ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΟΛΑ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

1998 - 1999

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Ο χώρος που θα ορισθούν και θα μελετηθούν τα κυρτά σύνολα είναι ο $I\!R^d$ εφοδιασμένος με τις συνήθεις πράξεις. Εάν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ είναι σημεία του $I\!R^d$ η **Ευκλείδεια μετρική** είναι η

$$\|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^{d} \left|x_i - y_i\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

και το **εσωτερικό γινόμενο** το

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{d} x_i \cdot y_i.$$

Με την βοήθεια της μετρικής οριζονται τα σύνολα **κλειστότης (ή θήκη)** $\mathrm{cl}\, A$, **εσωτερικό** $\mathrm{int}\, A$, **σύνορο** $\mathrm{bd}\, A$ για A υποσύνολο του $I\!R^d$.

Με την βοήθεια των πράξεων στο $I\!R^d$, ορίζονται τα σύνολα

$$A + B, \quad \lambda A, \quad A, B \subseteq I\!R^d \quad \text{και} \quad \lambda \in I\!R$$

ως εξής:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Εάν $A = \{\alpha\}$ γράφουμε $\alpha + B$ αντί του $\{\alpha\} + B$. Το $\alpha + B$ καλείται **μεταφορά** του συνόλου B. Εξ'άλλου το σύνολο $\alpha + \lambda B$ καλείται **ομοιόθετο** του B.

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^d$, υπάρχουν d διανύσματα, γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ κάθε σύνολο από $d+1$ διανύσματα, είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Ένα υπόχωρο X του $\mathbb{R}^d$ διαστάσως n ονομάζουμε **n− υπόχωρο**.

Εκτός απο τους υποχώρους του $\mathbb{R}^d$, χρησιμοποιούμε και τα **συσχετισμένα επίπεδα** και τα **υπερεπίπεδα** καθώς και τη **συσχετισμένη θήκη** ενός συνόλου. Για να ορισθούν αυτές οι έννοιες χρειαζόμαστε τα εξής.

Ορισμός 1.1.1.

i. Το $x \in \mathbb{R}^d$ είναι **συσχετισμένος συνδιασμός των $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_k}$** *αν*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \text{για κάποια} \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Συμβολισμός:

$$x = \sum_{i=1}^{k}{}^{\alpha} \lambda_i x_i.$$

ii. Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζουμε **συσχετισμένη θήκη του $\mathbf{A}$**, $\quad \alpha\text{ff}\,\mathbf{A}$ *το σύνολο*

$$\alpha\text{ff}\, A = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,\ x_i \in A,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Ορισμός 1.1.2.

i. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι **συσχετισμένα εξαρτημένα** *εάν κάποιο από τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι συσχετισμένος συνδιασμός των υπολοίπων.*

Ισοδύναμα:

α) Υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ και $\lambda_i \neq 0$ για κάποιο i, ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0.$$

β) Υπάρχει x_i *ώστε τα* $x_1 - x_i, \ldots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_k - x_i$ *να είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

ii. *Τα* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *είναι* **συσχετισμένα ανεξάρτητα** *αν δεν είναι συσχετισμένα εξαρτημένα.*

Ορισμός 1.1.3.

i. *Το σύνολο* $F \subseteq \mathbb{R}^d$ *καλείται* **συσχετισμένο επίπεδο** *αν για κάθε ζεύγος* $x, y \in F$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$ *το* $(1-\lambda)x + \lambda y \in F$. *Είναι εύκολο να δούμε ότι το* $F = x_o + X$, *όπου ο* X *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}^d$. *(* $x_o \in F$ *)*

ii. *Εάν* $F = x_o + X$ *είναι συσχετισμένο επίπεδο ορίζουμε* **διάσταση** $\dim F = \dim X$. *Εάν* $\dim F = 1$, *τότε το* F *καλείται ευθεία, εάν* $\dim F = d-1$ *τότε το* F *καλείται* **υπερεπίπεδο**.

iii. *Εάν* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *ανήκουν στο συσχετισμένο επίπεδο* F, *είναι συσχετισμένα ανεξάρτητα και* $\mathrm{aff}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = F$, *τότε τα* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *αποτελούν* **συσχετισμένη βάση** *του* F.

Παρατήρηση

Από τους ανωτέρω ορισμούς είναι φανερό ότ ένα συσχετισμένο επίπεδο διαστάσεως r περιέχει $(r+1)$ συσχετισμένα ανεξάρτητα σημεία και κάθε σύνολο από $(r+2)$ σημεία του είναι συσχετισμένα εξαρτημένα.

Είναι γνωστό ότι κάθε υπόχωρος X του $\mathbb{R}^d$, διαστάσεως $d-1$ είναι της μορφής

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d :< x, u >= 0\}$$

για κάποιο $u \in \mathbb{R}^d, u \neq 0$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι κάθε υπερεπίπεδο H είναι της μορφής

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d :< x, u >= \alpha\}$$

για κάποιο $u \in I\!\!R^d, u \neq 0$. Γράφουμε τότε $H = H(u, \alpha)$.

Τα σύνολα

$$\{x \in I\!\!R^d :< x, u >< \alpha\}, \quad \{x \in I\!\!R^d :< x, u >> \alpha\}$$

καλούνται ανοικτοί ημίχωροι που ορίζονται από το υπερεπίπεδο $H(u, \alpha)$ ενώ τα

$$\{x \in I\!\!R^d :< x, u >\leq \alpha\}, \quad \{x \in I\!\!R^d :< x, u >\geq \alpha\}$$

καλούνται κλειστοί ημίχωροι.

1.2 Ασκήσεις

1. Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι:

   (i) $A + B = B + A$.

   (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

   (iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
   Γενικά $\lambda A + \mu A \neq (\lambda + \mu)A$.

2. Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ να δειχθεί ότι

   (i) εάν A ανοικτό τότε το $A + B$ είναι ανοικτό.

   (ii) εάν A συμπαγές, B κλειστό τότε το $A + B$ είναι κλειστό.

   (iii) εάν A, B συμπαγή, τότε το $A + B$ είναι συμπαγές.

   (iv) εάν A, B κλειστά, δεν έπεται πάντοτε ότι το $A + B$ είναι κλειστό.

3. Να αποδειχθεί ότι οι ανοικτοί ημίχωροι είναι ανοικτά σύνολα και οι κλειστοί ημιχώροι είναι κλειστά σύνολα.

4. Εάν F, G είναι επίπεδα διαστάσεως k με $F \subseteq G$, τότε $F = G$.

Κεφάλαιο 2

Κυρτά Σύνολα

2.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις βασικές ιδιότητες των κυρτών συνόλων. Επίσης θα αποδείξουμε τα Θεωρήματα των Caratheodory, Radon και Helly.

Ορισμός 2.1.1.

Το σύνολο C του $\mathbb{R}^d$ είναι **κυρτό σύνολο** *εάν το $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$, για τυχαία $x_1, x_2 \in C$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.*

Παρατήρηση

Εάν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ τότε το σύνολο

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2] &=: \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \\
&= \{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 : \lambda \in [0,1]\}
\end{aligned}$$

καλείται κλειστό διάστημα μεταξύ των x_1, x_2. Εάν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, x_1 \neq x_2$ τα ημιάνοικτα διαστήματα $(x_1, x_2], \quad [x_1, x_2)$ και το ανοικτό διάστημα (x_1, x_2) ορίζονται ανάλογα. Με τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε ότι το σύνολο C είναι κυρτό, τότε και μόνον τότε, αν το κλειστό διάστημα μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του C, περιέχεται στο C.

Ορισμός 2.1.2.

Ορίζουμε ως **κυρτό συνδιασμό των σημείων** $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n} \in \mathbf{R^d}$ *το σημείο*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

όπου $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$. **Συμβολίζουμε:**

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i$$

τον κυρτό συνδιασμό των $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}^d$.

Πρόταση 2.1.1.

Το σύνολο C *του* $\mathbb{R}^d$ *είναι κυρτό, αν και μόνον αν κάθε κυρτός συνδιασμός σημείων του* C*, ανήκει στο* C.

Απόδειξη.

Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σύνολο και $x_1, x_2, \ldots x_n \in C$. Θα αποδείξουμε επαγωγικά, ότι κάθε κυρτός συνδιασμός των $x_1, x_2, \ldots x_n$ ανήκει στο C.
Για $n = 1$, έχουμε $1x_1 = x_1 \in C$
Για $n = 2$, έχουμε $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$, για $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, επειδή το C είναι κυρτό.
Έστω $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3$. Υποθέτουμε ότι κάθε κυρτός συνδιασμός

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{\nu_i}, \quad k < n, \quad 1 \leq \nu_i \leq n \quad \text{ανήκει στο } C. \qquad (*)$$

Θα αποδείξουμε ότι $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in C$.
Εάν $\lambda_i = 0$ για κάποιο i, τότε το x είναι κυρτός συνδιασμός k σημείων με $k < n$,

άρα $x \in C$. (από υπόθεση $(*)$).
Εάν $\lambda_i \neq 0, \quad \forall i$, τότε $\lambda_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_1)} x_i.$$

Το $y = \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_1)} x_i$ είναι κυρτός συνδιασμός των $x_2, x_3, \ldots x_n$
(διότι $\dfrac{\lambda_2}{(1-\lambda_1)} + \dfrac{\lambda_3}{(1-\lambda_1)} + \cdots + \dfrac{\lambda_n}{(1-\lambda_1)} = \dfrac{1-\lambda_1}{(1-\lambda_1)} = 1$),
άρα από την $(*)$ το $y \in C$.
Τότε $\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y \in C$, λόγω κυρτότητας του C.
Αντίστροφα. Προφανές. $\square$

Σημείωση

i. Τα σημεία, οι ευθείες, οι συσχετισμένοι υπόχωροι, οι ημίχωροι του $\mathbb{R}^d$ είναι κυρτά σύνολα. Επίσης τα γνωστά γεωμετρικά σώματα (τρίγωνα, κύκλοι, κύβοι, κώνοι, σφαίρες κ.α) είναι κυρτά σύνολα.

ii. Εάν $\{K_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια κυρτών συνόλων, τότε η τομή $\bigcap_{i \in I} K_i$ είναι κυρτό σύνολο.

Ορισμός 2.1.3.

Εάν $M \subseteq \mathbb{R}^d$, ορίζουμε **κυρτή θήκη**

$$\operatorname{con} M = \bigcap \{K : K \quad \textit{κυρτό} \quad M \subseteq K\}.$$

Δηλαδή η κυρτή θήκη του M είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το M.

Πρόταση 2.1.2.

Η κυρτή θήκη ενός συνόλου $M \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών σημείων του M.

Απόδειξη.

Έστω

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n : \quad x_1, x_2, \ldots x_n \in M \\ &\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0\}.\end{aligned}$$

το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών σημείων του M.
Έστω $x \in \mathcal{C}$. Τότε $\sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i$, με $x_i \in M \subseteq \operatorname{con} M$, δηλαδή το x είναι κυρτός συνδιασμός σημείων του κυρτού συνόλου $\operatorname{con} M$. Επομένως $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{con} M$.
Ισχύει $M \subseteq \mathcal{C}$. Το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι κυρτό, διότι εάν

$$x = \sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{m}{}^{c} \mu_i y_i, \quad x_i, y_i \in M,$$

τότε το

$$(1-\lambda)x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda \mu_i y_i$$

ανήκει στο $\mathcal{C}$.
$\big((1-\lambda)\lambda_i, \quad \lambda\mu_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)\lambda_i + \sum_{i=1}^{m}\lambda\mu_i = 1\big)$. Άρα το $\mathcal{C}$ είναι κυρτό σύνολο που περιέχει το M. Από τον ορισμό της κυρτής θήκης έχουμε ότι $\operatorname{con} M \subseteq \mathcal{C}$.
Τελικά $\operatorname{con} M = \mathcal{C}$. □

Πρόταση 2.1.3.

Η κυρτή θήκη ενός συνόλου $M \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών $\sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i$, όπου $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητα σημεία του M.

Απόδειξη.

Έστω

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n : x_1, x_2, \ldots x_n \in M, \ (x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &\quad \text{συσ. ανεξ.} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0\}.\end{aligned}$$

το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών συσχετισμένων ανεξάρτητων σημείων του M.
Έχουμε $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} = \operatorname{con} M$. (Προτ. 2.1.2).
Έστω $x \in \mathcal{C}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i > 0$. Εάν $(x_1, x_2, \dots x_k)$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητα τότε $x \in \mathcal{D}$. Έστω $(x_1, x_2, \dots x_k)$ συσχετισμένα εξαρτημένα, δηλαδή υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0.$$

Υπάρχει i με $\mu_i > 0$. Ορίζουμε:

$$t = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0\right\}.$$

Τότε

$$\lambda_i - t\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (\lambda_i > 0, t > 0), \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - t\mu_i) = 1 \quad \text{και}$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k} t\mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - t\mu_i) x_i.$$

Επειδή $t = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ για κάποιο i, έχουμε ότι το x είναι κυρτός συνδιασμός $(k-1)$ σημείων.
Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία (εάν χρειάζεται) για τα $(k-1)$ σημεία καταλήγουμε ότι το x είναι κυρτός συνδιασμός συσχετισμένων ανεξάρτητων $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_n}) \subseteq (x_1, x_2, \dots, x_k)$, δηλαδή $x \in \mathcal{D}$. $\square$

Θεώρημα 2.1.1 (Caratheodory).

Η κυρτή θήκη ενός συνόλου $M \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\dim(\operatorname{aff} M) = \nu$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών $(\nu + 1)$ το πολύ σημείων του M.

Απόδειξη.

Έστω

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1} : x_1, \ldots, x_n, x_{\nu+1} \in M, \\ &\quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_\nu + \lambda_{\nu+1} = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1} \geq 0\}\end{aligned}$$

το σύνολο όλων των κυρτών συνδιασμών $(\nu + 1)$ το πολύ σημείων του M.
Έχουμε $\mathcal{E} \subseteq C = \mathrm{con}\, M$. (Προτ. 2.1.3).
Έστω $x \in \mathrm{con}\, M$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, συσχετισμένα ανεξάρτητα σημεία του M. Επειδή $\dim(\alpha\mathrm{ff}\, M) = \nu$ έχουμε ότι $n \leq \nu + 1$, άρα $x \in \mathcal{E}$. □

Θεώρημα 2.1.2 (Radon).

Εάν $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι σύνολο n σημείων του $\mathbb{R}^d$ με $n \geq d+2$, τότε υπάρχουν $M_1, M_2 \subseteq M$, με $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M = M_1 \cup M_2$ και $\mathrm{con}\, M_1 \cap \mathrm{con}\, M_2 \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

Επειδή στον $\mathbb{R}^d$ υπάρχουν $(d+1)$ το πολύ σημεία συσχετισμένα ανεξάρτητα, τα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι συσχετισμένα εξαρτημένα.
Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ όχι όλα μηδέν, με

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0. \qquad (*)$$

Έστω $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I_1 = \{i \in I : \lambda_i > 0\}$, $I_2 = \{i \in I : \lambda_i \leq 0\}$. Ορίζουμε

$$M_1 = \{x_i : i \in I_1\}, \qquad M_2 = \{x_i : i \in I_2\}.$$

Προφανώς $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Εάν $\lambda = \sum_{i \in I_1} \lambda_i$, τότε το

$$x = \sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i \in I_2} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i \qquad (\text{από την } (*))$$

είναι κυρτος συνδιασμός των $\{x_i : i \in I_1\}$ και των $\{x_i : i \in I_2\}$.
Άρα $x \in \mathrm{con}\, M_1 \cap \mathrm{con}\, M_2$. □

Θεώρημα 2.1.3 (Helly).

Εάν $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ *είναι οικογένεια από* r *κυρτά σύνολα του* $\mathbb{R}^d$, *με* $r \geq d+1$ *έτσι ώστε κάθε υποοικογένεια από* $(d+1)$ *σύνολα έχουν μη κενή τομή, τότε*

$$\bigcap_{i=1}^{r} K_i \neq \varnothing.$$

Απόδειξη.

Εάν $r = d+1$ το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα.
Έστω $r > d+1$. Το Θεώρημα θα αποδειχθεί με επαγωγή στο r. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για οικογένεια $r-1$ κυρτών συνόλων. Τότε υπάρχουν

$$x_i \in K_1 \cap \cdots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \cdots \cap K_r, \quad i = 2, 3. \dots, r-1.$$

$$x_1 \in K_2 \cap K_3 \cap \cdots \cap K_r, \quad x_r \in K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_{r-1}.$$

Έστω $M = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Επειδή $r \geq d+2$, υπάρχουν $M_1, M_2 \subseteq M$, με

$$M_1 \cap M_2 = \varnothing, \quad M = M_1 \cup M_2 \quad \text{και} \quad \operatorname{con} M_1 \cap \operatorname{con} M_2 \neq \varnothing. \quad (Radon).$$

Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι $M_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu\}, \quad M_2 = \{x_{\nu+1}, \dots, x_r\}$.
Εστω $x \in \operatorname{con} M_1 \cap \operatorname{con} M_2$.
Επειδή $x_1, x_2, \dots, x_\nu \in K_{\nu+1} \cap K_{\nu+2} \cap \cdots \cap K_r$ και τα K_i είναι κυρτά, έχουμε ότι

$$x \in \operatorname{con}\{x_1, x_2, \dots, x_\nu\} \subseteq K_{\nu+1} \cap \cdots \cap K_r.$$

Όμοια, επειδή

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots, x_r \in K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_\nu \quad \text{έχουμε ότι} \quad x \in K_1 \cap \cdots \cap K_\nu.$$

Τελικά $x \in K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_r$, δηλαδή $\bigcap_{i=1}^{r} K_i \neq \varnothing$. □

Θεώρημα 2.1.4 (Helly).

