Γεωμετρία II

Ασκήσεις

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

29 Νοεμβρίου 2021

Θεματικές Ενότητες:

- Καμπυλότητα κανονικής καμπύλης
- Επίπεδες καμπύλες και προσημασμένη καμπυλότητα

Περιεχόμενα

1 Ασκήσεις

1 (*)**.** 1. Βρείτε μια παραμέτρηση γ, κανονική, για τον κύκλο

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2\right\}, \ R > 0.$$

2. Βρείτε μια αναπαραμέτρηση $\tilde{\gamma}$, μοναδιαίας ταχύτητας, για την παραπάνω παραμέτρηση που βρήκατε.

3. Υπολογίστε την καμπυλότητα της $\tilde{\gamma}$.

2 (**)**.** Έστω $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ παραμετρική καμπύλη και $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$ δύο αναπαραμετρήσεις μοναδιαίας ταχύτητας της γ. Δείξτε ότι οι $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$ έχουν την ίδια καμπυλότητα.

3 (*)**.** Μια κυκλική έλικα με άξονα τον άξονα z είναι μια καμπύλη της μορφής

$$\gamma(\vartheta) = (a\cos\vartheta, a\sin\vartheta, b\vartheta) \ ,$$

όπου a, b σταθερές. Υπολογίστε την καμπυλότητα μια τέτοιας γ.

4 (*)**.** Υπολογίστε την καμπυλότητα των παρακάτων καμπυλών :

(i) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in (-1,1)$

(ii) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$,

(iii) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$,

(iv) $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

5 (**)**.** Δείξτε ότι, εαν η καμπυλότητα $\kappa(t)$ μιας κανονικής καμπύλης $\gamma(t)$ είναι παντού θετική, τότε η $\kappa(t)$ είναι λεία συνάρτηση του t. Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι αυτό μπορεί να μην ισχύει χωρίς την υπόθεση > 0.

Συμβολισμός 1. Παρακάτω με τον συμβολισμό $\mathbf{T}(t)$ θα εννοούμε το μοναδιαίου εφαπτόμενο διάνυσμα και $\mathbf{n}(t)$ το προσημασμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα μιας καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t)$.

6 (**)**.** (i) Δείξτε ότι αν γ είναι μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε

$$\dot{\mathbf{n}}_s = -\kappa_s \mathbf{T}.$$

(ii) Δείξτε ότι αν γ μια κανονική επίπεδη καμπύλη, τότε

$$\dot{\mathbf{n}}(t) = -\kappa_\gamma(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \mathbf{T}(t)$$

όπου κ_γ η προσημασμένη καμπυλότητα της γ.

7 (*). Δείξτε ότι η προσημασμένη καμπυλότητα κάθε κανονικής καμπύλης $\gamma(t)$ είναι λεία συνάρτηση του t.

8 (*).

1. Αν $\gamma(s)$ είναι μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $\varphi(s)$ μια γωνία περιστροφής της γ, τότε
$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds} \ ,$$
όπου κ_s η προσημασμένη καμπυλότητα της γ.

2. Δείξτε ανάλογο αποτέλεσμα στην περίπτωση που γ είναι κανονική (όχι κατ΄ ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας).

9 (**). Αν $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, λεία συνάρτηση, να βρείτε τη προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης
$$\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (f(t)\cos t, f(t)\sin t)\,.$$

10 (*). Έστω $\gamma\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ λεία με
$$\left\|\dot{\gamma(t)}\right\| = t, \quad \kappa_\gamma(t) = t^2 \ ,$$
όπου κ_γ η προσημασμένη καμπυλότητα της γ. Να βρείτε την προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης
$$b(t) = \gamma(t) + \mathbf{n}(t).$$

11 (*). Έστω καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ μοναδιαίας ταχύτητας, όπου I ανοικτό διάστημα, με προσημασμένη καμπυλότητα $\kappa_\gamma(s) = s$ να βρείτε την προσημασμένη καμπυλότητα της
$$b(s) = \mathbf{T}(s) + s \cdot \mathbf{n}(s).$$

12 (*). Για καμπύλη $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ με δοθέντα $\|\dot{\gamma}\|, \kappa_\gamma$ (προσημασμένη καμπυλότητα) να βρείτε την προσημασμένη καμπυλότητα της αντίστοιχης b όταν

(i) $\|\gamma(t)\| = e^t,\ \kappa_\gamma(t) = t$ και $b(t) = \gamma(t) + t \cdot \mathbf{T}(t)$,

(ii) $\|\gamma(s)\| = 1,\ \kappa_\gamma(s) = \frac{1}{s}$ και $b(s) = \gamma(s) + s \cdot \mathbf{n}(s)$.

