***Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών***

# Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

**- Ασκήσεις -**

22 Φεβρουαρίου 2021

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

# Περιεχόμενα

# Μέρος I

# Ο Ευκλείδειος Χώρος $\mathbb{R}^n$

# Κεφάλαιο 1

# Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$, ακολουθίες και στοιχεία τοπολογίας

## 1.1 Ασκήσεις

1.1 Αποδείξτε την ανισότητα του Cauchy-Schwarz : Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $x$ και $y$ είναι συγγραμμικά.

1.2 Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: Για $x, y \in \mathbb{R}^n,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.Αποδείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y = \lambda x$ ή $x = \lambda y$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0$.Επίσης αποδείξτε τις ακόλουθες παραλλαγές της τριγωνικής ανισότητας:

(α΄) Για $x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ ,

(β΄) Για $x, y \in \mathbb{R}^n,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

1.3 Αποδείξτε την ταυτότητα $\|\|x\|^2 y - \langle x, y\rangle x\|^2 = \|x\|^2(\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2)$ για $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.4 Αποδείξτε την ταυτότητα του Lagrange : Για $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει :

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (\langle x, y\rangle)^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} (x_j y_i - x_i y_j)^2.$$

1.5 Αποδείξτε ότι για τα δύο διανύσματα $\vec{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ και $\vec{v} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ στο χώρο $\mathbb{R}^n$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec{u}, \vec{v}$ δίνεται από τον τύπο :

$$E = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle)^2} = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} \left[\det\begin{bmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{bmatrix}\right]^2}$$

1.6 Αποδείξτε ότι για τα τρία διανύσματα $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\ \vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},\ \vec{w} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$,ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων:

$$V = |\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}|$$

1.7 Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου $(a, b, c)$ από το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι $\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

1.8 Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες-του $k \to \infty$ − στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει:

(αʹ) $a_k = (\frac{k-1}{2k+1}, \frac{2k^2-1}{\sqrt{3k^4+k^3+1}})$

(βʹ) $a_k = ((-1)^k \frac{k-1}{2k+1}, \frac{k^2-1}{k^3+1})$

(γʹ) $a_k = (\frac{1}{k}, k)$

(δʹ) $a_k = (\frac{\cos k}{k}, \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}})$

(εʹ) $a_k = (\frac{1}{k}, \sqrt[k]{k!})$

(ϛʹ) $a_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k k)$

1.9 Αν $\lambda_k$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και η ακολουθία $(\lambda_k, k\lambda_k)$ είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\lambda_k \to 0$.

1.10 Αν η ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο $p$ του $\mathbb{R}^n$ και η ακολουθία $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείου $q$ του $\mathbb{R}^n$ και αν $p \neq q$ δείξτε ότι η ακολουθία $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots$ δεν είναι συγκλίνουσα.

1.11 Αποδείξτε το θεώρημα:

**1.1.1.** *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες.*

1.12 Αποδείξτε το θεώρημα:

**1.1.2.** *Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

1.13 Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$.Αποδείξτε ότι το $F$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x \in F$.

1.14 Έστω ότι $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \cdots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.Αποδείξτε ότι τότε η τομή τους είναι επίσης μη κενή: $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.

1.15 **Σημεία συσσώρευσης και σημεία επαφής**: Έστω $A$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A$ αν για κάθε $\epsilon > 0$,η μπάλα $B(p, \epsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του $A$ διαφορετικό από το $p$, δηλαδή $B(p, \epsilon) \cap A - \{p\} \neq \emptyset$.Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in A'$.Ένα σημείο του συνόλου $A$ το οποίο δεν είναι σημείο συσσωρευσής του λέγεται ότι είναι **μεμονωμένο σημείο** του $A$.Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο επαφής** του συνόλου $A$ αν για κάθε $\epsilon > 0$, η μπάλα $B(p, \epsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του $A$, δηλαδή $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in \bar{A}$.

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες.

(αʹ) Το σημείο $p \in A'$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A - \{p\}$ με $a_k \to p$.

(βʹ) Το σημείο $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A$ με $a_k \to p$.

(γʹ) Για κάθε σύνολο $A$, $\bar{A} = A \cup A'$.

(δʹ) Αν $p \in A'$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$, το σύνολο $B(p, \epsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(εʹ) Το σύνολο $\bar{A}$ είναι κλειστό, μάλιστα δε είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το $A$, δηλαδή $\bar{A} = \bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F$ κλειστό και $F \supset A\}$.

(ϛʹ) Το σύνολο $A'$ είναι πάντοτε κλειστό.

1.16 Δείξτε ότι $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Είναι σωστό ότι $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;

1.17 Υπάρχει ακολουθία $a_k$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο $x$ του $\mathbb{R}^n$ να υπάρχει υπακολουθία της $a_k$ η οποία να συγκλίνει στο $x$;

## 1.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

1.1 Αποδείξτε την ανισότητα του Cauchy-Schwarz : Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $x$ και $y$ είναι συγγραμμικά.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.Τότε παρατηρήστε ότι :

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 \Leftrightarrow 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \Leftrightarrow 0 \leq \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 ,$$

όπου προκύπτει το παραπάνω τριώνυμο ως προς $\lambda$.Έτσι πρέπει να ισχύει το εξής :

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\langle x, y\rangle)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| .$$

Τέλος παρατηρήστε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\|x - \lambda y\| = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y$. ■

1.2 Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: Για $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.Αποδείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y = \lambda x$ ή $x = \lambda y$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.Επίσης αποδείξτε τις ακόλουθες παραλλαγές της τριγωνικής ανισότητας:

(α΄) Για $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ ,

(β΄) Για $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$.Υπολογίζουμε λοιπόν ως εξής :

$$(\|x + y\|)^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 ,$$

όπου η ανισότητα βασίζεται στο αποτέλεσμα της Άσκησης 1.1. Επίσης παρατηρήστε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$, δηλαδή από Άσκηση 1.1, αν και μόνο αν $x = \lambda y$ ή $y = \lambda x$ για $\lambda \geq 0$. Τώρα ας εξετάσουμε διάφορες παραλλαγές της τριγωνικής ανισότητας :

(α΄) Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ και υπολογίζουμε ως εξής :

$$\|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| .$$

(β΄) Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και υπολογίζουμε ως εξής :

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| .$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$, άρα συμπεραίνουμε ότι ισχύει το εξής :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

■

1.3 Αποδείξτε την ταυτότητα $\|\|x\|^2 y - \langle x, y\rangle x\|^2 = \|x\|^2(\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2)$ για $x, y \in \mathbb{R}^n$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ και υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\|\|x\|^2 y - \langle x, y\rangle x\|^2 = \langle \|x\|^2 y - \langle x, y\rangle x, \|x\|^2 y - \langle x, y\rangle x\rangle$$

$$\|y\|^2\|x\|^4 - \|x\|^2|\langle x, y\rangle|^2 = \|x\|^2(\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2) .$$

■

1.4 Αποδείξτε την ταυτότητα του Lagrange : Για $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει :

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (\langle x, y\rangle)^2 = \sum_{1\le i,j\le n} (x_j y_i - x_i y_j)^2 \ .$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε διανύσματα $x = (x_1, \cdots, x_n)$ και $y = (y_1, \cdots, y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$.Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\|x\|^2\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=0}^{n} y_k^2 = \sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i^2 y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} x_i^2 y_j^2 \tag{1.1}$$

επίσης έχουμε το εξής :

$$(\langle x, y\rangle)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i b_i a_j b_j \tag{1.2}$$

Επίσης παρατηρήστε το εξής :

$$\sum_{1\le i<j\le n} (x_j y_i - x_i y_j)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_j x_j y_i) \tag{1.3}$$

δηλαδή προκύπτει το εξής :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i^2 y_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} x_i^2 y_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i y_i x_j y_j \tag{1.4}$$

Αφαιρώντας λοιπόν τις σχέσεις 1.1 και 1.2 προκύπτει η σχέση 1.4, δηλαδή το ζητούμενο αποτέλεσμα

■

1.5 Αποδείξτε ότι για τα δύο διανύσματα $\vec{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ και $\vec{v} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ στο χώρο $\mathbb{R}^n$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec{u}, \vec{v}$ δίνεται από τον τύπο :

$$E = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle)^2} = \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n}\left[\det\begin{bmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k\end{bmatrix}\right]^2}$$

*Υπόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι αν $\vec{u} = (a_1, \cdots, a_n),\ \vec{v} = (b_1, \cdots b_n) \in \mathbb{R}^n$ το εμβαδόν που παράγεται από τα $\vec{u}, \vec{v}$ ισούται με $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$, όπου $\theta$ η ' γωνία ' που σχηματίζουν τα $\vec{u}, \vec{v}$.Άρα υπολογίζουμε ως εξής :

$$(\text{Εμβ}(\vec{u}, \vec{v}))^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\sin^2(\theta) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos^2(\theta)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι Εμβ$(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle^2}$ ή από την Άσκηση 1.4 προκύπτει

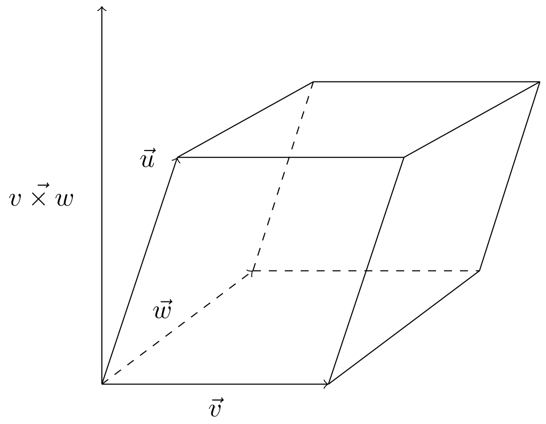
$$\text{Εμβ}(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n}\left[\det\begin{bmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k\end{bmatrix}\right]^2} \ .$$

■

1.6 Αποδείξτε ότι για τα τρία διανύσματα $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\ \vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},\ \vec{w} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$,ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων:

$$V = |\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}|$$

*Υπόδειξη.* Χωρίς βλάβη της γενικότητας, παρατηρούμε γεωμετρικά το παραλληλεπίπεδο που παράγουν τα διανύσματα $u, v, w$.




Έτσι αν $\theta$ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $v \times w$ και $u$ το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι η προβολή του $u$ στο $v \times w$.Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου υπολογίζεται ως εξής : $V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ = Εμβαδόν βάσης $\cdot$ ύψος $= |\|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|c\| \cos\theta| = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}|$, όπου γνωρίζουμε ότι $|(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}|| = |\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}|$, δηλαδή το ζητούμενο.

**Σημείωση.** *Για το μεικτό γινόμενο ισχύει* $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, *όμως μέσω γραμμοπράξεων στο παραπάνω πίνακα και λόγω της απόλυτης τιμής έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.* ■

1.7 Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου $(a, b, c)$ από το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι $\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

*Υπόδειξη.* Έστω $(\Pi) : Ax + By + Cz + D = 0$ επίπεδο και σημείο $A = (a, b, c)$.Έστω $P = (x_0, y_0, z_0)$ η προβολή του $A$ στο επίπεδο $(\Pi)$, δηλαδή $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.Παρατηρήστε το εξής :

$$Aa + Bb + Cc + D = A(a - x_0) + B(b - y_0 + C(c - z_0) \qquad (1.5)$$

Έτσι από τη παραπάνω σχέση προκύπτει το εξής :

$$|Aa + Bb + Cc + D| = A(a - x_0) + B(b - y_0 + C(c - z_0) = |\langle \vec{\ell}, \vec{AP} \rangle| = \|\vec{\ell}\| d\ ,$$

όπου $\ell = (A, B, C)$, το οποίο είναι κάθετο στο $(\Pi)$, και $d = \|\vec{AP}\|$ η ζητούμενη απόσταση.Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε το εξής :

$$d = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

■

1.8 Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες-του $k \to \infty$ – στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει:

(α΄) $a_k = (\frac{k-1}{2k+1}, \frac{2k^2-1}{\sqrt{3k^4+k^3+1}})$

(β΄) $a_k = ((-1)^k \frac{k-1}{2k+1}, \frac{k^2-1}{k^3+1})$

(γ΄) $a_k = (\frac{1}{k}, k)$

(δ΄) $a_k = (\frac{\cos k}{k}, \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}})$

(ε΄) $a_k = (\frac{1}{k}, \sqrt[k]{k!})$

(ϛ΄) $a_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k k)$

*Υπόδειξη.* Για να εξετάσουμε τη σύγκλιση των παρακάτω ακολουθιών αρκεί να εξετάσουμε τη σύγκλιση των ακολουθιών κατά συντεταγμένη.

(α΄) Παρατηρούμε ότι για $k \to \infty$ ισχύει ότι $\frac{k-1}{2k+1} \to \frac{1}{2}$ και $\frac{2k^2-1}{\sqrt{3k^4+k^3+1}} \to \frac{2}{\sqrt{3}}$, άρα συμπεραίνουμε ότι $a_k \to (\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

(β΄) Η $a_k$ δεν συγκλίνει, αφού αν $b_k = (-1)^k \frac{k-1}{2k+1}$, τότε $b_{2k} \to \frac{1}{2}$ και $b_{2k-1} \to -\frac{1}{2}$.

(γ΄) Η $a_k$ δεν συγκλίνει, αφού ισχύει ότι $b_k = k \to \infty$.

(δ΄) Έχουμε ότι $\frac{\cos k}{k} < \frac{1}{k}$, άρα είναι σαφές ότι $\frac{\cos k}{k} \to 0$.Επίσης γνωρίζουμε ότι $\sqrt[k]{k} \to 1$, για $k \to \infty$.Τέλος αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι $\sqrt[k]{2 - \sin k} \to 1$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $a_k \to (0, 1)$.

(ε΄) Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι $\sqrt[k]{k!} \to \infty$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $a_k$ αποκλίνει.

(ϛ΄) Στο ερώτημα (γ΄) δείξαμε ότι $|a_k|$ αποκλίνει, άρα είναι σαφές ότι και η $a_k$ αποκλίνει.

■

1.9 Αν $\lambda_k$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και η ακολουθία $(\lambda_k, k\lambda_k)$ είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\lambda_k \to 0$.

*Υπόδειξη.* Έχουμε ότι η ακολουθία $(\lambda_k, k\lambda_k)$ συγκλίνει, άρα υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με $(\lambda_k, k\lambda_k) \to (a, b)$.Έτσι παρατηρήστε ότι $\lambda_k = \frac{k\lambda_k}{k} \to b \cdot 0 = a$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\lambda_k \to 0$. ■

1.10 Αν η ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο $p$ του $\mathbb{R}^n$ και η ακολουθία $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείου $q$ του $\mathbb{R}^n$ και αν $p \neq q$ δείξτε ότι η ακολουθία $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots$ δεν είναι συγκλίνουσα.

*Υπόδειξη.* Έστω ότι η ακολουθία $x_k = (a_1, b_1, a_2, \cdots)$ συγκλίνει.Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, ώστε να ισχύει $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.Παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = x = p$ και $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = x = q$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $p = x = q$, δηλαδή οδηγούμαστε σε άτοπο. ■

1.11 Αποδείξτε το θεώρημα:

**1.2.1.** *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον* $\mathbb{R}^n$ *έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες.*

*Υπόδειξη.* Έστω $x_m = (x_m(1), \cdots, x_m(n))$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$. Αν η $(x_m)$ είναι φραγμένη, τότε η $(x_m(1))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο $\mathbb{R}$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_m}(1))$ : $x_{k_m}(1) \to x_1$. Η υπακολουθία $(x_{k_m})$ της $(x_m)$ έχει λοιπόν συγκλίνουσα πρώτη συντεταγμένη. Η $(x_{k_m}(2))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_m}})(2))$ : $x_{k_{\lambda_m}}(2) \to x(2)$.Παρατηρήστε ότι $x_{k_{\lambda_m}}(1) \to x(1)$, διότι η $x_{k_m}(1) \to x_1$ και η $(x_{k_{\lambda_m}})(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_m}(1)$.Αρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_m}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την $n$-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας $n$ διαδοχικές υπακολουθίες της $(x_m)$ βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Γνωρίζουμε ότι η σύγκλιση ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη, συνεπώς η $(x_m)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. ■

1.12 Αποδείξτε το θεώρημα:

**1.2.2.** *Μια ακολουθία στον* $\mathbb{R}^n$ *είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

*Υπόδειξη.* Αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι είναι βασική. Αντίστροφα, αν μια ακολουθία $(x_n)$ είναι βασική είναι και φραγμένη, άρα από την Άσκηση 1.11 έχει συγκλίνουσα υποκολουθία.Αφού η ακολουθία $(x_n)$ είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει. ■

1.13 Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$.Αποδείξτε ότι το $F$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x \in F$.

*Υπόδειξη.* Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και υποθέτουμε ότι υπάρχει $(x_k) \subseteq F$ με $x_k \to x$ και $x \in F^c$.Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει ότι $\|x_k - x\| < \epsilon$.Όμως αφού το $F$ είναι κλειστό έπεται ότι το $F^c$ είναι ανοικτό και αφού $x \in F^c$ ισχύει ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(x,r) \subseteq F^c$.Έτσι υπάρχει $k_0(r)$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει ότι $x_k \in B(x,r) \subseteq F^c$ το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ακολουθία $x_k \in F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x \in F$ και $F$ δεν είναι κλειστό, δηλαδή $F^c$ δεν είναι ανοικτό.Υπάρχει λοιπόν $x \in F^c$, όπου για κάθε $\epsilon > 0$ : $B(x,\epsilon) \nsubseteq F^c$.Για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots$ επαγωγικά ορίζουμε $(x_k) \subseteq F$ με $\|x_k - x\| < \frac{1}{n}$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $x_k \to x$ και από την αρχική υπόθεση έπεται ότι $x \in F$ το οποίο είναι άτοπο. ■

1.14 Έστω ότι $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \cdots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.Αποδείξτε ότι τότε η τομή τους είναι επίσης μη κενή: $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.

*Υπόδειξη.* Έχουμε ότι $F_j \neq \emptyset$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots$ έτσι για κάθε $j$ υπάρχει $x_j \in F_j$.Έτσι επαγωγικά κατασκευάζεται ακολουθία $(x_n)$ με $x_k \in F_k$.Έχουμε ότι $(x_n) \subseteq F_1$ το οποίο είναι φραγμένο, άρα από την Άσκηση 1.11 υπάρχει $(x_{k_n})$ υπακολουθία της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}^n$.Θα δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$.Πράγματι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε $(x_{k_n+m}) \subseteq F_{k_n+m} \subseteq F_m$ και $x_{k_n+m} \to x$ ως υπακολουθία της $(x_{k_n})$.Όμως το $F_m$ είναι κλειστό, άρα από την Άσκηση 1.13 έχουμε ότι $x \in F_m$.Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, δηλαδή ισχύει ότι $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. ■

1.15 **Σημεία συσσώρευσης και σημεία επαφής**: Έστω $A$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου $A$ αν για κάθε $\epsilon > 0$,η μπάλα $B(p,\epsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του $A$ διαφορετικό από το $p$, δηλαδή $B(p,\epsilon) \cap A - \{p\} \neq \emptyset$.Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in A'$.Ένα σημείο του συνόλου $A$ το οποίο δεν είναι σημείο συσσωρευσής του λέγεται ότι είναι **μεμονωμένο σημείο** του $A$.Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο επαφής** του συνόλου $A$ αν για κάθε $\epsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\epsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του $A$, δηλαδή $B(p,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in \bar{A}$.

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α΄) Το σημείο $p \in A'$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A - \{p\}$ με $a_k \to p$.

(β΄) Το σημείο $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A$ με $a_k \to p$.

(γ΄) Για κάθε σύνολο $A$, $\bar{A} = A \cup A'$.

(δ΄) Αν $p \in A'$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$, το σύνολο $B(p,\epsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(ε΄) Το σύνολο $\bar{A}$ είναι κλειστό, μάλιστα δε είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το $A$, δηλαδή $\bar{A} = \bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F$ κλειστό και $F \supset A\}$.

(ϛ΄) Το σύνολο $A'$ είναι πάντοτε κλειστό.

*Υπόδειξη.* (α΄) Θεωρούμε $p \in A'$, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $B(p,\epsilon) \cap A - \{p\} \neq \emptyset$.Για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots$ επαγωγικά κατασκευάζεται $(a_k) \subseteq A - \{p\}$ με $\|a_k - p\| < \frac{1}{n}$, δηλαδή ισχύει ότι $a_k \to p$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $(a_k) \subseteq A - \{p\}$ με $a_k \to p$.Έτσι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $\|a_{k_0} - p\| < \epsilon$ ισοδύναμα $a_{k_0} \in B(p,\epsilon)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0\ : B(x,p) \cap A - \{p\} \neq \emptyset \Leftrightarrow p \in A'$.

(β΄) Το ζητούμενο αποδεικνύεται όμοια με το (α΄).

(γ΄) Είναι άμεσο ότι $A \subseteq \overline{A}$ και $A' \subseteq \overline{A}$, άρα έχουμε ότι $A' \cup A \subset \overline{A}$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A}$ και $x \notin A$.Έτσι έχουμε πως για κάθε $\epsilon > 0\ : B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow B(x,\epsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$, δηλαδή ισχύει ότι $x \in A'$.Έτσι είναι σαφές ότι $\overline{A} \subseteq A' \cup A$, δηλαδή το ζητούμενο.

(δ΄) Έστω $p \in A'$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B(p,\epsilon) \cap A$ αν είναι πεπερασμένο.Έχουμε $p \in A'$, άρα υπάρχει $y \in B(p,\epsilon) \cap A$ με $y \neq p$.Συνεπώς το σύνολο $B(p,\epsilon) \cap A - \{p\}$ είναι μη κενό και πεπερασμένο.Το σύνολο γράφεται ως εξής : $B(p,\epsilon) \cap A - \{p\} = \{y_1, \cdots, y_k\}$ και ορίζουμε $\delta = \min\{\|p - y_i\|,\ i = 1, 2, \cdots, k\}$.Όμως $p \in A'$, άρα έχουμε ότι $B(p,\delta) \cap A - \{p\} \neq \emptyset$ δηλαδή υπάρχει $z \neq p$ με $z \in B(p,\delta) \cap A - \{p\} \subseteq B(p,\epsilon) \cap A - \{p\}$.Έτσι έχουμε ότι $z = y_i$ το οποίο είναι άτοπο, αφού $\|z - p\| < \delta \leq \|p - y_i\|$.

(ε΄) Αρχικά θα δείξουμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.Έστω $(x_n) \subseteq \overline{A}$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$.Για $\epsilon = 1$ αφού $x_1 \in \overline{A}$ έχουμε ότι υπάρχει $a_1 \in A$ με $\|a_1 - x_1\| < 1$.Επαγωγικά για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots$ κατασκευάζεται $(a_n) \subseteq A$ με $\|a_n - x_n\| < \frac{1}{n}$.Παρατηρήστε λοιπόν το εξής :

$$\|a_n - x\| \leq \|x_n - x\| + \|a_n - x_n\| < \|x_n - x\| + \frac{1}{n} \to 0\ .$$

Από (β΄) συμπεραίνουμε ότι $x \in \overline{A}$ και από Άσκηση 1.11 έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.

Τώρα μεσω του παραπάνω αποτελέσματος είναι σαφές ότι $\bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F$ κλειστό και $F \supset A\} \subseteq \overline{A}$.Τώρα έστω $A \subseteq F$ κλέιστό και $x \in \overline{A}$ δηλαδή υπάρχει $(x_n) \in A$ ώστε $x_n \to x$.Όμως $(x_n) \subseteq A \subseteq F$ με $x_n \to x$ και αφού το $F$ είναι κλειστό από την Άσκηση 1.11 έχουμε ότι $x \in F$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $x \in \bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F$ κλειστό και $F \supset A\}$, δηλαδή το ζητούμενο.

(ϛ΄) Με βάση το αποτέλεσμα του (ε΄) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{A'} \subseteq A'$.Έστω $x \in \overline{A'}$ δηλαδή για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in B(x,\epsilon) \cap A'$.Αφού $B(x,\epsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο έχουμε ότι υπάρχει $r > 0$ με $B(y,r) \subseteq B(x,\epsilon)$ και αφού $y \in A'$ τότε από το (δ΄) έχουμε ότι $B(y,r) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο.Έτσι υπάρχει $a \in A$ με $a \neq x$ ώστε $a \in B(y,r) \subseteq B(x,\epsilon)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $B(x,\epsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ συνεπώς έχουμε ότι $x \in A'$.

■

1.16 Δείξτε ότι $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Είναι σωστό ότι $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;

*Υπόδειξη.* Έχουμε ότι $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ και από την Άσκηση 1.15 (ε΄) έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$.Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.Έτσι είναι σαφές ότι $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει την αντίστροφη σχέση 'περιέχεσθαι' . Το αντίστοιχο συμπέρασμα δεν είναι ισχύει και για την τομή δύο συνόλων.Για παράδειγμα παρατηρήστε ότι για $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, τότε έχουμε ότι $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$ ενώ $\overline{A \cap B} = \emptyset$. ■

1.17 Υπάρχει ακολουθία $a_k$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο $x$ του $\mathbb{R}^n$ να υπάρχει υπακολουθία της $a_k$ η οποία να συγκλίνει στο $x$ ;

# Κεφάλαιο 2

# Όρια και Συνέχεια

## 2.1 Ασκήσεις

2.1 Μελετήστε τα όρια :

(αʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(βʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(γʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$

(δʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4+y^4-1}{x^2+y^2-1}$

(εʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} \sin(x^4+y^4)$

(ϛʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$

(ζʹ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$

2.2 Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2} = 0$, τί συμπέρασμα βγάζετε ; Ομοίως αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

2.3 Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \text{αν } y \neq 0 \\ 0 & \text{αν } y = 0 \end{cases}.$$

Δείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχει και είναι $0$. Ακόμη τα μερικά όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ υπάρχουν, για κάθε $y$ και είναι όλα $0$. Αλλά τα μερικά όρια $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχουν για κανένα $x \neq 0$.

2.4 Θεωρήστε συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \text{ ορισμένη για } (x,y) \neq (0,0)\ .$$

Δείξτε ότι τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα : $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = 0$, αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

2.5 Για $x+y\neq 0$, ορίστε την συνάρτηση $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ (στα σημεία όπου $x+y=0$ μπορούμε να δώσουμε οποιεσδήποτε τιμές). Δείξτε $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=-1$ ενώ $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=1$, και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

2.6 Αποδείξτε ότι αν $f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $x$ και $y$, ορισμένη για $(x,y)\in\Omega-\{(a,b)\}$, (όπου $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(a,b)\in\Omega$) και αν

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\ell \text{ και το μερικό όριο } \lim_{x\to a} f(x,y) \text{ υπάρχει } (\forall y\neq b)$$

τότε υπάρχει και το διαδοχικό όριο $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$ και μάλιστα $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))=\ell$.

