $p^n - 1 > \ell$ ρίζες, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα,

$$F^* \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}} \cong \mathbb{Z}_{p^n - 1}.$$

■

50. (α) Αν $M \lhd G$ και $N \lhd K$ δείξτε ότι $M \times N \lhd G \times K$ και $(G \times K)/(M \times N) \cong G/M \times K/N$. Γενικεύστε για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων.

(β) Δείξτε ότι αν $H, K \lhd G$ και $G = HK$, τότε $G/(H \cap K) \cong (H/H \cap K) \times (K/H \cap K)$.

(γ) Αν αν $H, K \lhd G$ δείξτε ότι η $G/(H \cap K)$ είναι ισόμορφη με υποομάδα της $G/H \times G/K$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi: G \times K \to G/M \times K/N$ με $\varphi(g, k) = (gM, kN)$. Η φ είναι επιμορφισμός, με $\ker \varphi = M \times N \lhd G \times K$, άρα από 1ο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο.

(β) Άμεσο από τον ορισμό του ευθέως γινομένου.

(γ) Θεωρήστε την απεικόνιση $\varphi: G/(H \times K) \to G/K \times G/H$ με $\varphi(gH \cap K) = (gH, gK)$ και δείξτε ότι είναι μονομορφισμός ομάδων.

■

51. Έστω $G = H_1 \times \cdot \times H_n$. Δείξτε ότι $Z(G) = Z(H_1) \times \cdots \times Z(G_n)$.

Υπόδειξη. Ενδεικτικά θα αποδειχθεί η μία σχέση περιέχεσθαι. Έστω $g = (g_1, \ldots, g_n) \in Z(G)$ και $x_i \in H_i$. Τότε, έχουμε ότι

$$(g_1, \ldots, g_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (g_1, \ldots, g_n) \Leftrightarrow (g_1 x_1, \ldots, g_n x_n) \cdot (x_1 g_1, \ldots, x_n g_n).$$

Έστω είναι σαφές ότι $g_i x_i = x_i g_i$, για κάθε i και $x_i \in H_i$ τυχόν. Άρα, έχουμε ότι $g_i \in Z(G_i)$. ■

52. Αν η G είναι πεπερασμένη αβελιανή και $|G| = n$, τότε για κάθε διαιρέτη m του n η G περιέχει υποομάδα τάξεως m.

Υπόδειξη. Έστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ (p_i είναι διακεκριμένοι πρώτοι). Η G γράφεται ως ευθύ άθροισμα των Sylow - υποομάδων της $G = P_1 \times \cdots \times P_n$, όπου κάθε τέτοιος παράγοντας P_i είναι της μορφής $\mathbb{Z}_{p_i^{b_1}} \times \cdots \mathbb{Z}_{p_i^{b_t}}$ με $b_1 + \cdots + b_t = a_i$. Έστω $m|n$, δηλαδή $m = p_1^{c_1} \cdots p_n^{c_n}$ με $c_i \le a_i$. Για κάθε i, υπάρχει υποομάδα Q_i της P_i τάξεως $p_i^{c_i}$ (γιατί ;). Τότε, $H = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ είναι υποομάδα της G τάξεως m. ■

53. (α) Πόσες αβελιανές ομάδες υπάρχουν (ως προς ισομορφισμό) τάξεως 231 ή 432 ;

(β) Θεωρώντας δεδομένο ότι υπάρχουν 14 (ως προς ισομορφισμό) ομάδες τάξεως 81, βρείτε το πλήθος των ομάδων (ως προς ισομορφισμό) τάξεως 891.

Υπόδειξη. Έστω G αβελιανή με τάξη $n = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$. Τότε, Η G γράφεται ως ευθύ άθροισμα των Sylow - υποομάδων της $G = P_1 \times \cdots \times P_n$, όπου κάθε τέτοιος παράγοντας P_i είναι της μορφής $\mathbb{Z}_{p_i^{b_1}} \times \cdots \mathbb{Z}_{p_i^{b_t}}$ με $b_1 + \cdots + b_t = a_i$.

(α)
- Έστω G αβελιανή τάξης $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Άρα, υπάρχει μοναδική τέτοια G η $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{11}$.
- Έστω G αβελιανή τάξης $432 = 2^4 \cdot 3^3$. Από την αρχική παρατήρηση, αφού υπάρχουν 14 μη ισόμορφες αβελιανές τάξεως 2^4 και 4 μη ισόμορφες αβελιανές τάξης 3^3, τότε υπάρχουν $14 \cdot 4 = 56$ μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 432.

(β) Έστω G αβελιανή ομάδα τάξης $891 = 81 \cdot 11$. Από την αρχική παρατήρηση και την υπόθεση, υπάρχουν $14 \cdot 1 = 14$ μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 891.

■

Υπόδειξη. ■

54. (α) Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων πεπερασμένης τάξης μιας αβελιανής ομάδας G, είναι υποομάδα της G, συμβ. $T(G)$, και κάθε (μη τετριμμένη) στοιχείο της $G/T(G)$ είναι απείρου τάξης.

(β) Έστω G και H αβελιανές ομάδες. Τότε, $T(G) \cong T(H)$ και $G/T(G) \cong H/T(H)$.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο με εφαρμογή των ορισμών, αφού για κάθε $a, b \in G$ ισχύει $(ab)^n = a^n b^n$.

(β) Αφού $G \cong H$, τότε υπάρχει ισομορφισμός $\varphi: G \to H$. Δείξτε ότι ο περιορισμός της φ στο $T(G)$ είναι ένας ισομορφισμός από το $T(G) \to T(H)$. Τώρα, έστω $\pi: H \to H/T(H)$ η φυσική προβολή. Η σύνθεση $\psi = \pi \circ \varphi: G \to H/T(H)$ είναι επιμορφισμός ομάδων. με $\ker \psi = T(G)$. Από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο.

■

55. Για μια αβελιανή ομάδα Γ και κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε (χρησιμοποιώντας προσθετικό συμβολισμό) $nG = \{ng \mid g \in G\}$ και $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$. Δείξτε τα εξής :

(α) nG και $G[n]$ είναι υποομάδες της G.

(β) Αν G και H είναι αβελιανές, τότε $n(G \times H) \cong nG \times nH$ και $(G \times H)[n] = G[n] \times H[n]$.

(γ) $n\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k$, όπου $k = \frac{m}{(m,n)}$ και $\mathbb{Z}_m[n] = \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

(δ) Αν G πεπερασμένη αβελιανή και q πρώτος που δεν διαιρεί την τάξη της $|G|$, τότε $qG = G$.

(ε) Αν G πεπερασμένη αβελιανή p ομάδα, τότε $G[p]$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Z}_p$ πεπερασμένης διάστασης.

(στ) Αν $G = \mathbb{Z}_{p^{m_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{m_r}}$, όπου p πρώτος, τότε $pG = \mathbb{Z}_{p^{m_1-1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{m_r-1}}$.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο.

(β) Άμεσο.

(γ) Έχουμε ότι $k(n[1]) = [kn] = 0$. Άρα, $o([n])|k$. Τώρα, έστω λ, τέτοιο ώστε $\lambda[n] = [\lambda n] = 0$, δηλαδή $m|\lambda n$. Επομένως, υπάρχει μ ώστε $\lambda n = \mu m \Rightarrow \lambda n = xk$. Αφού $(n,k) = 1$, τότε $k|\lambda$, άρα $k \leq \lambda$. Άρα, έχουμε ότι $n\mathbb{Z}_m = \langle n[1] \rangle$ κυκλική τάξης k. Τώρα, είναι σαφές ότι $[k] \in \mathbb{Z}_m[n]$ και δείξτε ότι αν $[x] \in \mathbb{Z}_m[n]$, τότε $k|x$, δηλαδή $\mathbb{Z}_m[n] = \langle [k] \rangle$. Τώρα, αφού $o([k]) = (m,n)$ έχουμε το ζητούμενο.

(δ) Έστω $g \in G$. Αφού $(q, |G|) = 1$, τότε υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $1 = xq + y|G|$. Άρα, έχουμε ότι $g = q(xg) \in qG$.

(ε) Το $G[p]$ είναι μια αβελιανή ομάδα ως προς $(+)$. Θεωρούμε δράση της $\mathbb{Z}_p$ στο $G[p]$ ώς εξής $([x], g) \mapsto x \cdot g$. Η δράση αυτή είναι καλά ορισμένη αφού για $[x] = [y]$, τότε $p|x - y$ επομένως αν $g \in G[p]$ έχουμε ότι $(x - y)g = 0$, άρα $[x] \cdot g = [y] \cdot g$. Είναι άμεσο ότι με τον παραπάνω βαθμωτό πολλαπλασιασμό είναι άμεσο ότι το $G[p]$ αποκτά δομής $\mathbb{Z}_p$ διανυσματικού χώρου.

(στ) Έχουμε από το (β) ότι

$$pG = p\mathbb{Z}_{p^{m_1}} \times \cdots \times p\mathbb{Z}_{p^{m_r}}.$$

Από το (γ) είναι άμεσο ότι $p\mathbb{Z}_{p^{m_i}} \cong \mathbb{Z}_{p^{m_i - 1}}$, άρα έχουμε το ζητούμενο.

∎

Κεφάλαιο 5

Ημιευθέα Γινόμενα

56. Μια κυκλική ομάδα τάξεως p^2, όπου p πρώτος, δεν αναλύεται ως ημιευθύ γινόμενο.