13 (*). Να βρεθεί μια καμπύλη $\gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ με

(i) $\|\dot{\gamma}(t)\| = t,\ \kappa_{\gamma(t)} = \frac{1}{t}$,

(ii) $\|\dot{\gamma}(t)\| = t,\ \kappa_{\gamma(t)} = -1$,

(iii) $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1,\ \kappa_{\gamma(s)} = \frac{1}{s}$,

(iv) $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1,\ \kappa_{\gamma(t)} = \frac{1}{2\sqrt{s}}$,

(v) $\|\dot{\gamma}(t)\| = t,\ \kappa_{\gamma(t)} = \frac{2}{3t^{4/3}}$.

14 (*)**.** Να βρεθεί καμπύλη $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa_\gamma(s) = 1,\ \dot{\gamma}(0) = (0,1)$ και $\gamma(0) = (0,0)$.

15 (**)**.** (i) Να βρεθούν όλες οι λείες και κανονικές καμπύλες των οποίων όλες οι εφαπτομένες διέρχονται από σταθερό σημείο.

(ii) Να βρεθούν όλες οι λείες και κανονικές καμπύλες των οποίων όλες οι κάθετες διέρχονται από σταθερό σημείο.

(iii) Να βρεθούν όλες οι λείες και κανονικές καμπύλες των οποίων όλες οι διχοτόμοι καθέτου και εφαπτομένης διέρχονται από σταθερό σημείο.

16 (**)**.** Να βρεθούν η ταχύτητα $\|\dot{\gamma}(t)\|$ και η προσημασμένη καμπυλότητα $\kappa_\gamma(t)$ λείας και κανονικής καμπύλης $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ τέτοιος ώστε να ισχύουν οι συνθήκες

(i) $\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

(ii) η ευθεία που διέρχεται από το $\gamma(t) + \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \mathbf{n}(t)$ και είναι παράλληλη στο $\mathbf{T}(t)$, διέρχεται από σταθερό σημείο.

17 (***)**.** Έστω γ και $\tilde{\gamma}$ δύο επίπεδες καμπύλες.

(α) Δείξτε ότι, εαν η $\tilde{\gamma}$ προκύπτει από την γ με εφαρμογή μιας ισομετρίας M του $\mathbb{R}^2$, τότε οι προσημασμένες καμπυλότητες κ_s και $\tilde{\kappa}_s$ είναι ίσες εαν η M είναι ευθεία ισομετρία, αλλά $\tilde{\kappa}_s = -\kappa_s$ εαν η M είναι αντίθετη ισομετρία (ειδικότερα, οι $\gamma, \tilde{\gamma}$ έχουν την ίδια καμπυλότητα).

(β) Δείξτε, αντιστρόφως, ότι εαν οι γ και $\tilde{\gamma}$ έχουν την ίδια πουθενά μηδενική καμπυλότητα, τότε η $\tilde{\gamma}$ προκύπτει από εφαρμογή μιας ισομετρίας του $\mathbb{R}^2$.

18 (*). Δίνεται η λεία καμπύλη $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = e^t \quad \text{και} \quad \mathbf{T}(t) = \left(\cos\left(e^t\right), \sin\left(e^t\right)\right) \ ,$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (όπου $\mathbf{T}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο της γ).

1. Να βρείτε συνάρτηση φ ώστε η $b(s) = \gamma(\varphi(s))$ να είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.
2. Να υπολογίσετε την προσημασμένη καμπυλότητα της $\gamma(t)$ ως συνάρτηση του t.

19 (*). Έστω $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση. Να βρεθεί μία κανονική παραμέτρηση γ του γραφήματός της και να προσδιοριστεί η προσημασμένη καμπυλότητά της.