2.7 Είναι η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, συνεχής για κάποιο $a$ ;

2.8 Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^n$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $F\subseteq\mathbb{R}^m$ κλειστό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο $A$.

2.9 Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^n$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $U\subseteq\mathbb{R}^m$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $A$.

2.10 Αποδείξτε τα ακόλουθα θεωρήματα.

**2.1.1.** *Ένα υποσύνολο $E$ του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων του $E$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία συγκλίνει μέσα στο $E$.*

**2.1.2.** *Ένα σύνολο $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε άπειρο υποσύνολό του έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης που να ανήκει μέσα στο σύνολο $E$.*

**2.1.3.** *Έστω ότι $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f:E\to\mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση.Τότε το σύνολο $f(E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.Δηλαδή, συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές.*

**2.1.4.** *Έστω ότι $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f:E\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.Τότε υπάρχουν σημεία $p,q\in E$ ούτως ώστε $f(q)\leq f(x)\leq f(p)$ για κάθε $x\in E$.Δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.Και ιδιαιτέρως, αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in E$, τότε $\inf\{f(x):x\in E\}>0$.*

**2.1.5.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)=0$.Τότε υπάρχει σημείο $p\in\mathbb{R}^n$ ούτως ώστε $f(p)=\max\{f(x):\text{για } x\in\mathbb{R}^n\}$.*

2.11 Αποδείξτε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.12 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.13 Αποδείξτε τα ακόλουθα θεωρήματα.

**2.1.6.** *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$.Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $x_k$ και $yk$ από το σύνολο $A$ με $\|x_k-y_k\|\to 0$ έπεται ότι $|f(x_k)-f(y_k)|\to 0$.*

**2.1.7.** *Έστω ότι $E\subseteq\mathbb{R}^m$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f:E\to\mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση.Τότε η συνάρτηση $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

2.14 Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$, θεωρήστε την συνάρτηση $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής :

$$\phi_A(x) = dist(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\},\ x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Αποδείξτε ότι $|\phi_A(x) - \phi_A(y)| \leq \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ιδιαιτέρως η συνάρτηση $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής.

2.15 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $dist(p, A) = 0$.

2.16 Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό σύνολο και $p \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι σημείο $a \in F$ έτσι ώστε $\|p - a\| = dist(p, F)$.

2.17 Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a \in F$ και $b \in K$ τέτοια ώστε $\|a - b\| = dist(F, K) = \inf\{\|x - y\| : x \in F, y \in K\}$. Αν το σύνολο $K$ υποτεθεί μόνο κλειστό, ισχύει το συμπέρασμα ; Αν $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, έπεται ότι $dist(F_1, F_2) > 0$ ;

2.18 Αν $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά σύνολα με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x) = 0$ όταν $x \in F_1$ και $f(x) = 1$ όταν $x \in F_2$.

## 2.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

2.1 Μελετήστε τα όρια :

(α΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(β΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(γ΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$

(δ΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4+y^4-1}{x^2+y^2-1}$

(ε΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)$

(ϛ΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$

(ζ΄) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$

*Υπόδειξη.* (α΄) Αν $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$, τότε παρατηρήστε ότι για $y = 0$ έχουμε $f(x,0) = 0 \to 0$ για $(x,y) \to (0,0)$, ενώ για $y = x$ έχουμε $f(x,x) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ για $(x,y) \to (0,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

(β΄) Αν $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ για $(x,y) \neq (0,0)$, τότε παρατηρήστε ότι για $y = \sqrt{|x|}$ έχουμε $f(x,\sqrt{|x|}) = \frac{|x|}{2x}$ το όριο δεν υπάρχει.

(γ΄) Αν $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$, τότε εφαρμόζοντας πολικές συντεταγμένες :

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r\sin 2\theta}{2(\cos\theta - \sin\theta)} = 0$$

(δ΄) Αν $f(x,y) = \frac{x^4+y^4-1}{x^2+y^2-1}$ για $(x,y) \neq (1,0)$, τότε παρατηρήστε ότι για $x = 1$ έχουμε $f(1,y) = y^2 \to 0$ για $(x,y) \to (1,0)$, ενώ για $y = 0$ έχουμε $f(x,0) = x^2+1 \to 2$ για $(x,y) \to (1,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

(ε΄) Αν $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)$ για $(x,y) \neq (0,0)$, τότε παρατηρήστε ότι για $u = x^2+y^2 \to 0$ για $(x,y) \to (0,0)$ έχουμε το εξής :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1\ .$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \cdot 1 = 0$.

(ϛ΄) Αν $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ για $(x,y) \neq (0,0)$, τότε παρατηρήστε ότι για $y = 0$ έχουμε $f(x,0) = 1 \to 1$ για $(x,y) \to (0,0)$, ενώ για $y = x$ έχουμε $f(x,x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \to \frac{2}{\sqrt{2}}$ για $(x,y) \to (0,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

(ζ) Αν $f(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$ για $(x,y)\neq(0,0)$, τότε θέτοντας $u=x^2+y^2\to 0$ για $(x,y)\to(0,0)$ έχουμε το εξής :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{u\to 0}\frac{e^u-u-1}{u}=0\ .$$

■

2.2 Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε ; Ομοίως αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

*Υπόδειξη*. Αν $f(x,y)=\frac{ax^2+bxy+cy^2}{x^2+y^2}$ για $(x,y)\neq(0,0)$, παρατηρήστε ότι για $y=0$ πρέπει $f(x,0)=a\to 0$ για $(x,y)\to(0,0)$, άρα $a=0$.Για $y=x$ παρατηρήστε ότι $f(x,x)=\frac{b+c}{2}\to 0$ για $(x,y)\to(0,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $c=-b$.Έχουμε δηλαδή ότι $f(x,y)=\frac{b(xy-y^2)}{x^2+y^2}$.Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει, άρα πρέπει να ισχύει $b=0$.Τελικά λοιπόν δείξαμε ότι $a=b=c=0$.Ομοίως και για το άλλο όριο. ■

2.3 Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \text{αν } y\neq 0\\ 0 & \text{αν } y=0\end{cases}.$$

Δείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχει και είναι 0. Ακόμη τα μερικά όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ υπάρχουν, για κάθε $y$ και είναι όλα 0. Αλλά τα μερικά όρια $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχουν για κανένα $x\neq 0$.

*Υπόδειξη*. Παρατηρήστε ότι για κάθε $y\neq 0$ έχουμε $|f(x,y)|\leq x\to 0$ για $(x,y)\to(0,0)$, άρα έχουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.Επίσης έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=0$ για $y\neq 0$ και είναι σαφές ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$ για $y=0$.Τέλος παρατηρήστε ότι το $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ δεν υπάρχει (για παράδειγμα θεωρήστε ακολουθίες $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ και $y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ και δείξτε ότι για $x_n\to 0$ και $y_n\to 0$ ισχύει ότι $f(x_n)\to 0$, ενώ $f(y_n)\to 1$) έτσι έχουμε ότι για κάθε $x\neq 0$ το $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχει. ■

2.4 Θεωρήστε συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\ \text{ορισμένη για } (x,y)\neq(0,0)\ .$$

Δείξτε ότι τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα : $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=0$, αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

*Υπόδειξη*. Παραρατηρήστε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, άρα είναι σαφές ότι $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=0$.Ομοίως δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=0$, δηλαδή το ζητούμενο.Τώρα παρατηρήστε ότι για $y=0$ έχουμε $f(x,0)=0\to 0$ για $(x,y)\to(0,0)$, ενώ για $y=x$ έχουμε $f(x,x)=1\to 1$ για $(x,y)\to(0,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. ■

2.5 Για $x+y\neq 0$, ορίστε την συνάρτηση $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ (στα σημεία όπου $x+y=0$ μπορούμε να δώσουμε οποιεσδήποτε τιμές). Δείξτε $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=-1$ ενώ $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=1$, και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι $\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$, άρα έχουμε ότι $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = -1$.Ομοίως δείξτε ότι $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 1$, δηλαδή το ζητούμενο.Τώρα παρατηρήστε ότι για $y = 0$ έχουμε $f(x,0) = 1 \to 1$ για $(x,y) \to (0,0)$, ενώ για $y = x$ έχουμε $f(x,x) = 0 \to 0$ για $(x,y) \to (0,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. ■

2.6 Αποδείξτε ότι αν $f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $x$ και $y$, ορισμένη για $(x,y) \in \Omega - \{(a,b)\}$, (όπου $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(a,b) \in \Omega$) και αν

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \text{ και το μερικό όριο } \lim_{x\to a} f(x,y) \text{ υπάρχει } (\forall y \neq b)$$

τότε υπάρχει και το διαδοχικό όριο $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$ και μάλιστα $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = \ell$.

*Υπόδειξη.* Έχουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ και έστω $\epsilon > 0$.Τότε υπάρχει $\delta > 0$, όπου για κάθε $(x,y) \in \Omega - \{(a,b)\}$ με $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$ ισχύει $|f(x,y) - \ell| < \epsilon/2$.Όμως το $\lim_{x\to a} f(x,y)$ υπάρχει, άρα για $x \to a$ έχουμε $|\lim_{x\to a} f(x,y) - \ell| \leq \epsilon/2 < \epsilon$, για $0 < |y-b| \leq \|(x,y)-(a,b)\| < \delta$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το διαδοχικό όριο $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$ υπάρχει και μάλιστα $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = \ell$ ■

2.7 Είναι η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, συνεχής για κάποιο $a$ ;

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι αν $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ για $x = 0$ και $y \neq 0$ έχουμε $f(0,y) = 0 \to 0$ για $(x,y) \to (0,0)$, ενώ για $y = x$ με $x \neq 0$ έχουμε $f(x,x) = \frac{1-\cos x^2}{4x^4} \to \frac{1}{8}$ για $(x,y) \to (0,0)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει, άρα η $f$ δεν είναι συνεχής για κάθε $a \in \mathbb{R}$. ■

2.8 Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^n$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο $A$.

*Υπόδειξη.* Αρχικά υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και έστω $(x_n) \subseteq f^{-1}(F)$ με $x_n \to x \in A$.Αφού η $f$ είναι συνεχής από *αρχή μεταφοράς* έχουμε ότι $f(x_n) = f(x)$ με $f(x_n) \subseteq F$.Αφού το $F$ είναι κλειστό έχουμε ότι $f(x) \in F$, δηλαδή $x \in f^{-1}(F)$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^m$, τότε και $f^{-1}(E)$ είναι κλειστό.Αρχικά θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχύρισμό :

**Ισχυρισμός.** *Αν ισχύει η παραπάνω υπόθεση, τότε για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό ισχύει ότι $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.*

*Απόδειξη.* Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό, άρα έχουμε ότι $\mathbb{R}^m \backslash G$ είναι κλειστό.Από την αρχική μας υπόθεση έχουμε ότι $f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash G)$ είναι κλειστό.Όμως παρατηρήστε ότι $f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash G) = A \backslash f^{-1}(G)$ κλειστό, άρα συμπεραίνουμε ότι $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό. ■

Έτσι έστω $x_0 \in A$ και $\epsilon > 0$.Έχουμε ότι $B(f(x),\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ανοικτό, άρα $f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon) \subseteq A$ ανοικτό και μάλιστα $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon)$.Έτσι υπάρχει $\delta > 0$, ώστε να ισχύει $B(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon)$, όπου προκύπτει ότι $f(B(x_0,\delta) \subseteq B(f(x_0),\epsilon)$.Έτσι είναι σαφές ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$. ■

2.9 Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^n$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $A$.

*Υπόδειξη.* Ακολουθήστε τα βήματα της Άσκησης 2.8 και χρησιμοποιήστε τον **Ισχυρισμό** της για να αποδείξετε το ζητούμενο. ■

2.10 Αποδείξτε τα ακόλουθα θεωρήματα.

**2.2.1.** *Ένα υποσύνολο $E$ του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων του $E$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία συγκλίνει μέσα στο $E$.*

**2.2.2.** *Ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε άπειρο υποσύνολό του έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης που να ανήκει μέσα στο σύνολο $E$.*

**2.2.3.** *Έστω ότι $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση.Τότε το σύνολο $f(E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.Δηλαδή, συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές.*

**2.2.4.** *Έστω ότι $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.Τότε υπάρχουν σημεία $p, q \in E$ ούτως ώστε $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ για κάθε $x \in E$.Δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.Και ιδιαιτέρως, αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$, τότε $\inf\{f(x) : x \in E\} > 0$.*

**2.2.5.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$.Τότε υπάρχει σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ ούτως ώστε $f(p) = \max\{f(x) : \text{για } x \in \mathbb{R}^n\}$.*

*Υπόδειξη.* **1.2.1.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές, δηλαδή το $E$ είναι κλειστό και φραγμένο.Από την Άσκηση 1.11 έχουμε ότι αν $(x_n) \subseteq \mathbb{E}$ έχει συγκλίνουσα υπάκολουθία, δηλαδή υπάρχει $x_{k_n}$ υπακολουθία της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}^n$.Όμως το $E$ είναι κλειστό, άρα προκύπτει ότι $x \in E$, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $E$.Έστω $(x_n) \subseteq E$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$.Όμως η $(x_n)$ από την αρχική υπόθεση έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to y \in E$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $x = y \in E$, δηλαδή το $E$ είναι κλειστό.Έστω πως το $E$ δεν είναι φραγμένο, δηλαδή για κάθε $x \in E$ και $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $E \not\subseteq B(x, \epsilon)$.Έστω $x_1 \in E$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $x_2 \in E$ με $\|x_2 - x_1\| \geq \epsilon$.Διαδοχικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m > n$, ώστε $\|x_m - x_n\| \geq \epsilon$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $(x_n)$ δεν είναι βασική κατ' επέκταση δεν έχει και συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

**1.2.2.** Έστω ότι το $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, δηλαδή από 1.2.1. για κάθε $(x_n) \subseteq E$ υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in E$.Έστω $A \subseteq E$ άπειρο στο πλήθος.Τότε υπάρχει $(x_n) \subseteq A$, όπου για κάθε $i \neq j$ ισχύει $x_i \neq x_j$ και από την αρχική υπόθεση υπάρχει $x_{k_n} \to x \in E$.Τώρα αφού για κάθε $i \neq j$ ισχύει $x_{k_i} \neq x_{k_j}$ μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $x_{k_{\ell_n}}$ της $x_{k_n}$ με $x_{k_{\ell_n}} \to x$ και $x_{k_{\ell_n}} \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από την Άσκηση 1.15 (α) έχουμε ότι $x \in A'$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $A \subseteq E$ άπειρο στο πλήθος ισχύει $A' \cap E \neq \emptyset$.Έστω τώρα $(x_n) \subseteq E$ και $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.Διακρίνουμε περιπτώσεις :

(i) Αν το $A$ είναι πεπερασμένο, τότε η $(x_n)$ έχει υπακολουθία τελικά σταθερή, δηλαδή συγκλίνουσα.

(ii) Έστω ότι το $A$ είναι άπειρο και από αρχική υπόθεση $A' \cap E \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x \in E$, όπου από την Άσκηση 1.15 (δ) ισχύει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $B(x, \epsilon) \cap A$ είναι άπειρο.Αφού το $A$ είναι άπειρο για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots$ υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots$ ώστε $\|x_{k_n} - x\| < \frac{1}{n}$, δηλαδή $x_{k_n} \to x \in E$.Έτσι από το 1.2.1 συμπεραίνουμε ότι το $E$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

**1.2.3.** Έστω $(y_n) \subseteq f(E)$, δηλαδή έχουμε ότι $y_n = f(x_n)$ με $(x_n) \subseteq E$.Αφού το $E$ είναι συμπαγές υπάρχει $x_{k_n} \to x \in E$ από 1.2.1. και από αρχή μεταφοράς (από τη συνέχεια της $f$) έχουμε ότι $f(x_{k_n}) \to f(x) \in f(E)$.Έτσι από το 1.2.1 συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f(E)$ είναι συμπαγές.

**1.2.4.** Στο 1.2.3. αποδείξαμε ότι το $f(E)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό και φραγμένο.Αφού το $f(E)$ είναι φραγμένο ισχύει ότι υπάρχει $u = \sup f(E)$ και από χαρακτηρισμό supremum υπάρχει $(f(x_n)) \subseteq f(E)$ με $f(x_n) \to u$.Όμως το $f(E)$ είναι κλειστό, άρα $u \in f(E)$, δηλαδή υπάρχει $p \in E$ ώστε να ισχύει $f(p) = u$.Ομοίως δείξτε το ίδιο για το $\inf f(E)$.Τώρα με βάση τα παραπάνω αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$ ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα ισχύει ότι υπάρχει $q \in E$, ώστε $f(q) = \inf f(E)$, όπου προκύπτει πως $\inf f(E) = f(q) > 0$.

**1.2.5.** Αν ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, τότε το ζητούμενο είναι άμεσο.Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(\xi) > 0$.Τότε έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$, ώστε για κάθε $\|x\| > M$ να ισχύει $0 \leq f(x) < f(\xi)$.Έχουμε ότι $\hat{B}(0, M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (εξηγήστε γιατί), άρα από το 1.2.4 η $f$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\hat{B}(0, M)$.Έστω ότι $\xi \notin \hat{B}(0, M)$, τότε $\|\xi\| > M$ και έχουμε ότι $f(\xi) < f(\xi)$ το οποίο είναι άτοπο.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $f(\xi) \leq f(p) = \max\{f(x) : x \in \hat{B}(0, M)\}$.Έτσι καταλήγουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(p)$, δηλαδή $f(p) = \max\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

■

2.11 Αποδείξτε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που γνωρίζουμε ότι έχει την εξής μορφή $f(x) = Ax$ με $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$.Αν $\|A\| = 0$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Υποθέτουμε τώρα ότι $\|A\| > 0$ και έστω $\epsilon > 0$.Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $\|x - y\| < \epsilon/\|A\|$ ισχύει το εξής

$$|f(x) - f(y)| = |Ax - Ay| = |A(x - y)| \leq \|A\| \cdot \|x - y\| < \epsilon.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**Σημείωση.** *Το ζητούμενο ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.Η απόδειξη του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.* ■

2.12 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι για $\epsilon = 1$ για κάθε $\delta > 0$ έχουμε ότι $x_\delta = \frac{1}{\delta}$ και $y_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ έχουμε ότι $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = \frac{\delta^2}{4} + 1 > 1$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. ■

2.13 Αποδείξτε τα ακόλουθα θεωρήματα.

**2.2.6.** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$.Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $x_k$ και $yk$ από το σύνολο $A$ με $\|x_k - y_k\| \to 0$ έπεται ότι $|f(x_k) - f(y_k)| \to 0$.*

**2.2.7.** *Έστω ότι $E \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση.Τότε η συνάρτηση $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

*Υπόδειξη.* **1.2.6.** Έστω ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και ακολουθίες $(x_k),(y_k) \subseteq A$ με $\|x_k - y_k\| \to 0$.Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $\|x-y\| < \delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.Έτσι υπάρχει $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|x_k - y_k\| < \delta$, δηλαδή $|f(x_k)-f(y_k)| < \epsilon$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $|f(x_k)-f(y_k)| \to 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός, αλλά η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.Έτσι έχουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ με $\|x-y\| < \delta$ ώστε $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$.Για $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots$ επαγωγικά υπάρχουν $(x_k),(y_k) \subseteq A$ με $\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}$ και $|f(x_k)-f(y_k)| \geq \epsilon$ το οποίο είναι άτοπο από την αρχική μας υπόθεση.

**1.2.7.** Υποθέτουμε ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.Τότε, μπορούμε να βρούμε $\epsilon > 0$ και ακολουθίες $(x_n),(y_n) \subseteq E$ ώστε $\|x_n - y_n\| \to 0$ αλλά $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Από την συμπάγεια του $E$ μπορούμε να βρούμε $(x_{k_n})$ υπακολουθία της $(x_n)$ και $x \in E$ ώστε $x_{k_n} \to x$.Τότε, από την

$$\|y_{k_n} - x\| \leq \|y_{k_n} - x_{k_n}\| - \|x_{k_n} - x\| \to 0$$

βλέπουμε ότι $y_{k_n} \to x$.Από τη συνέχεια της $f$ στο $x$ συμπεραίνουμε ότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(x)$.Τότε $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})|$, το οποίο είναι άτοπο. ■

2.14 Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$, θεωρήστε την συνάρτηση $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής :

$$\phi_A(x) = dist(x, A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\},\ x \in \mathbb{R}^n\ .$$

Αποδείξτε ότι $|\phi_A(x) - \phi_A(y)| \leq \|x-y\|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ιδιαιτέρως η συνάρτηση $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής.

*Υπόδειξη.* Έστω $\epsilon > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$.Από το χαρακτηρισμό infimum γνωρίζουμε ότι υπάρχει $a \in A$ ώστε $\|x-a\| < \phi_A(x) + \epsilon$.Έτσι προκύπτει το εξής :

$$\phi_A(y) \leq \|y-a\| \leq \|x-y\| + \|x-a\| < \|x-y\| + \phi_A(x) + \epsilon\ .$$

Το $\epsilon$ ήταν τυχόν, άρα συμπεραίνουμε ότι $\phi_A(x) - \phi_A(y) \leq \|x-y\|$.Όμοια αποδυκνύεται ότι $\phi_A(y) - \phi_A(x) \leq \|x-y\|$ και έχουμε το ζητούμενο.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $\phi_A$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.Έστω $\epsilon > 0$, τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $\|x-y\| < \epsilon$ έχουμε ότι $\|\phi_A(x) - \phi_A(y)\| \leq \|x-y\| < \epsilon$ δηλαδή το ζητούμενο. ■

2.15 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $dist(p, A) = 0$.

*Υπόδειξη.* Έστω $p \in \overline{A}$ ισοδύναμα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $dist(p, A) \leq \|p-a\| < \epsilon$, όπου από το χαρακτηρισμό infimum έπεται ότι $dist(p, A) = 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $dist(p, A) = 0$ ισοδύναμα από το χαρακτηρισμό infimum για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\|p-a\| < \epsilon$, δηλαδή $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $p \in \overline{A}$. ■

2.16 Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό σύνολο και $p \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι σημείο $a \in F$ έτσι ώστε $\|p-a\| = dist(p, F)$.

*Υπόδειξη.* Από το χαρακτηρισμό infimum μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(x_n) \subseteq F$ με $\|p - x_n\| \to dist(p, F)$.Παρατηρήστε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|x_n\| \leq \|p - x_n\| + \|p\| \Leftrightarrow \|x\| \leq dist(p, F) + \|p\|\ ,$$

δηλαδή η $(x_n)$ είναι φραγμένη.Τότε υπάρχει $(x_{k_n})$ υπακολουθία της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to a \in F$, αφού το $F$ είναι κλειστό.Άρα παρατηρούμε ότι $\|p - x_{k_n}\| \to \|p-a\|$ και $\|p - x_{k_n}\| \to dist(p, F)$.Από μοναδικότητα ορίου συμπεραίνουμε ότι $\|p-a\| = dist(p, F)$. ■

2.17 Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a \in F$ και $b \in K$ τέτοια ώστε $\|a-b\| = dist(F,K) = \inf\{\|x-y\| : x \in F, y \in K\}$. Αν το σύνολο $K$ υποτεθεί μόνο κλειστό, ισχύει το συμπέρασμα ; Αν $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, έπεται ότι $dist(F_1, F_2) > 0$ ;

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση $f : K \to \mathbb{R}$ με $f(x) = dist(x,F)$.Στην Άσκηση 2.14 αποδείξαμε ότι η $f$ είναι συνεχής και μάλιστα αφού το $K$ είναι συμπαγές από την Άσκηση 2.10 (1.2.4.) έχουμε ότι η $f$ παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $b \in K$ ώστε $dist(F,K) = f(b) = dist(b,F)$.Από την Άσκηση 2.16 έχουμε ότι υπάρχει $a \in F$ ώστε $\|a-b\| = dist(b,F) = dist(K,F)$.Είναι σαφές ότι $dist(F,K) = dist(K,F)$, άρα συμπεραίνουμε πως $\|a-b\| = dist(F,K)$.

Τώρα παρατηρήστε ότι για $F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ και $F_2 = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ έχουμε ότι $F_1, F_2$ είναι κλείστα (εξηγήστε γιατί) και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.Όμως έχουμε ότι $dist(F_1,F_2) \leq \frac{1}{|x|} \to 0$ για $x \to \infty$ και έτσι προκύπτει ότι $dist(F_1,F_2) = 0$. ■

2.18 Αν $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά σύνολα με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x) = 0$ όταν $x \in F_1$ και $f(x) = 1$ όταν $x \in F_2$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την εξής απεικόνιση :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{dist(x,F_1)}{dist(x,F_1) + dist(x,F_2)} .$$

Παρατηρήστε ότι $f$ είναι καλά ορισμένη αφού $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, συνεχής ως πηλικό συνεχών συναρτήσεων και μάλιστα ισχύει ότι $f(x) = 0$ όταν $x \in F_1$ και $f(x) = 1$ όταν $x \in F_2$.

**Σημείωση.** *Η συγκεκριμένη άσκηση είναι γνωστή και ως* ***Λήμμα του Urysohn*** *και γενικεύεται σε κάθε μετρικό χώρο* $(X, \rho)$. ■

# Μέρος II

# Διαφορικός Λογισμός

# Κεφάλαιο 3

# Διαφορικός Λογισμός στον $\mathbb{R}^n$ (i)

## 3.1 Ασκήσεις

3.1 Μια συνάρτηση μπορεί να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) και να μην είναι συνεχής.Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

3.2 Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$.

Είναι η συνάρτηση $f$ συνεχής ;

3.3 Βρείτε μια συνάρτηση $f(x,y)$,ορισμένη για $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ \textit{και} \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

3.4 Αποδείξτε το θεώρημα:

**3.1.1.** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,η οποία έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_i : \Omega \to \mathbb{R}$,για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$. Έστω ακόμη ότι οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι συνεχείς σε ένα σημείο $a \in \Omega$.Τότε η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$.*

3.5 Οι μερικές παράγωγοι μιας διαφορίσιμης συνάρτησης ενδέχεται να έχουν ασυνέχειες.Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

3.6 Αποδείξτε το θεώρημα:

**3.1.2.** *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κατα τόξα συνεκτικό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x_i = 0$ σε κάθε σημείο του συνόλου $\Omega$ για $i = 1, 2, \cdots, n$.Τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.*

3.7 Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - 1 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ και $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^y - x - 2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}$.

3.8 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$.Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν $\lambda<1$.

3.9 Αν υπάρχουν, υπολογίστε τα όρια

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-e^{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-x-|x|-|y|-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-x-\sqrt{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$

(iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-x-\sin(\sqrt{x^2+y^2})-1}{e^{|x|+|y|}-1}$.

3.10 Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^y=e^{y\log x},\ x>0,-\infty<y<\infty$,στα διάφορα σημεία.