Υπόδειξη. Έστω G κυκλική ομάδα τάξεως p^2. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχουν μη τετριμμένες $N, H \neq G$ κυκλικές υποομάδες (αφού G είναι κυκλική) ώστε $G = N \rtimes H$. Τότε γνωρίζουμε ότι N, H είναι κυκλικές τάξεως p και μάλιστα, αφού υπάρχει μοναδική υποομάδα της G τάξεως p, τότε $H = N$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $G = N \rtimes K$, άρα $H \cap N = \{1\}$. ∎

57. Κάθε ομάδα G τάξεως pq, όπου p, q πρώτοι διαφορετικοί μεταξύ τους, είναι ημιευθύ γινόμενο κυκλικών υποομάδων p και q, αντίστοιχα.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $p < q$. Τότε, αν n_q το πλήθος των Sylow q - υποομάδων της G, τότε $n_q | q$, άρα $n_q = 1$ ή p και $n_q \equiv 1 \mod q$. Αφού $p < q$ είναι σαφές ότι $n_q = 1$, άρα υπάρχει Q μοναδική και κανονική Sylow q - υποομάδα της G (προφανώς κυκλική τάξεως q). Αν $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (κυκλική τάξεως p) , τότε $P \cap Q = \{1\}$. Επομένως, $|QP| = |Q| \cdot |P| / |P \cap Q| = pq = |G|$, άρα $G = QP$. Άρα, η G είναι ημιευθύ γινόμενο κυκλικών υποομάδων p και q, αντίστοιχα. ∎

58. Αν $G = N \rtimes H$, τότε $G/N \cong H$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον ομομορφισμό $\varphi : G/N \to H$, όπου $nhN \mapsto h$. ∎

59. Η ομάδα $G = N \rtimes_\varphi H$ δεν είναι αβελιανή, αν ο φ δεν είναι ο τετριμμένος.

Υπόδειξη. Αν φ δεν είναι ο τετριμμένος, τότε υπάρχει $h \in H$ ώστε $\varphi(h) \neq \mathrm{id}_H$. Δηλαδή, υπάρχει $n \in N$ ώστε $\varphi(h)(n) \neq n$. Δείξτε ότι $(n,1)\cdot(1,h) \neq (1,h)\cdot(n,1)$. ∎

60. Η ομάδα $G = N \rtimes_\varphi H$, τότε ο πυρήνας $\ker\varphi$ αποτελείται από τα στοιχεία της $\tilde{H}$ που μετατίθενται με κάθε στοιχείο της υποομάδας $\tilde{N}$. Δηλαδή, $(1, \ker\varphi) = C_{\tilde{H}}(\tilde{N})$.

Υπόδειξη. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα με εφαρμογή των ορισμών. ∎

61. Κάθε ομάδα G, η οποια αναλύεται ως ημιευθύ γινόμενο $G = N \rtimes_\varphi H$, όπου N, H κυκλικές με τάξεις 10 και 3 αντίστοιχα, είναι κυκλική.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι φ είναι ο τετριμμένος, καθώς τότε

$$G = N \rtimes_\varphi H = N \times H \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{30}.$$

Έχουμε ότι

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{10}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_4.$$

Τότε, $\varphi\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{10}) = \mathbb{Z}_4$. Αν $\ker\varphi \neq \mathbb{Z}_3$, τότε $\ker(\varphi) = 1$, δηλαδή $\mathbb{Z}_3 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς $\ker\varphi = \mathbb{Z}_3$, δηλαδή φ είναι τετριμμένος. ∎

62. Για κάθε πρώτο p κατασκευάστε μη - αβελιανή ομάδα τάξεως p^3.

Υπόδειξη. Έστω $N = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\varphi\colon N \to N, \quad \varphi\left(a^k b^s\right) = a^k b^{k+s},\ 0 \leq k,\ s < p$$

η οποία είναι αυτομορισφισμός. Για κάθε $n = 0, \ldots, p-1$ έχουμε ότι $\varphi^n\left(a^k b^s\right) = a^k b^{nk+s}$ είναι αυτομορφισμός, όπου φ έχει τάξη p. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\psi\colon \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}(N), \quad [a] \mapsto \varphi^a$$

η οποία είναι ένας μη τετριμμένος ομομορφισμός ομάδων. Έτσι ορίζεται το ημιευθύ γινόμενο $G = N \rtimes_\psi \mathbb{Z}_p$ το οποίο από την Άσκηση 59 είναι μια μη αβελιανή ομάδα τάξεως p^3. ∎

63. Έστω K, H δύο ομάδες και $\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$ και $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\psi\colon H \rtimes_{\varphi\circ\sigma} K \to H \rtimes_{\varphi} K$ με $\psi(h,k) = (h, \sigma(k))$, είναι ισομορφισμός ομάδων.

Υπόδειξη. Η ψ είναι ομομορφισμός. Πράγματι, αν $(h_1,k_1),(h_2,k_2) \in H \rtimes_{\varphi\circ\sigma} K$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\psi\left((h_1,k_1)\cdot(h_2,k_2)\right) = \psi(h_1\varphi\circ\sigma(k_1)(h_2), k_1k_2)\\
=\ &(h_2\varphi(\sigma(k_1)(h_2), \sigma(k_1k_2))\\
=\ &(h_2\varphi(\sigma(k_1)(h_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2))\\
=\ &\psi(h_1,k_1)\cdot\psi(h_2\cdot k_2)
\end{aligned}$$

Τώρα, είναι άμεσο ότι ψ είναι 1-1 και επί. ■

64. Έστω K κυκλική ομάδα, H τυχαία ομάδα και $\varphi_1, \varphi_2\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$ ομομορφισμοί έτσι ώστε $\varphi_1(K)$ και $\varphi_2(K)$ είναι συζυγείς υποομάδες της $\mathrm{Aut}(H)$. Αν η K είναι άπειρη υποθέτουμε επιπλέον ότι οι ομομορφισμοί φ_1, φ_2 είναι 1-1. Να δειχθεί ότι $H \rtimes_{\varphi_1} K \cong H \rtimes_{\varphi_2} K$.

Υπόδειξη. ■

65. Έστω p και q πρώτοι με $p > q$.

(α) Αν $p \not\equiv 1 \mod q$, τότε κάθε ομάδα τάξεως pq είναι κυκλική.

(β) Αν $p \equiv 1 \mod q$, υπάρχουν δύο (ως προς ισομορφισμό) ομάδες τάξεως pq : η κυκλική $\mathbb{Z}_{pq}$ και μια μη αβελιανή $\mathbb{Z}_p \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_q$.

Υπόδειξη. Αρχικά, έστω n_p το πλήθος των Sylow p - υποομάδων της G. Τότε, $n_p|q$, δηλαδή $n_p = 1$ ή q και $n_p \equiv 1 \mod p$. Τότε, είναι σαφές ότι $n_p = 1$, δηλαδή υπάρχει μοναδική Sylow p - υποομάδα της G, έστω P (κυκλική τάξεως p).

(α) Έχουμε ότι $n_q|p$ και $n_q \equiv 1 \mod q$. Αφού $p \not\equiv 1 \mod q$, τότε είναι σαφές ότι $n_q = 1$, οπότε αν Q η μοναδική Sylow p - υποομάδα της G, τότε αυτή είναι κανονική. Επομένως, $G = P \times Q \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

(β) Αν $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, τότε $G = P \rtimes Q \cong \mathbb{Z}_p \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_q$.

- Αν φ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός, τότε $\mathbb{Z}_p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_q$ είναι το αντίστοιχο ευθύ γινόμενο, δηλαδή η κυκλική τάξεως pq.
- Αν $\varphi\colon \mathbb{Z}_q \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p-1}$ είναι μη τετριμμένος, τότε $\ker\varphi \neq \mathbb{Z}_q$, άρα $\ker(\varphi) = 1$, δηλαδή $\mathrm{im}\varphi$ είναι η μοναδική κυκλική υποομάδα της $\mathbb{Z}_{p-1}$ (αυτή υπάρχει γιατί $q|p-1$). Τώρα, αν $a \in \mathbb{Z}_q$ και $b \in \mathbb{Z}_{p-1}$ γεννήτορες, ορίζουμε $\varphi\colon \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_{p-1}$ $\varphi(a) = b^{\frac{p-1}{q}}$. Αφού φ δεν είναι ο τετριμμένος, τότε $\mathbb{Z}_p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_q$ δεν είναι αβελιανή και από την παραπάνω παρατήρηση και την Άσκηση 5.9, για κάθε άλλο $\psi\colon \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_{p-1}$ μη τετριμμένο ομομορφισμό έχουμε ότι $\mathbb{Z}_p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_p \rtimes_\psi \mathbb{Z}_q$.

■

66. Να βρεθεί ο μικρότερος περιττός n για τον οποίο υπάρχει μη αβελιανή ομάδα τάξεως n.

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 65 αφού $21 = 3 \cdot 7$ και $7 \equiv 1 \mod 3$ έχουμε ότι $n = 21$. ■

67. Να δειχθεί ότι υπάρχουν (ως προς ισομορφισμό) ακριβώς 5 ομάδες τάξεως 12, από τις οποίες οι τρεις είναι μη αβελιανές.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $n_3 = 1$ ή 4 και $n_2 = 1$ ή 3. Έστω $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ και $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Δίακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $n_3 = 1$, τότε $P \lhd G$ και $G = P \rtimes Q$. Αρκεί να βρούμε όλους τους ομομορφισμούς $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_2$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :
  (α) Αν $Q = \mathbb{Z}_4 = \langle [a] \rangle$ και $\mathbb{Z}_2 = \langle [1] \rangle$ έχουμε δύο δυνατούς ομομορφισμούς $[a] \mapsto 0$ (το τετριμμένο) και $[a] \mapsto [1]$ (μη τετριμμένος) που μας δίνουν δύο μη ισόμορφα ημιευθέα γινόμενα $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_{12}$ (αβελιανή) και $G = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_4$ (μη αβελιανή). Αν αλλάξουμε την επιλογή του γεννήτορα $[a]$ από την Άσκηση 63 θα πάρουμε ισόμορφα ημιευθέα γινόμενα.