2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. 1. Είναι σαφές ότι η παραμετρική καμπύλη $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t)$$

είναι παραμέτρηση του C.

2. Έστω s η συνάρτηση μήκους τόξου της παραπάνω γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma(0)$, δηλαδή

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du = \int_0^t R du = Rt.$$

Συνεπώς αν $s(t) = Rt \Rightarrow t = \frac{s}{R}$ δηλαδή ισχύει ότι η

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\frac{s}{R}\right) = \left(x_0 + R\cos\left(\frac{s}{R}\right), y_0 + R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

3. Παρατηρήστε ότι για την παραπάνω $\tilde{\gamma}$ ισχύει ότι $\left\|\ddot{\tilde{\gamma}}(s)\right\| = \frac{1}{R}$, συνεπώς ισχύει ότι η καμπυλότητα της $\tilde{\gamma}$ ισούται με

$$\kappa(s) = \left\|\ddot{\tilde{\gamma}}(s)\right\| = \frac{1}{R}.$$

2. Αφού $\tilde{\gamma}$ και $\hat{\gamma}$ αναπαραμετρήσεις μοναδιαίας ταχύτητας της γ ισχύει ότι υπάρχουν συναρτήσεις φ, ψ λείες 1-1 και επί με τις αντίστοιχες αντίστροφές του λείες ώστε

$$\tilde{\gamma}(\varphi) = \gamma(t) = \hat{\gamma}(\psi).$$

Από γνωστή πρόταση έχουμε ότι $\varphi = \pm s + c_1$ και $\psi = \pm s + c_2$ όπου s η συνάρτηση μήκους τόξους της γ (με τυχόν σημείο εκκίνησης) και c_1, c_2 σταθερές. Έτσι προκύπτει ότι

$$\varphi = \pm\psi + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\varphi} = \frac{d\hat{\gamma}}{d\varphi} = \frac{d\hat{\gamma}}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} = \pm\frac{d\hat{\gamma}}{d\psi}.$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{d\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\pm\frac{d\hat{\gamma}}{d\psi}\right) = \frac{d^2\hat{\gamma}}{d\psi^2}.$$

Αφού οι καμπύλες $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας είναι σαφές ότι έχουν ίσες καμπυλότητες.

3. Για $a, b \in \mathbb{R}^2$ (όχι και τα δύο μηδέν) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\vartheta) &= (-a\sin\vartheta, a\cos\vartheta, b) \\ \ddot{\gamma}(\vartheta) &= (-a\cos\vartheta, -a\sin\vartheta, 0) \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$ και

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\vartheta & a\cos\vartheta & b \\ -a\cos\vartheta & -a\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| = |a|\sqrt{a^2+b^2}.$$

Άρα τελικά έχουμε ότι η καμπυλότητα της γ ισούται με

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{|a|}{a^2+b^2}.$$

4. (i) Παρατηρήστε ότι $\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+t}, -\frac{1}{2}\sqrt{1-t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, δηλαδή $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, συνεπώς αφού

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{4\sqrt{1+t}}, \frac{1}{4\sqrt{1-t}}, 0\right)$$

έχουμε ότι

$$k(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1-t^2}}.$$

(ii) Παρατηρήστε ότι $\dot{\gamma}(t) = \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t\right)$, δηλαδή $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$. Συνεπώς αφού

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right),$$

δηλαδή ισχύει ότι $\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = 1$.

(iii) Έχουμε ότι $\gamma(t) = (t, \cosh t) = \left(t, \frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\dot{\gamma}(t) = \left(1, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = (1, \sinh t) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \cosh t.$$

Άρα ισχύει ότι $\ddot{\gamma}(t) = (0, \cosh t)$ δηλαδή έχουμε ότι

$$(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot e_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sinh t \\ 0 & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh t.$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$\kappa(t) = \frac{|(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot e_3|}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

(iv) Όμοια με (iii).

5. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας, καθώς αν γ κανονική καμπύλη και $\tilde{\gamma}$ αναπαραμέτρηση μήκους τόξου της γ ισχύει ότι $\kappa_\gamma(t) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s)$, άρα αν $\kappa_{\tilde{\gamma}}$ λεία τότε κ_γ είναι λεία ως σύνθεση των $\kappa_{\tilde{\gamma}}$ και s που είναι λείες συναρτήσεις του t.