3.11 Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης$f(x,y)=x^{y^x}=e^{(\log x)e^{x\log y}}$ στο σημείο $(2,3)$,καθώς και το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^{y^z}$ στο σημείο $(2,3,2)$.

3.12 Έστω $f(x,y)=(\sin x)^{\cos y}$.Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \dfrac{|f(x,y)-Ax-By-C|}{\sqrt{(x-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})^2}}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς $A,B,C$;

3.13 Σωστό ή Λάθος; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|}=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

3.14 Σωστό ή Λάθος; Αν $a,b,c>0$ τότε δεν υπάρχουν $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \frac{x^{y^z}-A-Bx-Cy-Dz+\sin(|x-a|+|y-b|+|z-c|)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

3.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos(x^2/y)]\sqrt{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$,δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της $f$ στο $(0,0)$.

3.16 Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθυνόμενες των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

3.17 Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση-σε κάποιο σημείο-και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό.Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Επίσης δείξτε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας-όταν διαφορίσουμε την σύνθεση $f(at,bt)$ ως προς $t$ για $t=0$ (όπου $a,b\in\mathbb{R}$ με $ab\neq0$).

3.18 Επαληθεύσατε τον κανόνα της αλυσίδας στις περιπτώσεις: $(i)$ $f(x,y) = x^3 e^{xy^2},\ x = t^2,\ y = \sin t$ $\quad (ii)$ $f(x,y) = x^y,\ x = t^2,\ y = t^3$ $\quad (iii)$ $(\log x)^y,\ x = e^t,\ y = t$

3.19 Θεωρήστε μια $C^1$-συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.Δείξτε ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq \big(\sup_{z\in\Omega} |\nabla f(z)|\big)|x-y|, \forall x, y \in \Omega$$

3.20 Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z = 2x^2 + y^2$,στο σημείο $(-1, 2, 6)$.

3.21 Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2 = 2x^2 + y^2$,στο σημείο $(-1, 2, \sqrt{6})$.

3.22 Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^2 + y^2 + 5z^2 = 16$,στο σημείο $(1, -3, 1)$.

3.23 Θεωρήστε την καμπύλη $C$ στο $xyz$-χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = y^2 - 3x^2$ και $z^2 + y^2 = 2$,και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $C$ στο σημείο $(0, 1, 1)$.

3.24 (Θεώρημα του Euler) Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$),δηλαδή $f(tx) = t^\lambda f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κάθε $t > 0$,αν και μόνο αν η $f$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lambda f(x)$.

3.25 Για $a_m \in \mathbb{R}$,θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{m=1}^{N} \frac{a_m}{(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \cdots + x_n^{2m})^{1/2m}}$ και δείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = -f$.

3.26 Θεωρήστε μια $C^1$-συνάρτηση $g = g(x, y, z) : B \to \mathbb{R}$ ορισμένο στο σύνολο

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

τέτοια ώστε $g(0, 0, 0) = 0$ και $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z)| \leq 1,\ |\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z)| \leq 2,\ |\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)| \leq 3$ για κάθε $(x, y, z) \in B$.

Αποδείξτε ότι $|g(x, y, z)| \leq \sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2)}$ για κάθε $(x, y, z) \in B$.

3.27 Έστω $f(x, y, z) = z(\sin x)^{\cos y}$.Βρείτε αριθμούς $A, B, C, D$ τέτοιους ώστε

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/4,\pi/4,1)} \frac{|f(x, y, z) - Ax - By - Cz - D|}{\sqrt{(x - \pi/4)^2 + (y - \pi/4)^2 + (z - 1)^2}}$$

## 3.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

3.1 Μια συνάρτηση μπορεί να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) και να μην είναι συνεχής.Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*Υπόδειξη.* Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

(α') $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ ,

(β') $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{0-0}{x}=0$ ,

(γ') $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ ,

(δ') $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{0-0}{x}=0$ .

Όμως έχουμε πως για $(x,y)\to(0,0)$, $f(x,0)=0\to 0$, ενώ $f(x,x)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$, άρα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ δέν υπάρχει, δηλαδή η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

■

3.2 Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$. Είναι η συνάρτηση $f$ συνεχής ;

*Υπόδειξη.* Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.Έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όμως το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει, άρα δεν υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.Τώρα έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$, όμως έχουμε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|y|}{y}$ δεν υπάρχει, άρα δεν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.Τέλος είναι άμεσο ότι $f$ είναι συνεχής. ■

3.3 Βρείτε μια συνάρτηση $f(x,y)$,ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\ \textit{και}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

*Υπόδειξη.* Έστω συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\ \textit{και}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Τότε υπολογίζουμε διαδοχικά ότι :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\Leftrightarrow f(x,y)=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx+h(y)\Leftrightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}log(x^2+y^2)+h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}+h'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}\Leftrightarrow h'(y)=0\Leftrightarrow h(y)=c,\ c\in\mathbb{R}$$

Για $c=0$, μια $f$ που ικανοποιεί τα ζητούμενα είναι η $f(x,y)=\dfrac{log(x^2+y^2)}{2}$. ■

3.4 Αποδείξτε το θεώρημα :

**3.2.1.** *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$,η οποία έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_i:\Omega\to\mathbb{R}$,για κάθε $i=1,2,\cdots,n$. Έστω ακόμη ότι οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι συνεχείς σε ένα σημείο $a\in\Omega$.Τότε η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$.*

*Υπόδειξη.* Θα δώσουμε μια ενδεικτική λύση για $n=2$. Θέλουμε να δείξουμε ότι,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

Έχουμε λοιπόν ότι $f(x,y)-f(a,b)=[f(x,y)-f(x,b)]+[f(x,b)-f(a,b)]$.Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. ως προς τη μεταβλητή $y$.Τότε έχουμε ότι $f(x,y)-f(x,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x,y))(y-b),\ b\leq\xi(x,y)\leq y$.Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. ως προς τη μεταβλητή $x$.Τότε έχουμε ότι $f(x,b)-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(h(x),b)(x-a),\ a\leq h(x)\leq x$.Διαδοχικά υπολογίζουμε ότι :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x,y))-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)](y-b)+[\frac{\partial f}{\partial x}(h(x),b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)](x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}.$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε πως ισχύει $|\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}|\leq 1$, δηλαδή προκύπτει το εξής :

$$|Q|=|\frac{|[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x,y))-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)](y-b)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leq|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x,y))-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|$$

Όμως για $(x,y)\to(a,b)$ έχουμε ότι $(x,\xi(x,y))\to(a,b)$.Έτσι προκύπτει πως $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x,y))-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\to 0\Leftrightarrow Q\to 0$.

Ομοίως για $P=\dfrac{[\frac{\partial f}{\partial x}(h(x),b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)](x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\to 0$ άρα, $P+Q\to 0$, δηλαδή η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(a,b)$. ■

3.5 Οι μερικές παράγωγοι μιας διαφορίσιμης συνάρτησης ενδέχεται να έχουν ασυνέχειες.Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Υπολογίζουμε ως εξής (α') $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{|x|} = 0$

(β') $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Όμως το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x, x^6 - x^2)$ δεν υπάρχει άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.Δηλαδή η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ δεν είναι συνεχής και ομοίως η $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ασυνεχής στο $(0,0)$. ■

3.7 Δείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\dfrac{x^y - x - 2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0$.

*Υπόδειξη.*

(i) Έστω $f(x,y) = e^{x\cos y}$ με $f(0,0) = 1$.Υπολογίζοντας έχουμε διαδοχικά τα εξής :

(α') $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^{x\cos y}\sin y \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, για $(x,y)\to(0,0)$.

(β') $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y e^{x\cos y} \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, για $(x,y)\to(0,0)$.

Άρα έχουμε πως $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ είναι συνεχείς στο $(0,0)$, δηλαδή η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Άρα ισχύει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

(ii) Έστω $f(x,y) = x^y = e^{y\log x},\ x>0$ με $f(2,1) = 2$.Υπολογίζοντας έχουμε διαδοχικά τα εξής :

(α') $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}x^y \to \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$, για $(x,y)\to(2,1)$.

(β') $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y\log x \to \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2\log 2$, για $(x,y)\to(2,1)$.

Έχουμε λοιπόν πως $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ είναι συνεχείς στο $(2,1)$, άρα η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(2,1)$.Έτσι προκύπτει τελικά το εξής :

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{f(x,y)-f(2,1)-\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2)\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^y - x - 2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0.$$

■

3.8 Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$.Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν $\lambda < 1$.

*Υπόδειξη.* Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$.Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0$$

Θεωρούμε την $g(x,y,z) = \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)y - \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda+1/2}}$

Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ και $\lambda \geq 1$.Αφού $f$ διαφορίσιμη έχουμε πως

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = 0$$

Για $y = x$ και $z = x$ έχουμε πως $g(x,x,x) = \frac{1}{3^{\lambda+1/2} x^{2\lambda-2}}$ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,x,x) \neq 0$$

το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω πως $\lambda < 1$.Για $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ από Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου:

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

Δηλαδή προκύπτει ότι

$$x^2y^2z^2 \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{27} \Leftrightarrow |xyz| \leq \frac{(x^2+y^2+z^3)^{3/2}}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow |g(x,y,z)| \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1-\lambda}}{\sqrt{27}} \to 0$$

για $(x,y,z) \to (0,0,0)$.Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = 0$, που σημαίνει πως η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$. ■

3.9 Αν υπάρχουν, υπολογίστε τα όρια

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - e^{\sqrt{x^2+y^2}} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - x - |x| - |y| - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - x - \sqrt{x^2+y^2} - 1}{|x|+|y|}$

(iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - x - \sin(\sqrt{x^2+y^2}) - 1}{e^{|x|+|y|} - 1}$.

*Υπόδειξη.* Από την Άσκηση 3.7. έχουμε υπολογίσει ότι $Q = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - 1 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

(i) Για $(x,y) \to (0,0)$ έχουμε ότι $u = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.Έτσι είναι άμεσο ότι ισχύει το εξής :

$$P = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε άμεσο ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - e^{\sqrt{x^2+y^2}} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Q - P = -1.$$

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \frac{e^{x\cos y}-x-1-|x|-|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}} - (\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}})$.Υπολογίζοντας διαδοχικά έχουμε ότι :

1. $f(x,0) = \frac{e^x-x-1}{|x|} - 1 \to -1$, για $(x,y) \to (0,0)$.
2. $f(x,x) = \frac{e^{x\cos x}-x-1}{\sqrt{2}|x|} - \sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, για $(x,y) \to (0,0)$.

Άρα συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

(iii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \frac{e^{x\cos y}-x-\sqrt{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|} = (\frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1)\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$. Έτσι υπολογίζοντας διαδοχικά έχουμε ότι :

1. $f(x,0) = \frac{e^x-1-x}{|x|} - 1 \to -1$, για $(x,y) \to (0,0)$.
2. $f(x,x) = (\frac{e^{x\cos x}-1-x}{\sqrt{2}|x|} - 1)\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, για $(x,y) \to (0,0)$.

Άρα συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

(iv) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{e^{x\cos y} - x - \sin(\sqrt{x^2+y^2}) - 1}{e^{|x|+|y|} - 1} = (\frac{e^{x\cos y} - 1 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}})\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}}{\frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|}}.$$

Υπολογίζοντας διαδοχικά έχουμε ότι :

1. $f(x,0) = (\frac{e^x-x-1}{|x|} - \frac{\sin|x|}{|x|})\frac{1}{\frac{e^{|x|}-1}{|x|}} \to -1$, για $(x,y) \to (0,0)$.
2. $f(x,x) = (\frac{e^{x\cos x}-x-1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{\sin\sqrt{2}|x|}{\sqrt{2}|x|})\frac{\sqrt{2}}{\frac{e^{2|x|}-1}{2|x|}} \to -\sqrt{2}$, για $(x,y) \to (0,0)$.

Άρα συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει. ■

3.10 Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y) = x^y = e^{y\log x},\ x > 0, -\infty < y < \infty$,στα διάφορα σημεία.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^y = e^{y\log x},\ x > 0, -\infty < y < \infty$.Υπολογίζουμε διαδοχικά :

(α΄) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}x^y$

(β΄) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \log x \cdot x^y$

Άρα τελικά έχουμε ότι $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot y = x^y y(1+\log x)$. ■

3.11 Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y) = x^{y^x} = e^{(\log x)e^{x\log y}}$ στο σημείο $(2,3)$, καθώς και το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^{y^z}$ στο σημείο $(2,3,2)$.

*Υπόδειξη.* (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^{y^x} = e^{y^x\log x} = e^{\log x\cdot e^{x\log y}}$.Υπολογίζοντας διαδοχικά έχουμε ότι

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{y^x}y^x(\log x\log y + \frac{1}{x}) \to \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2^9(\log 2\log 3 + \frac{1}{2})$, για $(x,y) \to (2,3)$.
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{y^x+1}y^{x-1}\log x \to \frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 3\cdot 2^{10}\log 2$, για $(x,y) \to (2,3)$.

Άρα τελικά έχουμε ότι $df(2,3) = 2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2^{10}(\log 2\log 3 + \frac{1}{2}) + 9\cdot 2^{10}\log 2$.

(ii) Λύση όμοια με το ερώτημα (i) :

$$df(2,3,2) = 2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(2,3,2)+3\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(2,3,2)+2\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(2,3,2) = 9\cdot 2^9+9\cdot 2^{10}\log 2+9\cdot 2^{10}\log 2\log 3.$$

■

3.12 Έστω $f(x,y) = (\sin x)^{\cos y}$.Αν $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{|f(x,y) - Ax - By - C|}{\sqrt{(x-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})^2}} = 0$, τί συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς $A, B, C$;

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = (sinx)^{\cos y} = e^{\cos y\log\sin x}$ και

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{|f(x,y) - Ax - By - C|}{\sqrt{(x-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})^2}} = 0.$$

Υπολογίζουμε διαδοχικά :

(α') $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (sinx)^{\cos y}\frac{\cos y}{\sin x} \to \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, για $(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

(β') $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y\log(\sin x)(\sin x)^{\cos y} \to \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) = -\log\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}$, για $(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$.

Έχουμε λοιπόν πως $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}), \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ συνεχείς στο $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, άρα η $f$ διαφορίσιμη στο $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$.

Δηλαδή κατά μοναδικό τρόπο ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{|f(x,y) - f(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})|}{\sqrt{(x-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{(sinx)^{\cos y} - (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x + \log\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}y - (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\pi}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\pi}{4}\log\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}}{\sqrt{(x-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})^2}} = 0$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ισχύει το εξής :

$$A = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, B = -\log\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}, C = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\log\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}.$$

■

3.13 Σωστό ή Λάθος; $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|} = 0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \cos xe^y$.

Δείξτε ότι η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,a)$ και μάλιστα $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\cos xe^y - 1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x,y) = \frac{x\sqrt{1-\cos xe^y}}{|x|+|y-a|} = \sqrt{\frac{1-\cos xe^y}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}}\cdot\frac{x\sqrt{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}}{|x|+|y-a|}$.

Έχουμε λοιπόν πως $\frac{|x|}{|x|+|y-a|} \leq 1 \Leftrightarrow |\frac{x\sqrt{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}}{|x|+|y-a|}| \leq \sqrt{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$

Άρα για $(x,y)\to(0,a)$ προκύπτει το εξής :

$$P=\lim_{(x,y)\to(0,a)}\sqrt{\frac{1-\cos xe^y}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}}=0\quad\text{και}\quad Q=\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{x\sqrt{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}}{|x|+|y-a|}=0\,.$$

Άρα τελικά έχουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\frac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|}=0=P\cdot Q=0.$ ∎

3.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos(x^2/y)]\sqrt{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της $f$ στο $(0,0)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos\frac{x^2}{y}]\sqrt{x^2+y^2}, & y\neq0\\ 0, & y=0\end{cases}$.

**(i)** Έχουμε ότι $|1-\cos\frac{x^2}{y}|\leq 2\Leftrightarrow|f(x,y)|\leq2\sqrt{x^2+y^2}$, άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.

**(ii)** Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}=\frac{0-0}{x}=0.$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0.$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1-\cos\frac{x^2}{y}$. Υπολογίζουμε διαδοχικά :

1. $g(x,x)=1-\cos x\to0$ για $x\to0$.
2. $g(x,x^2)=1-\cos1\to1-\cos1\neq0$, αρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)$ δεν υπάρχει.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $f$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

**(iii)** Έστω $\vec{u}=(a,b)$ με $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}=1$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t)=f(t\vec{u})=f(ta,tb)=|t|(1-\cos\frac{ta^2}{b})\sqrt{a^2+b^2},\ b\neq0$. Υπολογίζουμε ως εξής, $df_{\vec{u}}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\frac{h(t)-h(0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{|t|[1-\cos\frac{ta^2}{b}]\sqrt{a^2+b^2}}{t}=0.$

Αν $b=0$ έχουμε πως $|a|=1$, δηλαδή $\vec{u}=(1,0)$ ή $\vec{u}=(-1,0)$. Έτσι υπολογίζουμε ως εξής

$$df_{\vec{u}}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t\vec{u})-f(0,0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial t}(0,0)=0.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι ισχύει $df_{\vec{u}}(0,0)=0$, για κάθε $\vec{u}=(a,b)$ με $\|\vec{u}\|=1$.

∎

3.16 Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθυνόμενες των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$.

Έχουμε από την Άσκηση 3.1. τα εξής αποτελέσματα :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Έστω λοιπόν $h(t) = f(t\vec{u})$ με $\vec{u} = (a,b)$ και $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$.Τότε έχουμε ότι ισχύει

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{ab}{t(a^2+b^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{ab}{t}.$$

Δηλαδή το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν $a = 0$ ή $b = 0$.Άρα, η $f$ έχει κατευθυνόμενη παράγωγο στο $(0,0)$ μόνο στις κατευθύνσεις των αξόνων, ενώ έχει μερικές παραγώγους στο $(0,0)$. ■

3.17 Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση-σε κάποιο σημείο-και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό.Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Επίσης δείξτε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας-όταν διαφορίσουμε την σύνθεση $f(at,bt)$ ως προς $t$ για $t=0$ (όπου $a,b\in\mathbb{R}$ με $ab\neq 0$).

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)(0,0) \end{cases}$.

**(i)** Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t) = f(t\vec{u})$ με $\vec{u} = (a,b)$, $\|\vec{u}\| = 1$.

1. Αν $a\neq 0$, ισχύει ότι $df_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\vec{u})-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{ab^2}{a^2+t^2b^4} = \frac{b^2}{a}$
2. Αν $a=0$, ισχύει ότι $df_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,tb)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$

Άρα προκύπτει ότι η $f$ έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση στο $(0,0)$.

**(ii)** Έχουμε ότι για $(x,y)\to(0,0)$ ισχύει ότι $f(x,0) = 0 \to 0$ και $f(x,\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ και η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

**(iii)** Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = (at,bt)$ με $g(0) = (0,0)$.Για να ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας πρέπει $f$ να είναι παραγωγίσιμη στο $g(0) = (0,0)$ το οποίο δεν ισχύει αφού $f$ ασυνεχής στο $(0,0)$.Άρα δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας όταν διαφορίσουμε την $f(at,bt)$ ως προς $t=0$.

■

3.18 Επαληθεύσατε τον κανόνα της αλυσίδας στις περιπτώσεις: $(i)$ $f(x,y) = x^3e^{xy^2}$, $x=t^2$, $y=\sin t$, $(ii)$ $f(x,y) = x^y$, $x=t^2$, $y=t^3$ $(iii)$ $(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

*Υπόδειξη.* (i) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x,y)=x^3e^{xy^2}$ και $g(t)=(t^2,\sin t)$.

Δείξτε οι μερικές παραγώγοι της $f$ είναι συνεχείς άρα η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $g(t)=(t^2,\sin t)$ και ότι η $g$ είναι διαφορίσιμη στο $t\in\mathbb{R}$.Τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{df\circ g}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,\sin t)\frac{dt^2}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,\sin t)\frac{d\sin t}{dt}(t)$$

$$=[(3(t^2)^2+t^6\sin^2 t)e^{t^2\sin^2(t)}]\cdot 2t+(2t^8\sin te^{t^2\sin^2 t})\cos t=e^{t^2\sin^2(t)}[6t^5+2t^7\sin^2 t+t^8\sin 2t].$$

(ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x,y)=x^y=e^{\log x\cdot y}$ και $g(t)=(t^2,t^3)$.

Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι της $f$ είναι συνεχείς στο $(t^2,t^3)$, άρα $f$ διαφορίσιμη στο $(t^2,t^3)$ και $g(t)$ διαφορίσιμη για κάθε $t\neq 0$.Τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{df\circ g}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3)\frac{dt^2}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3)\frac{dt^3}{dt}(t)=(t^2)^{t^3}(3t^2\log t^2+2t^2).$$

(iii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x,y)=(\log x)^y$ και $g(t)=(e^t,t)$.Τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{df\circ g}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(e^t,t)\frac{de^t}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^t,t)\frac{dt}{dt}(t)=(\frac{1}{e^t}t^t)e^t+t^t\log t=t^t(\log t+1).$$

■

3.19 Θεωρήστε μια $C^1$-συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.Δείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)|\leq\big(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|\big)|x-y|,\forall x,y\in\Omega$$

*Υπόδειξη.*

Έστω μια $C^1$-συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.Έστω $x,y\in\Omega$.Αφού το $\Omega$ είναι κυρτό ισχύει πως $[x,y]\subset\Omega$.Τότε υπάρχει $\xi\in[x,y]$ ώστε

$$f(x)-f(y)=\nabla f(\xi)\cdot(x-y)$$

$$|f(x)-f(y)|=|\nabla f(\xi)\cdot(b-a)|\leq\|\nabla(\xi)\|\|b-a\|\leq(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|)|(b-a)|.$$

Τα $x,y\in\Omega$ είναι τυχαία, άρα έχουμε τελικά :

$$|f(x)-f(y)|\leq(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|)|(b-a)|,\ \forall x,y\in\Omega.$$

■

3.20 Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z=2x^2+y^2$,στο σημείο $(-1,2,6)$.

*Υπόδειξη.*

Θεωρουμε την επιφάνεια $(C) : f(x,y,z) = 0$ με $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z$.

Υπολογίζουμε διαδοχικά :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x \to \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,6) = -4$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \to \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,6) = 4$
3. $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1 \to \frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,6) = -1$

Τότε προκύπτει άμεσα ότι $\nabla f(-1,2,6) = (\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,6), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,6), \frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,6))$.

Έστω $(x,y,z) \in (\Pi)$ με $(\Pi)$ το εφαπτόμενο επίπεδο της $C$ στο $(-1,2,6)$.Τότε αφού $(-1,2,6) \in (\Pi)$ ισχύει $\vec{k} = (x+1, y-2, z-6) \parallel (\Pi)$.Γνωρίζουμε πως $\nabla f(-1,2,6) \perp (\Pi)$ δηλαδή προκύπτει ότι $\nabla f(-1,2,6) \perp \vec{k}$.Άρα συμπεραίνουμε πως $\nabla f(-1,2,6) \cdot \vec{k} = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y - z = 6$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο επίπεδο είναι το

$$(\Pi) : -4x + 4y - z = 6$$

■

3.21 Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2 = 2x^2 + y^2$,στο σημείο $(-1, 2, \sqrt{6})$.

*Υπόδειξη.* Η λύση είναι όμοια με την Άσκηση 3.20. για την επιφάνεια $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Το ζητούμενο επίπεδο είναι το

$$(\Pi) : -4x + 4y + 2\sqrt{6}z = 0.$$

■

3.22 Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^2+y^2+5z^2 = 16$,στο σημείο $(1, -3, 1)$.

*Υπόδειξη.* Η λύση είναι όμοια με την Άσκηση 3.20. για την επιφάνεια $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+5z^2-16 = 0$.

Το ζητούμενο επίπεδο είναι το

$$(\Pi) : 4x - 6y + 10z = -4$$

■

3.23 Θεωρήστε την καμπύλη $C$ στο $xyz$-χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = y^2 - 3x^2$ και $z^2 + y^2 = 2$,και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $C$ στο σημείο $(0, 1, 1)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τις επιφάνειες $f(x,y,z) = -3x^2 + y^2 - z = 0$ και $g(x,y,z) = z^2 + y^2 - 2 = 0$.

Με τις συνήθεις πράξεις έχουμε πως $\nabla f(0,1,1) = (0,2,-1)$ και $\nabla g(0,1,1) = (0,2,2)$.Έχουμε λοιπόν πως $\nabla f(0,1,1), \nabla g(0,1,1)$ είναι κάθετα στις εφαπτόμενες ευθείες των παραπάνω επιφανειών $f(x,y,z) = 0$ και $g(x,y,z) = 0$ στο $(0,1,1)$ αντίστοιχα.

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\vec{u} = \nabla f(0,1,1) \times \nabla g(0,1,1) \perp \nabla f(0,1,1), \nabla g(0,1,1)$.Άρα το $\vec{u}$ είναι παράλληλο στην εφαπτόμενη ευθεία της τομής των επιφανειών.

$$\vec{u} = \nabla f(0,1,1) \times \nabla g(0,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6,0,0).$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι ζητούμενη ευθεία είναι η $(\epsilon) : \{x = 6t,\ y = 1,\ z = 1\ : t \in \mathbb{R}\}$. ■

3.24 (Θεώρημα του Euler) Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$),δηλαδή $f(tx) = t^\lambda f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κάθε $t > 0$,αν και μόνο αν η $f$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lambda f(x)$.

*Υπόδειξη.* Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx) = t^\lambda f(x)$,για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κάθε $t > 0$.Από το κανόνα της αλυσίδα προκύπτει ότι

$$\frac{df(tx)}{dt} = \frac{d(t^\lambda f(x))}{dt} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\frac{d(tx_j)}{dt} = \lambda t^{\lambda-1} f(x) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) = \lambda t^{\lambda-1} f(x).$$

Για $t = 1$ λοιπόν έχουμε πως $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lambda f(x)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έχουμε πως $\lambda f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \nabla \vec{f}(x) \cdot \vec{x}$.Έστω $\phi(t) = t^{-\lambda} f(tx),\ t > 0$.Τότε $\phi'(t) = \frac{df(tx)}{dt} t^{-\lambda} - \lambda t^{-\lambda-1} f(tx)$.

Διαδοχικά υπολογίζουμε ως εξής :

1. $\frac{df(tx)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) = \nabla \vec{f(tx)} \cdot \vec{x}$
2. $\lambda f(tx) = \nabla \vec{f(tx)} \cdot t\vec{x} = t(\nabla \vec{f(tx)} \cdot \vec{x}) = t\frac{df(tx)}{dt}$

Άρα έχουμε ότι $\phi'(t) = \frac{\lambda}{t} f(tx) t^{-\lambda} - \lambda f(tx) t^{-\lambda-1} = 0 \Leftrightarrow \phi(t) = c$.Έτσι για $t = 1$ έχουμε ότι $\phi(1) = f(x) = c$, άρα $f(x) = t^{-\lambda} f(tx)$, δηλαδή το ζητούμενο. ■

3.25 Για $a_m \in \mathbb{R}$,θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{m=1}^{N} \frac{a_m}{(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \cdots + x_n^{2m})^{1/2m}}$ και δείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = -f$.