(β) Αν $Q = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle [a] \rangle \times \langle [b] \rangle$ και $\mathbb{Z}_2 = \langle [1] \rangle$, τότε υπάρχουν 4 δυνατοί ομομορφισμοί

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: [a] \mapsto [0], \quad [b] \mapsto [0] \\ \varphi_2 &: [a] \mapsto [1], \quad [b] \mapsto [0] \\ \varphi_3 &: [a] \mapsto [0], \quad [b] \mapsto [1] \\ \varphi_4 &: [a] \mapsto [1], \quad [b] \mapsto [1] \end{aligned}$$

Ο φ_1 μας δίνει την αβελιανή $G = P \rtimes_{\varphi_1} Q = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Τώρα, $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, από την Άσκηση 63, δίνουν ισόμορφα μη αβελιανά ευθέα γινόμενα $G = \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi_2} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Τα ημιευθέα γινόνενα των (α),(β) είναι μη ισόμορφα ανά δύο (γιατί ;)

- Αν $n_3 = 4$, τότε $n_2 = 1$ επομένως $Q \triangleleft G$ και $G = Q \rtimes_{\varphi} P$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

(α) Αν $Q = \mathbb{Z}_4$, τότε ο μοναδικός ομομορφισμός $\varphi \colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2$ είναι ο τετριμμένος και $G = \mathbb{Z}_{12}$.

(β) Αν $Q = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, τότε $\mathrm{Aut}(Q) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$. Αν $\varphi \colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$, τότε $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Αν φ είναι μη τετριμμένος τότε φ είναι 1-1 και η εικόνα της είναι υποομάδα της $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ τάξης 3, όπου υπάρχει μοναδική τέτοια, άρα από την Άσκηση 64, υπάρχει μοναδικό τέτοιο ημιευθύ γινόμενο που επάγεται από μη τετριμμένο ομομορφισμό $\varphi \colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2$.

Τα ημιευθέα γινόνενα των (α),(β) είναι μη ισόμορφα ανά δύο (γιατί ;)

Τα ημιευθέα γινόμενα των παραπάνω περιπτώσεων είναι μη ισόμορφα ανά δύο άρα συνολικά υπάρχουν ακριβώς 5 ομάδες τάξεως 12 (ως προς ισομορφισμός), όπου 3 από αυτές είναι μη αβελιανές.

■

Κεφάλαιο 6

Ελεύθερες Αβελιανές Ομάδες

68. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι επιμορφική εικόνα ελεύθερης αβελιανής.

Υπόδειξη. Έστω $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ αβελιανή και $F = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_i$ με $\mathbb{Z}_i = \langle x_i \rangle$ άπειρη κυκλική. Θεωρούμε την απεικόνιση $x_i \mapsto g_i$. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων αβελιανών η προηγούμενη απεικόνιση επεκτείνεται σε επιμορφισμό $F \to G$. ■

69. Έστω $\pi: G \to H$ επιμορφισμός αβελιανών ομάδων. Αν υπάρχει ομομορφισμός $\varphi: F \to H$, όπου F είναι ελεύθερη αβελιανή, τότε υπάρχει $\psi: F \to G$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] & H \\ F \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Υπόδειξη. Έστω $\{x_i\}$ μια βάση της F. Αφού κάθε $\varphi(x_i) \in H$ και π είναι επί, τότε υπάρχει $g_i \in G$ ώστε $\pi(g_i) = \varphi(x_i)$. Ή απεικόνιση $x_i \mapsto g_i$, από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων αβελιανών, επεκτείνεται σε $\psi: F \to G$ με $\pi \circ \psi = \varphi$. ■

70. Έστω G αβελιανή ομάδα, F ελεύθερη αβελιανή ομάδα και $\pi: G \to F$ επιμορφισμός ομάδων. Τότε, $G = \ker \pi \oplus H$, όπου $H \cong F$.

Υπόδειξη. Από την παραπάνω άσκηση, μέσω της $F \xrightarrow{\mathrm{id}} F$ και $G \xrightarrow{\pi} F$, υπάρχει ομομορφισμός $\varphi\colon F \to G$ τέτοιος ώστε $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Άρα, φ είναι 1-1 και $F \cong \mathrm{Im}\varphi$. Ορίζουμε $H = \mathrm{Im}\varphi$. Θα δείξουμε ότι $G = \ker\pi \oplus H$.

- Έχουμε ότι $\ker\pi, H \lhd G$, αφού G είναι αβελιανή.
- Έστω $g \in \ker\pi \cap H$. Δηλαδή $g = \varphi(x)$, για κάποιο $x \in F$ και $g \in \ker\pi$. Δηλαδή $x = \pi \circ \varphi(x) = 1$.
- Θα δείξουμε ότι $G = \ker\pi \cdot H$. Έστω $g \in G$. Τότε, έχουμε ότι $\pi \circ \varphi \circ \pi(x) = \pi(x)$, δηλαδή $x^{-1}\varphi(x) \in \ker\pi$, δηλαδή $x \in \ker\pi \cdot H$.

■

71. Έστω F ελεύθερη αβελιανή διάστασης n και $0 \lneq H \leq F$, τότε η H είναι ελεύθερη αβελιανή με $\mathrm{rank}(H) \leq n$.

Υπόδειξη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.

- Έστω $n = 1$. Τότε $F \cong \mathbb{Z}$, άπειρη κυκλική. Αν H είναι μη τετριμμένη υποομάδα της F, τότε είναι επίσης άπειρη κυκλική και έχουμε το ζητούμενο.
- Έστω ότι ισχύει το ζητούμενο για κάθε $1 \leq m < n$. Έστω H μια μη τετριμμένη υποομάδα της F. Έχουμε ότι $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_i$ με $\mathbb{Z}_i$ άπειρη κυκλική, για κάθε i. Έστω $K = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}_i$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

  1. Αν $H \leq K$, αφού K είναι ελεύθερη διάστασης $n-1$, από την επαγωγική υπόθεση H είναι ελεύθερη με $\mathrm{rank}(H) \leq \mathrm{rank}(K) = n - 1 < n$.
  2. Αν $H \nleq K$, τότε θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi\colon F \to \mathbb{Z}$ με $\ker\pi = K$. Αφού $H \nleq K$, τότε $\pi(H) \neq 0$, άρα $\pi(H) = \mathbb{Z}$. Επομένως, ο περιορισμός $\pi\colon H \to \mathbb{Z}$ είναι επιμορφισμός. Από την παραπάνω άσκηση έχουμε ότι $H = \ker\pi\big|_H \oplus \mathbb{Z}$. Όμως, $\ker\pi\big|_H = K \cap H \leq K$. Από την επαγωγική υπόθεση $\ker\pi\big|_H$ είναι ελεύθερη διάσταση $m \leq n-1$ επομένως,
  $$H = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m} \oplus \mathbb{Z}$$
  άρα η H είναι ελεύθερη αβελιανή με $\mathrm{rank}(H) = m + 1 \leq n$.

■

72. Αν μια αβελιανή ομάδα G παράγεται από n το πλήθος στοιχεία, τότε κάθε υποομάδα της μπορεί να παραχθεί το πολύ από n το πλήθος στοιχεία.

Υπόδειξη. Θεωρούμε επιμορφισμό $\pi\colon F \to G$, δηλαδή $G \cong F/K$, όπου $K = \ker \pi$. Τότε, από το θεώρημα αντιστοιχίας, υπάρχει $\Lambda \leq F$ με $K \leq \Lambda$ τέτοια ώστε $H \cong \Lambda/K$. Όμως F είναι ελεύθερη διάστασης n, επομένως Λ είναι ελεύθερη διάστασης $m \leq n$, δηλαδή $\Lambda/K = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. Άρα, η H παράγεται από m στοιχεία. ∎

73. Έστω $F = \mathbb{Z}^n$. Δείξτε ότι η F δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από n στοιχεία.

Υπόδειξη. Έστω ότι F παράγεται από m στοιχεία, επομένως υπάρχει επιμορφισμός $\pi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$. Άρα, από την Άσκηση 6.3 έχουμε ότι $\mathbb{Z}^m = \ker \pi \oplus \mathbb{Z}^n$. Άρα, έχουμε ότι $m = \operatorname{rank}(\mathbb{Z}^m) \geq \operatorname{rank}(\ker \pi) + \operatorname{rank}(\mathbb{Z}^n) \geq n$. ∎

74. Έστω F ελεύθερη αβελιανή πεπερασμένης διάστασης και $H \leq F$. Δείξτε ότι $|F/H|$ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(H)$.

Υπόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $|F/H| = k$. Αν $x_1, \ldots, x_n$ βάση της F, τότε $kx_i \in H$, για κάθε i. Ορίζουμε απεικόνιση $x_i \mapsto kx_i$, η οποία επεκτείνεται σε μονομορφισμό $F \to H$. Άρα, $\operatorname{rank}(F) \leq \operatorname{rank}(H)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(H)$. Αφού F/H είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή, από το θεώρημα δομής αβελιανών ομάδων, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. Αν $F = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_i$ με $\mathbb{Z}_i = \langle x_i \rangle$ άπειρη κυκλική, αρκεί να δείξουμε ότι $x_i H$ έχει πεπερασμένη τάξη, για κάθε i.