Τώρα, αν $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε ισχύει ότι $\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}\|$. Αν $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \cdots, \gamma_n(s))$ με γ_i λείες συναρτήσεις του s, τότε ισχύει ότι

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \sqrt{(\ddot{\gamma_1}(s))^2 + \cdots + (\ddot{\gamma_n}(s))^2}.$$

Αφού η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι λεία στο $(0, +\infty)$ και $\ddot{\gamma_i}$ λείες συναρτήσεις του s, τότε κ είναι λεία ως σύνθεση τέτοιων.

6. 1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $(\mathbf{T}(s), \mathbf{n}(s))$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, συνεπώς υπάρχουν συναρτήσεις $a(s), b(s)$ ώστε

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = a(s) \cdot \mathbf{T}(s) + b(s) \cdot \mathbf{n}(s).$$

Επίσης ισχύει ότι $a = \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}$ και $b = \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}$. Αφού $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$, για κάθε s ισχύει ότι $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$ για κάθε s. Τώρα, ισχύει ότι

$$(0)' = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})' = \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{T} = -\kappa\ ,$$

όπου κ η καμπυλότητα της γ (αυτό ισχύει αφού $\dot{\mathbf{T}} = \kappa \cdot \mathbf{n}$). Από τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

2. Αν γ είναι κανονική, θεωρούμε $\tilde{\gamma}$ αναπαραμέτρηση μήκους τόξους της γ, ώστε $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$. Άρα, θα ισχύει ότι

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\kappa_\gamma(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \mathbf{T}(t).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί αν $\tilde{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο κάθετο της $\tilde{\gamma}$ τότε ισχύει ότι $\mathbf{n}(t) = \tilde{\mathbf{n}}(s)$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\tilde{\mathbf{n}}}{ds} = -\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(s) = -\kappa_\gamma(t) \cdot \mathbf{T}(t).$$

7. Γνωρίζουμε ότι $\dot{\mathbf{T}}(t) = \|\dot{\gamma}(t)| \cdot \kappa_\gamma(t) \cdot \mathbf{n}(t)$. Άρα, ισχύει ότι

$$\kappa_\gamma(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| = \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}(t) \Rightarrow \kappa_\gamma(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Αφού $\|\dot{\gamma}\|, \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{n}$ είναι λείες συναρτήσεις του t ($\mathbf{n}$ προκύπτει από τη στροφή του $\mathbf{T}$ κατά ορθή γωνία αντιωρολογιακά), τότε η κ_γ είναι λεία συνάρτηση του t.

8. 1. Έχουμε ότι

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))) \Rightarrow \ddot{\gamma}(s) = \dot{\varphi}(s) \cdot (-\sin(\varphi), \cos(\varphi)).$$

Όμως παρατηρήστε ότι $\mathbf{n}(s) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$, όπου $\mathbf{n}$ το προσημασμένο κάθετο της γ. Αφού $\ddot{\gamma}(s) = \kappa_s \cdot \mathbf{n}(s)$, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $\dot{\varphi}(s) = \kappa_s$.

2. Αν γ κανονική ισχύει ότι υπάρχει $\tilde{\gamma}$ αναπαραμέτρηση μήκους τόξους της γ ώστε $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$. Είναι σαφές ότι, αν $\tilde{\varphi}$ η γωνία περιστροφής της $\tilde{\gamma}$, ότι $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(t)$, όπου φ η γωνία περιστροφής της γ. Έτσι ισχύει ότι

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| = \kappa_{\gamma}(t) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

9. Ένας τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα είναι με τις συνήθεις πράξεις, οι οποίες όμως είναι αρκετά πολύπλοκες, και με τον παρακάτω τρόπο αποφεύγονται. Θέτουμε $u(t) = (\cos t, \sin t)$ και $v(t) = (-\sin t, \cos t)$. Παρατηρούμε ότι το $\{u(t), v(t)\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική, θετικά προσανατολισμένη βάση του $\mathbb{R}^2$, για κάθε $t \in (a, b)$. Τότε ισχύει ότι $\gamma(t) = f(t) \cdot u(t)$, δηλαδή έχουμε ότι

$$\dot{\gamma}(t) = f'(t) \cdot u(t) + f(t) \cdot v(t) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2 + f^2(t)}.$$