Έστω $F = \{K_i : i \in I\}$ άπειρη οικογένεια από κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$, με K_i $i \in I$ κλειστά και K_{i_o} φραγμένο για κάποιο $i_o \in I$. Εάν κάθε υποοικογένεια από $(d+1)$ έχουν μη κενή τομή, τότε

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \varnothing.$$

Απόδειξη.

Έστω $r \geq 1$ και $\mathcal{K} = \{K_{i_o}, K_{i_1}, \ldots, K_{i_{r-1}}\}$ υποοικογένεια της F.
Εάν $r \leq d+1$ τότε $\bigcap_{j=0}^{r-1} K_{i_j} \neq \varnothing$ (εφ'όσον τα $(d+1)$ έχουν μη κενή τομή).
Εάν $r > d+1$, τότε η οικογένεια $\mathcal{K}$ έχει την ιδιότητα του θεωρ. Helly, άρα $\bigcap_{j=0}^{r-1} K_{i_j} \neq \varnothing$. Η οικογένεια $\{K_i \cap K_{i_o} : i \in I\}$ αποτελείται από κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς συνόλου K_{i_o} και βάσει των ανωτέρω, έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Άρα $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \varnothing$. □

Πόρισμα 2.1.1.

Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια κυρτών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, που περιέχει τουλάχιστον $(d+1)$ σύνολα. Εάν κάθε υποοικογένεια $(d+1)$ συνόλων έχουν μη κενη τομή, τότε

$$\bigcap_{K \in \mathcal{F}} K \neq \varnothing.$$

Απόδειξη.

Άμεσο απο τα προηγούμενα. □

Θεώρημα 2.1.5.

Έστω $\mathcal{F} = \{B_i : i \in I\}$ οικογένεια κυρτών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, που περιέχει τουλάχιστον $(d+1)$ σύνολα. Υποθέτουμε ότι K είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα:
Για κάθε υποοικογένεια $(d+1)$ συνόλων της $\mathcal{F}$ υπάρχει μεταφορά του K που

περιέχεται στην τομή των $(d+1)$ συνόλων. Τότε υπάρχει μεταφορά του K που περιέχεται στην τομή $\bigcap_{i\in I} B_i$.

Απόδειξη.

Έστω $A_i = \{p : p + K \subseteq B_i\}$.

- Το A_i είναι κυρτό σύνολο :

Έστω $x, y \in A_i$ και $\lambda \in [0,1]$. Θα αποδείξουμε ότι $[\lambda x + (1-\lambda)y] \in A_i$ δηλαδή $[\lambda x + (1-\lambda)y] + K \subseteq B_i$. Πράγματι,
$x \in A_i \Rightarrow x + K \subseteq B_i$ και $y \in A_i \Rightarrow y + K \subseteq B_i$.
Για $k \in K$ έχουμε ότι $x + k \in B_i$ και $y + k \in B_i$ με B_i κυρτό. Άρα

$$\lambda(x+k) + (1-\lambda)(y+k) \in B_i, \quad \text{δηλαδή} \quad [\lambda x + (1-\lambda)y] + k \in B_i, \quad k \in K.$$

Άρα $[\lambda x + (1-\lambda)y] + K \subseteq B_i, \quad k \in K$, δηλαδή $\lambda x + (1-\lambda)y \in A_i$.

- Το A_i είναι συμπαγές:

Τα σύνολα B_i, K είναι κλειστά και φραγμένα, είναι εύκολο να δούμε ότι και το A_i είναι κλειστό και φραγμένο. Από την υπόθεση κάθε $(d+1)$ σύνολα της οικογένειας $\{A_i : i \in I\}$ έχουν μη κενη τομή. Από το Πόρισμα $\cap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Δηλαδή υπάρχει q με $q + K \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$. $\square$

Θεώρημα 2.1.6.

Η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς συνόλου του $\mathbb{R}^d$, είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη.

Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^d$, συμπαγές, $\dim(\mathrm{aff}\, M) = \nu$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1\}$$

και την απεικόνιση

$$\varphi : M^{n+1} \times S \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{με}$$

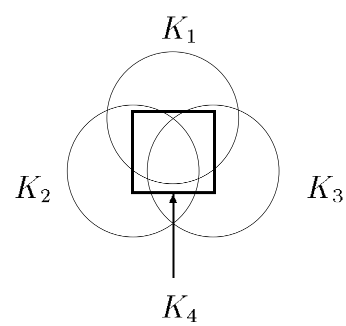
$$\varphi\big((x_1, x_2, \dots x_{n+1}), (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})\big) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Απο Θεώρημα έχουμε ότι $\operatorname{con} M = \varphi(M^{n+1} \times S)$. Επειδή η φ είναι συνεχής και το $M^{n+1} \times S$ είναι συμπαγές, η εικόνα $\varphi(M^{n+1} \times S) = \operatorname{con} M$ είναι συμπαγές σύνολο. □

Παρατήρηση

1. Η διαμέριση του M στο θεώρημα Radon δεν είναι μοναδική. Π.χ.
   $\operatorname{con}\{x_1, x_2\} \cap \operatorname{con}\{x_3, x_4\} \neq \varnothing$
   $\operatorname{con}\{x_1\} \cap \operatorname{con}\{x_2, x_3, x_4\} \neq \varnothing$

2. Η υπόθεση για την κυρτότητα όλων των $K_i, i = 1, 2, \dots, r$ στο θεώρημα Helly δεν μπορεί να παραλειφθεί. Π.χ.
   K_1, K_2, K_3 κυκλικοί δίσκοι,
   K_4 σύνορο τετραπλεύρου.
   $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4 = \varnothing$.



Ορισμός 2.1.4.

i. *Την κυρτή θήκη* $\operatorname{con}\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$ *ονομάζουμε* **(κυρτό) πολύτοπο**.

ii. Ένα πολύτοπο $\operatorname{con}\{x_1, x_2, \ldots x_n\} = S$, *με* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *συσχετισμένα ανεξάρτητα ονομάζεται* **simplex**.

Ορισμός 2.1.5.

Εάν $S = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \ldots x_{k+1}\}$ *είναι simplex, τότε το* $x \in S$ *παρίσταται μονοσήμαντα ως*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

Οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ *καλούνται* **βαρυκεντρικές συντεταγμένες του x**. *Το σημείο*

$$x_o = \frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1})$$

καλείται **βαρύκεντρο του S**.

Πόρισμα 2.1.2.

Κάθε πολύτοπο είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη.

Άμεση απο τον ορισμό του πολυτόπου και το θεώρημα 2.1.6. □

Πόρισμα 2.1.3.

Η κυρτή θήκη $\operatorname{con} M$ *ενός συνόλου* $M \subseteq \mathbb{R}^d$ *είναι η ένωση όλων των simpleces, τα οποία είναι κυρτές θήκες υποσυνόλων του* M.

Απόδειξη.

Άμεση από τον ορισμό του simplex και το θεώρημα 2.1.1. □

2.2 Ασκήσεις

1. Εάν $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\text{con}(M_1 + M_2) = \text{con}\, M_1 + \text{con}\, M_2$.

2. Εάν K_1, K_2 είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ τότε το $K_1 + K_2$ είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει $\lambda K_1 + \mu K_1 = (\lambda + \mu) K_1$ για $\lambda\mu \geq 0$.

3. Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ να δειχθεί ότι

   (i) αν $A \subseteq B$ τότε $A \subseteq \text{con}\, B$

   (ii) αν $A \subseteq B$ και το B είναι κυρτό, τότε $\text{con}\, A \subseteq B$

   (iii) αν $A \subseteq B$ τότε $\text{con}\, A \subseteq \text{con}\, B$

   (iv) $(\text{con}\, A) \cup (\text{con}\, B) \subseteq \text{con}(A \cup B)$

   (v) $\text{con}(A \cap B) \subseteq \text{con}\, A \cap \text{con}\, B$
   Να ευρεθούν παραδείγματα όπου στα iv) και v) δεν ισχύει η ισότης.

4. Έστω $x_1 = (1,0), \quad x_2 = (1,3), \quad x_3 = (4,3), \quad x_4 = (4,0)$ και $x = (\frac{7}{4}, \frac{5}{4})$. Τότε $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{12}x_4$. Να χρησιμοποιηθεί η διαδικασία του Θ.Caratheodory για να εκφραστεί το x ως κυρτός συνδιασμός των x_1, x_2 και x_3.

5. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$ και $v \in S$. Εάν $x \in \text{con}\, S$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_r \in S$ $(r \leq d)$ ώστε $x \in \text{con}\{v, x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

6. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\quad S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $\quad (m > d)$ και $p \in \text{con}\, S$. Υπάρχουν $\begin{pmatrix} m - d' \\ r - d \end{pmatrix}$ (τουλάχιστον) επιλογές από r σημεία του S, $(d < r \leq m)$ που το p ανήκει στην κυρτή θήκη τους.

7. Εάν το K είναι κλειστό, έπεται ότι το $\text{con}\, K$ είναι κλειστό;

Κεφάλαιο 3

Σχετικό εσωτερικό κυρτου συνόλου

3.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1.1.

i. *Ονομάζουμε* **σχετικό εσωτερικό**, $\mathrm{ri}\,\mathbf{C}$ *ενός κυρτού συνόλου* $C \subseteq \mathbb{R}^d$, *το εσωτερικό του* C *ως προς το ελάχιστο συσχετισμένο επίπεδο* $(\mathrm{aff}\,C)$ *που περιέχει το* C. *Τα σημεία του* $\mathrm{ri}\,C$, *καλούνται* **σχετικά εσωτερικά σημεία του C**.

ii. *Ονομάζουμε* **σχετικό σύνορο**, $\mathrm{rb}\,\mathbf{C}$, *ενος κυρτού συνόλου* $C \subseteq \mathbb{R}^d$, *το σύνολο* $\mathrm{cl}\,C \setminus \mathrm{ri}\,C$. *Τα σημεία του* $\mathrm{rb}\,C$ *καλούνται* **σχετικά συνοριακά σημεία του C**.

Παρατήρηση

i. $A \subseteq B \not\Rightarrow \mathrm{ri}\,A \subseteq \mathrm{ri}\,B$

ii. $\mathrm{aff}\,A = \mathrm{aff}\,B, \quad A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{ri}\,A \subseteq \mathrm{ri}\,B.$

Ορισμός 3.1.2.

Ορίζουμε ως διάσταση, $\dim C$, *ενός κυρτού συνόλου την διάσταση* $\dim(\operatorname{aff} C)$.

Λήμμα 3.1.1.

Έστω S *simplex στον* $\mathbb{R}^d$. *Τότε* $\operatorname{ri} S \neq \varnothing$.

Αποδείξη.

Έστω $\dim S = k$ και $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ συσχετισμένα ανεξάρτητα, ώστε

$$S = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}.$$

Τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ αποτελούν συσχετισμένη βάση στο $\operatorname{aff} S$, άρα κάθε σημείο $x \in \operatorname{aff} S$, είναι της μορφής

$$\sum_{i=1}^{k+1}{}^{\alpha} \lambda_i x_i \quad \mu\varepsilon \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1} \quad \mu ο ν ο σ ή \mu α ν τ α \quad ο ρ ι σ \mu έ ν α.$$

Τότε ορίζεται καλά η απεικόνιση

$$f : \operatorname{aff} S \longrightarrow \mathbf{R}^{k+1}, \quad f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}).$$

Έστω $x_o = \frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}) \in S$. Επειδή η f είναι συνεχής και

$$f(x_o) = (\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}), \quad \frac{1}{k+1} > 0,$$

υπάρχει ανοικτή σφαίρα $S(x_o, \varepsilon)$ τέτοια ώστε αν $x \in S(x_o, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} S$ με

$$x = \sum_{i=1}^{k+1}{}^{\alpha} \lambda_i x_i$$

τότε $f(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}) \quad$ με $\quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1} > 0$.
Δηλαδή, αν $x \in S(x_o, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} S$, τότε

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \quad \mu\varepsilon \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1} > 0.$$

Άρα $S(x_o, \varepsilon) \subseteq \operatorname{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} = S$. Επομένως το $x_o \in \operatorname{ri} S$. $\square$

Θεώρημα 3.1.1.

Έστω C μη κενό, κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^d$. Τότε $\operatorname{ri} C \neq \varnothing$.

Απόδειξη.

Έστω $\dim C = k$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in C$ συσχετισμένα ανεξάρτητα. Το σύνολο $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ είναι simplex με $\dim S = k, \quad S \subseteq C$. Από το Λήμμα, $\operatorname{ri} S \neq \varnothing$. Επειδή $\operatorname{ri} S \subseteq \operatorname{ri} C$ έχουμε ότι $\operatorname{ri} C \neq \varnothing$. □

Πρόταση 3.1.1.

Έστω C κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$. Εάν $x_o \in \operatorname{ri} C, \ x_1 \in \overline{C}, \ (x_o \neq x_1)$ τότε $[x_o, x_1) \subseteq \operatorname{ri} C$.

Απόδειξη.

1. Έστω $x_o \in \operatorname{ri} C, \quad x_1 \in C$ και $x_\lambda = (1-\lambda)x_o + \lambda x_1 \in [x_o, x_1), \quad 0 < \lambda < 1$. Επειδή $x_o \in \operatorname{ri} C$ υπάρχει $S(x_o, \varepsilon) \subseteq C$. Η σφαίρα

$$S(x_\lambda, \varepsilon(1-\lambda)) = (1-\lambda)S(x_o, \varepsilon) + \lambda x_1$$

   είναι υποσύνολο του C, διότι $x_1 \in C, \quad S(x_o, \varepsilon) \subseteq C$ και C είναι κυρτό. Άρα $x_\lambda \in \operatorname{ri} C$.

2. Έστω $x_o \in \operatorname{ri} C, x_1 \in \overline{C}$ και $x_\lambda = (1-\lambda)x_o + \lambda x_1 \in [x_o, x_1), \quad 0 < \lambda < 1$. Επειδή $x_o \in \operatorname{ri} C$, υπάρχει $S(x_o, \varepsilon) \subseteq C$. Ισχύει

$$x_1 \in S\left(x_1, (\frac{1}{\lambda} - 1)\varepsilon\right) \quad \text{και} \quad x_1 \in \overline{C}.$$

   Άρα υπάρχει $y_1 \in S(x_1, (\frac{1}{\lambda} - 1)\varepsilon) \cap C$.
   Επειδή $y_1 \in C, \quad S(x_o, \varepsilon) \subseteq C$ με C κυρτό σύνολο έχουμε ότι

$$V = S((1-\lambda)x_o + \lambda y_1, (1-\lambda)\varepsilon) = (1-\lambda)S(x_o, \varepsilon) + \lambda y_1 \subseteq C.$$

   Ισχύει $x_\lambda \in V$ διότι

$$\big\| x_\lambda - [(1-\lambda)x_o + \lambda y_1] \big\| = \lambda \|x_1 - y_1\| < (1-\lambda)\varepsilon.$$

   Επειδή το V είναι ανοικτό και $x_\lambda \in V \subseteq C$, έπεται ότι $x_\lambda \in \operatorname{ri} C$.

$\square$

Θεώρημα 3.1.2.

Εάν C μη κενό,κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε:

i. *Το $\overline{C}$ είναι κυρτό.*

ii. *Το $\operatorname{ri} C$ είναι κυρτό.*

iii. $\overline{C} = \overline{\operatorname{ri} C}$.

iv. $\operatorname{aff} C = \operatorname{aff} \overline{C} = \operatorname{aff}(\operatorname{ri} C)$.

v. $\operatorname{ri} C = \operatorname{ri} \overline{C} = \operatorname{ri}(\operatorname{ri} C)$.

vi. $\operatorname{rb} C = \operatorname{rb} \overline{C} = \operatorname{rb}(\operatorname{ri} C)$.

vii. $\dim C = \dim(\overline{C}) = \dim(\operatorname{ri} C)$

Απόδειξη.

i. Έστω $x_1, x_2 \in \overline{C}$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του C με

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_1, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = x_2.$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda y_n + (1-\lambda) z_n) = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \quad (0 < \lambda < 1).$$

Επειδή το C είναι κυρτό το $\lambda y_n + (1-\lambda) z_n \in C$, άρα $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \overline{C}$. $(0 < \lambda < 1)$ Άρα το $\overline{C}$ είναι κυρτό.

ii. Εάν $x_o, x_1 \in \operatorname{ri} C$, τότε $[x_o, x_1] \subseteq \operatorname{ri} C$ δηλαδή το $\operatorname{ri} C$ είναι κυρτό.

iii. Ισχύει $\operatorname{ri} C \subseteq C \Rightarrow \overline{C} \subseteq \overline{\operatorname{ri} C}$.
Έστω $x_1 \in \overline{C}$ και $x_o \in \operatorname{ri} C$. Τότε

$$[x_o, x_1) \subseteq \operatorname{ri} C \Rightarrow \overline{[x_o, x_1)} = [x_o, x_1] \subseteq \overline{\operatorname{ri} C}.$$

Άρα $x_1 \in \overline{\operatorname{ri} C}$. Τελικά $\overline{C} = \overline{\operatorname{ri} C}$.