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει x_i τέτοιο ώστε $H \cap \langle x_i \rangle = \varnothing$. Τότε, ο περιορισμός της κανονικής προβολής στην H, $\pi\colon H \to F/\langle x_i \rangle$ είναι μονομορφισμός, δηλαδή $H \hookrightarrow F/\langle x_i \rangle$, όπου $F/\langle x_i \rangle$ είναι ελεύθερη διάστασης $n-1$, άτοπο. Τότε, για κάθε i, υπάρχει k_i ώστε $k_i x_i \in H$. ∎

75. Αν G είναι ελεύθερη αβελιανή πεπερασμένης διάστασης και $\varphi\colon G \to H$ επιμορφισμός, τότε $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\ker \varphi) + \operatorname{rank}(H)$.

Υπόδειξη. Αρχικά H είναι ισόμορφη με πηλίκο της G, άρα είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα, όπου από το θεώρημα δομής αβελιανών ομάδων, υπάρχει k ώστε kH να είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης $\operatorname{rank}(H)$. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\psi\colon H \to kH$ όπου $h \mapsto kh$. Επομένως, εφαρμόζοντας την Άσκηση 6.3 για την $\psi \circ \varphi$ προκύπτει ότι

$$\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\ker \psi \circ \varphi) + \operatorname{rank}(H)$$

Άρα, αρκέι να δείξουμε ότι $\operatorname{rank}(\ker \psi \circ \varphi) = \operatorname{rank}(\ker \varphi)$. Αρχικά είναι σαφές ότι $\ker \varphi \leq \ker \psi \circ \varphi$, άρα από την Άσκηση 6.7, αρκεί να δείξουμε ότι $\ker \psi \circ \varphi / \ker \varphi$ είναι πεπερασμένη ομάδα, και αφού είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή (γιατί ;), αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο έχει πεπερασμένη τάξη. Πράγματι, αν $x \in \ker \psi \circ \varphi$, τότε έχουμε ότι $\varphi(kx) = 0$, δηλαδή $kx \in \ker \varphi$ και έχουμε το ζητούμενο. ■

76. Έστω F ελεύθερη αβελιανή διάστασης n. Αποδείξτε ότι $\operatorname{Aut}(F) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Κεφάλαιο 7

Επιλύσιμες Ομάδες

77. Δείξτε ότι οι S_3, S_4 είναι επιλύσιμες.

Υπόδειξη. Άμεσο αφού $|S_3| = 2 \cdot 3$ και $|S_4| = 2^3 \cdot 3$. ∎

78. Αν G ομάδα με $|G| < 100$ και $|G| \neq 60$, τότε η G είναι επιλύσιμη.

79. Να εξετασθεί αν μια ομάδα G με $|G| = 144$ είναι επιλύσιμη.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $|G| = 2^4 \cdot 3^2$. Έχουμε ότι $n_3 = 1$ ή 4 ή 16. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

(α) Αν $n_3 = 1$, τότε υπάρχει κανονική $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ επιλύσιμη ως p - ομάδα και G/P επιλύσιμη ως p - ομάδα, συνεπώς G είναι επιλύσιμη.

(β) Αν $n_3 = 4$, έχουμε ότι $[G : N_G(P)] = 4$. Μέσω της δράσης της G στα σύμπλοκα G/P επάγεται ομομορφισμός $\varphi\colon G \to S_4$ με $\ker\varphi \leq N_G(P)$ επιλύσιμη ως υποομάδα επιλύσιμης και $G/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi \leq S_4$ επιλύσιμη ως υποομάδα της S_4 που είναι επιλύσιμη.

(γ) Αν $n_3 = 16$, διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν ανά δύο οι 3 - Sylow έχουν τετριμμένη τομή, τότε υπάρχουν $16(9-1) = 128$ στοιχεία τάξης δύναμη του 3, επομένως υπάρχει μοναδική Sylow 2-υποομάδα της G, έστω Q η οποία είναι επιλύσιμη ως p - ομάδα. Επίσης G/Q είναι επιλύσιμη ως p - ομάδα, άρα G είναι επιλύσιμη.

- Έστω ότι υπάρχουν $P, Q \in \mathrm{Syl}_2(G)$ με $P \neq Q$ και $P \cap Q \neq 1$. Τότε, $P, Q \subsetneq N_G(P \cap Q)$, άρα $|N_G(P \cap Q)| = 2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2\ , 2^4 \cdot 3^2$. Αν $|N_G(P \cap Q)| = 2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2$ το ζητούμενο έπεται όμοια με το (β). Αν $|N_G(P \cap Q)| = 2^4 \cdot 3^2$, τότε $N_P(P \cap Q) = G$, επομένως $P \cap Q$ είναι επιλύσιμη και κανονική στην G με $G/P \cap Q$ κανονική στην G, άρα G είναι επιλύσιμη.

■

80. Αν $M, N \leq G$ και οι M, N είναι επιλύσιμες με $M \lhd G$, τότε MN είναι επιλύσιμη.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε ότι $MN/N \cong M/M \cap N$. ■

81. Αν $M, N \lhd G$ και οι $G/M, G/N$ είναι επιλύσιμες, τότε η $G/M \cap N$ είναι επιλύσιμη.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον ομομορφισμό $\varphi\colon G \to G/M \times G/N$ με $\varphi(g) = (gM, gN)$. ■

82. Αν $K \leq L \leq M$, όπου K είναι πλήρως αναλλοίωτη στην L και L είναι πλήρως αναλλοίωτη στην M. Δείξτε ότι K είναι πλήρως αναλλοίωτη στην M.

Υπόδειξη. Έστω $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Τότε, $\varphi|_L \in \mathrm{End}(L)$, αφού L είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της M. Άρα, έχουμε ότι $\varphi(K) = \varphi|_L(K) \subseteq K$, αφού K είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της L. ■

83. Έστω G ομάδα και $G^{(n)}$ οι όροι της παράγωγου σειράς. Αποδείξτε ότι $G^{(n)}$ είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Άμεσο με επαγωγή. ■

84. Μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα περιέχει πλήρως αναλλοίωτη αβελιανή p - υποομάδα για κάποιο πρώτο p.

Υπόδειξη. ■

85. Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα. Αν $N \neq 1$ μια ελαχιστική κανονική υποομάδα της G δείξτε ότι $N = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, όπου p είναι πρώτος.

Υπόδειξη. Αρχικά N είναι επιλύσιμη ως υποομάδα επιλύσιμης. Έχουμε ότι N' χαρακτηριστική υποομάδα της N και αφού N κανονική στην G ισχύει ότι N' είναι κανονική στην G. Συνεπώς ισχύει ότι $N = N'$ ή $N' = 1$. Αν $N = N'$, τότε η παράγωγος σειρά θα ήταν σταθερή, όπου καταλήγουμε σε άτοπο από την επιλυσιμότητα της N. Επομένως, $N' = 1$, δηλαδή N πεπερασμένη αβελιανή, άρα N είναι το γινόμενο των Sylow υποομάδων της. Αν P είναι μια Sylow p - υποομάδα της N, αφού είναι χαρακτηριστική στην N όμοια έχουμε ότι $N = P$. Αν δείξουμε ότι κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της N έχει τάξη p έχουμε το ζητούμενο. Έστω

$$A = \{g \in N \mid g^p = 1\}.$$

Η A είναι χαρακτηριστική υποομάδα της N, επομένως όμοια έχουμε ότι $N = A$. ∎

Κεφάλαιο 8

Μηδενοδύναμες Ομάδες

86. Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα. Αν η N είναι μη τετριμμένη κανονική υποομάδα της G, τότε $N \cap Z(G) \neq \{1\}$. Αν επιπλέον N είναι ελαχιστική κανονική, τότε $N \subseteq Z(G)$.

Υπόδειξη. G είναι μηδενοδύναμη, και έστω η κεντρική σειρά της $1 \subseteq Z(G) \subseteq Z^2(G) \subseteq \cdots \subseteq Z^n(G) = G$. Έστω k ο ελάχιστος θετικός ακέραιος όπου $N \cap Z^k(G) \neq 1$. Τότε, αφού η παραπάνω σειρά είναι κεντρική και η N είναι κανονική έχουμε ότι

$$\left[Z^k(G), G\right] \subseteq Z^{k-1}(G) \Rightarrow \left[Z^k(G) \cap N, G\right] \subseteq Z^{k-1}(G) \cap N = \{1\}.$$

Άρα, έχουμε ότι $Z^k(G) \cap N \subseteq Z(G)$, δηλαδή $1 \neq Z^k(G) \cap N \subseteq Z(G) \cap N$. ∎

87. Έστω G ομάδα και $N \leq Z(G)$. Δείξτε ότι η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν G/N είναι μηδενοδύναμη.

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 37 κάθε Sylow p - υποομάδα της G/N αν και μόνο αν είναι της μορφή PN/N, όπου $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Άρα G έχει μοναδική κανονική Sylow p - υποομάδα αν και μόνο αν G/N έχει μοναδική κανονική Sylow p - υποομάδα. ∎

88. Αν η ομάδα αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(G)$ μιας ομάδως G είναι μηδενοδύναμη, τότε και η G είναι μηδενοδύναμη.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ μέσω του ομομορφισμού $g \mapsto \tau_g$. Συνεπώς, $G/Z(G)$ είναι μηδενοδύναμη, δηλαδή έχει κεντρική σειρά (από το θεώρημα αντιστοιχίας)

$$1 = Z(G)/Z(G) \lhd Z^2/Z(G) \lhd Z^3/Z(G) \lhd \cdots \lhd Z^n/Z(G) = G/Z(G)$$

με $Z(G) \subseteq Z^i$, για κάθε i. Παρατηρήστε ότι η σειρά $1 \lhd Z(G) \lhd Z^2 \lhd Z^3 \lhd \cdots \lhd Z^n = G$. ∎

89. Έστω G μια πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα και $H \leq G$ με $[G : H] = n$. Να αποδειχθεί ότι $g^n \in H$, για κάθε $g \in G$.