*Υπόδειξη.* Για $a_m \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{m=1}^{N} \frac{a_m}{(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \cdots + x_n^{2m})^{1/2m}}$.Έστω $t > 0$, τότε ισχύει το εξής

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{[(tx_1)^{2m} + (tx_2)^{2m} + \cdots + (tx_n)^{2m}]^{1/2m}} =$$

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{[t^{2m}(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \cdots + x_n^{2m})]^{1/2m}} = \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{t(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \cdots + x_n^{2m})^{1/2m}}$$
$$= t^{-1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Άρα παρατηρούμε ότι η $f$ είναι ομογενής βαθμού $-1$ και απο την Άσκηση 3.25. ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = -f$. ■

3.26 Θεωρήστε μια $C^1$-συνάρτηση $g = g(x, y, z) : B \to \mathbb{R}$ ορισμένο στο σύνολο

$$B = \{(x, y, z)\mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

τέτοια ώστε $g(0, 0, 0) = 0$ και $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z)| \leq 1,\ |\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z)| \leq 2,\ |\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)| \leq 3$ για κάθε $(x, y, z) \in B$.

Αποδείξτε ότι $|g(x, y, z)| \leq \sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2)}$ για κάθε $(x, y, z) \in B$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε $C^1$ συνάρτηση $g = g(x, y, z) : B \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο σύνολο

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

τέτοια ώστε $g(0, 0, 0) = 0$ και $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z)| \leq 1, |\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z)| \leq 2, |\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)| \leq 3$ για κάθε $(x, y, z) \in B$.

Εύκολα αποδεικνύεται πως το $B$ είναι κυρτό άρα από Άσκηση 3.19. ισχύει ότι

$$|g(x) - g(y)| \leq \sup_{z \in B} |\nabla g(z)| \cdot |x - y|,\ \forall x, y \in B.$$

Όμως ισχύει $|\nabla g(x, y, z)| = \sqrt{\frac{\partial g}{\partial x}^2(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial y}^2(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}^2(x, y, z)} \leq \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Δηλαδή για κάθε $(x, y, z) \in B$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει το εξής :

$$|g(x, y, z) - g(0, 0, 0)| \leq \sup_{z \in b} |\nabla g(z)| \cdot |(x, y, z)| \leq \sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\Leftrightarrow |g(x, y, z)| \leq \sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2)}$$

■

3.27 Έστω $f(x, y, z) = z(\sin x)^{\cos y}$.Βρείτε αριθμούς $A, B, C, D$ τέτοιους ώστε

$$\lim_{(x,y,z) \to (\pi/4, \pi/4, 1)} \frac{|f(x, y, z) - Ax - By - Cz - D|}{\sqrt{(x - \pi/4)^2 + (y - \pi/4)^2 + (z - 1)^2}}$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = z(\sin x)^{\cos y}$.Υπολογίζοντας διαχικά έχουμε ότι

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1} \to \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2 + 1}$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -z \log(\sin x) \sin y \sin x^{\cos y} \to \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1) = -\log \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2 + 1}$
3. $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \sin x^{\cos y} \to \frac{\partial f}{\partial z}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2}$

οι οποίες είναι συνεχείς στο $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)$, άρα η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)$.

Άρα γνωρίζουμε ότι πρέπει να ισχύει το εξής :

$$\lim_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},1)} \frac{|f(x,y,z) - f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{\partial f}{\partial z}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)(z - 1)|}{\sqrt{(x - \frac{\pi}{4})^2 + (y - \frac{\pi}{4})^2 + (z - 1)^2}} = 0$$

και λόγω της μοναδικότητας του ορισμού της διαφόρισης έχουμε ότι

(α) $A = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2+1}$

(β) $B = -\log\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2+1}$

(γ) $\Gamma = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2}$

(δ) $\Delta = \frac{\pi}{4}\log\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2+1} - \frac{\pi}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}/2+1}$

■

# Κεφάλαιο 4

# Διαφορικός Λογισμός στον $\mathbb{R}^n$ (ii)

## 4.1 Ασκήσεις

4.1 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(t,x,y) = \frac{1}{t}e^{-(x^2+y^2)/4t},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0$, και υπολογίστε την ποσότητα

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

4.2 Για $a > 0$ θεωρήστε την συνάρτηση $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως εξής:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Για ποιές τιμές του $a$ είναι $f_a$ συνεχής στο σημείο $(0,0)$;Και για ποιές είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

4.3 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής και ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.Επίσης δείξτε ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι $\partial_{\vec{u}} f(0,0)$ δεν υπάρχουν σε καμία κατεύθυνση $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ με $ab \neq 0$.Τέλος δείξτε οτι η συνάρτηση $f$ είναι Lipschitz και μάλιστα $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

4.4 Θεωρήστε τον δίσκο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \bar{\Delta} \to \mathbb{R}$, οποία να είναι κλάσεως $C^2$ στο $\Delta$,να ικανοποιεί την ανισότητα $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ στα σημεία του $\Delta$,και η οποία να είναι σταθερή στον κύκλο $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

4.5 Αποδείξτε τον κανόνα της αλυσίδας.

**4.1.1.** *Έστω $g : I \to \Omega$ μια συνάρτηση,όπου $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$,καθώς και μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$.Αν $t$ είναι η μεταβλητή στο $I$ και $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ η μεταβλητή στο $\Omega$,η σύνθεση $f \circ g$ απεικονίζει το $t$ στο*

$$h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)) \ \textit{και}\ \frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dg_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dg_n}{dt}.$$

*Ακριβέστερα αν η συνάρτηση $g$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\tau \in I$ και η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $g(\tau)$,τότε είναι διαφορίσιμη η σύνθεση $f \circ g$ στο σημείο $\tau$ και*

$$\frac{dh}{dt}(\tau) = \frac{d(f \circ g)}{dt}(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\tau))\frac{dg_1}{dt}(\tau) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(\tau))\frac{dg_2}{dt}(\tau) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\tau))\frac{dg_n}{dt}(\tau).$$

4.6 Για την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

υπολογίστε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Συμπεράνατε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.Εν συνεχεία δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4.7 Θεωρήστε μια συνάρτηση $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\phi, x\phi_x$ και $y\phi_y$ να είναι φραγμένες-κοντά στο $(0,0)$-και επιπλέον να ισχύει $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\phi(x,y)) \neq \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\phi(x,y))$.

Έν συνεχεία ορίστε

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\phi(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

και δείξτε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.Επίσης δείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

4.8 Αποδείξτε το Θεωρημα:

**4.1.2.** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι παράγωγοι*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) : \Omega \to \mathbb{R} \quad \textit{και} \ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

*Αν επιπλέον οι συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ είναι συνεχείς σε ένα σημείο $(a,b)$ του $\Omega$, τότε*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(a,b).$$

4.9 Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f(x,y)$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ να είναι συνεχείς ενώ οι συναρτήσεις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ να είναι ασυνεχείς.

4.10 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

4.11 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \ (n \geq 3).$$

4.12 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{t^{n/2}}e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/4t}$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, t>0$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της θερμότητας:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

4.13 Δείξτε ότι αν μια $C^2$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$),δηλαδή $f(tx)=t^\lambda f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ και κάθε $t>0$, τότε

$$\sum_{1\le k,j\le n} x_k x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)=\lambda(\lambda-1)f(x).$$

4.14 Δείξτε ότι αν $f\in C^2(\mathbb{R})$ και $g\in C^1(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση

$$u(x,t{=}\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds,\ x\in\mathbb{R},t\ge 0$$

ικανοποιεί τα εξής: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (κυματική εξίσωση), $u(x,0)=f(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$.

4.15 Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, η ποσότητα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ γίνεται

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Βρείτε επίσης έναν ανάλογο τύπο για την ποσότητα $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2$.

4.16 Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\phi\sin\theta,\ z=r\cos\phi$, ισχύει:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

4.17 Δείξτε ότι αν $u=f(x-\lambda t)+g(x-\lambda t)$ (με $f,g\in C^2$ και $\lambda$ είναι μια σταθερά $\neq 0$) τότε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

4.18 Δείξτε ότι αν $u=f(x+g(y))$ (με $f,g\in C^2$) τότε $u_x u_{xy}=u_y u_{xx}$.

4.19 Θεωρήστε την συνάρτηση $\phi(x,y)=x\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\right)\right]$ ορισμένη για $(x,y)\neq(0,0)$.Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\phi(x,y)$; Είναι σωστό ότι $\sup\limits_{0<x^2+y^2\le 1}|\phi(x,y)|<\infty$ ;

## 4.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

4.1 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(t,x,y) = \frac{1}{t}e^{-(x^2+y^2)/4t},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0$, και υπολογίστε την ποσότητα

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t,x,y) = \frac{1}{t}e^{-(x^2+y^2)/4t},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0$.Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y) = e^{-(x^2+y^2)/4t}(\frac{x^2+y^2}{4t^3} - \frac{1}{t^2})$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y) = \frac{-x}{2t^2}e^{-(x^2+y^2)/4t} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x,y) = (\frac{x^2-2t}{4t^3})e^{-(x^2+y^2)/4t}$
3. $\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y) = \frac{-y}{2t^2}e^{-(x^2+y^2)/4t} \to \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,x,y) = (\frac{y^2-2t}{4t^3})e^{-(x^2+y^2)/4t}$

Μέσω τον παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,x,y)) = 0.$$

■

4.2 Για $a > 0$ θεωρήστε την συνάρτηση $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως εξής:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Για ποιές τιμές του $a$ είναι $f_a$ συνεχής στο σημείο $(0,0)$;Και για ποιές είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

*Υπόδειξη.* Η λύση είναι όμοια με την Άσκηση 3.8. ■

4.3 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής και ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.Επίσης δείξτε ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι $\partial_{\vec{u}} f(0,0)$ δεν υπάρχουν σε καμία κατεύθυνση $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ με $ab \neq 0$.Τέλος δείξτε οτι η συνάρτηση $f$ είναι Lipschitz και μάλιστα $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

(i) Η $f$ είναι συνεχής για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.Για $(x,y) \to (0,0)$ έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

Άρα προκύπτει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-0}{x} = 0$ ,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-0}{y} = 0$

(iii) Έστω $\vec{u} = (a,b)$, $\|\vec{u}\| = 1$ και θεωρούμε την συνάρτηση $h_{\vec{u}}(t) = f(t\vec{u}) = f(ta,tb)$.Έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{h_{\vec{u}}(t) - h_{\vec{u}}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tab}{|t|}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι το όριο υπάρχει αν και μόνο αν $ab = 0$.

(iv) Για $(x_i, y_i) \neq (0,0)$ υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Τότε έχουμε $\nabla f(\vec{x,y}) = (\frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}})$ και μάλιστα προκύπτει το εξής :

$$\|\nabla f(\vec{x,y})\| = \sqrt{\frac{x^6+y^6-x^2y^4-x^4y^2}{x^6+y^6+3y^2x^4+3y^4x^2}} \leq 1.$$

Άρα είναι σαφές ότι $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}} (\|\nabla \vec{f}(z)\|) \leq 1$.Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.20. έχουμε πως για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ισχύει ότι

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq \sup(\|\nabla \vec{f}(z)\|)\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}$$

Άρα έχουμε ότι η $f$ είναι Lipshitz και μάλιστα $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \leq \sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}$.

Αν κάποιο $(x_i,y_i) = (0,0)$ τότε η ανισότητα ισχύει με τη όμοια με το ερωτήμα (i).

■

4.4 Θεωρήστε τον δίσκο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \bar{\Delta} \to \mathbb{R}$, οποία να είναι κλάσεως $C^2$ στο $\Delta$,να ικανοποιεί την ανισότητα $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ στα σημεία του $\Delta$,και η οποία να είναι σταθερή στον κύκλο $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

*Υπόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$, που να ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις.Το $\overline{\Delta}$ είναι συμπαγές ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, άρα από την Άσκηση 2.10 (4), έχουμε ότι η $f$ έχει min και max.Από την αρχική υπόθεση κάθε σημείο στο $\Delta$ είναι σαγματικό, άρα $\min f, \max f \in K$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $f$ είναι σταθερή, το οποίο είναι άτοπο, αφού κάθε σημείο του $\Delta$ είναι σαγματικό. ■

4.5 Αποδείξτε τον κανόνα της αλυσίδας.

**4.2.1.** *Έστω $g : I \to \Omega$ μια συνάρτηση,όπου $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$,καθώς και μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$.Αν $t$ είναι η μεταβλητή στο $I$ και $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ η μεταβλητή στο $\Omega$,η σύνθεση $f \circ g$ απεικονίζει το $t$ στο*

$$h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)) \text{ και } \frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dg_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dg_n}{dt}.$$

*Ακριβέστερα αν η συνάρτηση $g$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\tau \in I$ και η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $g(\tau)$,τότε είναι διαφορίσιμη η σύνθεση $f \circ g$ στο σημείο $\tau$ και*

$$\frac{dh}{dt}(\tau) = \frac{d(f \circ g)}{dt}(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\tau))\frac{dg_1}{dt}(\tau) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(\tau))\frac{dg_2}{dt}(\tau) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\tau))\frac{dg_n}{dt}(\tau).$$

*Υπόδειξη.* Έστω $g : I \to \Omega,\ I \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{R}$.Η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $a = g(\tau)$, άρα είναι σαφές ότι

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o(|x-a|)\ ,$$

όπου $\frac{o(|x-a|)}{|x-a|} \to 0$, για $x \to a$. Για $x = g(t)$ έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$f(g(t)) = f(g(\tau)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))(g_i(t) - g_i(\tau)) + o(|g(t) - g(\tau)|)\ ,$$

όπου $\frac{o(|g(t)-g(\tau)|)}{|g(t)-g(\tau)|} \to 0$ με $t \to \tau$.Τότε έχουμε ότι $g_i(t) - g_i(\tau) = g_i'(\tau)(t-\tau) + o_i(|t-\tau|)$, όπου $\frac{o_i(|t-\tau|)}{t-\tau} \to 0$ για $t \to \tau$.Άρα προκύπτει το εξής :

$$f(g(t)) = f(g(\tau)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))g_i'(\tau) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))o_i(|t-\tau|) + o(|g(t) - g(\tau)|).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))o_i(|t-\tau|) + o(|g(t)-g(\tau)|)}{|t-\tau|} \to 0$ για $t \to \tau$.Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{o(|g(t)-g(\tau)|)}{|t-\tau|} = \frac{o(|g(t)-g(\tau)|)}{|g(t)-g(\tau)|} \cdot \frac{|g(t)-g(\tau)|}{|t-\tau|} \to 0 \cdot |g'(\tau)| = 0$ για $t \to \tau$.
2. $\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))o_i(|t-\tau|)}{|t-\tau|} \to 0,\ \forall i = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))o_i(|t-\tau|)}{|t-\tau|} \to 0$ .

Άρα συμπεραίνουμε ότι $\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))o_i(|t-\tau|)+o(|g(t)-g(\tau)|)}{|t-\tau|} \to 0$ για $t \to \tau$.Έτσι προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή

$$\frac{df \circ g}{dt}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))g_i'(\tau).$$

■

4.6 Για την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

υπολογίστε τις παραγώγους:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Συμπεράνατε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.Εν συνεχεία δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

(i) Θα εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις.Για $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε τους εξής υπολογισμούς :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Για $(x,y)=(0,0)$έχουμε τους εξής υπολογισμούς :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$ ,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{x}=0$ .

Έτσι καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

(ii) Έχουμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$.Τώρα παρατηρήστε ότι ισχύει το εξής

$$\left|\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq |y|\to 0 ,$$

για $(x,y)\to(0,0)$.Άρα η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής στο $(0,0)$, δηλαδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.Ομοίως δείξτε ότι η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.Έτσι έχουμε πως $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, άρα $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1$
2. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=1$

Άρα έχουμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\neq -1=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, δηλαδή το ζητούμενο.

■

4.7 Θεωρήστε μια συνάρτηση $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\phi, x\phi_x$ και $y\phi_y$ να είναι φραγμένες-κοντά στο $(0,0)$-και επιπλέον να ισχύει $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\phi(x,y))\neq\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\phi(x,y))$.

Έν συνεχεία ορίστε

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\phi(x,y) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

και δείξτε ότι $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.Επίσης δείξτε ότι $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε μια συνάρτηση $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\phi, x\phi_x, y\phi_y$ φραγμένες-κοντά στο $(0,0)$ και επιπλέον να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\phi(x,y)\neq\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\phi(x,y)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} xy\phi(x,y), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

(i) Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(\phi(x,y) + x\phi_x(x,y))$ η οποία είναι συνεχής για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.Όμως $\phi, x\phi_x$ είναι φραγμένες κοντα στο $(0,0)$, άρα υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε κοντα στο $(0,0)$ ισχύει $|\phi(x,y)| \leq M_1$ και $|x\phi_x(x,y)| \leq M_2$.Έτσι έχουμε

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| = |y(\phi(x,y) + x\phi_x(x,y))| \leq |y|(M_1 + M_2).$$

Άρα για $(x,y) \to (0,0)$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. Επίσης έχουμε ότι ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.Ομοίως δείξτε ότι η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(ii) Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \phi(x,0) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \phi(x,y)$ ,
2. $f_{yx}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \phi(0,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \phi(x,y)$ .

Έτσι προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \phi(x,y) \neq \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \phi(x,y) \Leftrightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$, δηλαδή το ζητούμενο.

■

4.8 Αποδείξτε το Θεωρημα:

**4.2.2.** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι παράγωγοι*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) : \Omega \to \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

*Αν επιπλέον οι συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ είναι συνεχείς σε ένα σημείο $(a,b)$ του $\Omega$, τότε*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(a,b)$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση

$$S(\Delta x, \Delta y) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) - f(a, b + \Delta y) + f(a, b).$$

Σταθεροποιούμε τα $b$ και $\Delta y$ και θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x, b + \Delta y) - f(x, b)$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $g$ στο διάστημα $[a, a + \Delta x]$.Τότε υπάρχει $x' \in (a, a + \Delta x)$ ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x', b + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', b) = \frac{S(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x} ,$$

Για την συνάρτηση

$$h(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x', y + \Delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x', y)$$

εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[b, b + \Delta y]$, άρα υπάρχει $y' \in (b, b + \Delta y)$ ώστε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x', y') = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x', b + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x', b)}{\Delta y}$$

Όμως για $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ έχουμε $x' \to a$ και $y' \to b$ άρα προκύπτει η εξής σχέση :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{S(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Ομοίως λοιπόν δείξτε ότι ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{S(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$.Έτσι τελικά έχουμε πως ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

■

4.9 Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f(x,y)$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ να είναι συνεχείς, ενώ οι συναρτήσεις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ να είναι ασυνεχείς.

*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι μια συνάρτηση με συνεχείς $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}$ και ασυνεχείς $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}$ είναι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

■

4.10 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.Υπολογίζουμε διαδοχικά :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ .

Έτσι μέσω των παραπάνω είναι σαφές ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση, δηλαδή ισχύει το εξής :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\ .$$

■

4.11 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0\ (n \geq 3)\ .$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{n/2-1}} = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1-n/2}$.

Τότε μέσω υπολογισμών συμπεραίνουμε ότι ισχύει η εξής σχέση :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = (2-n)x_i(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{-n/2} .$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x, y) = \frac{(2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (n-1)x_i^2)}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{n/2+1}} .$$

Έτσι τελικά έχουμε την ζητούμενη σχέση, δηλαδή ισχύει το εξής :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (n-1)x_i^2)}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{n/2+1}}$$

$$= \frac{(2-n)[(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2]}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{n/2+1}} = 0$$

■

4.12 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/4t}$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της θερμότητας:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} .$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t, x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/4t}$. Θεωρούμε $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, όπου έχουμε ότι ισχύει $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.Υπολογίζουμε λοιπόν διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_1, \cdots, x_n) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2}}(\frac{-2nt+|x|^2}{4t^2})$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t, x_1, \cdots, x_n) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2}}(\frac{-2t+x_i^2}{4t^2})$

Άρα μέσω των παραπάνω έχουμε πως

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2}}(\frac{-2t + x_i^2}{4t^2}) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2}}(\frac{-2nt + |x|^2}{4t^2}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_1, \cdots, x_n).$$

■

4.13 Δείξτε ότι αν μια $C^2$ συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx) = t^\lambda f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κάθε $t > 0$, τότε

$$\sum_{1 \le k, j \le n} x_k x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \lambda(\lambda - 1)f(x)$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f \in C^2$ η οποία είναι ομογενής $\lambda$ βαθμού με $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(tx) = t^\lambda f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ με $t > 0$.Υπολογίζουμε λοιπόν ως εξής :

$$\frac{d(f(tx))}{dt} = \lambda t^{\lambda-1} f(x) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i = \lambda t^{\lambda-1} f(x)\ .$$

Έτσι διαφορίζοντας ξανά έχουμε πως $\dfrac{d(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i)}{dt} = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} f(x)$.Έτσι από τον κανόνα της αλυσίδας ισχύει

$$\frac{d(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(tx)x_j x_1 + \cdots + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_n})(tx)x_j x_n$$

$$= \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(tx)x_j x_i = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} f(x).$$

Άρα θέτοντας για $t = 1$ τελικά έχουμε πως

$$\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(x)x_j x_i = \lambda(\lambda-1)f(x)\ .$$

■

4.14 Δείξτε ότι αν $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $g \in C^1(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds,\ x \in \mathbb{R},\ t \ge 0$$

ικανοποιεί τα εξής: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (κυματική εξίσωση), $u(x,0) = f(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

*Υπόδειξη.* Αν $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $g \in C^1(\mathbb{R})$, τότε θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(s)ds,\ x \in \mathbb{R}, t \ge 0$$

(i) Για την απόδειξη του ζητούμενου αρχικά υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}[f'(x+t) - f'(x-t)] + \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)]$ και έτσι έχουμε $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{2}[f''(x+t) + f''(x-t)] + \frac{1}{2}[g'(x+t) - g'(x-t)]$ ,
2. $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}[f'(x+t) + f'(x-t)] + \frac{1}{2}[g(x+t) - g(x-t)]$ και έτσι έχουμε $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}[f''(x+t) + f''(x-t)] + \frac{1}{2}[g'(x+t) - g'(x-t)]$ .

Τελικά μέσω των παραπάνω σχέσεων ισχύει ότι η συνάρτηση $u$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

γνωστή ως *κυματική εξίσωση*.

(ii) Το ζητούμενο είναι άμεσο μέσω της αντικατάστασης $t = 0$ .

■

4.15 Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, η ποσότητα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ γίνεται

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Βρείτε επίσης έναν ανάλογο τύπο για την ποσότητα $(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$.

*Υπόδειξη.*

Έστω η απεικόνιση $f(x,y)$ και ο μετασχηματισμός $x = r\cos\theta \quad$ και $\quad y = r\sin\theta$ .Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε λοιπόν πως

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \quad \text{(i)}$$

όπου έπεται ότι

$$\frac{\partial f^2}{\partial r^2} = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\sin^2\theta \quad \text{(ii)}$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{(iii)}$$

όπου έπεται ότι

$$\frac{\partial f^2}{\partial \theta^2} = r^2\sin^2\theta\frac{\partial f^2}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial f^2}{\partial y^2} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{(iv)}$$

Μέσω των σχέσεων (i),(ii),(iv) ισχύει το εξής :

$$\frac{\partial f^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}$$

Τέλος υψώνοντας τις σχέσεις (i),(ii) στο τετράγωνο προκύπτει ότι :

$$(\frac{\partial f}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial f}{\partial \theta})^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \ .$$

■

4.16 Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\phi$, ισχύει:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi} \ .$$

*Υπόδειξη.* Με ανάλογο τρόπο όπως στην Άσκηση 4.15 προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

4.17 Δείξτε ότι αν $u = f(x - \lambda t) + g(x - \lambda t)$ (με $f, g \in C^2$ και $\lambda$ είναι μια σταθερά $\neq 0$) τότε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ .$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $u = f(x - \lambda t) + g(x - \lambda t)$ με $f, g \in C^2$ και $\lambda \neq 0$ σταθερά .

Έχουμε λοιπόν πως,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f'(x-\lambda t) - g'(x-\lambda)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\lambda f'(x-\lambda t) - \lambda g'(x-\lambda t)$$

όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f''(x-\lambda t) + g''(x-\lambda t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \lambda^2 f''(x-\lambda t) + \lambda^2 g''(x-\lambda t)$$

Τελικά λοιπόν μέσω των παραπάνω έχουμε πως ισχύει ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, δηλαδή το ζητούμενο. ■

4.18 Δείξτε ότι αν $u = f(x+g(y))$ με $f, g \in C^2$, τότε $u_x u_{xy} = u_y u_{xx}$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $u = f(x+g(y))$ με $f, g \in C^2$.Υπολογίζουμε λοιπόν διαδοχικά

$$u_x = f'(x+g(y))$$
$$u_y = f'(x+g(y))g'(y)$$

όπου προκύπτει άμεσα ότι

$$u_{xy} = f''(x+g(y))g'(y)$$
$$u_{xx} = f''(x+g(y))$$

Τελικά λοιπόν μέσω των παραπάνω έχουμε πως ισχύει ότι $u_x u_{xy} = u_y u_{xx}$, δηλαδή το ζητούμενο. ■

4.19 Θεωρήστε την συνάρτηση $\phi(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\right)\right]$ ορισμένη για $(x,y) \neq (0,0)$.Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \phi(x,y)$ ; Είναι σωστό ότι $\sup\limits_{0<x^2+y^2\leq 1} |\phi(x,y)| < \infty$;

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi(x,y) = x\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\right)\right]$ ορισμένη για $(x,y) \neq (0,0)$. Έχουμε λοιπόν πως η $\phi$ μετασχηματίζεται σε

$$\phi(x,y) = \frac{40x^4y^4(x^4-y^4)^4}{(x^4+y^4)^6}.$$

(i) Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :
   1. Για $y = 0$ έχουμε ότι $\phi(x,0) = 0 \to 0$, για $(x,y) \to (0,0)$ .
   2. Για $y = 2x$ έχουμε ότι $\phi(x,2x) = \frac{640}{17^2} \to \frac{640}{17^2}$, για $(x,y) \to (0,0)$.

   Άρα μέσω των παραπάνω είναι σαφές ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \phi(x,y)$ δεν υπάρχει.

(ii) Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής :

$$\frac{(x^4-y^4)^4}{(x^4+y^4)^4} \leq 1 \quad \text{και} \quad \left(\frac{2x^2y^2}{(x^4+y^4)^2}\right)^2 \leq 10.$$

   Έτσι προκύπτει άμεσα ότι $\sup\limits_{0<x^2+y^2\leq 1} |\phi(x,y)| \leq 10 < \infty$.