Επίσης, αφού ισχύει ότι $v'(t) = -u(t)$, έχουμε ότι

$$\ddot{\gamma}(t) = \left[f''(t) - f(t)\right] \cdot u(t) + 2f'(t) \cdot v(t).$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot e_3 = \begin{vmatrix} f'(t) & f(t) \\ f''(t) - f(t) & 2'f(t) \end{vmatrix} = \left(f'(t)\right)^2 - f''(t) \cdot f(t) + f^2(t).$$

Συνεπώς η προσημασμένη καμπυλότητα της γ ισούται με

$$\kappa_{\gamma}(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot e_3}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{(f'(t))^2 - f''(t) \cdot f(t) + f^2(t)}{\left[(f'(t))^2 + f^2(t)\right]^{3/2}}.$$

10. Για να υπολογίσουμε την προσημασμένη καμπυλότητα της b θα γράψουμε τις ποσότητα $\dot{b}, \ddot{b}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{T}, \mathbf{n}$, τα εφαπτόμενα και προσημασμένα κάθετα διανύσματα της γ αντίστοιχα, γνωρίζοντας ότι το σύνολο $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{n}(t)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και μάλιστα θετικά προσανατολισμένη. Αυτό γιατί αν $\{u, v\}$ μια ορθοκανονική, θετικά προσανατολισμένη βάση του $\mathbb{R}^2$, τότε αν $w = a_1 u + a_2 v$ ισχύει ότι $\|w\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ και για $z = b_1 u + b_2 v$ ισχύει ότι

$$(w \times z) \cdot e_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$\dot{b}(t) = \dot{\gamma}(t) + \dot{\mathbf{n}}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \mathbf{T}(t) - \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \kappa_\gamma(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \left(t - t^3\right) \cdot \mathbf{T}(t).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\ddot{b}(t) = \left(1 - 3t^2\right) \mathbf{T}(t) + \left(t - t^3\right) t^3 \mathbf{n}(t).$$

Συνεπώς από τις παραπάνω παρατηρήσεις ισχύει ότι

$$\left\|\dot{b}(t)\right\| = t - t^3 \quad \text{και} \quad \left(\dot{b}(t) \times \ddot{b}(t)\right) \cdot e_3 = \begin{vmatrix} t - t^3 & 0 \\ 1 - 3t^2 & t^3\left(t - t^3\right) \end{vmatrix} = t^3\left(t - t^3\right)^2.$$

Επομένως η προσημασμένη καμπυλότητα του b ισούται με

$$\kappa_b(t) = \frac{\left(\dot{b}(t) \times \ddot{b}(t)\right) \cdot e_3}{\left\|\dot{b}(t)\right\|^3} = \frac{t^3}{t - t^3}.$$

11. Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο της Άσκησης 10. Έχουμε ότι

$$\dot{b}(s) = \dot{\mathbf{T}}(s) + \mathbf{n}(s) + s \cdot \dot{\mathbf{n}}(s) = -s^2 \cdot \mathbf{T}(s) + (s+1)\mathbf{n}(s).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\ddot{b}(s) = [-s(s+3)] \cdot \mathbf{T}(s) + \left(1 - s^3\right) \cdot \mathbf{n}(s).$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\left\|\dot{b}(s)\right\| = \sqrt{s^4 + (s+1)^2} \quad \text{και} \quad \left(\dot{b}(s) \times \ddot{b}(s)\right) \cdot e_3 = \begin{vmatrix} -s^2 & s+1 \\ -s(s+3) & 1 - s^3 \end{vmatrix} = \cdots$$

12. (i) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= \dot{\gamma}(t) + \mathbf{T}(t) + t\dot{\mathbf{T}}(s) = \left(e^t + 1\right) + t^2 e^t \mathbf{n}(t) \\ \Rightarrow \left\|\dot{b}(t)\right\| &= \sqrt{\left(e^t + 1\right)^2 + t^4 e^{2t}}. \end{aligned}$$