Υπόδειξη. Αφού $H \leq G$, τότε είναι υποκανονική, δηλαδή υπάρχει κανονική σειρά $H_0 = H \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots \lhd H_n$. Έχουμε ότι

$$n = [G : H] = [G : H_{n-1}] \cdot [H_{n-1} : H_{n-2}] \cdots [H_2 : H_1] \cdot [H_1 : H].$$

Αν $[H_i : H_{i-1}] = n_i$ και $g \in G$ έχουμε ότι $g^{n_1} \in H_{n-1}$. Έτσι ισχύει ότι $g^{n_1 n_2} \in H_{n-2}$. Συνεχίζοντας σε πεπερασμένα βήματα προκύπτει ότι $g^n \in H$. ∎

90. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Αποδείξτε ότι

(α) Η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος στοιχείων $a, b \in G$ με $(o(a), o(b)) = 1$, ισχύει $ab = ba$.

(β) Η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν για κάθε διαιρέτη n της τάξεως της G υπάρχει κανονική υποομάδα τάξεως n.

Υπόδειξη. (α) Αφού G είναι μηδενοδύναμη, τότε $G = P_1 \times \cdots P_n$ το ευθύ άθροισμα των Sylow υποομάδων της. Έστω $a, b \in G$ με $(o(a), o(b)) = 1$. Τότε έχουμε ότι $a = \prod_i^n a_i$ και $b = \prod_{i=1}^n b_i$. Αφού $(o(a), o(b)) = 1$ έχουμε ότι $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i, b_i \neq 1\} = \varnothing$ επομένως είναι σαφές ότι $ab = ba$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι για κάθε ζεύγος στοιχείων $a, b \in G$ με $(o(a), o(b)) = 1$, ισχύει $ab = ba$ τότε έχουμε ότι $G = P_1 \cdots P_n$, όπου $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ ($|G| = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$). Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε P_i είναι κανονική. Έστω $i \in \{1, \dots, n\}$. Έχουμε ότι, για κάθε j, ότι $P_j \subseteq N_G(P_i)$. Έπομένως έχουμε ότι $G = N_G(P_i)$, δηλαδή το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε ότι G είναι μηδενοδύναμη με $|G| = n = p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}$. Έστω $\nu|n$, δηλαδή $\nu = p_1^{b_1}\cdots p_n^{b_n}$ με $b_i \le a_i$. Αν P_i η p_i - Sylow υποομάδα της G, τότε υπάρχει κανονική υποομάδα N_i της P_i τάξης $p_i^{b_i}$. Τότε, η $N = N_1 \times \cdots \times N_n$ είναι κανονική υποομάδα της G τάξης ν. Το αντίστροφο είναι άμεσο, αφού κάθε Sylow υποομάδα της G θα είναι κανονική.

∎

91. Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα κλάσεως $c > 1$. Για κάθε $a \in G$, η υποομάδα $H = \langle a, G' \rangle$ είναι μηδενοδύναμη κλάσεως μικρότερη του c.

Υπόδειξη. Αφού G είναι μηδενοδύναμη κλάσεων c, τότε $Z^c(G) = G$ και $Z^{c-1}(G) \neq G$. Αφού $G/Z^{c-1}(G) = Z^c(G)/Z^{c-1}(G)$ είναι αβελιανή, τότε $G' \subseteq Z^{c-1}(G)$, συνεπώς $G' \subseteq Z^{c-1}(G) \cap H = Z^{c-1}(H)$. Άρα, προκύπτει ότι $H/Z^{c-1}(H) = \langle \overline{a} \rangle$ κυκλική. Παρατηρούμε ότι

$$H/Z^{c-1}(H) \cong \left(H/Z^{c-2}(H)\right) / \left(Z^{c-1}(H)/Z^{c-2}(H)\right) = \Gamma/Z(\Gamma)$$

όπου $\Gamma = H/Z^{c-2}(H)$. Αφού το παραπάνω πηλίκο είναι κυκλική, τότε Γ είναι αβελιανή και $\Gamma = Z(\Gamma)$. Επομένως, ισχύει ότι $H = Z^{c-1}(H)$, δηλαδή η κλάση μηδενοδυναμίας της H είναι μικρότερη του c. ∎

92. Σε μια μηδενοδύναμη, ελευθέρα στρέψης ομάδα G η εξαγωγή των ριζών είναι μοναδική. Δηλαδή αν $a^n = b^n$, για $n > 0$, τότε $a = b$.

Υπόδειξη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στην κλάση μηδενοδυναμίας της G.

- Αν $c = 1$, τότε η G είναι αβελιανή και παρατηρούμε ότι αν $a^n = b^n$, τότε $\left(a^{-1}b\right)^n = 1$. Αφού G είναι ελευθέρα στρέψης, τότε $a = b$.
- Αν $c > 1$, από την Άσκηση 91 η κλάση μηδενοδυναμίας της $H = \langle a, G' \rangle$ είναι μικρότερη του c. Αφού $a, b^{-1}ab \in H$, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\left(b^{-1}ab\right)^n = b^{-1}a^n b = b^n = a^n$$

συνεπώς ισχύει ότι $ab = ba$. Όμοια, με πριν προκύπτει όταν $a = b$.

∎

93. Υποθέτουμε ότι η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα της οποίας όλες οι μεγιστικές υποομάδες είναι απλές και κανονικές. Δείξτε ότι η G είναι αβελιανή και $|G| = 1, p, p^2, pq$, όπου p, q πρώτοι.

Υπόδειξη. Αφού κάθε μεγιστική υποομάδα της G είναι κανονική, τότε η G είναι μηδενοδύναμη. Επομένως, από την Άσκηση 90 οι πιθανές τάξεις της G είναι $1, p, p^2, pq$. Γνωρίζουμε ότι κάθε ομάδα τάξης $1, p, p^2$ είναι αβελιανή. Τώρα, αν $|G| = pq$ και G μηδενοδύναμη, άρα ως το ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της, η G είναι κυκλική συνεπώς είναι αβελιανή. ■

94. Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξεως 90 δεν είναι απλή και ότι είναι επιλύσιμη. Είναι αναγκαστικά μηδενοδύναμη ;

Υπόδειξη. Έστω G ομάδα με $|G| = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Έχουμε ότι $n_5 = 1$ ή 6. Αν $n_5 = 1$, τότε η G έχει μοναδική κανονική Sylow 5 - υποομάδα, άρα έχουμε το ζητούμενο. Αν $n_5 = 6$, τότε $n_3 = 1$ ή 10. Αν $n_3 = 1$ έχουμε τελειώσει. Αν $n_3 = 10$, διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν κάθε δύο Sylow 3 - υποομάδες τέμνονται τετριμμένα, τότε υπάρχουν $10(3^2 - 1) = 80$ στοιχεία τάξεως δύναμη του 3, και καταλήγουμε σε άτοπο αφού υπάρχουν $6(5-1) = 24$ στοιχεία τάξεως δύναμη του 5.
- Αν υπάρχουν $P, Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$ διαφορετικές με $P \cap \neq 1$, τότε προκύπτει ότι $P, Q \subsetneq N_G(P \cap Q) = N$, επομένως N έχει τάξη $3^2 \cdot 5$ ή $3^2 \cdot 2$ ή $N = G$. Σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι η G δεν είναι απλή.

Τώρα, αν N μια μη τέτριμμένη, γνήσια υποομάδα της G, $N, G/N$ είναι επιλύσιμες (ελέγξτε τις τάξεις τους) επομένως η G είναι επιλύσιμη.

Μια G τάξεως 90 δεν είναι εν γένει μηδενοδύναμη. Θεωρούμε τον μη τετριμμένο ομομορφισμό $\varphi \colon \mathbb{Z}_{18} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) = \mathbb{Z}_4$ με $[1]_{18} \mapsto [1]_4$ και $G = \mathbb{Z}_5 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_{18}$. Αν G ήταν μηδενοδύναμη θα ήταν το ευθύ γινόνενο των Sylow υποομάδων της, δηλαδή το ευθύ γινόμενο των $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{18}$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει αφού φ είναι μη τετριμμένος. ■

Κεφάλαιο 9

Ελεύθερες Ομάδες και Ελεύθερα γινόμενα

95. Δείξτε ότι κάθε ελεύθερο γινόμενο $*_{a\in J}G_a$ με $|J|\geq 2$ και $G_a\neq\{1\}$, για κάθε $a\in J$, έχει στοιχείο άπειρης τάξης.

Υπόδειξη. Έστω $a_1\neq a_2\in J$ και $g_i\in G_{a_i}$ μη τετριμμένα. Τότε, $g^n=\underbrace{(g_1g_2)\cdots(g_1g_2)}_{n \text{ φορές}}$ είναι σε ανηγμένη μορφή άρα $g^n\neq 1$, για κάθε $n\geq 1$. ∎

96. Έστω $\{G_a\}_{a\in J}$ οικογένεια ομάδων με $|J|\geq 2$. Αν $G={}_aG_a$ δείξτε ότι $Z(G)=\{1\}$.