■

# Κεφάλαιο 5

# Πολυώνυμο Taylor και παράγωγοι ανώτερης τάξης

## 5.1 Ασκήσεις

5.1 Για ποιούς αριθμούς $A, B, C \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(5+\sin x)^{e^y} - A - Bx - Cy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ;

5.2 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^{y^x}$, ορισμένη για $x > 0$ και $y > 0$.Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\log 3}\frac{1}{f(3,2)}\frac{\partial f}{\partial y}(3,2)$ είναι ακέραιος και υπολογίστε τον.Αν $P(x,y)$ είναι το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^{y^x} - P(x,y)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0$, ποίος είναι ο συντελεστής του $xy$ στο πολυώνυμο αυτό;

5.3 Ποιος είναι ο συντελεστής του $x^2$ στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$,δευτέρου βαθμού (ως προς $x, y$ και $z$),όταν το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{(xy-yz-2)^y - P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0$;

5.4 Ποιος είναι ο συντελεστής του $xy$ στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$,δευτέρου βαθμού (ως προς $x, y$ και $z$),όταν το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{(xy-yz)^{xz} - P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0$;

5.5 Δείξτε ότι $e^{x\cos(xe^y)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o((x^2+y^2)^{3/2})$, καθώς $(x,y) \to (0,0)$.

5.6 Σωστό ή Λάθος; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{|x|+|y|} = 0$ .

5.7 Υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^y - x - (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) - \sin^3(|x-1|+|y-1|)}{|x-1|^3+|y-1|^3}$;

5.8 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = e^{x\cos xe^y}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)$.

5.9 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = e^{y+x\cos(xe^y)}$ και υπολογίστε την παράγωγο $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0)$.

## 5.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

5.1 Για ποιούς αριθμούς $A, B, C \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(5+\sin x)^{e^y} - A - Bx - Cy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0;$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = (5+\sin x)^{e^y}$.Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y \cos x (5+\sin x)^{e^y-1} \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ ,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y \log(5+\sin x)(5+\sin x)^{e^y} \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5\log 5$

Η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αφού οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $(0,0)$.Άρα γνωρίζουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(5+\sin x)^{e^y} - x - 5\log 5y - 5}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

Από την μοναδικότητα του ορισμού της διαφόρισης έχουμε ότι $A = 5 \quad B = 1 \quad C = 5\log 5$ . ■

5.2 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^{y^x}$,ορισμένη για $x > 0$ και $y > 0$.Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\log 3}\frac{1}{f(3,2)}\frac{\partial f}{\partial y}(3,2)$ είναι ακέραιος και υπολογίστε τον.Αν $P(x,y)$ είναι το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^{y^x} - P(x,y)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0$, ποίος είναι ο συντελεστής του $xy$ στο πολυώνυμο αυτό;

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^{y^x}, \ x, y > 0$. Υπολογίζοντας λοιπόν έχουμε πως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{y^x+1} y^{x-1} \log x \ .$$

Δηλαδή προκύπτει πως,

$$\frac{1}{\log 3 f(3,2)} \frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = \frac{1}{3^8 \log 3} 4 \cdot 3^9 \log 3 = 12$$

όπου είναι ακέραιος.

Έχουμε από υπόθεση πως $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^{y^x} - P(x,y)}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0$ με $\deg P(x,y) = 2$.Δηλαδή το $P(x,y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της $f$ στο $(2,1)$. Άρα, αν $a$ ο συντελεστής του $xy$ γνωρίζουμε πως,

$$a = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(2,1)$$

Υπολογίζουμε ως εξής :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x^{y^x+1} y^{x-1} \log x (y^x \log x \log y + \frac{y^x}{x}) + [\log x (xy^{x-1} \log y + y^{x-1}) + y^{x-1}] x^{y^x} \ .$$

Άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $a = 3\log 2 + 2$ . ■

5.3 Ποιος είναι ο συντελεστής του $x^2$ στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$,δευτέρου βαθμού (ως προς $x, y$ και $z$),όταν το όριο $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \dfrac{(xy-yz-2)^y - P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0;$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y,z) = (xy - yz - 2)^y$.Έχουμε από την αρχική υπόθεση ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{(xy - yz - 2)^y - P(x,y,z)}{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = 0$$

με $\deg P(x,y,z) = 2$.Δηλαδή το $P(x,y,z)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της $f$ στο $(2,3,1)$. Άρα γνωρίζουμε πως αν $a$ ο συντελεστής του $x^2$ στο αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor, τότε ισχύει το εξής

$$a = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3,1).$$

Υπολογίζοντας λοιπόν έχουμε πως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^3(y-1)(xy - yz - 2)^{y-2}$$

Άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $a = 27$. ■

5.4 Ποιος είναι ο συντελεστής του $xy$ στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$,δευτέρου βαθμού (ως προς $x, y$ και $z$),όταν το όριο $\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{(xy - yz)^{xz} - P(x,y,z)}{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = 0$;

*Υπόδειξη.* Σε αναλογία με τις Ασκήσεις $5.2, 5.3$ έχουμε πως ο συντελεστής του $xy$ είναι

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,3,1).$$

Υπολογίζουμε λοιπόν ως εξής :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -z^2[(x^2 - yz)^{xz-1} + x(z\log(x^2 - yz) + \frac{2x(xz-1)}{x^2 - yz}(x^2 - yz)^{xz-1})].$$

Άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $a = -9$. ■

5.5 Δείξτε ότι $e^{x\cos(xe^y)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o((x^2 + y^2)^{3/2})$, καθώς $(x,y) \to (0,0)$.

*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι $P(x,y,z) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ είναι το πολυώνυμο Taylor της $f$ βαθμού 3 στο $(0,0)$. ■

5.6 Σωστό ή Λάθος ; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{y^2} + y\cos x - x - y}{|x| + |y|} = 0$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = xe^{y^2} + y\cos x$.Δείξτε ότι $P(x,y) = x + y$ είναι το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f$ βαθμού 1 στο $(0,0)$.Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύει το εξής :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - P(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Παρατηρήστε πως $1 \leq \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1$ όπου από αυτή τη σχέση προκύπτει

$$\frac{\sqrt{2}}{2}|\frac{f(x) - P(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}| \leq |\frac{f(x) - P(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}|\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq |\frac{f(x) - P(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}| \ .$$

που μέσω των παραπάνω προκύπτει πως $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x)-P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} = 0$.Τελικά λοιπόν έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{y^2}+y\cos x - x - y}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x)-P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} = 0\ .$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός. ■

# Κεφάλαιο 6

# Μέγιστα και ελάχιστα

## 6.1 Ασκήσεις

6.1 Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} (i)\ f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y & (ii)\ f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2 \\ (iii)\ f(x,y) = 12xy - 3x^2y - 4xy^2 & (iv)\ f(x,y) = (x-5)\log xy,\ x > 0, y > 0. \\ (v)\ f(x,y) = y^3 - 3x^2y & \end{array}$$

6.2 Για $0 < b < a$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$.Δείξτε ότι ισχύει

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = a/e.$$

6.3 Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$ για $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

6.4 Να βρεθεί η μεγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 2y$ για $x^2 + y^2 \leq 1$.

6.5 Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy$ στο συμπαγές χωρίο του $xy-$επιπέδου το οποίο ορίζεται από την ανισότητα $2x^2 + y^2 \leq 1$.

6.6 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.Δείξτε ότι η $f$, περιορισμένη σε κάθε ευθεία από το $(0,0)$,έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.Δείξτε επίσης ότι το σημείο $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f$ και ότι δεν είναι τοπικό ελαχιστό αυτής.

6.7 Έστω $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n \times n$ με $(a_{ij})$ και $Q(t) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}t_it_j,\ t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$,η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.Δείξτε ότι $t \cdot A \cdot t^T = Q(t)$.

6.8 Έστω $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ένας συμετρικός πίνακας $n \times n$ με $a_{ij} \in \mathbb{R}$ και $Q(t) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}t_it_j,\ t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$,η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.Δείξτε ότι αν οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι θετικές τότε υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $Q(t) \geq \lambda|t|^2$ για κάθε $t \in \mathbb{R}^n$.

6.9 Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $C^2-$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και $a \in \Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής.Αν $\lambda$ είναι μια ιδιοτιμή της Hessian $(Hf)(a)$ και $v$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $|v| = 1$,ορίστε την συνάρτηση $g(s) = f(a + sv)$,για $s \in \mathbb{R}$,κοντα στο 0.Δείξτε ότι τότε $g'(0) = 0$ και $g''(0) = \lambda$ και συνεπώς $g(s) = g(0) + \frac{\lambda}{2}s^2 + o(s^2)$,καθώς $s \to 0$.

6.10 Σωστό ή Λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \leq 1$ και $C^1$ για $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 < 1$ και αν $|\frac{\partial f}{\partial x_1}| + |\frac{\partial f}{\partial x_2}| + \cdots |\frac{\partial f}{\partial x_n}| > 0$ όταν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 < 1$, τότε υπάρχουν $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2 = 1$ και $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) < f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ όταν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 < 1$ .

6.11 Δείξτε ότι ένα ορθογώνιο κουτί δοσμένου όγκου έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν το κουτί είναι κύβος.

## 6.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

6.1 Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων :

(i) $f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$ (ii) $f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$

(iii) $f(x,y) = 12xy - 3x^2y - 4xy^2$ (iv) $f(x,y) = (x-5)\log xy,\ x > 0, y > 0$

(v) $f(x,y) = y^3 - 3x^2y$

*Υπόδειξη.* (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$.Τότε έχουμε πως τα κρίσιμα σημεία της $f$ προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x + 2y) = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = -\frac{2}{3}y \\ y = -2 \text{ ή } y = 6 \text{ ή } y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -4 \text{ ή } x = 1 \\ y = -2 \text{ ή } y = 6 \text{ ή } y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της $f$ είναι τα $(0,-2), (-4,6), (1,-\frac{3}{2})$.

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$.Τότε έχουμε πως τα κρίσιμα σημεία της $f$ προκύπτουν από την λύση του συστήματος :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 - 10x - 8y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 - 8x - 10y = 0$$

όπου από την επίλυση του προκύπτει ότι τα κρίσιμα σημεία της $f$ είναι τα $(0,0), (1,-1)$, $(-1,1), (-3,-3)$ και $(3,3)$.

(iii) Ομοίως με (i),(ii) προκύπτει ότι τα κρίσιμα σημεία της $f$ είναι τα $(0,3), (\frac{4}{3})$.

(iv) Το κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το $(5, \frac{1}{5})$.

(v) Το κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το $(0,0)$.

■

6.2 Για $0 < b < a$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$.Δείξτε ότι ισχύει

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = a/e.$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ για $0 < b < a$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$x^2 + \frac{b}{a}y^2 \le x^2 + y^2 \ \textit{και}\ e^{-(x^2+y^2)+1} \le \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Άρα προκύπτει πως

$$(x^2 + \frac{b}{a}y^2)e^{-(x^2+y^2)+1} \le 1 \Leftrightarrow f(x,y) \le \frac{a}{e}.$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Όμως $f(1, 0) = f(-1, 0) = \frac{a}{e}$, άρα συμπεραίνουμε πως, $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \dfrac{a}{e}$. ■

6.3 Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$ για $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$.Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της $f$.Άρα αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - 2y + 5 - x^2}{(y^2 - 2y + 5 + x^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x(y - 1)}{(y^2 - 2y + 5 + x^2)^2} = 0$$

Όπου προκύπτει πως, τα κρίσιμα σημεία της $f$ είναι $(2, 1), (-2, 1)$.Αν η $f$ παρουσιάζει μέγιστο, τότε θα πρέπει να είναι κρίσιμο σημείο της.Παρατηρούμε πως $f(-2, 1) = -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} = f(2, 1)$.Άρα συμπεραίνουμε πως $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \dfrac{1}{4}$. ■

6.4 Να βρεθεί η μεγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 2y$ για $x^2 + y^2 \leq 1$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 2y$ για $x^2 + y^2 \leq 1$.Παρατηρούμε ότι

$$5x^2 + 2y - 2 \leq f(x, y) \leq -5y^2 + 2y + 1$$

Έυκολα αποδυκνύεται πως, η μέγιστη τιμή της $g(y) = -5y^2 + 2y + 1$ είναι το $g(-\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$ καθώς και η ελάχιστη τιμή της $h(x, y) = 5x^2 + 2y - 2$ είναι η $h(0, 0) = -2$ (έχουμε πως $(0, 0)$ κρίσιμο σημείο και ο $(Hh)(0, 0)$ έχει θετικές ιδιοτιμές).Δηλαδή ισχύει ότι $-2 \leq f(x, y) \leq \frac{2}{5}$. Όμως $f(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) = -2$ και $f(\sqrt{\frac{2}{5}}, 0) = \frac{2}{5}$, άρα $\max\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x, y) = \dfrac{2}{5}$ και $\min\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x, y) = -2$. ■

6.6 Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.Δείξτε ότι η $f$, περιορισμένη σε κάθε ευθεία από το $(0, 0)$,έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.Δείξτε επίσης ότι το σημείο $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f$ και ότι δεν είναι τοπικό ελαχιστό αυτής.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$.Έστω ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις $\{x = \lambda t, y = \mu t)$ η οποία διέρχεται από το $(0, 0)$.Τότε για την συνάρτηση $g(t) = f(\lambda t, \mu t) = \mu^2 t^2 - 3\lambda^3 \mu t^3 + \lambda^4 t^4$ για $\mu > 0$ έχουμε πως, $g'(0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; g''(0) = 2\mu^2 > 0$, άρα η $g$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t = 0$.Για $\mu = 0$ το ζητούμενο είναι άμεσο.

Επίσης για την εύρεση των κρίσιμων σημείων της $f$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6xy + 8x^3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 3x^2 = 0$$

όπου το $(0, 0)$ αποτελεί λύση του συστήματος άρα, και κρίσιμο σημείο της $f$.Παρατηρούμε λοιπόν πως για $y > 2x^2$, τότε $f(x, y) > f(0, 0) = (0, 0)$ ενώ για $x^2 < y < 2x^2$ ισχύει πως $f(x, y) < f(0, 0) = 0$.Έτσι συμπεραίνουμε πως η $f$ δεν παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. ■

6.7 Έστω $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n\times n$ με $(a_{ij})$ και $Q(t)=\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}t_it_j,\ t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.Δείξτε ότι $t\cdot A\cdot t^T=Q(t)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τον πίνακα $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ο οποίος είναι συμμετρικός $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$.Τότε έχουμε πως ο $t\cdot A$ είναι ο πίνακας

$$t\cdot A=\begin{bmatrix} a_{11}t_1+a_{21}t_2+\cdots+a_{n1}t_n\\ a_{12}t_1+a_{22}t_2+\cdots+a_{n2}t_n\\ \vdots\\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+\cdots+a_{nn}t_n\end{bmatrix}^T$$

Δηλαδή προκύπτει πως

$$t\cdot A\cdot t^T=\begin{bmatrix} a_{11}t_1+a_{21}t_2+\cdots+a_{n1}t_n\\ a_{12}t_1+a_{22}t_2+\cdots+a_{n2}t_n\\ \vdots\\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+\cdots+a_{nn}t_n\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}=\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}t_it_j=Q(t).$$

■

6.8 Έστω $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμετρικός πίνακας $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $Q(t)=\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}t_it_j,\ t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.Δείξτε ότι αν οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι θετικές τότε υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $Q(t)\ge\lambda|t|^2$ για κάθε $t\in\mathbb{R}^n$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμετρικός πίνακας $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $Q(t)=\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}t_it_j,\ t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.Οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι όλες θετικές, άρα ισχύει ότι

$$Q(t)=\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}t_it_j>0.$$

Θεωρούμε για $t\neq 0$ το $\frac{t}{|t|}\in S(0,1)$, αφού $|\frac{t}{|t|}|=1$ όπου $S(0,r)$ η σφαίρα $S(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|=r\}$ με την επιφάνεια της σφαίρας να είναι συμπαγής (κλειστή και φραγμένη).Άρα το σύνολο $D=\{a_{ij}\frac{t_i}{|t|}\frac{t_j}{|t_j|}\}$ έχει ελάχιστη τιμή και μάλιστα υπάρχει $\lambda>0$ ώστε

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\frac{t_i}{|t|}\frac{t_j}{|t|}\ge\lambda\Leftrightarrow\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}t_it_j\ge|t|^2\lambda\,.$$

■

6.9 Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια $C^2-$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής.Αν $\lambda$ είναι μια ιδιοτιμή της Hessian $(Hf)(a)$ και $v$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $|v|=1$,ορίστε την συνάρτηση $g(s)=f(a+sv)$,για $s\in\mathbb{R}$,κοντα στο $0$.Δείξτε ότι τότε $g'(0)=0$ και $g''(0)=\lambda$ και συνεπώς $g(s)=g(0)+\frac{\lambda}{2}s^2+o(s^2)$,καθώς $s\to 0$.

*Υπόδειξη.* Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια $C^2-$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής.Αν $\lambda$ είναι μια ιδιοτιμή της Hessian $(Hf)(a)$ και $v$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $|v|=1$,θεωρούμε την συνάρτηση $g(s)=f(a+sv)$,για $s\in\mathbb{R}$,κοντα στο $0$.Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε το εξής :

$$\frac{dg}{ds}(s) = \frac{d(f \circ (a+sv))}{ds} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+sv_i)\frac{d(a+sv_i)}{ds} \ ,$$

άρα για $s=0$ ισχύει ότι, $g'(0) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i$.Αφού το $a$ είναι κρίσιμο σημείο της $f$, τότε ισχύει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Άρα προκύπτει ότι $g'(0) = 0$.Ακόμη από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε το εξής :

$$\frac{d^2 g}{ds^2}(s) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+sv)v_i v_j$$

Άρα προκύπτει πως $g''(0) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)v_i v_j$ όπου από την Άσκηση 6.7 γνωρίζουμε ότι

$$g''(0) = v \cdot (Hf)(a) \cdot v^T = \lambda v v^T = \lambda |v|^2 = \lambda.$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο Taylor της $g$ στο $s=0$ με $\deg T_{g,0,2} = 2$ :

$$T_{g,0,2} = g(0) + g'(0)s + \frac{1}{2}g''(0)s^2 = g(0) + \frac{\lambda}{2}s^2$$

Άρα τελικά συμπεραίνουμε πως

$$g(s) = g(0) + \frac{\lambda}{2}s^2 + o(|s|^2)$$

καθώς το $s \to 0$ . ■

6.10 Σωστό ή Λάθος ; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \leq 1$ και $C^1$ για $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 < 1$ και αν $|\frac{\partial f}{\partial x_1}| + |\frac{\partial f}{\partial x_2}| + \cdots |\frac{\partial f}{\partial x_n}| > 0$ όταν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 < 1$, τότε υπάρχουν $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2 = 1$ και $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) < f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ όταν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 < 1$ .

*Υπόδειξη.* Έστω $f$ συνεχής στο σύνολο $K$ όπου $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} = \bar{B}(0,1)$ η οποία είναι η κλειστή μπάλα κέντρου 0 και ακτίνας 1.Η $\bar{B}(0,1)$ είναι συμπαγές σύνολο αφού είναι κλειστό και φραγμένο.Αφού η $f$ είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο τότε δέχεται μέγιστη και ελάχιστη τιμή.Έστω ότι το $\max\limits_{x \in K} f(x)$ είναι στο $a \in K$.Τότε ισχύουν τα εξής :

**1η περίπτωση :** Το $a$ ανήκει στο εσωτερίκο της μπάλας.

**2η περίπτωση :** Το $a$ ανήκει στα άκρα της μπάλας.

Αν ίσχυει η 1η περίπτωση, τότε η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $a$, άρα προκύπτει πως

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, n, \ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B(0,1)$$

το οποίο είναι άτοπο δεδομένου ότι $|\frac{\partial f}{\partial x_1}| + |\frac{\partial f}{\partial x_2}| + \cdots |\frac{\partial f}{\partial x_n}| > 0$ για $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B(0,1)$.Άρα το $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ανήκει στα άκρα του $K$, δηλαδή ισχύει $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ καθώς και ισχύει

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq f(a_1, a_2, \cdots, a_n), \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x = a$, άρα όταν δεν συμπέσουμε στα άκρα ισχύει:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) < f(a_1, a_2, \cdots, a_n), \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$$

Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι η πρόταση είναι σωστή. ■

6.11 Δείξτε ότι ένα ορθογώνιο κουτί δοσμένου όγκου έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν το κουτί είναι κύβος.

*Υπόδειξη*. Ελαχιστοποιήστε την συνάρτηση $S = 2xy + 2xz + 2yz$, όπου $z = V/(2xy)$ με $V$ δοσμένο όγκο. ■

# Κεφάλαιο 7

# Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης και Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης

## 7.1 Ασκήσεις

5.1 Δείξτε ότι η απεικόνιση $(u,v) \to (x,y) = (u^2+v^5+uv, u^2v+u+v^2)$ αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο $(u,v) = (0,1)$ και ορίζει $C^\infty$ συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$,για $(x,y)$ κοντά στο σημείο $(1,1)$.Επίσης υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$ .

5.2 Σωστό ή Λάθος ; Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$, ορισμένες για $(x,y)$ κοντά στο σημείο $(1,1)$,ώστε $u(1,1) = 0,\ v(1,1) = 1$ και

$$u^2(x,y) + v^6(x,y) + 3u(x,y)v(x,y) = x,\ u^2(x,y)v(x,y) + u(x,y) + v^2(x,y) = y\ .$$

5.3 Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (u,v) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$, και εξετάστε κοντά σε ποία σημεία αυτή αντιστρέφεται .Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$,τάξης 1,για συγκεκριμένη τοπική αντίστροφο.

5.4 Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f = f(x,y)$ και $g = g(x,y)$,ορισμένες κοντά στο $(0,0)$, ώστε $fg^2 + \sin g = x$ και $e^{fg} - \sin f - 1 = y$.

5.5 Σωστό ή Λάθος; Αν η απεικόνιση $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι $C^k$ $(k \geq 2)$ σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και τοπικά στο σημείο $a \in \Omega$,η $f$ αντιστρέφεται με μια $C^1$ απεικόνιση τότε αυτή η τοπική αντίστροφη είναι $C^k$.

5.6 Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ που ορίζεται από το τύπο

$$y = f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{1/2}}x = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}, \cdots, \frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)$$

για $x \in \mathbb{R}^n$, είναι $C^\infty$-αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$x = g(y) = \frac{1}{(1-|y|)^{1/2}}y = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}, \cdots, \frac{y_n}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}\right)\ .$$

5.7 Ας θεωρήσουμε μια $C^k$-απεικόνιση $f : D \to \mathbb{R}^n$, όπου $k \geq 1$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$ με $0 \in D$ και ας υποθέσουμε ότι $\det[(Jf)(0)] \neq 0$.Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ούτως ώστε η απεικόνιση $F$ που ορίζεται από τον τύπο $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(x) = f(\epsilon(1+|x|)^{-1/2} \cdot x)$ για $x \in \mathbb{R}^n$, να είναι καλά ορισμένη και $C^k$-αμφιαδιαφόριση από το $\mathbb{R}^n$ επί του $F(\mathbb{R}^n)$.

5.8 Δείξτε ότι μια $C^1$ και επί απεικόνιση $f : \Omega \to \Theta$, μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, είναι $C^1$ αμφιαδιαφόριση αν και μόνο αν η $f$ είναι $1-1$ και $\det Jf(a) \neq 0$ για κάθε $a \in \Omega$.

5.9 Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \to (x,y)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = uv, y = u(1-v)$.Δείξτε ότι ο $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $T = \{0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ στο σύνολο $\Delta = \{x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ με $1-1$ και επί τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi : \Delta \to T,\ u = x+y, v = x/(x+y).$$

5.10 Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v,w) \to (x,y,z)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις:$x = uvw,\ y = uv(1-w),\ z = u(1-v)$.Δείξτε ότι το $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $\Omega = \{0 < u < 1, 0 < v < 1, 0 < w < 1\}$ στο σύνολο $G = \{x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\}$ με $1-1$ και επί τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi : G \to \Omega,\ u = x+y+z,\ v = (x+y)/(x+y+z),\ w = x/(x+y).$$

Δείξτε επίσης ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του $\Phi$ είναι $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -u^2 v$.

5.11 Δείξτε ότι υπάρχει μια $C^\infty$ συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη για $x$ σε μια ανοικτή περιοχή $U$ στο $1$ (στο $\mathbb{R}$), έτσι ώστε $f(1) = 1$ και $x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$ $(x \in U)$.Επίσης υπολογίστε την παράγωγο $f'(1)$.

5.12 Αποδείξτε ότι υπάρχει $C^\infty$ συνάρτηση $z = \phi(x,y)$ ορισμένη για $(x,y)$ σε ανοικτή περιοχή $U$ του σημείου $(3,-2)$ στο $\mathbb{R}^2$, με $\phi(3,-2) = 1$ και έτσι ώστε

$$[\phi(x,y)]^6 + x[\phi(x,y)]^2 + 5y\phi(x,y) + y^2 + 2 = 0,\ (x,y) \in U.$$

Εν συνεχεία βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}$ στην κατευθυνση των οποίων η κατευθυνόμενη παράγωγος $\partial_{\vec{u}}\phi(3,-2) = 0$.

## 7.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

5.1 Δείξτε ότι η απεικόνιση $(u,v) \to (x,y) = (u^2+v^5+uv, u^2v+u+v^2)$ αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο $(u,v) = (0,1)$ και ορίζει $C^\infty$ συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$,για $(x,y)$ κοντά στο σημείο $(1,1)$.Επίσης υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$ .