iv. Από το ορισμό έχουμε $\operatorname{aff} C = \operatorname{aff} \overline{C}$, άρα έχουμε

$$\operatorname{aff}(\operatorname{ri} C) = \operatorname{aff}(\overline{\operatorname{ri} C}) = \operatorname{aff} \overline{C} = \operatorname{aff} C.$$

v. Έχουμε ότι $\operatorname{aff} C = \operatorname{aff} \overline{C}$, άρα $\operatorname{ri} C \subseteq \operatorname{aff} \overline{C}$. Έστω $x \in \operatorname{ri} \overline{C}$ και $x_o \in \operatorname{ri} C$. Τότε υπάρχει $S(x, \varepsilon) \subseteq \overline{C}$. Θεωρούμε

$$x_1 = x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x - x_o}{||x - x_o||}.$$

Τότε $x \in S(x_o, \varepsilon) \subseteq \overline{C}$ και $x \in (x_o, x_1)$, άρα $x \in \operatorname{ri} C$. Τελικά $\operatorname{ri} C = \operatorname{ri} \overline{C}$. Εφ'όσον $\operatorname{aff} C = \operatorname{aff}(\operatorname{ri} C)$ και το $\operatorname{ri} C$ είναι ανοικτό στο $\operatorname{aff}(\operatorname{ri} C)$ έχουμε ότι $\operatorname{ri}(\operatorname{ri} C) = \operatorname{ri} C$.

vi. Απο τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\operatorname{rb} C = \overline{C} \setminus \operatorname{ri} C = \overline{\overline{C}} \setminus \operatorname{ri} \overline{C} = \operatorname{rb} \overline{C} \quad \text{και}$$

$$\operatorname{rb}(\operatorname{ri} C) = \overline{\operatorname{ri} C} \setminus \operatorname{ri}(\operatorname{ri} C) = \overline{C} \setminus \operatorname{ri} C = \operatorname{rb} C.$$

vii. Άμεσο.

$\square$

Πρόταση 3.1.2.

Εάν $x \in C$ όπου C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τα εξής είναι ισοδύναμα.

i. $x \in \operatorname{ri} C$.

ii. *Για κάθε ευθεία* $\ell \subseteq \operatorname{aff} C$ *με* $x \in \ell$, $\exists y_o, y_1 \in \ell \cap C$ *με* $x_o \in (y_o, y_1)$.

iii. *Για κάθε* $y \in C, y \neq x$, $\exists z \in C$ *με* $x \in (y, z)$, *δηλαδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα* $[y, x]$ *του* C, *μπορεί να επεκταθεί πέραν του* x *μέσα στο* C.

Απόδειξη.

$i) \Rightarrow ii)$, $ii) \Rightarrow iii)$, Προφανή.

$iii) \Rightarrow i)$

Έστω $y \in \operatorname{ri} C$, $(\neq \varnothing)$. Εάν $y = x$ τότε $x \in \operatorname{ri} C$. Έστω $y \neq x$. Τότε υπάρχει $z \in C$ με $x \in (y, z)$, άρα $x \in \operatorname{ri} C$. $\square$

3.2 Ασκήσεις

1. Εάν K_1, K_2 κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$, να δειχθεί ότι $\operatorname{ri}(K_1 + K_2) = \operatorname{ri} K_1 + \operatorname{ri} K_2$.

2. Να ευρεθούν παραδείγματα τα οποία να δείχνουν ότι η υπόθεση της κυρτότητας του C στο Θεώρημα 3.1.2 είναι απαραίτητη για να ισχύουν τα συμπεράσματα.

3. Εάν $\operatorname{cl}\operatorname{con} M$ είναι το ελάχιστο κυρτό, κλειστό σύνολο, που περιέχει το $M \subseteq \mathbb{R}^d$ να δειχθεί ότι $\operatorname{cl}\operatorname{con} M = \overline{\operatorname{cl}\operatorname{con} M}$.

4. Εάν $\{C_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια κυρτών συνόλων με $\bigcap_{i\in I} \operatorname{ri} C_i \neq \varnothing$ τότε
$$\overline{\bigcap_{i\in I} C_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{C_i}.$$
Ισχύει για τυχαία οικογένεια κυρτών συνόλων;

5. Εάν C_1, C_2 είναι κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $\operatorname{ri} C_1 \cap \operatorname{ri} C_2 \neq \varnothing$ τότε
$$\operatorname{ri}(C_1 \cap C_2) = (\operatorname{ri} C_1) \cap (\operatorname{ri} C_2).$$
Ισχύει για C_1, C_2 τυχαία κυρτά σύνολα;

Κεφάλαιο 4

Φέροντα και διαχωρίζοντα υπερεπίπεδα

4.1 Εισαγωγή

Οι ιδιότητες των κυρτών συνόλων που αναφέρονται στα φέροντα και διαχωρίζοντα επίπεδα παίζουν βασικό ρόλο και αποτελούν εργαλείο σε πολλούς κλάδους, όπως Συναρτησιακή Ανάλυση, Βελτιστοποίηση, Θεωρία Ελέγχου, Οικονομικά Μαθηματικά.

Για να αποδειχθούν τα βασικά θεωρήματα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της απεικόνισης του Εγγυτάτου Σημείου.

4.1.1 Η Απεικόνιση του Εγγυτάτου Σημείου

Πρόταση 4.1.1.

Έστω A κυρτό, κλειστό σύνολο και $x \in \mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχουν ακριβώς ένα σημείο $\quad p(A,x) \in A \quad$ *με* $\quad |x - p(A,x)| \leq |x - y| \quad$ *για* $\quad y \in A$.

Απόδειξη.

Έστω $x \notin A, \quad y_1' \in A$ και $\rho = |x - y_1'| > 0$.
Το σύνολο $\overline{S(y_1', \rho)} \cap A$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $y_o \in \overline{S(y_1', \rho)} \cap A$ ώστε

$$|x - y_o| \leq |x - y| \quad \text{για} \quad y \in \overline{S(y_1', \rho)} \cap A.$$

Τότε ισχύει $|x - y_o| \leq |x - y|, \quad \forall y \in A$.

Το y_o είναι μοναδικο, γιατί αν $y_1 \neq y_o, \quad y_1 \in A$ έχει την ιδιότητα $|x - y_1| \leq |x - y|$ για $y \in A$, τότε το $\frac{1}{2}(y_o + y_1) \in A$ (A κυρτό) και

$$\left|x - \frac{1}{2}(y_o + y_1)\right| < \frac{1}{2}(|x - y_o| + |x - y_1|) = |x - y_o|$$

το οποίο είναι άτοπο. Ορίζουμε $p(A, x) = y_o$. Εάν $x \in A$ τότε το $p(A, x) = x$ έχει την ιδιότητα $|x - p(A, x)| \leq |x - y|$ για $y \in A$. □

Ορισμός 4.1.1.

Για το σύνολο A κυρτό, κλειστό ορίζεται η απεικόνιση

$$p(A, \cdot) : \mathbb{R}^d \longrightarrow A$$

με $p(A, x) \in A$ το σημείο με την ιδιότητα

$$|x - p(A, x)| \leq |x - y|, \quad y \in A.$$

Η $p(A, \cdot)$ καλείται **απεικόνιση του Εγγυτάτου Σημείου** *του συνόλου A.*
Για $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ ορίζουμε

$$u(A, x) = \frac{x - p(A, x)}{|x - p(A, x)|}$$

το μοναδιαίο διάνυσμα και

$$R(A, x) = \{p(A, x) + \lambda u(A, x), \lambda \geq 0\}$$

την ημιευθεία που διέρχεται από το x και έχει αρχή το $p(A, x)$.

Λήμμα 4.1.1.

Εάν $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ και $y \in R(A, x)$, τότε $p(A, x) = p(A, y)$.

Απόδειξη.

Έστω $p(A,x) \neq p(A,y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i. $y \in (p(A,x),x)$. Τότε

$$\begin{aligned} |x - p(A,y)| &\leq |x-y| + |y - p(A,y)| \\ &< |x-y| + |y - p(A,x)| \\ &= |x - p(A,x)|. \end{aligned}$$

Άτοπο.

ii. $x \in (p(A,x),y)$. Τότε θεωρούμε $q \in [p(A,x),p(A,y)] \subseteq A$, τέτοιο ώστε το $[q,x]$ να είναι παράλληλο του $[p(A,y),y]$. Από τα όμοια τρίγωνα έχουμε:

$$\frac{|x-q|}{|x-p(A,x)|} = \frac{|y-p(A,y)|}{|y-p(A,x)|} < 1.$$

Δηλαδή $|x-q| < |x-p(A,x)|$ και $q \in A$.Άτοπο. Τελικά $p(A,x) = p(A,y)$, για $y \in R(A,x)$.

□

Θεώρημα 4.1.1.