Υπόδειξη. Έστω $1\neq g=g_1\cdots g_n\in G$ ανηγμένη μορφή. Αφού $|J|\geq 2$, τότε υπάρχει $g_{n+1}\notin G_{a_n}$. Η λέξη $gg_{n+1}=g_1\cdot g_ng_{n+1}$ είναι σε ανηγμένη μορφή μήκους $n+1$. Αν $g_{n+1}\in G_{a_1}$, τότε η ανηγμένη μορφή της $g_{n+1}g$ έχει μήκος n, είναι δηλαδή διαφορετική από την gg_{n+1}, ενώ αν $g_{n+1}\notin G_{a_1}$, τότε η λέξη $g_{n+1}g$ είναι σε ανηγμένη μορφή. Αν $g_{n+1}g=gg_{n+1}$, τότε από την μοναδικότητα των ανηγμένων μορφών $g_n=g_{n+1}$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. ∎

97. Αν $G=G_1*G_2$ και N_1 η κανονική υποομάδα της G που παράγεται από τον παράγοντα G_1. Να δειχθεί ότι $N_1\cap G_2=\{1\}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$N_1 = \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i g_i x_i^{-1} \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in G,\ g_i \in G_1 \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει μη τετριμμένο στοιχείο στην τομή $N_1 \cap G_2$, αφού κάθε λέξη $\prod_{i=1}^{n} x_i g_i x_i^{-1}$ στην ανηγμένη μορφή του περιέχει στοιχείο της G_1. ■

98. Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης σ΄ ένα ελεύθερο γινόμενο $*_{a\in J} G_a$ περιέχεται σε συζυγές ενός ελεύθερου παράγοντα.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο μήκος της λέξης. Έστω $g = g_1 \cdots g_n \in *G_a$ πεπερασμένης τάξης σε ανηγμένη μορφή. Τότε $g_1, g_n \in G_{a_1}$. Έχουμε ότι $g_1^{-1} g g_1$ είναι ανηγμένη λέξη μήκους $n-1$, άρα από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $w \in G$ και $g_k \in G_{a_k}$ για κάποιο $k \in J$ ώστε $g_1^{-1} g g_1 = w^{-1} g_k w$, δηλαδή $g = (w g_1^{-1})^{-1} g_k (w g_1^{-1})$ και έχουμε το ζητούμενο.

■

99. Κάθε πεπερασμένη υποομάδα ενός ελεύθερου γινομένου περιέχεται σε συζυγές ενός ελεύθερου παράγοντα.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα. Αν σε μια υποομάδα ελεύθερο γινομένου, κάθε στοιχείο έχει πεπερασμένη τάξη, τότε περιέχεται σε συζυγές ενός ελεύθερου παράγοντα. Έστω $G = *_a G_a$ και H μη τετριμμένη υποομάδα της G, όπου κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. Έστω $x \in H$, οπότε ως στοιχείο πεπερασμένης τάξης έχουμε ότι $x = g g_a g^{-1}$, όπου $g \in G$ και $g_a \in G_a$. Αν $y = h g_b h^{-1}$, όπου $h \in G$ και $g_b \in G_b$ αρκεί να δείξουμε ότι $g = h$ και $a = b$. Αφού $xy \in H$, τότε πρέπει να έχει πεπερασμένη τάξη. Χρησιμοποιώντας αυτό δείξτε το ζητούμενο. ■

100. Αν $G = *_{a\in J} G_a$ και κάθε G_a αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο $G_a = *_b H_{ab}$, τότε η G είναι το ελεύθερο γινόμενο όλων των H_{ab}. (ονομάζεται επιλέπτυνση του αρχικού).

Υπόδειξη. Άμεσο με χρήση καθολικής συνθήκης ελεύθερων γινομένων. ■

101. Αν $G = *_{a\in J} G_a$ και για κάθε $a \in J$ έχουμε υποομάδα $H_a \leq G_a$, τότε η ομάδα που παράγεται από τις H_a είναι ισόμορφη με το ελεύθερο γινόμενό τους. Δηλαδή $\langle H_a \mid a \in J\rangle = *_{a\in J} H_a$.

Υπόδειξη. Άμεσο αφού για κάθε $h = h_1 \cdots h_n$ ανηγμένη μορφή με $h_j \in H_{a_j}$, για κάθε j με $n \geq 2$ έχουμε ότι $h \neq 1$. ∎

102. Αν $G = *_{a\in J} G_a$ και G' η παράγωγος υποομάδα της G, τότε $G/G' \cong \bigoplus_{a\in J} G_a/G'_a$.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι G/G' ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα των ευθέων αθροισμάτων. Για κάθε a θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$\begin{tikzcd} G_a \arrow[r, "i_a"] \arrow[rr, bend right, "\mu_a"'] & G \arrow[r, "\pi"] & G/G' \end{tikzcd}$$

Αφού το πηλίκο $G_a/\ker \mu_a$ είναι αβελιανή, τότε $G'_a \subseteq \ker \mu_a$ και από την καθολική ιδιότητα ομάδας πηλίκο επάγεται μοναδικός ομομορφισμός $G_a/G'_a \xrightarrow{\varphi_a} G/G'$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} G_a \arrow[r, "\mu_a"] \arrow[d, "\pi_a"'] & G/G' \\ G_a/G'_a \arrow[ur, "\varphi_a"'] & \end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ″τριάδα″ $(G/G', G_a/G'_a, \varphi_a)$ ικανοποιεί την καθολική συνθήκη των ευθέων αθροισμάτων. Έστω H αβελιανή ομάδα και ομομορφισμοί $G_a/G'_a \xrightarrow{\psi_a} H$. Τότε επάγονται ομομορφισμοί $G_a \xrightarrow{\nu_a = \psi_a \circ \pi_a} H$ όπου από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων γινομένων υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $G \xrightarrow{\nu} H$ που για κάθε a κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} G_a \arrow[r, "\nu_a = \psi_a \circ \pi_a"] \arrow[d, "i_a"'] & H \\ G \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

Αφού το πηλίκο $G/\ker\nu$ είναι αβελιανή ομάδα, τότε έχουμε ότι $G' \subseteq \ker\nu$ και από την καθολική συνθήκη της ομάδας πηλίκο υπάρχει ομομορφισμός $G/G' \xrightarrow{\varphi} H$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/G' \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε a το ακόλουθο διάγραμμα ειναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} G_a/G'_a \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d, "\varphi_a"'] & H \\ G/G' \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Έστω $g_aGa' \in G_a/G'_a$, τότε

$$\begin{aligned} & \varphi\circ\varphi_a(g_aG'_a) = \varphi\circ\varphi_a\circ\pi_a(g_a) = \varphi\circ\mu_a(g_a) \\ = \quad & \varphi\circ\pi\circ i_a(g_a) = \nu\circ i_a(g_a) = \psi_a\circ\pi_a(g_a) = \psi_a(g_aG'_a). \end{aligned}$$

Για την μοναδικότητα του φ θεωρούμε $\psi\colon G/G' \to H$, τέτοιος ώστε για κάθε a το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} G_a/G'_a \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d, "\varphi_a"'] & H \\ G/G' \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Αρκεί να δείξουμε την ισότητα στους γεννήτορες $g_aGa' \in G_a/G'_a$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} & \varphi(g_aG') = \varphi\circ\pi\circ i_a(g_a) = \varphi\circ\varphi_a\circ\pi_a(g_a) \\ = \quad & \psi_a(g_aG_a) = \psi\circ\varphi_a\circ\pi_a(g_a) \\ = \quad & \psi\circ\pi\circ i_a(g_a) = \psi(g_aG'). \end{aligned}$$

■

103. Έστω $G = *_{a\in J}G_a$, όπου κάθε παράγοντας είναι μη τετριμμένος. Αν η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε :

(α) Το σύνολο δεικτών I είναι πεπερασμένο.

(β) Κάθε παράγοντας G_i είναι πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα.

Υπόδειξη. ∎

104. Έστω $G_i,\ i \in I$ μια οικογένεια ομάδων με παραστάσεις $G_i = \langle X_i \mid R_i \rangle$. Δείξτε ότι

$$*_{i\in I} G_i = \left\langle \bigsqcup_{i\in I} X_i \mid \bigsqcup_{i\in I} R_i \right\rangle.$$

Υπόδειξη. Έστω $G = \langle \bigsqcup_{i\in I} X_i \mid \bigsqcup_{i\in I} R_i \rangle$. Θεωρούμε τους ομομορφισμούς

$$\begin{tikzcd} F(X_j) \arrow[r, "i_j"] \arrow[rr, bend right, "\mu_j"'] & F\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i\right) \arrow[r, "\pi"] & G \end{tikzcd}$$

όπου i_j ο ομομορφισμός στις ελεύθερες ομάδες που επάγεται από την $x_j \mapsto (j, x_j)$. Αν $N_j = \langle\langle R_j \rangle\rangle$, τότε αφού $N_j \subseteq \ker \mu_j$ επάγονται ομομορφισμοί $\varphi_j \colon G_j \to G$ που κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} F(X_j) \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[d, "\pi_j"'] & G \\ G_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Θα δείξουμε ότι η "τριάδα" (G, G_j, φ_j) ικανοποιεί την καθολική συνθήκη των ελεύθερων γινομένων. Έστω H ομάδα και ομομορφισμοί $G_j \xrightarrow{\psi_j} H$. Μέσω των απεικονίσεων $X_j \xrightarrow{a_j} G_j$ επάγονται απεικονίσεις

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "a_j"] \arrow[rr, bend right, "b_j"] & G_j \arrow[r, "\psi_j"] & H \end{tikzcd}$$

από όπου επάγεται απεικόνιση $\bigsqcup_{i\in I} X_i \xrightarrow{c} H$ η οποία να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "b_j"] \arrow[d, "i'_j"'] & H \\ \bigsqcup_{i\in I} X_i \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων επάγεται ομομορφισμός $\hat{\varphi}\colon F\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i\right) \to H$, όπου από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο (γιατί ;) επάγεται ομομορφισμός $G \xrightarrow{\varphi} H$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} F\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i\right) \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Δείξτε ότι ο φ, για κάθε $j \in I$, κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & H \\ G \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

και δείξτε ότι είναι ο μοναδικός με αυτήν την ιδιότητα. ∎

105. Έστω G ομάδα και N κανονική υποομάδα της G. Αν G/N είναι ελεύθερη, τότε υπάρχει H υποομάδα της G με $G = HN$ και $H \cap N = 1$.