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(u,v) \to f(u,v) = (x,y) = (u^2+v^5+uv, u^2v+u+v^2)\ .$$

Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

1. $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = 2u+v$ και $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = 5v^4+u$ ,
2. $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = 2uv+1$ και $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = u^2+2v$ ,

άρα ο Ιακωβιανός πίνακας της $f$ είναι ο $(Jf)(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+v & 5v^4+u \\ 2uv+1 & u^2+2v \end{pmatrix}$ . Έτσι ο Ιακωβιανός Πίνακας στο σημείο $(0,1)$ είναι ο $(Jf)(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ με $\det[(Jf)(0,1)] = -3 \neq 0$ δηλαδή η $f$ αντιστρέφεται τοπικά στο $(0,1)$.Έχουμε πως $f(0,1) = (1,1)$, άρα από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης ισχύει ότι

$$(Jf^{-1})(1,1) = [(Jf)(0,1)]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Αφού τοπικά στο $(0,1)$ ισχύει η σχέση $f^{-1}(u,v) = (x,y)$, τότε ισχύει ότι

1. $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\frac{2}{3}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = \frac{5}{3}$
2. $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{3}$ και $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{3}$

■

5.2 Σωστό ή Λάθος ; Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$,ορισμένες για $(x,y)$ κοντά στο σημείο $(1,1)$,ώστε $u(1,1) = 0,\ v(1,1) = 1$ και

$$u^2(x,y) + v^6(x,y) + 3u(x,y)v(x,y) = x,\ u^2(x,y)v(x,y) + u(x,y) + v^2(x,y) = y$$

*Υπόδειξη.*

Έστω πως, υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$ ορισμένες κοντά στο σημείο $(1,1)$ ώστε $u(1,1) = 0$ και $v(1,1) = 1$ και

$$u^2(x,y) + v^6(x,y) + 3u(x,y)v(x,y) = x\ (i)$$
$$u^2(x,y)v(x,y) + u(x,y) + v^2(x,y) = y\ (ii)$$

Διαφορίζοντας τις σχέσεις $(i), (ii)$ ως προς $x$ κοντα στο $(1,1)$ έχουμε,

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 6v^5(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)v(x,y) + 3\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)u(x,y) = 1$$
$$2u(x,y)v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + u^2(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$$

Άρα, ισχύει πως,

$$2\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{3}$$
$$2\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 0$$

το οποίο είναι άτοπο.Άρα, η πρόταση είναι λάθος. ■

5.3 Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (u,v) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$, και εξετάστε κοντά σε ποία σημεία αυτή αντιστρέφεται .Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$,τάξης 1,για συγκεκριμένη τοπική αντίστροφο.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως εξής :

$$f(x,y) = (u,v) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)\ .$$

Έχουμε λοιπόν ότι

1. $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ και $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -6xy$
2. $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 6xy$ και $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$

Άρα ο Ιακωβιανός Πίνακας της $f$ είναι ίσος με

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

με $\det[Jf(x,y)] = (3x^2 + 3y^2)^2$ συμπεραίνοντας πως η $f$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $(x,y) = 0$. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε

$$Jf^{-1}(u,v) = [Jf(x,y)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3x^2-3y^2}{(3x^2+3y^2)^2} & \frac{6xy}{(3x^2+3y^2)^2} \\ \frac{-6xy}{(3x^2+3y^2)^2} & \frac{3x^2-3y^2}{(3x^2+3y^2)^2} \end{pmatrix}\ .$$

Άρα, γνωρίζουμε πως ισχύει το εξής :

1. $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = \frac{3x^2-3y^2}{(3x^2+3y^2)^2}$ και $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = \frac{6xy}{(3x^2+3y^2)^2}$
2. $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = \frac{-6xy}{(3x^2+3y^2)^2}$ και $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = \frac{3x^2-3y^2}{(3x^2+3y^2)^2}$

■

5.4 Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f = f(x,y)$ και $g = g(x,y)$,ορισμένες κοντά στο $(0,0)$, ώστε $fg^2 + \sin g = x$ και $e^{fg} - \sin f - 1 = y$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τις απεικόνισεις :

$$F_1(x,y,z,d) = zd^2 + \sin d - z \quad \text{και} \quad F_2(x,y,z,d) = e^{zd} - \sin z - 1 - y$$

Θεωρούμε λοιπόν το σύστημα

$$F_1(x,y,z,d) = 0$$
$$F_2(x,y,z,d) = 0$$

όπου $F_1(0,0,0,0) = F_2(0,0,0,0) = 0$.

Επίσης έχουμε πως,

1. $\frac{\partial F_1}{\partial z} = d^2$ και $\frac{\partial F_1}{\partial d} = 2zd + \cos d$ ,
2. $\frac{\partial F_2}{\partial z} = de^{zd} - \cos z$ και $\frac{\partial F_2}{\partial d} = ze^{zd}$ .

Άρα στο σημείο $(0,0,0,0)$ έχουμε πως $\frac{\partial(F_1.F_2)}{\partial(z,d)}(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ με $\det[\frac{\partial(F_1.F_2)}{\partial(z,d)}] = 1 \neq 0$.Από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης κοντά στο $(0,0)$ ορίζονται συναρτήσεις :

$$f(x,y) = z \quad \text{και} \quad g(x,y) = d$$

με $f(0,0) = 0$ και $g(0,0) = 0$. ■

5.6 Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ που ορίζεται από το τύπο

$$y = f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{1/2}}x = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}, \cdots, \frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)$$

για $x \in \mathbb{R}^n$, είναι $C^\infty$-αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$x = g(y) = \frac{1}{(1-|y|)^{1/2}}y = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}, \cdots, \frac{y_n}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}\right)$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ που ορίζεται από το τύπο

$$y = f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{1/2}}x = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}, \cdots, \frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right).$$

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{gathered} y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}} \ (1) \\ \vdots \\ y_n = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}} \ (n) \end{gathered}$$

Άρα έχουμε πως

$$1 - (\sum_{i=1}^n y_i^2) = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^2) + 1}.$$

Ακόμη έχουμε πως,

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}} = x_i(1 - \sum_{i=1}^n y_i^2)$$

και αφού, $|y| < 1$ έχουμε

$$x_i = \frac{y_i}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2}}.$$

Άρα προκύπτει πως η $f$ είναι $C^\infty$-αμφιδιαφόριση για $x \in \mathbb{R}^n$ με αντίστροφη απεικόνιση την

$$x = g(y) = \frac{1}{(1-|y|)^{1/2}}y = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}, \cdots, \frac{y_n}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}\right)$$

■

5.7 Ας θεωρήσουμε μια $C^k$-απεικόνιση $f : D \to \mathbb{R}^n$, όπου $k \geq 1$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$ με $0 \in D$ και ας υποθέσουμε ότι $\det[(Jf)(0)] \neq 0$.Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ούτως ώστε η απεικόνιση $F$ που ορίζεται από τον τύπο $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(x) = f(\epsilon(1+|x|)^{-1/2} \cdot x)$ για $x \in \mathbb{R}^n$, να είναι καλά ορισμένη και $C^k$-αμφιαδιαφόριση από το $\mathbb{R}^n$ επί του $F(\mathbb{R}^n)$.

*Υπόδειξη.* Έστω η $C^k$-απεικόνιση $f : D \to \mathbb{R}^n,\ k \geq 1$ ορισμένη στο $D \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό με $0 \in D$ και ας υποθέσουμε ότι $det[(Jf)(0)] \neq 0$.Αυτό σημαίνει πως $f$ αντιστρέφεται τοπικά στο $0$ δηλαδή υπάρχει :

$$K = \{x \in D : |x| < \epsilon\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$ ώστε $f$ να είναι $C^k$-αμφιδιαφόριση στο $K$.

Όμως
$$|(1+|x|)^{-1/2} \cdot x| < 1 \Leftrightarrow |\epsilon(1+|x|)^{-1/2} \cdot x| < \epsilon$$

όπου η απεικόνιση
$$x \to \phi(x) = \epsilon(1+|x|)^{-1/2} \cdot x$$

$C^k$-αμφιδιαφόριση μέσω της Άσκησης 8.

Έτσι η απεικόνιση
$$F(x) = f(\epsilon(1+|x|)^{-1/2} \cdot x)$$

είναι καλά ορισμένη αφού $\phi(\mathbb{R}^n) \subset K$ και είναι $C^k$-αμφιδιαφόριση στο $F(\mathbb{R}^n)$ ως σύνθεση $C^k$-αμφιαδιαφορίσιμων. ■

5.9 Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \to (x,y)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = uv, y = u(1-v)$.Δείξτε ότι ο $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $T = \{0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ στο σύνολο $\Delta = \{x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ με $1-1$ και επί τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi : \Delta \to T,\ u = x+y, v = x/(x+y)\ .$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \to (x,y)$$

που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$x = uv$$
$$y = u(1-v)$$

Θεωρούμε το σύνολο $\Delta = \{x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων στο $\Delta$:

$$\begin{cases} x = uv \\ y + u(1-v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv \\ u = x+y,\ 0 < u < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{x}{x+y},\ 0 < v < 1 \\ u = x+y,\ 0 < u < 1 \end{cases}$$

Λόγω της μοναδικότητας των λύσεων του συστήματος προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$\Phi : T \to \Delta,\ (x,y) \to (u,v)$$

με $T = \{0 < u < 1, 0 < v < 1\}$ είναι $1-1$ και επί με $u = x+y$ και $v = \frac{x}{x+y}$. ■

5.10 Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (u, v, w) \to (x, y, z)$, που ορίζεται από τις εξισώσεις:$x = uvw,\ y = uv(1 - w),\ z = u(1 - v)$.Δείξτε ότι το $\Phi$ απεικονίζει το σύνολο $\Omega = \{0 < u < 1, 0 < v < 1, 0 < w < 1\}$ στο σύνολο $G = \{x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$ με $1 - 1$ και επί τρόπο, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό

$$\Psi : G \to \Omega,\ u = x + y + z,\ v = (x + y)/(x + y + z),\ w = x/(x + y).$$

Δείξτε επίσης ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του $\Phi$ είναι $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -u^2 v$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (u, v, w) \to (x, y, z)$$

που ορίζεται από τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} x &= uvw \\ y &= uv(1 - w) \\ z &= u(1 - v) \end{aligned}$$

Θεωρούμε το σύνολο $G = \{x > 0, y > 0, z > 0.x + y + z < 1\}$ και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων στο $G$ :

$$\begin{cases} x = uvw \\ y = uv(1 - w) \\ z = u(1 - v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uvw \\ x + y = uv \\ z = u(1 - v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uvw \\ y + x = uv \\ u = x + y + z,\ 0 < u < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = uvw \\ v = \frac{x+y}{u} = \frac{x+y}{x+y+z},\ 0 < v < 1 \\ u = x + y + z,\ 0 < u < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{x}{uv} = \frac{x}{x+y},\ 0 < w < 1 \\ v = \frac{x+y}{u} = \frac{x+y}{x+y+z},\ 0 < v < 1 \\ u = x + y + z,\ 0 < u < 1 \end{cases}$$

Λόγω της μοναδικότητας των λύσεων του συστήματος προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$\Psi : \Omega \to G,\ (x, y, z) \to (u, v, w)$$

όπου $\Omega = \{0 < u, v, w < 1\}$ είναι $1 - 1$ και επί με $u = x + y + z, v = \frac{x+y}{x+y+z}$ και $w = \frac{x}{x+y}$.

Έχουμε λοιπόν πως

$$(J\Phi)(x, y, z) = \begin{vmatrix} vw & uw & uv \\ v(1 - w) & u(1 - w) & -uv \\ 1 - v & -u & 0 \end{vmatrix} .$$

Άρα τελικά έχουμε ότι $\det [J\Phi(x, y, z)] = -u^2 v$ ∎

5.11 Δείξτε ότι υπάρχει μια $C^\infty$ συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη για $x$ σε μια ανοικτή περιοχή $U$ στο $1$ (στο $\mathbb{R}$), έτσι ώστε $f(1) = 1$ και $x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$ $(x \in U)$.Επίσης υπολογίστε την παράγωγο $f'(1)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x, y) = x^y + y^x - 2$.Υπολογίζοντας παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^y \log x + \frac{x}{y} y^x .$$

δηλαδή $F(1, 1) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0$.

Από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης υπάρχει μια $C^\infty$ συνάρτηση $y = f(x)$,ορισμένη για $x$ σε μια ανοικτή περιοχή $U$ του 1 ώστε

$$x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2,\ f(1) = 1$$

Διαφορίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς $x$ :

$$x^{f(x)}[\frac{f(x)}{x} + \log x f'(x)] + [f(x)]^x[\log f(x) + \frac{x}{f(x)}f'(x)] = 0$$

όπου προκύπτει ότι $f'(1) = -1$. ■

5.12 Αποδείξτε ότι υπάρχει $C^\infty$ συνάρτηση $z = \phi(x,y)$ ορισμένη για $(x,y)$ σε ανοικτή περιοχή $U$ του σημείου $(3,-2)$ στο $\mathbb{R}^2$, με $\phi(3,-2) = 1$ και έτσι ώστε

$$[\phi(x,y)]^6 + x[\phi(x,y)]^2 + 5y\phi(x,y) + y^2 + 2 = 0,\ (x,y) \in U.$$

Εν συνεχεία βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}$ στην κατευθυνση των οποίων η κατευθυνόμενη παράγωγος $\partial_{\vec{u}}\phi(3,-2) = 0$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x,y,z) = z^6 + xz^2 + 5yz + y^2 + 2$.Υπολογίζοντας έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 6z^5 + 2xz + 5y\ ,$$

δηλαδή $F(3,-2,1) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial z}(3,-2,1) = 2 \neq 0$.
Από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης υπάρχει $C^\infty$ συνάρτηση $z = \phi(x,y)$ ορισμένη για $(x,y)$ σε ανοικτή περιοχή $U$ του σημείου $(3,-2)$ στο $\mathbb{R}^2$ με

$$[\phi(x,y)]^6 + x[\phi(x,y)]^2 + 5y\phi(x,y) + y^2 + 2 = 0,\ \phi(3,-2) = 1$$

Διαφορίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς $x$ και ως προς $y$ :

$$6[\phi(x,y)]^5\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + [\phi(x,y)]^2 + 2x\phi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + 5y\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = 0$$
$$6[\phi(x,y)]^5\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) + 2x\phi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) + 5\phi(x,y) + 5y\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) + 2y = 0$$

όπου συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial\phi}{\partial x}(3,-2) = -\frac{1}{2}$ και $\frac{\partial\phi}{\partial y}(3,-2) = \frac{1}{2}$ Άρα έχουμε πως $\vec{\nabla}\phi(3,-2) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
Θεωρούμε $\vec{u} = (x,y)$ με $x^2 + y^2 = 1$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$\partial_{\vec{u}}\phi(3,-2) = \vec{\nabla}\phi(3,-2)\cdot\vec{u} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow x = y\ .$$

Άρα, τα $\vec{u}$ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση είναι τα $\vec{u_1} = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ και $\vec{u_2} = (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$. ■

# Μέρος III

# Ολοκληρωτικός Λογισμός

# Κεφάλαιο 8

# Διπλά Ολοκληρώματα

## 8.1 Ασκήσεις

8.1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_K (2x+3y)dxdy$ όπου $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

8.2 Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, y^3 \leq x \leq 3-2y, 0 \leq z \leq x^2+2y^2\right\}.$$

8.3 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int\limits_{x=0}^{a} \left( \int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}dy \right) dx$, $\int\limits_{x=0}^{8} \left( \int\limits_{y=\sqrt{x}}^{2} \frac{dy}{y^4+1} \right) dx$.

8.4 Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+z^2 \leq 1\}$ είναι $16/3$.

8.5 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int\limits_{x=1}^{2} \left( (x-1) \int\limits_{y=0}^{\log x} \sqrt{1+e^{2y}}dy \right) dx$, $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \leq 1, y \geq 0} \frac{x^3}{x^4+y^4+1} dxdy$.

8.6 Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{N,M\to\infty} \frac{M}{N^{1+\sqrt{2}}} \sum_{1 \leq k \leq N,\ 1 \leq l \leq M} \frac{k^{\sqrt{2}}}{M^2+l^2}, \quad \lim_{N,M\to\infty} \frac{1}{N^{1+\pi}} \sum_{1 \leq k \leq N,\ 1 \leq l \leq M} \frac{k^{\pi}}{\sqrt{M^2+l^2}}.$$

8.7 Δείξτε ότι $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{1 \leq k,l \leq N} \frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2} = \frac{1}{4} \log \frac{4}{3}$.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xydxdy/(x^2+y^2+1)^2$.

8.8 Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{1 \leq k,l \leq N} \frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4}$.

8.9 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_K \sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}dxdy$ όπου $K$ είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(2,-1), (5/2,-1/2), (3,-1)$ και $(5/2,-3/2)$.

8.10 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)}dy\right)dx$.

8.11 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{D} \frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy$, όπου $D$ είναι το τετράγωνο $-1 \leq x+y \leq 1, 1 \leq x-y \leq 3$.

8.12 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{D} \frac{(x+2y)^3\ dxdy}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}}$, όπου

$$D = \{(x,y) : 2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1, 1 \leq 2x + 4y \leq 2\}.$$

8.13 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq a} (x^2+y^2)^5\ dxdy$.

8.14 Να βρείτε το κέντρο μάζας του ημικυκλίου $D = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq a\}$.

8.15 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq a} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\lambda}}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

8.16 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq a,\ x^2+y^2-a^2 \leq z \leq \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

8.17 Υπολογίστε το όγκο της σφαίρας ακτίνας $a$.

8.18 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που η βάση του είναι το καρδιοειδές $r \leq a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$.

8.19 Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο που περικλείεται από τον λημνίσκο $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

8.20 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του χωρίου $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ y \geq 0\}$.

8.21 Ένα ομογενής δίσκος μάζας $m$ και ακτίνας $a$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega$.Πόση είναι η κινητική του ενέργεια που οφείλεται σε αυτήν την περιστροφή;.

8.22 Υπολογίστε την ροπή αδράνειας επίπεδης πλάκας σε σχήμα έλλειψης ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο αυτής. (Υποθέστε πυκνότητα μάζας $\rho = 1$).

8.23 Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στους κυλίνδρους $x^2+y^2 = a^2$ και $x^2+y^2 = b^2$ $(a < b)$, και φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z = \lambda\sqrt{x^2+y^2}$ $(\lambda > 0)$ και από κάτω από το παραβολοειδές $z = -\mu(x^2+y^2+1)$ $(\mu > 0)$.

8.24 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{D}(x^2-y^2)^5x^6y^6(x^2+y^2)dxdy$, όπου $D$ είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του $xy-$ επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές:

$$x^2-y^2 = 1,\ x^2-y^2 = 2,\ xy = 3/2,\ xy = 2.$$

8.25 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

8.26 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

8.27 Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

## 8.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

8.1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_K (2x+3y)dxdy$ όπου $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0, y\ge 0\}$.

*Υπόδειξη.* Από το σύνολο $K$ προκύπτει πως $0\le y\le a$ και $0\le x\le \sqrt{a^2-y^2}$.Άρα έχουμε πως

$$\begin{aligned}
\iint\limits_K (2x+3y)dxdy &= \int\limits_{y=0}^{a}(\int\limits_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} 2x+3y\ dx)dy \\
&= \int\limits_{y=0}^{a}(x^2+3xy\big|_0^{\sqrt{a^2-y^2}})dy \\
&= \int\limits_{y=0}^{a} a^2-y^2+3y\sqrt{a^2-y^2}dy + \iint\limits_K (2x+3y)dxdy \\
&= a^2-\frac{y^3}{3}-(a^2-y^2)^{3/2}\Bigg|_0^a = \frac{5a^3}{3}
\end{aligned}$$

■

8.2 Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 1, y^3\le x\le 3-2y, 0\le z\le x^2+2y^2\}$$

*Υπόδειξη.*

Για να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 1, y^3\le x\le 3-2y, 0\le z\le x^2+2y^2\}$$

αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{y=0}^{1}(\int\limits_{x=y^3}^{3-2y} x^2+2y^2\ dx)dy\ .$$

Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\int\limits_{y=0}^{1}(\int\limits_{x=y^3}^{3-2y} x^2+2y^2\ dx)dy = \int\limits_{y=0}^{1}\frac{(3-2y)^3}{3}-\frac{y^9}{3}+2y^2(3-2y)-2y^5\ dy = \frac{119}{30}\ .$$

■

8.3 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int\limits_{x=0}^{a}\left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy\right)dx,\ \int\limits_{x=0}^{8}\left(\int\limits_{y=\sqrt{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx.$

*Υπόδειξη.* (i) Έχουμε από Θ. Fubini πως $\int\limits_{x=0}^{a}\left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy\right)dx=\iint\limits_{K}\sqrt{a^2-y^2}dydx$ όπου

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le a, 0\le y\le \sqrt{a^2-x^2}\}$$

το οποίο ισοδυναμεί με το σύνολο

$$D=\{(x,y): 0\le y\le a, 0\le x\le \sqrt{a^2-y^2}\}\ .$$

Από Θ.Fubini ισχύει πως $\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-y^2}dydx=\int\limits_{y=0}^{a}\left(\int\limits_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy\right)dx$

$$\int\limits_{y=0}^{a}\left(\int\limits_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy\right)dx=\int\limits_{y=0}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\left(\int_{x=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}dx\right)dy=\int\limits_{y=0}^{a}a^2-y^2=\frac{2a^3}{3}\ .$$

(ii) Από Θ. Fubini έχουμε πως $\int\limits_{x=0}^{8}\left(\int\limits_{y=\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx=\iint\limits_{K}\frac{1}{y^4+1}dydx$ όπου

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 8, \sqrt[3]{x}\le y\le 2\}\ ,$$

το οποίο ισοδυναμεί με το σύνολο

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le y^3, 0\le y\le 2\}\ .$$

Από Θ. Fubini έχουμε πως

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{y^4+1}dxdy=\int\limits_{y=0}^{2}\left(\int\limits_{x=0}^{y^3}dx\right)\frac{1}{y^4+1}dy=\int\limits_{y=0}^{2}\frac{y^3}{y^4+1}dy=\frac{\log 17}{4}\ .$$

■

8.4 Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού $\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1\}$ είναι $16/3$.

*Υπόδειξη.* Έχουμε το στερεό $D\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1\}$ όπου ισοδυναμεί με το σύνολο :

$$K=\{(x,y,z): -1\le y\le 1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2}, -\sqrt{1-x^2}\le z\le \sqrt{1-x^2}\}\ .$$

Άρα για τον υπολογισμό του όγκου του στερεού $D$ αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$V(D)=\iint_K 2\sqrt{1-x^2}dxdy\ ,$$

όπου το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα

$$V(D)=\iint\limits_{K}2\sqrt{1-x^2}dxdy=\int\limits_{x=-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}2\sqrt{1-x^2}dy\right)dx=\int\limits_{x=-1}^{1}4(1-x^2)=\frac{16}{3}.$$ ■

8.5 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int\limits_{x=1}^{2}\left((x-1)\int\limits_{y=0}^{\log x}\sqrt{1+e^{2y}}dy\right)dx,\quad \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1, y\ge 0}\frac{x^3}{x^4+y^4+1}dxdy.$

*Υπόδειξη.* (i) Από Θ. Fubini έχουμε πως

$$I = \int\limits_{x=1}^{2} \left( (x-1) \int\limits_{y=0}^{\log x} \sqrt{1+e^{2y}} dy \right) dx = \iint_K (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx \ ,$$

όπου $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le \log x, \ 1 \le x \le 2 \ \}$ το οποίο ισοδύναμεί με το σύνολο

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le \log 2, \ e^y \le x \le 2 \ \} \ .$$

Έτσι από Θ. Fubini υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$I = \iint_D (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx dy$

$= \int\limits_{y=0}^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left( \int\limits_{x=e^y}^{2} (x-1) dx \right) dy$

$= \int\limits_{y=0}^{\log 2} (e^y - \frac{e^{2y}}{2})\sqrt{e^{2y}+1} dy$

και αφήνεται στον αναγνώστη ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος.

(ii) Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$T : (u,v) \to (x,y) : \ (u,v) \to (x,y) = (-u,v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u,v)$$

με $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$. Τελικά λοιπόν έχουμε το εξής :

$$I = \int\limits_{\sqrt{u^2+v^2} \le 1, \ v \ge 0} \frac{-u^3}{u^4+v^4+1} |\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| \ dx dy = -I \Leftrightarrow I = 0 \ .$$

■

8.6 Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{N,M \to \infty} \frac{M}{N^{1+\sqrt{2}}} \sum_{1 \le k \le N, \ 1 \le l \le M} \frac{k^{\sqrt{2}}}{M^2+l^2}, \ \lim_{N,M \to \infty} \frac{1}{N^{1+\pi}} \sum_{1 \le k \le N, \ 1 \le l \le M} \frac{k^{\pi}}{\sqrt{M^2+l^2}}.$$

*Υπόδειξη.* (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^{\sqrt{2}}}{1+y^2}$ και την εξής διαμέριση του $[0,1] \times [0,1]$ : $P = P_i \times P_j$ με $P_i = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{N}, = \cdots, x_{N-1} = \frac{N-1}{N}, x_N = 1\}$ και $P_j = \{y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{M}, = \cdots, y_{M-1} = \frac{M-1}{M}, y_M = 1\}$ με $x_k = \dfrac{k}{N}$ και $y_l = \dfrac{l}{M}$ για $k = 0,1,\cdots,N$ και $l = 0,1,\cdots,M$.

Άρα για την λεπτότητα της διαμέρισης $P$ ισχύει πως

$$\|P\| = \max\{diam\{Q\} : Q \in P\} = \sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{M^2}} \to 0$$

για $M,N\to\infty$.Άρα, η συνάρτηση $f$ είναι διπλά ολοκληρώσιμη στο $[0,1]\times[0,1]$ και μάλιστα

$$\lim_{M,N\to\infty}\sum_{1\le k\le N,\ 1\le l\le M} f(x_k,y_l)(x_{k+1}-x_k)(y_{l+1}-y_l)=\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy\ .$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ισχύει το εξής :

$$\lim_{N,M\to\infty}\frac{M}{N^{1+\sqrt{2}}}\sum_{1\le k\le N,\ 1\le l\le M}\frac{k^{\sqrt{2}}}{M^2+l^2}=\lim_{M,N\to\infty}\sum_{1\le k\le N,\ 1\le l\le M} f(x_k,y_l)(x_{k+1}-x_k)(y_{l+1}-y_l)$$

άρα, τελικά συμπεραίνουμε πως,

$$\lim_{N,M\to\infty}\frac{M}{N^{1+\sqrt{2}}}\sum_{1\le k\le N,\ 1\le l\le M}\frac{k^{\sqrt{2}}}{M^2+l^2}=\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{4(\sqrt{2}+1)}$$

(ii) Το όριο υπολογίζεται όμοια με το (i) θεωρώντας την συνάρτηση $f(t,y)=\dfrac{x^{\pi}}{\sqrt{1+y^2}}$ .

■

8.7 Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xydxdy/(x^2+y^2+1)^2$.

*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=xy/(x^2+y^2+1)^2$ και την διαμέριση του $[0.1]\times[0,1]$ : $P=P_i\times P_j$ με $P_i=\{x_0=0,x_1=\frac{1}{N},=\cdots,x_{N-1}=\frac{N-1}{N},x_N=1\}$ και $P_j=\{y_0=0,y_1=\frac{1}{N},=\cdots,y_{N-1}=\frac{N-1}{N},y_N=1\}$ με $x_k=\dfrac{k}{N}$ και $y_l=\dfrac{l}{N}$ για $k,l=0,1,\cdots,N$.Τότε ομοίως με την άσκηση 8.6 δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$$

Έτσι υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy=\int\limits_{y=0}^{1} y\Big(\int\limits_{x=0}^{1} x/(x^2+y^2+1)^2dx\Big)$$

$$=\int\limits_{y=0}^{1}\frac{y}{2(y^2+1)}-\frac{y}{2(y^2+2)}dy=\frac{\log\frac{y^2+1}{y^2+2}}{4}\Bigg|_0^1=\frac{\log\frac{4}{3}}{4}.$$

■

8.8 Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4}$.