και $\ddot{b}(t) = a(t) \cdot \mathbf{T}(t) + b(t) \cdot \mathbf{n}(t)$ με

$$a(t) = e^t - t^3 e^{2t} \quad \text{και} \quad b(t) = te^t\left(e^t + 1\right) + e^t\left(t^2 + 2t\right).$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\kappa_b(t) = \frac{\left(\dot{b}(t) \times \ddot{b}(t)\right) \cdot e_3}{\left\|\dot{b}(t)\right\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} e^t + 1 & t^2 e^t \\ a(t) & b(t) \end{vmatrix}}{\left(\left(e^t + 1\right)^2 + t^4 e^{2t}\right)^{3/2}}.$$

(ii) Έχουμε ότι

$$\dot{b}(s) = \dot{\gamma}(s) + \mathbf{n}(s) + s\dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(s) \Rightarrow \left\|\dot{b}(s)\right\| = 1$$

και

$$\ddot{b}(s) = \dot{\mathbf{n}}(s) = -\frac{1}{s} \cdot \mathbf{T}(s).$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\kappa_b(s) = \frac{\left(\dot{b}(s) \times \ddot{b}(s)\right) \cdot e_3}{\left\|\dot{b}(s)\right\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{s} & 0 \end{vmatrix}}{1^3} = \frac{1}{s}.$$

13. Από την Άσκηση 8 (ii) αν $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ γνωρίζουμε ότι

$$\frac{d\varphi}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \kappa_\gamma(t) \tag{1}$$

και ότι

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\|\dot{\gamma}(t)\| \cos\varphi(t), \|\dot{\gamma}(t)\| \sin\varphi(t)\right). \tag{2}$$

(i) Αρχικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\varphi}{dt} = t \cdot \frac{1}{t} = 1.$$

Συνεπώς η $\varphi(t) = t$ είναι μια λύση της παραπάνω διαφορική εξίσωση. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\gamma(t) = \left(\int t\cos t dt, \int t\sin t dt\right)$$

όπου παρατηρήστε ότι ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

(ii) Αρχικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\varphi}{dt} = t \cdot (-1) = -t.$$

Συνεπώς η $\varphi(t) = -\frac{t^2}{2}$ είναι μια λύση της παραπάνω διαφορική εξίσωση. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\gamma(t) = \left(\int t\cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \int -t\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt\right)$$

όπου παρατηρήστε ότι ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Τα υπόλοιπα ερωτήματα λύνονται με τον ίδιο τρόπο.

14. Αναζητούμε καμπύλη γ λεία και κανονική που να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα αρκεί να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $\|\dot{\gamma}\|, \kappa_\gamma(t)$. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, γιατί αν δεν είναι μπορούμε να θεωρήσουμε αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας.

(i) Έστω $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ μοναδιαίας ταχύτητας τέτοια ώστε όλες οι εφαπτόμενες να διέρχονται από σταθερό σημείο. Δηλαδή υπάρχει σταθερό $p \in \mathbb{R}^2$ ώστε $\gamma(s) - p \parallel \dot{\gamma}(s)$, για κάθε $s \in I$. Συνεπώς υπάρχει $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\gamma(s) - p = \lambda(s) \cdot \mathbf{T}(s), \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι λ είναι λεία αφού $\lambda(s) = (\gamma(s) - p) \cdot \mathbf{T}(s)$. Άρα παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{\lambda}(s) \cdot \mathbf{T}(s) + \lambda(s) \cdot \dot{\mathbf{T}}(s) \Leftrightarrow \mathbf{T}(s) = \dot{\lambda}(s) \cdot \mathbf{T}(s) - \lambda(s) \cdot \kappa_\gamma(s)\mathbf{n}(s).$$

Αφού για κάθε $s \in I$ τα $\mathbf{T}(s), \mathbf{n}(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}(s) = 1 \Rightarrow \lambda(s) = s + c \\ &\lambda(s) \cdot \kappa_\gamma(s) = 0 \Rightarrow (s + c) \cdot \kappa_{\gamma(s)} \end{aligned}$$

Δηλαδή $\kappa_\gamma(s) = 0$ για κάθε $s \in I \setminus \{0\}$. Όμως η γ είναι κανονική άρα από Άσκηση 7 η κ_γ είναι λεία άρα και συνεχής, δηλαδή $\kappa_\gamma(s) = 0$ για κάθε $s \in I$.