Η απεικόνιση του Εγγυτάτου Σημείου ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz.

$$\big|p(A,x) - p(A,y)\big| \leq |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Απόδειξη.

Έστω $x,y \in \mathbb{R}^d$. Έστω $v = p(A,x) - p(A,y)$. Εαν $v = 0$ τότε προφανώς ισχύει

$$0 = \big|p(A,x) - p(A,y)\big| \leq |x-y|.$$

Εάν $v \neq 0$ τότε

$$\left.\begin{array}{c} \big\langle x - p(A,x), v\big\rangle \geq 0 \quad \text{και} \\ \big\langle y - p(A,y), v\big\rangle \leq 0. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Πράγματι, αν ήταν $\big\langle x - p(A,x), v\big\rangle < 0$ τότε $x - p(A,x) \neq 0$, άρα $x \notin A$ και η $R(A,x)$ τέμνει το επίπεδο που διέρχεται από το $p(A,y)$ και είναι κάθετο στο v σε κάποιο σημείο z. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές $z, p(A,x)$ και $p(A,y)$ και ορθή γωνία στην κορυφή $p(A,y)$ έχουμε:

$$|z - p(A,y)| < |z - p(A,x)| = |z - p(A,z)|.$$

Άτοπο. Όμοια έχουμε ότι $\big\langle y - p(A,y), v\big\rangle \leq 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
|p(A,x) - p(A,y)|^2 &= \big\langle p(A,x) - p(A,y), p(A,x) - p(A,y)\big\rangle \\
&= \big\langle x - y, p(A,x) - p(A,y)\big\rangle + \big\langle y - p(A,y), p(A,x) - p(A,y)\big\rangle \\
&\quad + \big\langle p(A,x) - x, p(A,x) - p(A,y)\big\rangle \\
&\overset{(*)}{\leq} \big\langle x - y, p(A,x) - p(A,y)\big\rangle \\
&\leq |x - y| \cdot |p(A,x) - p(A,y)|
\end{aligned}$$

Άρα $|p(A,x) - p(A,y)| \leq |x - y|$. □

Λήμμα 4.1.2.

Εάν $A \subseteq S(x_o, r)$, τότε ισχύει $p(A, \operatorname{bd} S(x_o,r)) = \operatorname{bd} A$.

Απόδειξη.

Προφανώς $p(A, \operatorname{bd} S(x_o,r)) \subseteq \operatorname{bd} A$.

Έστω $x \in \operatorname{bd} A \subseteq S(x_o,r)$. Τότε για $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in S(x_o,r)$ και $x_n \notin A$ με $|x_n - x| \leq \frac{1}{n}$. Έχουμε:

$$|x - p(A,x_n)| = |p(A,x) - p(A,x_n)| \leq |x_n - x| \leq \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Έστω $y_n \in R(A,x_n) \cap \operatorname{bd} S(x_o,r)$, τότε $p(A,y_n) = p(A,x_n)$, άρα

$$|x - p(A,y_n)| \leq \frac{1}{n}. \quad (\text{από τη } (1)) \qquad (2)$$

Λόγω της συμπάγειας του $\operatorname{bd} S(x_o,r)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in \operatorname{bd} S(x_o,r).$$

Τότε $\lim_{n\to\infty} p(A, y_n) = p(A, y)$, (γιατί p Lipschitz) και $|x - p(A, y)| = 0$ (από την (2)). Άρα $x = p(A, y) \in p(A, \operatorname{bd} S(x_o, r))$. Από τα προηγούμενα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 4.1.2.

Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και H είναι υπερεπίπεδο, λέμε ότι το H φέρει το A στο σημείο x αν $x \in A \cap H$ και $A \subseteq H^+$ ή $A \subseteq H^-$.
Εάν το $H = H(u, \alpha)$ είναι φέρον υπερεπίπεδο και

$$A \subseteq H^- = \{y \in \mathbb{R}^d :< y, u > \leq \alpha\}$$

τότε ο $H^-(u, \alpha)$ καλείται φέρων ημίχωρος και το u εξωτερικό κάθετο διάνυσμα των $H(u, \alpha)$ και $H^-(u, \alpha)$.

Λήμμα 4.1.3.

Έστω A κυρτό, κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$. Το υπερεπίπεδο που διέρχεται από το $p(A, x)$ και είναι κάθετο στο $u = x - p(A, x)$ φέρει το A στο $p(A, x)$.

Απόδειξη.

Έστω H το υπερεπίπεδο που διέρχεται από το $p(A, x) \in A$ και είναι κάθετο στο $u = x - p(A, x)$ και υποθέτουμε ότι $x \notin H^-$.
Έστω ότι υπάρχει $y \in A$ με $y \notin H^-$. Τότε η γωνία $\widehat{yp(A, x)x}$ είναι οξεία $(y \in H^+ \backslash H, \quad x - p(A, x) \perp H)$.
Εάν $z \in [p(A, x), y]$ τότε η γωνία $\widehat{xzp(A, x)}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση ορθής γωνίας και το $z \in A$. Στο τρίγωνο με κορυφές τα $x, z, p(A, x)$ έχουμε

$$|x - z| < |x - p(A, x)| \quad \text{με} \quad z \in A.$$

Άτοπο. Άρα $A \subseteq H^-$ και το H φέρει το A στο $p(A, x)$. $\square$

Θεώρημα 4.1.2.

i. Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και κλειστό τότε από κάθε συνοριακό του σημείο διέρχεται φέρον υπερεπίπεδο.

ii. *Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και συμπαγές τότε για κάθε $u \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ υπάρχει φέρον υπερεπίπεδο του A με εξωτερικό κάθετο διάνυσμα το u.*

Απόδειξη.

i. Έστω ότι το A είναι και φραγμένο, $A \subseteq S(x_o, r)$ και $x \in \operatorname{bd} A$. Τότε (Λήμμα 4.1.2) υπάρχει $y \in \operatorname{bd} S(x_o, r)$ ώστε $x = p(A, y)$. Τότε $y \notin A$ άρα (Λήμμα 4.1.3) το υπερεπίπεδο H που διέρχεται από το $p(A, y) = x$ και είναι κάθετο στο $y - x$ φέρει το A στο x. Άρα το $i)$ ισχύει για A φραγμένο.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ τυχαίο κυρτό, κλειστό σύνολο και $x \in \operatorname{bd} A$. Τότε $x \in \operatorname{bd}\big(A \cap \overline{S(x,1)}\big)$ όπου $A \cap \overline{S(x,1)}$ είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο, άρα υπάρχει H που φέρει το $A \cap \overline{S(x,1)}$ στο x και $A \cap \overline{S(x,1)} \subseteq H^-$.
Εάν υπήρχε $z \in A$ και $z \notin H^-$, τότε $[z, x] \subseteq A$ και $[z, x) \subseteq H^+ \backslash H.(x \in H, z \in H^+ \backslash H)$. Άτοπο, διότι $[z, x) \cap \overline{S(x,1)} \subseteq H^-$.

ii. Έστω A κυρτό και συμπαγές και $u \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Τότε υπάρχει $x \in A$ ώστε

$$< x, u >= \sup\{< y, u >: y \in A\}.$$

Το $H = \sup\{y \in \mathbb{R}^d :< y, u >=< x, u >\}$ είναι φέρον υπερεπίπεδο του A στο σημείο x.

□

Πόρισμα 4.1.1.

Κάθε κυρτό, κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι η τομή των ημιχώρων που το φέρουν.

Ορισμός 4.1.3.

i. *Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ και $H(u, \alpha)$ είναι υπερεπίπεδο, το $H(u, \alpha)$ διαχωρίζει τα A, B αν:*

$$\begin{aligned} A &\subseteq H^-(u,\alpha) \quad \textit{και} \quad B \subseteq H^+(u,\alpha) \quad \textit{ή} \\ A &\subseteq H^+(u,\alpha) \quad \textit{και} \quad B \subseteq H^-(u,\alpha). \end{aligned}$$

ii. *Τα* $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ *διαχωρίζονται γνήσια από το* $H(u, \alpha)$ *αν*

$$\begin{aligned} A &\subseteq \operatorname{int} H^-(u,\alpha) \quad \textit{και} \\ B &\subseteq \operatorname{int} H^+(u,\alpha) \end{aligned}$$

και αντίστροφα.

iii. *Τα* $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ *διαχωρίζονται αυστηρά από το* $H(u, \alpha)$ *εάν υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *ώστε τα* $H(u, \alpha - \varepsilon)$ *και* $H(u, \alpha + \varepsilon)$ *να διαχωρίζουν τα* A, B.

Θεώρημα 4.1.3.

Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *είναι κυρτό σύνολο και* $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ *τότε τα* A *και* x *διαχωρίζονται.*
Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *είναι κυρτό, κλειστό σύνολο και* $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ *τότε τα* A *και* x *διαχωρίζονται αυστηρά.*

Απόδειξη.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, κλειστό σύνολο και $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$. Τότε το υπερεπίπεδο H το οποίο διέρχεται από το $p(A, x)$ και είναι κάθετο στο $x - p(A, x)$ διαχωρίζει τα A, x. (Λήμμα 4.1.3). Είναι προφανές ότι το υπερεπίπεδο που είναι παράλληλο του H και διέρχεται από το σημείο $\frac{1}{2}(x + p(A, x))$ διαχωρίζει αυστηρά τα A και x.
Εάν το A είναι τυχαίο κυρτό σύνολο και $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ τότε το $\overline{A}$ είναι κυρτό και κλειστό και έχουμε δύο περιπτώσεις για το x.

- Το $x \notin \overline{A}$. Τότε τα $x, \overline{A}$ διαχωρίζονται αυστηρά.
- Το $x \in \overline{A}$. Επειδή $x \notin A$ έχουμε ότι $x \in \operatorname{bd} A = \operatorname{bd} \overline{A}$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο H που φέρει το $\overline{A}$ στο x. Το H διαχωρίζει τότε τα A, x. □

Λήμμα 4.1.4.

Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d, A, B \neq \varnothing$, *τότε τα* A, B *διαχωρίζονται (διαχωρίζονται αυστηρά) αν και μόνον αν τα* $A - B$ *και 0 διαχωρίζονται (διαχωρίζονται αυστηρά).*

Απόδειξη.

Θα αποδειχθεί η περίπτωση του αυστηρού διαχωρισμού. Η περίπτωση του διαχωρισμού είναι ανάλογη (ε=0).

$(\Rightarrow)$

Έστω ότι τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά. Τότε $A \subseteq H^{-}(u, \alpha-\varepsilon)$ και $B \subseteq H^{+}(u, \alpha+\varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Εάν $x \in A - B$ τότε $x = \gamma - \delta$ για κάποιο $\gamma \in A$ και $\delta \in B$. Τότε

$$\begin{aligned} <\gamma, u> &\leq \alpha - \varepsilon, \quad \text{και} \\ <\delta, u> &\geq \alpha + \varepsilon, \end{aligned}$$

άρα $< x, u > \leq -2\varepsilon$ και $< 0, u >= 0$. Άρα το $H(u, -\varepsilon)$ διαχωρίζει αυστηρά τα $A - B$ και 0.

$(\Leftarrow)$

Έστω ότι τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε

$$< x, u > \leq -2\varepsilon \quad \text{για} x \in A - B.$$

Έστω $\gamma \in A$ και $\delta \in B$. Τότε $< \gamma - \delta, u > \leq -2\varepsilon$ άρα

$$\begin{aligned} <\gamma, u> &\leq -2\varepsilon + <\delta, u> \quad \text{και} \\ <\delta, u> &\geq <\gamma, u> + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$c = \sup\{<\gamma, u>, \gamma \in A\} \in \mathbb{R} \;\; \text{και} \;\; d = \inf\{<\delta, u>, \delta \in B\} \in \mathbb{R}.$$

και $c - d \leq -2\varepsilon$, δηλαδή $d - c \geq 2\varepsilon$. Τότε, το $H\left(u, \frac{d+c}{2}\right)$ διαχωρίζει αυστηρά τα A και B, διότι υπάρχει $\varepsilon' = \frac{d-c}{2} \geq \varepsilon > 0$, ώστε

$$\begin{aligned} \text{αν} \quad \gamma \in A, \quad <\gamma, u> &\leq c = \frac{c+d}{2} - \varepsilon' \quad \text{και} \\ \text{αν} \quad \delta \in B, \quad <\delta, u> &\geq d = \frac{c+d}{2} + \varepsilon'. \end{aligned}$$

$\square$

Το επόμενο Θεώρημα είναι συνέπεια του Θ.() και του Λ() και αποτελεί βασικό εργαλείο στην Θεωρία της Κυρτότητος.

Θεώρημα 4.1.4.

Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$, τότε διαχωρίζονται. Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτά σύνολα και A είναι συμπαγές και B κλειστό, με $A \cap B = \emptyset$, τότε διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη.

Έστω A, B κυρτά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Τότε $0 \notin A - B$ και το $A - B$ είναι κυρτό, άρα (Θεώρ.()) τα 0, $A - B$ διαχωρίζονται, συνεπώς, από το προηγούμενο Λήμμα και τα A, B διαχωρίζονται.
Εάν A είναι συμπαγές και B είναι κλειστό, τότε το $A - B$ είναι κλειστό. το $A - B$ είναι κυρτό, άρα (Θεώρ.()) τα 0, $A - B$ διαχωρίζονται αυστηρά, άρα από Λήμμα και τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά. □

Θεώρημα 4.1.5.

Εάν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, κυρτά σύνολα με $\dim(A \cup B) = d$. Τα A, B διαχωρίζονται αν και μόνον αν τα $\operatorname{ri} A \cap \operatorname{ri} B = \emptyset$.

Απόδειξη.

($\Rightarrow$)
Έστω ότι $A \subseteq H^-$ και $B \subseteq H^+$. Αν υπήρχε $x \in \operatorname{ri} A \cap \operatorname{ri} B$ τότε $x \in H$. Έστω $y \in A$. Τότε υπάρχει $z \in A$ και $\lambda \in (0, 1)$, ώστε $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$, $(x \in \operatorname{ri} A)$. Επειδή $z, y \in H^-$ και $x \in H$ έχουμε ότι $y \in H$, δηλαδή $A \subseteq H$.
Όμοια $B \subseteq H$. Άρα $A \cup B \subseteq H$ και

$$\dim(A \cup B) \leq \dim H = d - 1.$$

Άτοπο. Άρα $\operatorname{ri} A \cap \operatorname{ri} B = \emptyset$.
($\Leftarrow$)
Έστω $\emptyset = \operatorname{ri} A \cap \operatorname{ri} B$. Τα σύνολα $\operatorname{ri} A, \operatorname{ri} B$ είναι κυρτά, άρα υπάρχει υπερεπίπεδο

H με $\mathrm{ri}\, A \subseteq H^-, \mathrm{ri}\, B \subseteq H^+$. Οι ημίχωροι H^-, H^+ είναι κλειστοί, άρα

$$\overline{\mathrm{ri}\, A} = \overline{A} \subseteq H^-, \quad \overline{\mathrm{ri}\, B} = \overline{B} \subseteq H^+.$$

Επομένως τα $\overline{A}, \overline{B}$ διαχωρίζονται από το H, άρα και τα A, B διαχωρίζονται από το H. Επειδή $\dim(A \cup B) = d$, ένα τουλάχιστον από τα σύνολα A, B δεν είναι υποσύνολο του H. □

Κάθε κυρτό, κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}^d$, είναι η τομή των φέροντων ημιχώρων του, οι οποίοι μπορούν να περιγραφούν από τα εξωτερικά κάθετα διανύσματα και την απόσταση των αντιστοίχων φερόντων επιπέδων από την αρχή των αξόνων. Η περιγραφή γίνεται με την βοήθεια της φέρουσας συνάρτησης.

4.2 Η Φέρουσα Συνάρτηση

Ορισμός 4.2.1.

Η φέρουσα συνάρτηση του κυρτού, κλειστού συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζεται από την σχέση

$$\varphi(K,u) := \sup\{< x, u >, x \in K\}.$$

Πρόταση 4.2.1.

Εάν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο και $\varphi(K,\cdot)$ η φέρουσα συνάρτηση του, τότε το $H(u, \varphi(K,u))$ είναι φέρον υπερεπίπεδο και

$$K := \{x \in \mathbb{R}^d :< x, u >\leq \varphi(K,u), u \in \mathbb{R}^d\}.$$

Απόδειξη.

Άμεσο από τα Θεωρήματα 4.1.2 και 4.1.3. □

Πρόταση 4.2.2.

Εάν K_1, K_2, κυρτά, κλειστά τότε

i. $\varphi(\lambda K_1, u) = \lambda\varphi(K_1, u), (\lambda > 0), \quad \varphi(K_1 + K_2, u) = \varphi(K_1, u) + \varphi(K_2, u)$

ii. $\varphi(K_1, \lambda u) = \lambda\varphi(K_1, u), (\lambda > 0), \quad \varphi(K_1, u + v) \leq \varphi(K_1, u) + \varphi(K_1, v),$
$u, v \in \mathbb{R}^d$

iii. $\varphi(K_1 + x, u) = \varphi(K_1, u) + < x, u >, \quad x \in \mathbb{R}^d$

iv. $\varphi(K_1, u) \leq \varphi(K_2, u), \quad u \in \mathbb{R}^d \Longleftrightarrow K_1 \subseteq K_2$

Απόδειξη.