*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{(x^2+y^4+1)^4}$ και την εξής διαμέριση του $[0,1]\times[0,1]$ : $P=P_i\times P_j$ με $P_i=\{x_0=0,x_1=\frac{1}{N},=\cdots,x_{N-1}=\frac{N-1}{N},x_N=1\}$ και $P_j=\{y_0=0,y_1=\frac{1}{N},=$

$\cdots, y_{N-1} = \frac{N-1}{N}, y_N = 1\}$ με $x_k = \dfrac{k}{N}$ και $y_l = \dfrac{l}{N}$ για $k, l = 0, 1, \cdots, N$.Τότε ομοίως με την άσκηση 8.6 δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{1\le k,l\le N} \frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4} = \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy\ .$$

και υπολογίστε το ολοκλήρωμα. ■

8.9 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_K \sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}dxdy$ όπου $K$ είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(2,-1), (5/2,-1/2), (3,-1)$ και $(5/2,-3/2)$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$T : (x,y) \to (u,v) : (u,v) = (x+y, x-y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

με $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$, άρα έχουμε ότι ισχύει $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det T^{-1} = \dfrac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = -\dfrac{1}{2}$. Για την εύρεση των ορίων του ολοκληρώματος έχουμε ότι ισχύει :

$$T(2,-1) = (1,3), \quad T(5/2,-1/2) = (2,3), \quad T(3,-1) = (2,4), \quad T(5/2,-3/2) = (1,4)$$

Άρα προκύπτει πως

$$\iint\limits_K \sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{u}\sqrt[3]{v}|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dxdy$$

όπου $D$ το τετράγωνο με κορυφές $(1,3), (2,3), (2,4), (1,4)$.Από Θ. Fubini ισχύει το εξής :

$$\iint\limits_D \sqrt{u}\sqrt[3]{v}|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv = \int\limits_{v=3}^{4} \left( \int\limits_{u=1}^{2} \sqrt{u}\sqrt[3]{v}|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du \right) dv$$

$$\int\limits_{v=3}^{4} \left( \int\limits_{u=1}^{2} \sqrt{u}\sqrt[3]{v}|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du \right) dv = \frac{1}{2} \int\limits_{v=3}^{4} \left( \int\limits_{u=1}^{2} \sqrt{u}\sqrt[3]{v}du \right) dv = \frac{1}{2} \int\limits_{v=3}^{4} \sqrt[3]{v} \left( \int\limits_{u=1}^{2} \sqrt{u}du \right) dv$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{v=3}^{4} \sqrt[3]{v} \left( \int\limits_{u=1}^{2} \sqrt{u}du \right) dv = \frac{1}{2} (\frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2)(\frac{3}{4} v^{4/3} \Big|_3^4)\ .$$ ■

8.10 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{x=0}^{1} \left( \int\limits_{y=0}^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)} dy \right) dx$.

*Υπόδειξη.* Από το Θ. Fubini έχουμε το εξής :

$$I = \int\limits_{x=0}^{1} \left( \int\limits_{y=0}^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)} dy \right) dx = \iint\limits_D e^{(y-x)/(y+x)} dydx$$

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1-x\}$.Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό :

$$T:(x,y)\to(u,v)=(y-x,y+x)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

με $\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-2$, άρα ισχύει $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$.Έτσι το σύνολο $D$ είναι ισοδύναμο με το

$$S=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq v\leq 1,\ -v\leq u\leq v\ \}.$$

Από Θ. Fubini έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$\iint\limits_S e^{u/v}|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv=\int\limits_{v=0}^{1}\Big(\int\limits_{u=-v}^{v}e^{u/v}|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du\Big)dv$$

$$I=\int\limits_{v=0}^{1}\Big(\int\limits_{u=-v}^{v}e^{u/v}|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du\Big)dv=\frac{1}{2}\int\limits_{v=0}^{1}\Big(ve^{u/v}\Big|_{-v}^{v}\Big)dv=\frac{1}{2}\int\limits_{v=0}^{1}\Big(v(e-e^{-1}\Big)dv=\frac{e-e^{-1}}{4}$$

. ■

8.11 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D \frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy$, όπου $D$ είναι το τετράγωνο $-1\leq x+y\leq 1, 1\leq x-y\leq 3$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό :

$$T:(x,y)\to(u,v)=(x+y,x-y)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

όπου $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=2$, δηλαδή ισχύει ότι $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2}$.Έτσι το σύνολο $D$ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο

$$S=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ -1\leq u\leq 1,\ 1\leq v\leq 3\ \}.$$

Από Θ. Fubini έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$\iint\limits_S \frac{u^4}{v^5}|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dvdu=\int\limits_{u=-1}^{1}\Big(\int\limits_{v=1}^{3}\frac{u^4}{v^5}dv\Big)|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du$$

Τελικά λοιπόν προκύπτει πως

$$\iint\limits_D\frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy=\int\limits_{u=-1}^{1}\Big(\int\limits_{v=1}^{3}\frac{u^4}{v^5}dv\Big)|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du=\frac{1}{2}\Big(-\frac{v^{-4}}{4}\Big|_1^3\Big)\Big(\frac{u^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\Big)=\frac{4}{81}\ .$$ ■

8.12 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D \frac{(x+2y)^3\ dxdy}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}}$, όπου

$$D=\{(x,y): 2x^2+5y^2+2xy\leq 1, 1\leq 2x+4y\leq 2\}.$$

*Υπόδειξη.* Θεωρήστε τον γραμμικό μετασχηματισμό :

$$T:(x,y)\to(u,v)=(x+2y,x-y)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

και κατόπιν πολικό μετασχηματισμό. ■

8.13 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq a} (x^2+y^2)^5\, dxdy.$

*Υπόδειξη*. Θεωρούμε το σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq a\}$.Κατόπιν θεωρούμε πολικό μετασχηματισμό στο σύνολο $D$ :

$$x = r\cos\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\sin\theta$$

με $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.Από το μετασχηματισμό στο σύνολο $D$ προκύπτει το εξής σύνολο :

$$G = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}\ .$$

Έτσι τελικά έχουμε πως

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)^5 dxdy = \iint\limits_G r^{11} dr d\theta = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} r^{11} dr) d\theta = \frac{\pi a^{12}}{6}\ .$$

■

8.14 Να βρείτε το κέντρο μάζας του ημικυκλίου $D = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq a,\ y \geq 0\}$.

*Υπόδειξη*. Θεωρούμε το σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq a,\ y \geq 0\}$.Κατόπιν θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό

$$x = r\cos\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\sin\theta$$

με $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.Από το μετασχηματισμό και το σύνολο $D$ προκύπτει το σύνολο

$$G = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Αν $K(\bar{x},\bar{y})$ το κέντρο μάζας του ημικυκλίου, τότε ισχύει πως

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x dxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{\int\limits_{\theta=0}^{\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} r^2\cos\theta dr) d\theta}{\int\limits_{\theta=0}^{\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} r dr) d\theta} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D y dxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{\int\limits_{\theta=0}^{\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} r^2\sin\theta dr) d\theta}{\int\limits_{\theta=0}^{\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} r dr) d\theta} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a^3}{3\pi}.$$

■

8.15 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq a} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

*Υπόδειξη*. Έστω το σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq a\}$. Θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό :

$$x = r\cos\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\sin\theta$$

με $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.Από το μετασχηματισμό και το σύνολο $D$ προκύπτει το σύνολο

$$G = \{(r,\theta) : 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Έτσι προκύπτει πως $\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le a} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} \frac{r}{(1+r^2)^\lambda} dr) d\theta$.Διακρίνουμε περιπτώσεις :

(i) Αν $\lambda = 1$ τότε

$$\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le a} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} \frac{r}{(1+r^2)^\lambda} dr) d\theta = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} \frac{r}{r^2+1} dr) d\theta = \pi \log(1+a^2)\ .$$

(ii) Αν $\lambda \neq 1$ τότε

$$\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le a} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} \frac{r}{(1+r^2)^\lambda} dr) d\theta = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \left. \frac{(1+r^2)^{1-\lambda}}{2(1-\lambda)} \right|_{r=0}^{a} d\theta = \frac{\pi[(a^2+1)^{1-\lambda} - 1]}{1-\lambda}.$$

■

8.16 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a,\ x^2+y^2-a^2 \le z \le \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$.

*Υπόδειξη.* Έστω το σύνολο $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a,\ x^2+y^2-a^2 \le z \le \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$. Θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό

$$x = r\cos\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\sin\theta$$

με $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.Από το μετασχηματισμό και το σύνολο $K$ προκύπτει το σύνολο

$$S = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r^2 - a^2 \le z \le \sqrt{4a^2-r^2}\}.$$

Άρα ο όγκος του στερεού ισούται με

$$V(K) = \iint\limits_{K} \sqrt{4a^2-x^2-y^2} - x^2 - y^2 + a^2 dxdy = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} (\sqrt{4a^2-r^2} - r^2 + a^2) r dr) d\theta$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} (\int\limits_{r=0}^{a} (\sqrt{4a^2-r^2} - r^2 + a^2) r dr) d\theta = 2\pi\left.[-\tfrac{1}{3}(4a^2-r^2)^{3/2} - \tfrac{r^4}{4} + \tfrac{a^2r^2}{2}]\right|_{r=0}^{a}$$

■

8.17 Υπολογίστε το όγκο της σφαίρας ακτίνας $a$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ που γράφεται ισοδύναμα ως

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le a^2, -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}.$$

Για να βρούμε τον όγκο της σφαίρας αρκεί να υπολογίσουμε το εξής διπλό ολοκλήρωμα :

$$\iint\limits_{D} 2\sqrt{a^2-x^2-y^2} dxdy\ .$$

Θεωρούμε λοιπόν τον πολικό μετασχηματισμό :

$$x = r\cos\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\sin\theta$$

με $det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Άρα από το μετασχηματισμό προκύπτει το εξής :

$$V(D) = \iint\limits_{D} 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\int\limits_{r=0}^{a} r\sqrt{a^2-r^2}dr)d\theta = 2\pi(-\tfrac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{a}) = \tfrac{4\pi a^3}{3}. \qquad \blacksquare$$

8.18 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που η βάση του είναι το καρδιοειδές $r \leq a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$.

*Υπόδειξη.* Έστω $D$ το σύνολο που περιγράφει το παραπάνω στερεό.Θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό :

$$x = r\cos\theta \quad \textit{και} \quad y = r\sin\theta$$

με $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, δηλαδή προκύπτει το εξής :

$$V(D) = \iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\int\limits_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r^3dr)d\theta = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\frac{a^4(1+\cos\theta)^4}{4}d\theta = \frac{35a^4\pi}{16}. \qquad \blacksquare$$

8.19 Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο που περικλείεται από τον λημνίσκο $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

*Υπόδειξη.* Έφαρμόζοντας πολικό μετασχηματισμό στο παραπάνω χωρίο αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$E(X) = \int\limits_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4}(\int\limits_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} rdr)d\theta = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

**Σημείωση.** *Για την εύρεση των άκρων ολοκλήρωσης ως προς $\theta$ χρησιμοποιήσαμε ότι* $\cos 2\theta \geq 0$. $\blacksquare$

8.20 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του χωρίου $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ y \geq 0\}$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$(u,v) \to (x,y) = (au, bv) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

με $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = ab$. Τότε προκύπτουν οι εξής δύο περιπτώσεις :

(i) Αν $b > 0$ τότε από το σύνολο $K$ προκύπτει το σύνολο

$$D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1,\ v \geq 0\}$$

και με πολικό μετασχηματισμό το κέντρο βάρους είναι το $G = (\bar{x}, \bar{y})$ με

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_{K} xdxdy}{\iint\limits_{K} dxdy} = \frac{ab\int\limits_{\theta=0}^{\pi}(\int\limits_{r=0}^{1} r^2\cos\theta dr)d\theta}{ab\int\limits_{\theta=0}^{\pi}(\int\limits_{r=0}^{1} rdr)d\theta} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_K ydxdy}{\iint\limits_K dxdy} = \frac{ab\int\limits_{\theta=0}^{\pi}(\int\limits_{r=0}^{1} r^2\sin\theta dr)d\theta}{ab\int\limits_{\theta=0}^{\pi}(\int\limits_{r=0}^{1} rdr)d\theta} = \frac{4}{3\pi}$$

$(ii)$ Αν $b<0$ τότε από το σύνολο $K$ προκύπτει το σύνολο

$$D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1,\ v \leq 0\}$$

και με πολικό μετασχηματισμό το κέντρο βάρους είναι το $G=(\bar{x},\bar{y})$ με

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_K xdxdy}{\iint\limits_K dxdy} = \frac{ab\int\limits_{\theta=-\pi}^{0}(\int\limits_{r=0}^{1} r^2\cos\theta dr)d\theta}{ab\int\limits_{\theta=\pi}^{0}(\int\limits_{r=0}^{1} rdr)d\theta} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_K ydxdy}{\iint\limits_K dxdy} = \frac{ab\int\limits_{\theta=-\pi}^{0}(\int\limits_{r=0}^{1} r^2\sin\theta dr)d\theta}{ab\int\limits_{\theta=-\pi}^{0}(\int\limits_{r=0}^{1} rdr)d\theta} = \frac{4}{3\pi}$$

■

8.21 Ένα ομογενής δίσκος μάζας $m$ και ακτίνας $a$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega$.Πόση είναι η κινητική του ενέργεια που οφείλεται σε αυτήν την περιστροφή;.

*Υπόδειξη.* Έχουμε ότι η κινητική ενέργεια του δίσκου, που οφείλεται στην περιστροφή του ισούται με :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

με $I = \iint\limits_{x^2+y^2<a^2} (x^2+y^2)dxdy$, όπου με τον πολικό μετασχηματισμό προκύπτει το εξής :

$$I = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\int\limits_{r=0}^{a} r^3dr)d\theta = \frac{a^4\pi}{2}\ .$$

Έτσι τελικά προκύπτει πως η κινητική ενέργεια ισούται με $K = \dfrac{a^4\omega^2\pi}{4}$. ■

8.22 Υπολογίστε την ροπή αδράνειας επίπεδης πλάκας σε σχήμα έλλειψης ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο αυτής. (Υποθέστε πυκνότητα μάζας $\rho=1$).

*Υπόδειξη.* Έστω το σύνολο $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ a,b\in\mathbb{R}\}$.Τότε έχουμε πως η ροπή αδράνειας ισούται με

$$I = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό :

$$T : (u,v) \to (x,y) = (au,bv) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

με $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab$. Κατόπιν στο σύνολο $M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\ \}$ εφαρμόζουμε πολικό μετασχηματισμό, όπου προκύπτει το εξής :

$$I = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_M (a^2u^2+b^2v^2)abdudv = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\int\limits_{r=0}^{1}(a^2r^2\cos^2\theta + r^2b^2\sin^2\theta)rabdr)d\theta$$

Τελικά λοιπόν έχουμε πως η ροπή αδράνειας ισούται με $I = \dfrac{ab(\pi a^2+\pi b^2)}{4}$. ■

8.23 Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στους κυλίνδρους $x^2+y^2=a^2$ και $x^2+y^2=b^2$ $(a<b)$, και φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$ $(\lambda>0)$ και από κάτω από το παραβολοειδές $z=-\mu(x^2+y^2+1)$ $(\mu>0)$.

*Υπόδειξη.* Ο όγκος του παραπάνω στερεού ισούται με :

$$V(D) = \iint\limits_D \lambda\sqrt{x^2+y^2}+\mu(x^2+y^2+1)dxdy$$

όπου $D=\{(x,y) : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2,\ -\mu(x^2+y^2+1) \leq z \leq \lambda\sqrt{x^2+y^2}$.

Εφαρμόζοντας πολικό μετασχηματισμό προκύπτει πως

$V(D) = \iint\limits_D \lambda\sqrt{x^2+y^2}+\mu(x^2+y^2+1)dxdy = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\int\limits_{r=a}^{b}[\lambda r+\mu(r^2+1)]rdr)d\theta = \frac{\lambda r^3}{3}+\frac{\mu r^4}{4}+\frac{\mu r^2}{2}\Big|_{r=a}^{b} 2\pi$. ■

8.24 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D (x^2-y^2)^5x^6y^6(x^2+y^2)dxdy$, όπου $D$ είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του $xy-$ επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές:

$$x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=2,\ xy=3/2,\ xy=2.$$

*Υπόδειξη.*

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος θεωρούμε τον μετασχηματισμό :

$$u=x^2-y^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad v=2xy,$$

υπολογίζουμε τις $Jacobians$ και βρίσκουμε ότι :

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 4(x^2+y^2) \quad \kappa\alpha\iota \quad \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Επίσης το σύνολο $G=S(D)$, όπου $S(x,y)=(u,v)=(x^2-y^2,2xy)$ , είναι το ορθογώνιο $[1,2]\times[3,4]$.Εν

συνεχεία ελέγχουμε ότι ο μετασχηματισμός $S:\bar{D}\to\bar{G}$, είναι $C^\infty$ σε περιοχή του $\bar{D}$ είναι $1-1$ και επί.Άρα,

$$\iint\limits_D (x^2-y^2)x^6y^6(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_G u^5(v/2)^6\sqrt{u^2+v^2}|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv =$$

$$\iint\limits_G u^5(v/2)^6\sqrt{u^2+v^2}\frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2}}dudv=\frac{1}{4\cdot 2^6}\iint\limits_G u^5v^6dudv\ ,$$

όπου το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα από Θ. $Fubini$. ■

8.25 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

*Υπόδειξη.*

Παρατηρούμε ότι η $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν είναι φραγμένη στο σύνολο $D-\{(0,0)\}$ και ακριβέστερα έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\infty.$$

Τότε, προκύπτει πως, $I=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\iint\limits_{D_\epsilon}\dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ όπου $D_\epsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \epsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$.

Μέσω πολικού μετασχηματισμού βρίσκουμε ότι :

$$\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=\epsilon}^{1}drd\theta=\lim_{\epsilon\to 0}[2\pi(1-\epsilon)]=2\pi$$

■

8.26 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

*Υπόδειξη.*

Υπολογίζουμε σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε :

$$\iint\limits_{\epsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\int\limits_{r=\epsilon}^{1}r^{1-2\lambda}dr)d\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{1-\lambda}(1-\epsilon^{2-2\lambda}),\ \lambda\neq 1\\ 2\pi\log\frac{1}{\epsilon},\ \lambda=1\end{cases}$$

Έτσι

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iint\limits_{\epsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}=\begin{cases}\pi/(1-\lambda), & \lambda<1\\ \infty, & \lambda>1\\ \infty, & \lambda=1\end{cases}$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}=\begin{cases}\pi/(1-\lambda), & \lambda<1\\ \infty, & \lambda>1\\ \infty, & \lambda=1\end{cases}$$

■

8.27 Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

*Υπόδειξη.*

Παρατηρούμε ότι πάνω στο σύνολο που ολοκληρώνουμε, όταν δηλαδή $x^2 + y^2 < 1$, η ποσότητα

$$x^2 + |y| \geq x^2 + y^2,$$

οπότε

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + |y|}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Από την 8.25, το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{x^2+y^2<1} dxdy/\sqrt{x^2+y^2}$ συγκλίνει κατά συνέπεια

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} dxdy/\sqrt{x^2+|y|} < \infty.$$

■

# Κεφάλαιο 9

# Τριπλά Ολοκληρώματα

## 9.1 Ασκήσεις

9.1 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^1 \Big[ \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \Big( \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz \Big) dy \Big] dx.$

9.2 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του ημισφαιρίου

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < a^2,\ z > 0\}.$$

9.3 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1,\ z > a\} \quad (-1 < a < 1).$$

9.4 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1,\ z > \lambda\sqrt{x^2+y^2}\} \quad (\lambda > 0).$$

9.5 Υπολογίστε την κινητική ενέργεια μια ομογενούς μπάλας μάζας $m$ και ακτίνας $R$, όταν αυτή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega$, γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

9.6 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i) $\int\limits_{x=0}^{a} \Big[ \int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \Big( \int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \Big) dy \Big] dx$

(ii) $\int\limits_{x=0}^{a} \Big[ \int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \Big( \int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}} \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} dz \Big) dy \Big] dx$

9.7 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{\epsilon^2 < x^2+y^2+z^2 < r^2} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-2\lambda}(r^{3-2\lambda} - \epsilon^{3-2\lambda}, & 3-2\lambda \neq 0 \\ 4\pi(\log r - \log \epsilon), & \lambda = 3/2 \end{cases}$$

9.8 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} < \infty \quad \text{αν και μόνο αν} \quad 2\lambda > 3$$

9.9 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} < \infty \quad \text{αν και μόνο αν} \quad 2\lambda < 3$$

9.10 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{r^2<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<R^2} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^\lambda dxdydz \quad (a,b,c,r,R>0, \lambda \in \mathbb{R}).$$

9.11 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_G zdxdydz, \ \iiint\limits_G \sqrt{z}dxdydz$$

οπου $G$ είναι το εξής στερεό στον $xyz-$ χώρο:

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 4a^2, \ x^2+y^2 \le 2ax, \ z \ge 0\}.$$

9.12 Γράψτε τα ολοκληρώματα-σε κυλινδρικές συντεταγμένες-για τον εντοπισμό του κέντρου βάρους του στερεού

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 4a^2, x^2+y^2 \le 2ax, \ y \ge 0, \ z \ge 0\}.$$

9.13 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)zdxdydz, \ \iiint\limits_G \sqrt{z}dxdydz$$

όπου $G$ είναι το εξής στερεό στον $xyz-$ χώρο:

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 4a^2, \ x^2+y^2 \ge 2ax, \ z \ge 0\}.$$

9.14 Έστω $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le a^2, \ (x^2+y^2)^2 \ge a^2(x^2-y^2), \ z \ge 0\}$.Πως μπορούμε να γράψουμε ένα ολοκλήρωμα $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ σαν διαδοχικό ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες ;

9.15 Σωστό ή λάθος ; $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}} < +\infty.$

9.16 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{x^4+y^6+z^8<10} \frac{dxdydz}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/4}} < +\infty, \ \iiint\limits_{x^4+y^6+z^8<1} \frac{dxdydz}{(x^4+2y^4+3z^4)^{3/5}} < +\infty$$

.

9.17 Σωστό ή λάθος ; Αν $a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3)$ είναι τρία σημεία στον $xyz-$ χώρο τότε

$$\left| \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| = 3 \iiint\limits_G dxdydz$$

όπου $G = \{ta + sb + uc : \ \mu\epsilon\ t, s, u \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ 0 \leq t + s + u \leq 1\}$.

9.18 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < y < 1, y^2 < x < 3-2y,\ 0 < z < x^2+2y^2\}$.

9.19 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \iiint\limits_{\epsilon^2<x^2+y^2+z^2<(1-\epsilon)^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}}$$

9.20 Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_K x^2\sqrt{z}dxdydz$ όπου

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}\ (a > 0).$$

9.21 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq x + y \leq 1, 1 \leq x - y \leq 3 \text{ και } 0 \leq z(x - y)^6 \leq |x + y|^5\}.$$

9.22 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} xyzdxdydz\ .$$

Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{ax^2+by^2+cz^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} xyzdxdydz\ (a, b, c > 0)\ .$$

9.23 Για ένα συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^2$, θεωρήστε το σύνολο

$$\Omega = \{(tx, ty, a(1 - t)) : (x, y) \in K, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3\ (a > 0)$$

Δείξτε ότι $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = a \iint\limits_{(u,v)\in K} \left( \int\limits_{t=0}^{1} f(tu, tv, (1 - t)a)t^2 dt \right) dudv$. (Υποθέστε ότι το σύνολο $K$ έχει κατα τμήματα ομαλό σύνορο και ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\Omega$.) Εν συνεχεία δείξτε ότι ο όγκος του $\Omega$ είναι ίσος με $\frac{1}{3}a \cdot E\mu\beta(K)$.Δείξτε επίσης ότι η ροπή αδράνειας του στερεού $\Omega$ με άξονα περιστροφής τον άξονα των $x$ είναι $\frac{1}{5}a \iint\limits_{(x,y)\in K} y^2 dxdy$. (Υποθέστε σταθερή πυκνότητα μάζας ίση με 1.)