(ii) Εφαρμόστε την παραπάνω μέθοδο για την περίπτωση όπου υπάρχει σταθερό $p \in \mathbb{R}^2$ ώστε $\gamma(s) - p \parallel \mathbf{n}(s)$, για κάθε $s \in I$.

(iii) Εφαρμόστε την παραπάνω μέθοδο για την περίπτωση όπου υπάρχει σταθερό $p \in \mathbb{R}^2$ ώστε $\gamma(s) - p \parallel \mathbf{T}(s) + \mathbf{n}(s)$, για κάθε $s \in I$.

15. Για κάθε $t \in I$, υπάρχει $p \in \mathbb{R}^2$ σταθερό, ώστε $\gamma(t) + \|\dot{\gamma}\| \cdot \mathbf{n}(t) - p \parallel \mathbf{T}(t)$. Συνεπώς, υπάρχει $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\gamma(t) + \|\dot{\gamma}\| \cdot \mathbf{n}(t) - p = \lambda(t) \cdot \mathbf{T}(t) \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι λ είναι λεία συνάρτηση του t αφού ισχύει ότι

$$\lambda(t) = (\gamma(t) + \|\dot{\gamma}\| \cdot \mathbf{n}(t) - p) \cdot \mathbf{T}(t).$$

Παραγωγίζοντας την σχέση 3 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \dot{\gamma}(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|' \cdot \mathbf{n}(t) + \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \dot{\mathbf{n}}(t) = \dot{\lambda}(t) \cdot \mathbf{T}(t) + \lambda(t) \cdot \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \Rightarrow \ & \|\dot{\gamma}(t)\|' \cdot \mathbf{n}(t) = \dot{\lambda}(t) \cdot \mathbf{T}(t) + \lambda(t) \cdot \mathbf{n}(t) \\ \Rightarrow \ & \begin{cases} \dot{\lambda}(t) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = c_1 \in \mathbb{R} \\ \lambda(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' = c_1 \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = c_2 t + c_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Αν $c_1 = 0$, τότε από υπόθεση $c_2 \neq 0$, δηλαδή $\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{c_2}$, άρα παριστάνει κύκλο ακτίνας c_2. Αν $c_1 \neq 0$ έχουμε ότι

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = c_2 t + c_1, \quad \text{και} \quad \kappa_\gamma(t) = \frac{1}{c_2 t + c_1},\ t \neq -\frac{c_1}{c_2}.$$

16. Αναζητούμε φ λεία ώστε $\frac{d\varphi}{ds} = \kappa_\gamma(s) = 1 \Rightarrow \varphi(s) = s + c$ και καμπύλη γ ώστε $\dot{\gamma}(0) = (0,1),\ \gamma(t) = (0,0)$ και

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) \Rightarrow \dot{\gamma}(0) = (0,1) = (\cos c, \sin c)\,.$$

Συνεπώς μια επιλογή για την φ είναι η $\varphi(s) = s + \frac{\pi}{2}$. Τώρα, αφού θέλουμε $\gamma(0) = (0,0)$ μια επιλογή για την γ είναι η

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt, \int_0^s \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt \right) = (\cos s - 1, \sin s)\,.$$

17. (α) Υποθέτουμε ότι η $\tilde{\gamma}$ προκύπτει από την γ με εφαρμογή μιας ισομετρίας M, δηλαδή υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $a \in \mathbb{R}^2$ ώστε

$$\tilde{\gamma}(t) = P \cdot \gamma(t) + a \Rightarrow \dot{\tilde{\gamma}}(t) = P \cdot \dot{\gamma}(t) \tag{4}$$