Υπόδειξη. Η ομάδα G/N είναι ελεύθερη επομένως $G/N = *_{a\in J} G_a$. Από το θεώρημα αντιστοιχείας, για κάθε $a \in J$ υπάρχει $N \subseteq \tilde{G}_a$ της G ώστε $\tilde{G}_a/N = G_a$. Έστω $\hat{G}_a = \tilde{G}_a \smallsetminus N$ και $H = \left\langle \hat{G}_a \mid a \in J \right\rangle$. Δείξτε ότι η H ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες. ∎

106. Έστω F ελεύθερη και H υποομάδα της F πεπερασμένου δείκτη. Αν K μη τετριμμένη υποομάδα της F, τότε $K \cap H \neq 1$.

Υπόδειξη. Έστω $1 \neq x \in K$. Έστω N η κανονική υποομάδα που προκύπτει από την δράση της G στα σύμπλοκα G/H. Τότε, γνωρίζουμε ότι $[G : N] = n < \infty$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $x \in H$ έχουμε το ζητούμενο.
- Αν $x \notin H$ και έχει ανηγμένη μορφή μήκους μεγαλύτερου του 2, τότε $o(x) = \infty$ επομένως $x^n \neq 1$ και $x^n \in K \cap N \subseteq K \cap H$.

- Αν $x \notin H$ και έχει μήκος 1 στην ανηγμένη του μορφή τότε x ανήκει σε κάποιους από τους παράγοντες της F επομένως $o(x^n) = \infty$ και ομοίως με παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

■

107. Η ελεύθερη ομάδα F_2 τάξης 2 περιέχει ελεύθερη υποομάδα :

(α) Τάξεως k για κάθε φυσικό k.

(β) Αριθμήσιμης τάξης.

Υπόδειξη. Έστω $F_2 = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ με $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$.

(α) Δείξτε ότι η ομάδα που παράγεται από το $X = \{a, b^{-1}ab, \dots, b^{-(k-1)}ab^{k-1}\}$ είναι η F_k, δείχνοντας ότι κάθε ανηγμένη λέξη με στοχεία από το X είναι διαφορετική του 1 αν έχει μήκος πάνω από το 2.

(β) Δείξτε ότι η ομάδα που παράγεται από το $X = \{b^{-(k-1)}ab^{k-1} \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι η $F_{\mathbb{N}}$, δείχνοντας ότι κάθε ανηγμένη λέξη με στοχεία από το X είναι διαφορετική του 1 αν έχει μήκος πάνω από το 2.

■

Ορισμός 3. Μια ομάδα G λέγεται **hopfian** αν δεν είναι ισόμορφη με γνήσιο πηλίκο της, ισοδύναμα, αν $\varphi\colon G \to G$ επιμορφισμός, τότε φ ισομορφισμός.

108. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα είναι hopfian.

Υπόδειξη. Άμεσο από την Άσκηση 17. ■

109. Αν G πεπερασμένα παραγόμενη και προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε $\mathrm{Aut}(G)$ προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Υπόδειξη. Έστω $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ με $\varphi \neq \mathrm{id}_G$. Τότε, υπάρχει $g \in G$ ώστε $\varphi(g)g^{-1} \neq 1$ και αφού G είναι πεπερασμένα παραγόμενη υπάρχει $H \leq G$ πεπερασμένου δείκτη ώστε $g \notin H$. Αφού G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε υπάρχει N χαρακτηριστική υποομάδα της G με $N \subseteq H$. Ειδικότερα $\varphi(g)g^{-1} \notin N$. Αφού N χαρακτηριστική υποομάδα της G κάθε αυτομορφισμός της G επάγει αυτομορφισμό στην G/N. Πράγματι, έστω $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ορίζεται αυτομορφισμός $\tilde{\varphi}\colon G/N \to G/N$ με $gN \mapsto \varphi(g)N$. Επομένως ορίζεται ομομορφισμός $\psi\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G/N)$ με $\psi(\varphi) \neq 1$ και έχουμε το ζητούμενο. ∎

110. Έστω $G = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ και $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ δύο στοιχεία της G. Αν $|a|, |b| \geq 2$, τότε τα g_1, g_2 παράγουν μια ελεύθερη υποομάδα της G διάστασης 2.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $H_1 = \langle g_1 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ και $H_2 = \langle g_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nb & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$. Θεωρούμε την δράση της G στο $M = \mathbb{C}^{2\times 1}$ και θεωρούμε τα υποσύνολα $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid |y| < |x| \right\}$ και $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid |x| < |y| \right\}$. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$ και $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H_2$. Τότε, έχουμε ότι $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + nay \\ y \end{pmatrix}$ όπου ισχύει ότι

$$|x + nay| \geq |n||a||y| - |x| > 2|y| - |y| > |y|.$$

Επομένως έχουμε ότι $AS_2 \subseteq S_1$ για κάθε $A \in H_1 \setminus \{I_2\}$ και όμοια $AS_1 \subseteq S_2$ για κάθε $A \in H_2 \setminus \{I_2\}$. Από το Λήμμα του Ping - Pong προκύπτει ότι $H = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle * \langle g_2 \rangle = F_2$. ∎

111. Έστω F_n ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης τάξης n.

(α) Δείξτε ότι η F_n δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από n το πλήθος στοιχεία.

(β) Αν S είναι ένα υποσύνολο από n στοιχεία που παράγει την F_n, τότε S βάση της F_n (Δηλαδή F_n είναι ελεύθερη επί του S).

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $F_n = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. Θα δείξουμε ότι $n \leq m$. Έστω $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ και θεωρούμε την απεικόνιση $x_i \mapsto g_i$. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων επάγεται επιμορφισμός $F(X) \xrightarrow{\varphi} F_n$ η οποία επάγει επιμορφισμός στις αντίστοιχες αβελιανοποιήσεις $F(X)/(F(X))' \xrightarrow{\tilde{\varphi}} F_n/(F_n)'$. Από την Άσκηση 102 επάγεται επιμορφισμός στις ελεύθερες αβελιανές ομάδες $\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}_i \to \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_i$ όπου από την Άσκηση 70 συμπεραίνουμε ότι $n \leq m$.

(β) Έστω $F_n = \langle S \rangle = \langle x_1 \rangle * \cdots * \langle x_n \rangle$. Αν $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ θεωρούμε απεικόνιση $x_i \mapsto s_i$, όπου από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων προτύπων, επάγει επιμορφισμό $F_n \to F_n$. Αφού κάθε ελεύθερη ομάδα είναι hopfian ο επιμορφισμός είναι ισομορφισμός από όπου συμπεραίνουμε ότι S είναι βάση της F_n.

■

112. Αν $G = \langle X|R \rangle$, τότε μια ομάδα K είναι πηλίκο της G αν και μόνο αν $K = \langle X|R \cup S \rangle$.

Υπόδειξη. Αρχικά εστω ότι K είναι πηλίκο της G, δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\varphi: G \to K$. Θεωρούμε την σύνθεση $F(x) \xrightarrow{\psi = \varphi \circ \pi} K$ η οποία είναι επιμορφισμός ομάδων. Έτσι έχουμε ότι $K \cong F(X)/\ker\psi$ με $R \subseteq \ker\psi$. Επομένως, αν $S = \ker\psi \setminus R$ έχουμε ότι $\ker\psi = \langle\langle R \cup S \rangle\rangle$, δηλαδή $K \cong \langle X|R \cup S \rangle$.

Αντίστροφα, έστω ότι $K \cong \langle X|R \cup S \rangle$, άρα υπάρχει επιμορφισμός $F(x) \xrightarrow{\varphi} K$. Αφού $R \subseteq \ker\varphi$ υπάρχει επιμορφισμός $G \to K$. ■

113. Έστω Γ μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα και G μια πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα. Υποθέτουμε ότι οι Γ, G είναι ελευθέρας στρέψης και ότι έχουν τα ίδια πεπερασμένα πηλίκα. Δηλαδή

$$\{K \mid K \text{ πεπερασμένο πηλίκο της } \Gamma\} = \{F \mid F \text{ πεπερασμένο πηλίκο της } G\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

(β) Αποδείξτε ότι $\Gamma \cong G$.

Υπόδειξη. Αφού Γ είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ελευθέρας στρέψης, τότε είναι της μορφή $\Gamma = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$.

(α) Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $[g,h] \neq 1$. Αφού G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε υπάρχει K πεπερασμένη ομάδα ώστε και ομομορφισμός $\varphi: G \to K$, όπου $\varphi([g,h]) \neq 1$. Έχουμε ότι $\mathrm{Im}\varphi$ είναι ένα πεπερασμένο πηλίκο της G, άρα είναι ένα πεπερασμένο πηλίκο της Γ, δηλαδή $\mathrm{Im}\varphi$ είναι αβελιανή, αφού Γ αβελιανή. Αφού $G/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$, τότε έχουμε ότι $G/\ker\varphi$ αβελιανή, δηλαδή $G' \subseteq \ker\varphi$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\varphi([g,h]) \neq 1$.