9.24 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,\ \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz.$

9.25 Δείξτε ότι για κατάλληλους αριθμούς $a, b$ και συνάρτηση $f$,

$$\iint\limits_{x>0,y>0,x+y<1} x^a y^b f(x + y)dxdy = \left( \int\limits_{u=0}^{1} u^{a+b+1} f(u)du \right) \left( \int\limits_{v=0}^{1} v^a (1 - v)^b d \right).$$

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $x = uv,\ y = u(1-v)$, με αντίστροφο τον

$$u = x + y,\ v = x/(x+y).$$

## 9.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

9.1 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^1 \Big[ \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \Big( \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz \Big) dy \Big] dx.$

*Υπόδειξη.* Από το Θ. Fubini έχουμε πως

$$I = \int\limits_0^1 \Big[ \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \Big( \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz \Big) dy \Big] dx = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz dy dx$$

όπου $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.Εφαρμόζοντας σφαιρικές συντεταγμένες στο $G$ έχουμε το εξής :

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi,\ y = \rho\sin\theta\sin\phi,\ z = \rho\cos\phi$$

για $0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$. Έτσι υπολογίζουμε ως εξής :

$$I = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz dy dx = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \Big[ \int\limits_{\phi=0}^{\pi/2} \Big( \int\limits_{\rho=0}^{1} \rho^5 \sin\phi d\rho \Big) d\phi \Big] d\theta = \frac{\pi}{12}\ .$$

■

9.2 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του ημισφαιρίου

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < a^2,\ z > 0\}.$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζουμε κυλινδρικό μετασχηματισμό στο $D$ :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

με $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$.Τότε αν $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ το κέντρο βάρους του $D$ έχουμε ότι ισχύει $\bar{x} = \bar{y} = 0$ και

$$\bar{z} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rz dz dr d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz dr d\theta} = \frac{\pi\int\limits_0^a r(a^2-r^2)dr}{2\pi\int\limits_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr} = \frac{3a^2}{8}\ .$$

■

9.3 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1,\ z > a\} \quad (-1 < a < 1).$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζουμε κυλινδρικό μετασχηματισμό στο $K$ :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

για $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r, 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ και $a < z < 1$.Έτσι υπολόγιζουμε διαδοχικά για την εύρεση του κέντρου βάρους $G(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

(i) $\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_D xdxdydz}{\iiint\limits_D dxdydz} = 0$

(ii) $\overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_D ydxdydz}{\iiint\limits_D dxdydz} = 0$

(iii) $\overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_D zdxdydz}{\iiint\limits_D dxdydz} = \dfrac{\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{z=a}^{1}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{1-z^2}} zrdrdzd\theta}{\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{z=a}^{1}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{1-z^2}} rdrdzd\theta}$

■

9.4 Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ z > \lambda\sqrt{x^2 + y^2}\} \quad (\lambda > 0).$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζοντας σφαιρικό μετασχηματισμό στο παραπάνω σύνολο έχουμε

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi \tag{9.1}$$

όπου έχουμε ότι $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ (αφού $z > 0$) και $0 \leq r \leq 1$.Παρατηρήστε ότι για $z = r\cos\phi_0 = r|\sin\phi_0| = \lambda\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \phi_0 = \arctan\frac{1}{\lambda}$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $0 <\leq \theta \leq 2\pi,\ 0 < \phi < \phi_0$ και $0 < r < 1$. Έτσι αφήνεται στον αναγνώστη να υπολογίσει διαδοχικά για την εύρεση του κέντρου βάρους $G(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ :

(α΄) $\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_D xdxdydz}{\iiint\limits_D dxdydz}$

(β΄) $\overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_D ydxdydz}{\iiint\limits_D dxdydz}$

(γ΄) $\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_D zdxdydz}{\iiint\limits_D dxdydz}$

■

9.5 Υπολογίστε την κινητική ενέργεια μια ομογενούς μπάλας μάζας $m$ και ακτίνας $R$, όταν αυτή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega$, γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

*Υπόδειξη.* Έστω $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Τότε γνωρίζουμε ότι

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz.$$

Εφαρμόζουμε σφαιρικό μετασχηματισμό στο $D$ :

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi \tag{9.2}$$

όπου $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq r \leq R$ και $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\phi,r)}| = r^2\sin\phi$. Έτσι έχουμε ότι

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\int\limits_{r=0}^{R} r^3\sin\phi drd\phi d\theta = \frac{\pi\omega^2 R^4}{2}.$$

■

9.6 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i) $\int\limits_{x=0}^{a}\left[\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\right)dy\right]dx$

(ii) $\int\limits_{x=0}^{a}\left[\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dz\right)dy\right]dx$

*Υπόδειξη.* (i) Έχουμε ότι

$$I_1=\int\limits_{x=0}^{a}\left[\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\right)dy\right]dx=\iiint\limits_{K}\frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$

όπου

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x,y,z\ge 0\}.$$

Έτσι εφαρμόζοντας σφαιρικό μετασχηματισμό στο $K$ έχουμε ότι

$$x=r\cos\theta\sin\phi\quad y=r\sin\theta\sin\phi\quad z=r\cos\phi \tag{9.3}$$

όπου $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le a$ και $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\phi,r)}|=r^2\sin\phi$. Έτσι έχουμε ότι

$$I_1=\iiint_K\frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1}\frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{1-r^2}}drd\phi d\theta$$

(ii) Ακολουθήσε όμοια μέθοδο με αυτή του (i).

■

9.7 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{\epsilon^2<x^2+y^2+z^2<r^2}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}=\begin{cases}\frac{4\pi}{3-2\lambda}(r^{3-2\lambda}-\epsilon^{3-2\lambda}), & 3-2\lambda\neq 0\\ 4\pi(\log r-\log\epsilon), & \lambda=3/2\end{cases}$$

*Υπόδειξη.* Έχουμε ότι $I=\iiint\limits_{\epsilon^2<x^2+y^2+z^2<r^2}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}=\iiint\limits_{K}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}$, όπου ισχύει

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\epsilon^3<x^2+y^2+z^2<r^2\}.$$

Εφαρμόζουμε σφαιρικό μετασχηματισμό στο $K$ :

$$x=\rho\cos\theta\sin\phi\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi\quad z=\rho\cos\phi \tag{9.4}$$

όπου προκύπτει ότι $I=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\int\limits_{\rho=\epsilon}^{r}\frac{\rho^2\sin\phi}{\rho^{2\lambda}}=4\pi\int\limits_{\epsilon}^{r}\rho^{2-2\lambda}d\rho$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(α΄) Αν $\lambda=3/2$, τότε $I=4\pi\int\limits_{\rho=\epsilon}^{r}\frac{1}{\rho}d\rho=4\pi(\log r-\log\epsilon)$.

(β΄) Αν $3-2\lambda\neq 0$ έχουμε ότι $I=\frac{4\pi}{3-2\lambda}(r^{3-2\lambda}-\epsilon^{3-2\lambda})$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής. ■

9.8 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} < \infty \quad \text{αν και μόνο αν} \quad 2\lambda > 3$$

*Υπόδειξη.* Έστω $I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I_\epsilon = \iiint\limits_{\epsilon^2<x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}$$

όπου από Άσκηση 9.7 έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Για $\lambda = 3/2$ ισχύει ότι $I_\epsilon = -4\pi \log \epsilon$, όπου $I = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \infty$.

(ii) Για $2\lambda > 3$ ισχύει ότι $I = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \frac{4\pi}{3-2\lambda}(1-\epsilon^{3-2\lambda}) = \infty$.

(iii) Για $2\lambda < 3$ ισχύει ότι $I = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \frac{4\pi}{3-2\lambda}(1-\epsilon^{3-2\lambda}) = \frac{4\pi}{3-2\lambda} < \infty$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής. ■

9.9 Σωστό ή λάθος ;

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} < \infty \quad \text{αν και μόνο αν} \quad 2\lambda < 3$$

*Υπόδειξη.* Έστω $I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}$ και θεωρούμε

$$I_\epsilon = \iiint\limits_{\epsilon^2>x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda}.$$

Εφαρμόζουμε σφαιρικό μετασχηματισμό στο σύνολο ολοκλήρωσης :

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi \quad z = \rho\cos\phi \tag{9.5}$$

όπου προκύπτει ότι $I_\epsilon = 4\pi \int\limits_1^\epsilon \rho^{3-2\lambda} d\rho$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Αν $\lambda = 3/2$, τότε $I_\epsilon = 4\pi \int\limits_{\rho=1}^{\epsilon} \frac{1}{\rho} d\rho = 4\pi\log\epsilon$, δηλαδή $I = \lim\limits_{\epsilon\to\infty} I_\epsilon = \infty$.

(ii) Αν $3 > 2\lambda$, τότε $I_\epsilon = 4\pi(\epsilon^{3-2\lambda}-1)$, δηλαδή $I = \lim\limits_{\epsilon\to\infty} I_\epsilon = \infty$.

(iii) Αν $3 < 2\lambda$, τότε $I_\epsilon = 4\pi(\epsilon^{3-2\lambda}-1)$, δηλαδή $I = \lim\limits_{\epsilon\to\infty} I_\epsilon = -4\pi < \infty$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής. ■

9.10 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{r^2<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<R^2} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^\lambda dxdydz \quad (a,b,c,r,R>0, \lambda\in\mathbb{R}).$$

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο $K = \{(x,y,z) : r^2 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < R^2\}$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση :

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (u,v,w) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}).$$

Τότε $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc$ και το παραπάνω σύνολο ολοκλήρωσης διαμορφώνεται ως εξής :

$$D = \{(x,y,z) : r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}.$$

Εφαρμόζουμε σφαιρικό μετασχηματισμό στο $D$ :

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi \quad z = \rho\cos\phi \tag{9.6}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$I = \iiint\limits_{r^2<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<R^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{\lambda} dxdydz = abc \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \int\limits_{\phi=0}^{\pi} \int\limits_{\rho=r}^{R} (\rho^{2\lambda+2}\sin\phi) d\rho d\phi d\theta$$

όπου προκύπτει ότι $I = 4abc\pi \int\limits_{\rho=r}^{R} \rho^{2\lambda+2} d\rho$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Για $\lambda = -3/2$, τότε έχουμε $I = 4abc\pi \int\limits_{\rho=r}^{R} \frac{1}{\rho} d\rho = 4abc\pi(\log R - \log r)$.

(ii) Για $\lambda \neq -3/2$, έχουμε ότι $I = \frac{4abc\pi}{2\lambda+3}(R^{2\lambda+3} - r^{2\lambda+3})$.

■

9.11 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_{G} zdxdydz, \quad \iiint\limits_{G} \sqrt{z}dxdydz$$

οπου $G$ είναι το εξής στερεό στον $xyz-$ χώρο:

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2,\ x^2 + y^2 \leq 2ax,\ z \geq 0\}.$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζουμε κυλινδρικές συντεταγμένες στο $G$ :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \tag{9.7}$$

όπου προκύπτει ότι $0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}$, $0 \leq r \leq 2a\cos\theta$ και $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (αφού $2a\cos\theta \geq 0$). Υπολογίζουμε λοιπόν διαδοχικά ως εξής :

$$\iiint\limits_{G} zdxdydz = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2a\cos\theta} \int_{z=0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} rzdzdrd\theta = \pi a^4.$$

Ομοίως υπολογίζεται και το $\iiint\limits_{G} \sqrt{z}dxdydz$. ■

9.12 Γράψτε τα ολοκληρώματα-σε κυλινδρικές συντεταγμένες-για τον εντοπισμό του κέντρου βάρους του στερεού

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, x^2 + y^2 \leq 2ax,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζουμε κυλινδρικές συντεταγμένες στο $G$ :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \tag{9.8}$$

όπου προκύπτει ότι $0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}$, $0 \leq r \leq 2a\cos\theta$ και $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, αφού $2a\cos\theta \geq 0$ και $r\sin\theta \geq 0$. Έτσι αφήνεται στον αναγνώστη να υπολογίσει διαδοχικά για την εύρεση του κέντρου βάρους $G(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ :

(α΄) $\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_G x dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}$

(β΄) $\overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_G y dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}$

(γ΄) $\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_G z dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}$

■

9.13 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_G (x^2 + y^2) z dxdydz, \quad \iiint\limits_G \sqrt{z} dxdydz$$

όπου $G$ είναι το εξής στερεό στον $xyz-$ χώρο:

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, \; x^2 + y^2 \geq 2ax, \; z \geq 0\}.$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζουμε κυλινδρικές συντεταγμένες στο $G$ :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \tag{9.9}$$

όπου προκύπτει ότι $0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}$, $2a\cos\theta \leq r \leq 2a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}| = r$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

(i) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2) z dxdydz = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \int\limits_{r=2a\cos\theta}^{2a} \int\limits_{z=0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^3 z dz dr d\theta$

(ii) Ομοίως υπολογίζεται και το $\iiint\limits_G \sqrt{z} dxdydz$.

■

9.14 Έστω $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; (x^2 + y^2)^2 \geq a^2(x^2 - y^2), \; z \geq 0\}$.Πως μπορούμε να γράψουμε ένα ολοκλήρωμα $\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz$ σαν διαδοχικό ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες ;

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζουμε κυλινδρικές συντεταγμένες στο $G$ :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \tag{9.10}$$

όπου προκύπτει ότι $0 \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$. Τώρα αν $\cos 2\theta \ge 0$, τότε $a\sqrt{\cos\theta} \le r \le a$, ενώ αν $\cos 2\theta < 0$, τότε $0 \le r \le a$.Τότε για $0 \le \theta \le 2\pi$, έχουμε ότι

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$$

$$= 4(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=a\sqrt{\cos 2\theta}}^{a} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdzdrd\theta$$
$$+ \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{a} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdzdrd\theta)$$

■

9.15 Σωστό ή λάθος ; $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}} < +\infty.$

*Υπόδειξη.* Έστω $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}} < +\infty$ και θεωρούμε το

$$I_\epsilon = \iiint_{\epsilon^2<x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(x^2+2y^2+3z^2)^{3/2}}.$$

Εφαρμόζουμε σφαιρικό μετασχηματισμό στο σύνολο $G_\epsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \epsilon^2 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ :

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi \tag{9.11}$$

με $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi,\ \epsilon < r < 1$ και $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}| = r^2\sin\phi$. Τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=\epsilon}^{1} \frac{r^2\sin\phi\ drd\phi d\theta}{(r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + 3r^2\cos^2\phi)^{3/2}} \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin\phi\ drd\phi d\theta}{(\sin^2\phi\cos^2\theta + 2\sin^2\phi\sin^2\theta + 3\cos^2\phi)^{3/2}} \cdot \int_{r=\epsilon}^{1} \frac{1}{r}dr \\ &= K \cdot \int_{r=\epsilon}^{1} \frac{1}{r}dr = K \cdot (-\log\epsilon) \end{aligned}$$

Αφού $K < \infty$, τότε έχουμε ότι $I = \lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \infty$, δηλαδή ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. ■

9.16.

9.17 Σωστό ή λάθος ; Αν $a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3)$ είναι τρία σημεία στον $xyz-$ χώρο τότε

$$\left| \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| = 3 \iiint_G dxdydz$$

όπου $G = \{ta + sb + uc :\ \text{με } t, s, u \ge 0 \quad \text{και} \quad 0 \le t + s + u \le 1\}$.

*Υπόδειξη.* Παρατήρηστε ότι το σύνολο $G$ είναι το τετράεδρο, που ορίζουν τα διανύσματα $a, b, c$, άρα το $\iiint\limits_G dxdydz$ είναι ο όγκος του τετραέδρου που ορίζουν.Όμως γνωρίζουμε ότι

$$V(\text{Παραλληλεπιπέδου } (\vec{a},\vec{b},\vec{c})) = 3V(\text{Τετραέδρου } (\vec{a},\vec{b},\vec{c})). \tag{9.12}$$

Από την Άσκηση 1.6 και την σχέση 9.12 συμπεραίνει ότι ισχύει το ζητούμενο. ■

9.18 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < y < 1, y^2 < x < 3-2y,\ 0 < z < x^2+2y^2\}$.

*Υπόδειξη.* Για να υπολογίσουμε τον όγκο του $G$ αρκέι να υπολογίσουμε το $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz$. Εφαρμόζοντας το Θ. Fubini ισχύει ότι :

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{3-2y}\int_{0}^{x^2+2y^2} dzdxdy = \frac{136}{35}.$$

■

9.19 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \iiint\limits_{\epsilon^2<x^2+y^2+z^2<(1-\epsilon)^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}}$$

*Υπόδειξη.* Αν $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$ και

$$I = \iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\iiint_{G_\epsilon} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)}},$$

όπου $G_\epsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \epsilon^2 < x^2+y^2+z^2 < 1-\epsilon^2\}$ τότε εφαρμόζοντας σφαιρικό μετασχηματισμό στο $G_\epsilon$ έχουμε ότι $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi, \epsilon < r < 1-\epsilon$ και $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\phi$. Υπολογίζουμε ως εξής :

$$I_\epsilon = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\int\limits_{\epsilon}^{1-\epsilon} \tfrac{r^2\sin\phi}{r\sqrt{1-r^2}} drd\phi d\theta = 2\pi\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\sin^2\phi\int\limits_{\epsilon}^{1-\epsilon}\tfrac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\tfrac{1-\cos 2\phi}{2}\int\limits_{\epsilon}^{1-\epsilon} r(1-r^2)^{-1/2}dr$$

$$= \pi(\phi - \tfrac{\sin 2\phi}{2}|_{\phi=0}^{\pi})[-(1-r^2)^{1/2}|_{r=\epsilon}^{1-\epsilon}] = -\tfrac{\pi^2}{2}(\sqrt{2\epsilon-\epsilon^2}-\sqrt{1-\epsilon^2}).$$

Έτσι συμπεραίνουμε πως $I = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \frac{\pi^2}{2}$. ■

9.20 Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_K x^2\sqrt{z}dxdydz$ όπου

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}\ (a > 0).$$

*Υπόδειξη.* Εφαρμόζοντας σφαιρικό μετασχηματισμό στο $K$ έχουμε

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi \tag{9.13}$$

με $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 < r < a$ και $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}| = r^2\sin\phi$. Υπολογίζουμε ως εξής :

$$I = \iiint\limits_K x^2\sqrt{z}dxdydz = \int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{a} \sin^4\phi\cos^2\theta\sqrt{\cos\phi}\, r^{9/4}drd\phi d\theta$$

$= \int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \cdot \int\limits_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\phi\sqrt{\cos\phi}\, d\phi \cdot \int\limits_{r=0}^{a} r^{9/4}dr$, όπου αφήνεται στον αναγνώστη να κάνει τον τελευταίο υπολογισμό. ■

9.21 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq x+y \leq 1, 1 \leq x-y \leq 3 \text{ και } 0 \leq z(x-y)^6 \leq |x+y|^5\}.$$

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι για $1 \leq x-y \leq 3$ ισχύει ότι $0 \leq z \leq \frac{|x+y|^5}{(x-y)^6}$, άρα για να βρούμε τον όγκο του στερεού $K$ αρκεί να υπολογίζουμε το $V(K) = \iint\limits_T \frac{|x+y|^5}{(x-y)^6}dxdy$, όπου $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1, 1 \leq x-y \leq 3\}$. Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό

$$\phi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, x-y).$$

Τότε έχουμε πως $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = |\det\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}| = 1/2$ με $-1 \leq u \leq 1$ και $1 \leq v \leq 3$. Έτσι υπολογίζουμε ως εξής :

$$V(K) = \iint\limits_T \frac{|x+y|^5}{(x-y)^6}dxdy = \int_{u=0}^{1}\int_{v=1}^{3} \frac{u^5}{v^6}dudv = \frac{121}{3645}.$$

■

9.22 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} xyzdxdydz\ .$$

Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{ax^2+by^2+cz^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} xyzdxdydz\ (a,b,c>0)\ .$$

*Υπόδειξη.* (i) Αν $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < R^2,\ x,y,z \geq 0\}$ εφαρμόζουμε σφαιρικό μετασχηματισμό στο $K$ :

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi \tag{9.14}$$

με $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < r < a$ και $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}| = r^2\sin\phi$.Έτσι υπολογίζουμε διαδοχικά :

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} xyzdxdydz = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\phi=0}^{\pi/2}\int\limits_{r=0}^{R} r^5\sin^3\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta\ drd\phi d\theta$$

$= (\frac{\sin^2\theta}{2}|_{\theta=0}^{\pi/2}) \cdot (\frac{\sin^4\phi}{4}|_{\phi=0}^{\pi/2})(\frac{r^6}{6}|_{r=0}^{R}) = \frac{R^6}{48}$.

(ii) Εφαρμόστε τον γραμμικό μετασχημασμό

$$\phi : (x,y,z) \mapsto (u,v,w) = (\sqrt{a}x, \sqrt{b}y, \sqrt{c}z).$$

Τότε έχουμε ότι $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = |\det\begin{pmatrix} 1/\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{c}\end{pmatrix}| = \frac{1}{\sqrt{abc}}$ και $(u,v,w) \in K$. Έτσι από το (i) έχουμε ότι

$$\iiint\limits_{ax^2+by^2+cz^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} xyzdxdydz = \iiint\limits_{K} \frac{1}{abc} uvw\, dudvdw = \frac{R^2}{48abc}.$$

■

9.23.

9.24 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \ \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz.$

*Υπόδειξη.* (i) Έστω $I_2 = \iint\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.Εφαρμόζουμε πολικό μετασχηματισμό στο σύνολο ολοκλήρωσης όπου προκύπτει ότι $I_2 = 2\pi \int\limits_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\ dr$. Θεωρούμε το $I_\epsilon = 2\pi \int\limits_{r=0}^{\epsilon} e^{-r^2} r\ dr = \pi(1 - \frac{1}{e^{\epsilon^2}}) \to \pi$ για $\epsilon \to \infty$.

(ii) Παρατηρήστε ότι αν $I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = I_2^2 \Leftrightarrow I_1 = \sqrt{\pi}$. Επίσης παρατηρήστε ότι $I_3 = I_1^3 = (\pi)^{3/2}$.

■

9.25 Δείξτε ότι για κατάλληλους αριθμούς $a, b$ και συνάρτηση $f$,

$$\iint\limits_{x>0, y>0, x+y<1} x^a y^b f(x+y)dxdy = \Bigg(\int\limits_{u=0}^{1} u^{a+b+1} f(u)du\Bigg)\Bigg(\int\limits_{v=0}^{1} v^a(1-v)^b d\Bigg).$$

*Υπόδειξη.* Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $x = uv,\ y = u(1-v)$, με αντίστροφο τον

$$u = x + y,\ v = x/(x+y).$$

■

# Κεφάλαιο 10

# Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

## 10.1 Ασκήσεις

10.1 Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$, όπου $a > 0$.

10.2 Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$, όπου $a > b > 0$.

10.3 Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int\limits_C (-ydx + xdy), \int\limits_C \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, όπου $C$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a$.

10.4 Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \{ye^{xy}\cos z + 2x\sin(yz) + x]dx + [xe^{xy}\cos z + zx^2\cos(yz) - e^y]dy - [e^{xy}\sin z - yx^2\cos(yz) - 2z]dz\}$$

όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^3\cos t,\ y = t^3\sin t, z = te^t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

10.5 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{x^2+y^2=1} [\sqrt{1+x^2} - ye^{xy} + 3y]dx + [x^2 - xe^{xy} + \log(1+y^4)]dy$.

10.6 Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int\limits_\gamma \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}dy + \dfrac{x}{x^2+y^2}dx\right)$, όπου $\gamma$ είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$.Υποθέστε ότι $\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} \neq 1$.

10.7 Να επαληθεύστε τον τύπο του Green για το σύνολο $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ και την διαφορική μορφή $xy^2dy - x^2ydx$.

10.8 Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int\limits_T (-ydx + xdy), \int\limits_T \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

όπου είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(-1,-1), (1,-2), (0,3)$.

10.9 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{\partial D} (2x^4 + y^2 + e^x)dx + (3x - y^3 - e^{y^2})dy$, όπου $D$ είναι ο δίσκος $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 < 2\}$.

10.10 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} (2x^4 + e^x + e^y)dx + (xe^y - x^4 + y^5)dy$, όπου $D$ είναι το σύνολο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 5(y-1)^4 < 2\}$.

10.11 Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, καθώς και το εμβαδόν που περικλύει.

10.12 Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, καθώς και το εμβαδόν που περικλύει.

## 10.2 Ενδεικτικές Υποδείξεις Ασκήσεων

10.1 Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$, όπου $a > 0$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την εξής παραμέτρηση της $\Gamma$

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos t, a\sin t).$$

Η $\vec{r}$ είναι $C^1$ απεικόνιση και μάλιστα $\|\vec{r'}\| = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a$. Έτσι έχουμε ότι το μήκος της καμπύλης $\Gamma$ ισούται με

$$\ell(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \|\vec{r'}(t)\| dt = \int_{t=0}^{2\pi} a dt = 2\pi a.$$

■

10.2 Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$, όπου $a > b > 0$.

*Υπόδειξη.* Θεωρούμε την εξής παραμέτρηση της $\Gamma$

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos t, b\sin t).$$

Η $\vec{r}$ είναι $C^1$ απεικόνιση και μάλιστα $\|\vec{r'}\| = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$. Έτσι έχουμε ότι το μήκος της καμπύλης $\Gamma$ ισούται με

$$\ell(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \|\vec{r'}(t)\| dt = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt.$$

■

10.3 Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int\limits_C (-ydx + xdy)$, $\int\limits_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, όπου $C$ είναι ο κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα $a$.

*Υπόδειξη.* (α') Αφού η $C$ είναι κλειστή καμπύλη, από το Θεώρημα Green έχουμε ότι

$$I = \int_C (-ydx + xdy) = \iint_{B(0,a)} 2dxdy.$$

Εφαρμόζοντας πολικές συντεταγμένες στη $B(0, a)$, τότε έχουμε ότι $I = 2\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{a} rdrd\theta = 2a^2\pi$.

(β') Έστω $I = \int\limits_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ και θεωρούμε την εξής παραμέτρηση του $C$ :

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \to (a\cos t, a\sin t)$$

όπου $dx = -a\sin t\ dt$ και $dy = a\cos t\ dt$. Υπολογίζουμε λοιπόν ως εξής :

$$I = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{a^2\sin t + a^2\cos t}{a^2} dt = \int_{t=0}^{2\pi} dt = 2\pi.$$

■

10.4 Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \{ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x]dx+[xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^y]dy-[e^{xy}\sin z-yx^2\cos(yz)-2z]dz\}$$

όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x=t^3\cos t,\ y=t^3\sin t, z=te^t, 0\le t\le 2\pi$.

*Υπόδειξη.* Αναζητούμε απεικόνιση $F(x,y,z)$ ώστε να ισχύει :

(α΄) $\frac{\partial F}{\partial x}=ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x$

(β΄) $\frac{\partial F}{\partial y}=xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^y$

(γ΄) $\frac{\partial F}{\partial z}=e^{xy}\sin z-yx^2\cos(yz)-2z$

Έτσι υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

(α΄) $\frac{\partial F}{\partial x}=ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x\Leftrightarrow e^{xy}\cos z+x^2\sin(yz)+g(y)+h(z)$

(β΄) $\frac{\partial F}{\partial y}=xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^y\Leftrightarrow g'(y)=-e^y$, άρα μια επιλογή για την $g$ είναι η $g(y)=-e^y$.

(γ΄) $\frac{\partial F}{\partial z}=e^{xy}\sin z-yx^2\cos(yz)-2z\Leftrightarrow h'(z)=2z$, άρα μια επιλογή για την $h$ είναι η $h(z)=z^2$.

Συνεπώς μια $F$ η οποία ικανοποιεί τις προυποθέσεις, που θέλουμε είναι

$$F(x,y,z)=e^{xy}\cos z+x^2\sin(yz)-e^y+z^2.$$

Για $x(t)=t^3\cos t,\ y(t)=t^3\sin t, z(t)=te^t, 0\le t\le 2\pi$ έχουμε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$I=F(x(\pi),y(\pi),z(\pi))-F(0,0,0).$$

■

10.5 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{x^2+y^2=1}[\sqrt{1+x^2}-ye^{xy}+3y]dx+[x^2-xe^{xy}+\log(1+y^4)]dy.$

*Υπόδειξη.* Έστω $P(x,y)=\sqrt{1+x^2}-ye^{xy}+3y$ και $Q(x,y)=x^2-xe^{xy}+\log(1+y^4)$.Αφού η καμπύλη $\gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ είναι κλειστή από το Θεώρημα Green έχουμε πως

$$I=\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_{x^2+y^2<1}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}dxdy=\iint_{B(0,1)}(2x-3)dxdy.$$

Έφαρμόζοντας πολικό μετασχηματισμό στη $B(0,1)$ έχουμε ότι

$$I=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1}(2r\cos\theta-3)r\ drd\theta=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}(\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{3}{2})d\theta=-3\pi.$$

■

10.6 Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int\limits_\gamma\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dy+\frac{x}{x^2+y^2}dx\right)$, όπου $\gamma$ είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}=1$.Υποθέστε ότι $\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}\neq 1$.

# Βιβλιογραφία


[1 ] **Απειροστικός Λογισμός σε πολλές μεταβλητές.**, Χατζηαφράτης Τ.

[2 ] **Διανυσματικός Λογισμός**, Tromba - Marsden

[3 ] **Σημειώσεις στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙΙ**, Δάλλα Λ.

[4 ] **Σημειώσεις στη Πραγματική Ανάλυση**, Βαλέττας Π.