όπου είναι σαφές ότι $\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\right\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$, για κάθε t. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν M είναι ευθεία ισομετρία, τότε ο P είναι της μορφής $P = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ για κάποια γωνία ϑ. Συνεπώς, αν $\tilde{\varphi}, \varphi$ οι γωνίες περιστροφής των $\tilde{\gamma}, \gamma$ αντίστοιχα, από την σχέση 4 ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \left(\left\|\dot{\tilde{\gamma}}\right\| \cos\tilde{\varphi}, \|\dot{\gamma}\| \sin\tilde{\varphi}\right) = M\left(\|\dot{\gamma}\|\cos\varphi, \|\dot{\gamma}\|\sin\varphi\right)^T \\ \Rightarrow \ & (\cos\tilde{\varphi}(t), \sin\tilde{\varphi}(t)) = (\cos(\varphi(t) + \vartheta), \sin(\varphi(t) + \vartheta)) \\ \Rightarrow \ & \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \left\|\dot{\tilde{\gamma}}\right\| \cdot \kappa_{\tilde{\gamma}} = \|\dot{\gamma}\| \cdot \kappa_\gamma(t) \Rightarrow \kappa_{\tilde{\gamma}} = \kappa_\gamma(t) \end{aligned}$$

- Αν M είναι αντίθετη ισομετρία ο P ο P είναι της μορφής $P = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix}$ για κάποια γωνία ϑ. Συνεπώς, αν $\tilde{\varphi}, \varphi$ οι γωνίες περιστροφής των $\tilde{\gamma}, \gamma$ αντίστοιχα, από την σχέση 4 ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &\left(\|\dot{\tilde{\gamma}}\| \cos\tilde{\varphi}, \|\dot{\gamma}\| \sin\tilde{\varphi}\right) = M\left(\|\dot{\gamma}\|\cos\varphi, \|\dot{\gamma}\|\sin\varphi\right)^T \\ \Rightarrow\ &(\cos\tilde{\varphi}(t), \sin\tilde{\varphi}(t)) = \left(\cos\left(\vartheta - \varphi(t)\right), \sin\left(\vartheta - \varphi(t)\right)\right) \\ \Rightarrow\ &\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \|\dot{\tilde{\gamma}}\| \cdot \kappa_{\tilde{\gamma}} = -\|\dot{\gamma}\| \cdot \kappa_\gamma(t) \Rightarrow \kappa_{\tilde{\gamma}} = -\kappa_\gamma(t) \end{aligned}$$

(β) Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος Καμπυλών στο $\mathbb{R}^2$. [1]

18. (α) Έστω s η συνάρτηση μήκους τόξου της γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma(0)$. Έτσι έχουμε ότι $s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\| = e^t - 1$. Τότε αν $\psi(t) = s(t) + 1 = e^t$ έχουμε ότι $\varphi(s) = \psi^{-1}(s) = \log s$ για $s > 0$, επομένως η καμπύλη $b(s) = \gamma \circ \varphi(s)$ είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

(β) Έχουμε ότι $\mathbf{n}(t) = \left(-\sin\left(e^t\right), \cos\left(e^t\right)\right)$ και επίσης γνωρίζουμε ότι

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(te^t\right)' \cdot \left(-\sin\left(e^t\right), \cos\left(e^t\right)\right) = \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \kappa_\gamma(t) \cdot \mathbf{n}(t) \Rightarrow \kappa_\gamma(t) = t + 1.$$

19. Έχουμε ότι $\mathrm{Gr}_f = \{(x, f(x)) \colon x \in (a, b)\}$, συνεπώς μια κανονική παραμέτρηση της Gr_f είναι η παραμετρική καμπύλη $\gamma \colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = \{t, f(t))$. Έχουμε ότι $\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t))$ και $\ddot{\gamma}(t) = (0, f''(t))$, έτσι προκύπτει ότι

$$\kappa_{\gamma(t)} = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \cdot e_3}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f'(t) \\ 0 & f''(t) \end{vmatrix}}{\left[1 + (f'(t))^2\right]^{3/2}} = \frac{f''(t)}{\left[1 + (f'(t))^2\right]^{3/2}}.$$

[1] Βλέπε Elementary Differential Geometry, Andrew Pressley Θεώρημα 2.2.6 σελ. 48

3 Αναφορές

(α) ''Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία'' , Andrew Pressley

(β) ''Σημειώσεις διαφορικής Γεωμετρίας Εαρινό Εξάμηνο 2020-21'' Μελάς Α.

(γ) '' Σημειώσεις στη διαφορική γεωμετρία των καμπυλών και επιφανειών '' Βασιλείου Ε., Παπατριανταφύλλου Μ.

(δ) ''Differential geometry of curves and surfaces"", Manfredo P. Do Carmo