(β) Αφού G είναι αβελιανή, πεπερασμένα παραγόμενη και ελεύθερας στρέψης, τότε είναι ελεύθερη αβελιανή $G = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{m}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $m = n$. Έστω, προς άτοπο, ότι $m > n$ (όμοια αν $m < n$). Θεωρούμε την κανονική υποομάδα της G, $N = \underbrace{2\mathbb{Z} \times \cdots \times 2\mathbb{Z}}_{m}$, όπου έχουμε ότι $G/N \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{m}$ πηλίκο της G. Άρα, η ομάδα $K = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{m}$ είναι πηλίκο της Γ, δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\varphi\colon \Gamma \to K$. Παρατηρήστε ότι $K = \langle \varphi(e_i) \mid i = 1, \dots, n \rangle$, όπου για κάθε i ισχύει ότι $2\varphi(e_i) = \varphi(2e_i) = 0$. Επομένως, για κάθε i, ισχύει ότι $2e_i \in \ker \varphi$ δηλαδή $\underbrace{2\mathbb{Z} \times \cdots \times 2\mathbb{Z}}_{n} \subseteq \ker \varphi$. Άρα, υπάρχει επιμορφισμός

$$L = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n} = \left(\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n} \right) \Big/ \left(\underbrace{2\mathbb{Z} \times \cdots \times 2\mathbb{Z}}_{n} \right) \to K.$$

Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $|K| = 2^m > 2^n = |L|$.

∎

Κεφάλαιο 10

Ελεύθερα Γινόμενα με Αμάλγαμα

114 (Καθολική ιδιότητα ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα)**.** Έστω G_λ, $\lambda \in \Lambda$ οικογένεια ομάδων, H ομάδα, $\varphi_\lambda\colon H \to G_\lambda$ οικογένεια μονομορφισμών και $G = *_H G_\lambda$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Αποδείξτε ότι για κάθε ομάδα K και οικογένεια ομομορφισμών $\vartheta_\lambda\colon G_\lambda \to K$ με $\vartheta_\lambda \circ \varphi_\lambda = \vartheta_\mu \circ \varphi_\mu$ για κάθε ζεύγος $\lambda, \mu \in \Lambda$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\vartheta\colon G \to K$ έτσι ώστε $\vartheta \circ \pi_\lambda = \vartheta_\lambda$ για κάθε λ, όπου π_λ ο περιορισμός στην G_λ του φυσικού επιμορφισμού $\pi\colon *_\lambda G_\lambda \to G$.

Υπόδειξη. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων γινομένων υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi\colon *_\lambda G_\lambda \to K$, ώστε για κάθε λ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} *_\lambda G_\lambda \arrow[r, "\varphi"] & K \\ G_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[ur, "\vartheta_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Αν $R = \left\{\varphi_\lambda(h)\left(\varphi_\mu(h)\right)^{-1} \mid h \in H,\ \lambda, \mu \in \Lambda\right\}$, τότε $R \subseteq \ker\varphi$ (γιατί ;) επομένως $N = \langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \ker\varphi$. Από την καθολική συνθήκη ομάδας πηλίκο επάγεται μοναδικός ομομορφισμός $\vartheta\colon G \to H$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\vartheta"] & K \\ *_\lambda G_\lambda \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Τότε, από την μεταθετικότητα των παραπάνω διαγραμμάτων έχουμε ότι για κάθε λ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\vartheta"] & & K \\
& *_\lambda G_\lambda \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[ur, "\varphi"] & \\
& G_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[uul, bend left, "\pi_\lambda"] \arrow[uur, bend right, "\vartheta_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου $\pi_\lambda = \pi \circ i_\lambda$. Έτσι έχουμε ότι $\vartheta \circ \pi_\lambda = \vartheta_\lambda$, δηλαδή το ζητούμενο. Δείξτε ότι ϑ είναι ο μοναδικός με αυτή την ιδιότητα "ακολουθώντας" τα παραπάνω διαγράμματα. ■

Ορισμός 4. Έστω $\varphi_i : H \to G_i,\ i = 1, 2$ μονομορφισμοί και $G = G_1 *_H G_2$ το αντίστοιχο γινόμενο με αμάγλαμα και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός. Μια **ανηγμένη μορφή** ενός στοιχείου g στην G είναι μια έκφραση $g = \pi(g_1)\cdots\pi(g_n)$, όπου κάθε $g_i \in G_1 \cup G_2$, διαδοχικά g_i δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα G_1 ή G_2 και για κάθε i έχουμε $g_i \notin \varphi_1(H) \cup \varphi_2(H)$ εκτός αν $n = 1$.

115. (α) Κάθε στοιχείο της G μπορεί να γραφεί σε ανηγμένη μορφή.

(β) Αν $g = \pi(g_1)\pi(g_2)\cdots\pi(g_n)$ με $n \geq 2$, τότε $g \neq 1$.

(γ) Αν $\varphi_i(H)$ γνήσια υποομάδα της G_i $i = 1, 2$, τότε η ομάδα G περιέχει στοιχεία απείρου τάξης.

(δ) Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης της G είναι συζυγές με στοιχείο ενός παράγοντα G_i.

Υπόδειξη(α),(β) Άμεσο αφού κάθε $g \in G$ έχει γράφεται μοναδικά στη μορφή $g = \pi(x_0)\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)$, όπου $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ μια $\varphi_1(H)$ - κανονική μορφή.

(γ) Έστω $g_i \in G_i \smallsetminus \varphi_i(H)$. Τότε το στοιχείο $g = \pi(g_1)\pi(g_2)$ έχει άπειρη τάξη από το (β).

(δ) Όμοια με την Άσκηση 98.

■

116. Έστω G_1, G_2 υποομάδες μιας ομάδας G και $H = G_1 \cap G_2$. Υποθέτουμε ότι η G παράγεται από τις G_1 και G_2. Έστω $\varphi\colon G1 *_H G_2 \to G$ ο επιμορφισμός που επάγεται από τις ενθέσεις των G_1 και G_2 στην G. Αποδείξτε ότι ο φ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν κάθε γινόμενο $g_1 \cdots g_n$ στην G, όπου κάθε παράγοντας g_k ανήκει στο $G_1 \smallsetminus H$ ή στο $G_2 \smallsetminus H$ και διαδοχικοί παράγοντες δεν ανήκουν στο ίδιο σύνολο $G_i \smallsetminus H$, είναι διάφορο του 1.

Υπόδειξη. Μέσω των ενθέσεων $j_1\colon G_1 \hookrightarrow G$ και $j_2\colon G_2 \hookrightarrow G$, από την καθολολική συνθήκη των ελεύθερων γινομένων επάγεται επιμορφισμός $\psi\colon G_1 * G_2 \to G$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "j_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, "\psi"] & G \\
G_2 \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "j_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Παρατηρήστε ότι αν N η κανονική υποομάδα της G του αμαλγάματος, τότε $N \subseteq \ker \psi$, επομένως από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο επάγεται επιμορφισμός $\varphi\colon G_1 *_H G_2 \to G$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[drr, bend left, "j_1"] & & \\
& G_1 *_H G_2 \arrow[r, "\varphi"] & G \\
G_2 \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[urr, bend right, "j_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

όπου π_i οι περιορισμοί του φυσικού επιμορφισμού $\pi\colon G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ στην G_i. Συνεπώς φ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν είναι 1-1 αν και μόνο αν $\varphi(g) \neq 1$ για αν $g = \pi(g_1) \cdots \pi(g_n)$ με $g \neq 1$. Ιδιαιτέρως, από τα παραπάνω διαγράμματα έχουμε ότι $\varphi \circ \pi(g_i) = \psi(g_i) = g_i$. Επομένως, έχουμε ότι $\varphi(g) = g_1 \cdots g_n$. Άρα, φ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $g_1 \cdots g_n \neq 1$, όπου όπου κάθε παράγοντας g_k ανήκει στο $G_1 \smallsetminus H$ ή στο $G_2 \smallsetminus H$ και διαδοχικοί παράγοντες δεν ανήκουν στο ίδιο σύνολο $G_i \smallsetminus H$. ∎

117. Έστω $G = G_1 *_A G_2$ και H_1, H_2 υποομάδες των G_1, G_2, αντίστοιχα, με $H_1 \cap A = H_2 \cap A = 1$. Να δειχθεί ότι η υποομάδα της G που παράγεται από τις (εικόνες των) H_1 και H_2 είναι ισόμορφη με το ελεύθερό τους γινόμενο. Δηλαδή, $\langle H_1, H_2 \rangle \cong H_1 * H_2$.

Υπόδειξη. Έστω $h = \pi(h_1) \cdots \pi(h_n)$ με $n \geq 2$, όπου διαδοχικά $\pi(g_i)$ ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες, $\pi(g_i) \neq 1$. Αφού $H_1 \cap A = 1$ και $H_2 \cap A = 1$, από την Άσκηση 115 (β) έχουμε ότι $h \neq 1$, άρα $\langle H_1, H_2 \rangle \cong H_1 * H_2$. ■

118. Έστω $\varphi_i : H \to G_i,\ i = 1, 2$ μονομορφισμοί, $G = G_1 *_H G_2$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός. Αποδείξτε ότι $Z(G_1 *_H G_2) = H \cap Z(G_1) \cap Z(G_2)$ (για την ακρίβεια $\pi(H) \cap Z(\pi(G_1)) \cap Z(\pi(G_2))$), όπου με $Z(G)$ συμβολίζουμε το κέντρο μια ομάδος G.