Άμεσα από τον ορισμό. □

Παρατηρούμε ότι για κάθε συμπαγές, κυρτό σύνολο K η φέρουσα συνάρτηση $\varphi(K, \cdot)$ είναι συνάρτηση που λαμβάνει πεπερασμένες τιμές και ισχύει

$$\varphi(\lambda K, u) = \lambda\varphi(K, u),$$

$$\varphi(K, u + v) \leq \varphi(K, u) + \varphi(K, v), \quad (\lambda > 0, \quad u, v \in \mathbb{R}^d).$$

Ισχύει και το αντίστροφο:
Κάθε υπογραμμική συνάρτηση ορίζει μονοσήμαντα ένα συμπαγές, κυρτό σύνολο. Για να αποδειχθεί αυτό χρειαζόμαστε μια βασική ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων.

Λήμμα 4.2.1.

Κάθε κυρτή συνάρτηση, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad x, y \in A \subseteq \mathbb{R}^d, \quad \lambda \in (0, 1)$$

είναι συνεχής στο εσωτερικό του A. *(*A *κυρτό).*

Απόδειξη.

Έστω $x_o \in \operatorname{int} A$. Τότε υπάρχει $\Sigma = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\}$, d-simplex και $S(x_o, \rho)$ σφαίρα ώστε $x_o \in \operatorname{int}\Sigma \subseteq \Sigma \subseteq \operatorname{int} A$ και $\overline{S(x_o,\rho)} \subseteq \Sigma$. Εάν $x \in \Sigma$ τότε

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i f(x_i) \leq c = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{d+1})\}.$$

Θεωρούμε $y \in \overline{S(x_o,\rho)}$. Τότε $y = x_o + \alpha u, \quad \alpha \in [0,1], \quad |u| = \rho$. Τα $x_o + u, x_o - u \in \overline{S(x_o,\rho)} \subseteq \Sigma$. Έχουμε $\quad y = (1-\alpha)x_o + \alpha(x_o + u)$ άρα

$$f(y) \leq (1-\alpha) f(x_o) + \alpha f(x_o + u) \leq (1-\alpha) f(x_o) + \alpha c \quad \text{δηλαδή}$$

$$f(x_o) - f(y) \leq \alpha(c - f(x_o)) \qquad (1)$$

Επίσης $\quad x_o = \dfrac{1}{1+\alpha} y + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(x_o - u)$ άρα

$$f(x_o) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x_o - u) \quad \text{δηλαδή}$$

$$|f(x_o) - f(y)| \leq \alpha(c - f(x_o)) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$|f(y) - f(x_o)| \leq \alpha(c - f(x_o)) = \frac{1}{\rho}|y - x_o|(c - f(x_o))$$

για $y \in \overline{S(x_o,\rho)}$. Άρα η f συνεχής στο x_o. $\square$

Θεώρημα 4.2.1.

Έστω $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε $f(\lambda u) = \lambda f(u), \ \lambda \geq 0$ και $f(u+v) \leq f(u) + f(v), \ \ u, v \in \mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα κυρτό, συμπαγές σύνολο K ώστε $f = \varphi(K, \cdot)$.

Απόδειξη.

Έστω $K = \{x \in I\!R^d :< x, u > \leq f(u), \quad u \in I\!R^d\}$.
Το K είναι κυρτό, κλειστό σύνολο και $\varphi(K, \cdot) \leq f$.
Το K είναι φραγμένο.
Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει $x_n \in K$ ώστε $|x_n| \geq n, \quad n \in I\!N$. Τότε

$$\left\langle x_n, \frac{x_n}{|x_n|} \right\rangle = |x_n| \leq f\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right)$$

Λόγω της συμπάγειας της σφαίρας του $I\!R^d$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\frac{x_n}{|x_n|}$ συγκλίνει, οπότε η $f\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right)$ συγκλίνει, (f συνεχής στο $I\!R^d$).
Άτοπο, διότι $f\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) \geq n$.
Για την απόδειξη του Θεωρήματος έχουμε να δείξουμε ότι $K \neq \varnothing$ και $f \leq \varphi(K, \cdot)$.
Έστω $C = \big\{(u, y) \in I\!R^d \times I\!R : u \in I\!R^d, f(u) \leq y\big\}$.
Τότε το $C \neq \varnothing, ((0,0) \in C, f(0) = 0)$ και είναι κυρτό και κλειστό. (f κυρτή, συνεχής).
Έστω $\big((u, f(u)\big) \in \mathrm{bd}\, C$. Τότε υπάρχει $H_{(u_o,y_o),\alpha}$ υπερεπίπεδο του $I\!R^d \times I\!R$ ώστε $\big((u, f(u)\big) \in H_{(u_o,y_o),\alpha}$ και $C \subseteq H_{(u_o,y_o),\alpha}$. Επειδή $(0,0) \in C$ έχουμε $\alpha \geq 0$. Για $\lambda > 0, \quad \lambda(u, f(u)) = (\lambda u, f(\lambda u)) \in C \subseteq H^-_{(u_o,y_o),\alpha}$ άρα

$$\big\langle(\lambda u, f(\lambda u)), (u_o, y_o)\big\rangle \leq \alpha, \quad \lambda\big\langle(u, f(u)), (u_o, y_o)\big\rangle = \lambda\alpha,$$

δηλαδή $\lambda\alpha \leq \alpha$ για κάθε $\lambda > 0$. Άρα $\alpha = 0$.
Εξ'άλλου $(u, f(u)), (-u, f(-u)) \in C$ άρα $(0, (f(u)+f(-u)) \in C$, άρα $y_o(f(u)+f(-u)) \leq 0$ με $(f(u) + f(-u)) \leq f(0) = 0$. Άρα $y_o \leq 0$. Αν το $y_o = 0$ τότε

$$\big\langle(u', f(u')), (u_o, 0))\big\rangle =< u', u_o > \leq 0, \quad u' \in I\!R^d,$$

αδύνατον. (η f ορίζεται σε όλο το $I\!R^d$). Άρα $y_o < 0$. Υποθέτουμε ότι $y_o = -1$, τότε

$$C \subseteq H^-_{(u_o,-1),\alpha} = \{(u', x) \in I\!R^d \times I\!R : \big\langle(u', x), (u_o, -1)\big\rangle \leq 0\}.$$

Για $(u', f(u')) \in C$ έχουμε $\big\langle (u', f(u')), (u_o, -1) \big\rangle \leq 0$ ή $< u', u_o > \leq f(u'), \quad u' \in \mathbb{R}^d$. Άρα $u_o \in K, \quad K \neq \varnothing$ και $\big\langle (u, f(u)), (u_o, -1) \big\rangle = 0$ δηλαδή $< u, u_o >= f(u) \Rightarrow \varphi(K, u) \geq f(u)$.

Επειδή το u είναι τυχαίο έχουμε $\varphi(K, \cdot) \geq f$. Προφανώς το K είναι μοναδικό. $\square$

4.3 Ασκήσεις

1. Να δοθεί παράδειγμα συνόλων A, B με $A \cap B = \varnothing$, τα οποία δεν διαχωρίζονται.

2. Να δοθεί παράδειγμα συνόλων A, B κυρτών, κλειστών με $A \cap B = \varnothing$, τα οποία δεν διαχωρίζονται.

3. Εάν $K + M = L + M, \quad K, L, M$ συμπαγή, κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε $K = L$.

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα Hahn-Banach

5.1 Αναλυτική Μορφή

Ορισμός 5.1.1.

Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ καλείται γραμμική αν ισχύει:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Μια γραμμική συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται γραμμικό συναρτησοειδές.

Ορισμός 5.1.2.

Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται υπογραμμική αν ισχύει:

i. $f(x + y) \le f(x) + f(y), \ \forall x, y \in X$ *(Υποπροσθετική)*

ii. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall x \in X, \ \alpha \in \mathbb{R}$. *(Θετικά Ομογενής)*

Ορισμός 5.1.3.

Το σύνολο των γραμμικών συναρτησοειδών ενός διανυσματικού χώρου X, καλείται διϋκός χώρος του X και συμβολίζεται με X^*.

Λήμμα 5.1.1.

Έστω X διανυσματικός χώρος, και $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω M γραμμικός υπόχωρος του X, $(M \leq X)$ και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, γραμμικό συναρτησοειδές, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

Θεωρούμε N τον γραμμικό υπόχωρο του X που παράγεται από το σύνολο $M \cup \{v\}$, για κάποιο $v \in X \backslash M$, δηλαδή

$$N = \{x \in X : x = z + \lambda v, \quad z \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε:
Υπάρχει (όχι κατ'ανάγκη μοναδική) $\hat{f}$, γραμμική επέκταση της f, $\hat{f} : N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}|_M = f$ ώστε να ισχύει

$$\hat{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in N.$$

Απόδειξη.

Έστω $x \in N$. Τότε το x γράφεται κατα μοναδικό τρόπο ως

$$x = z + \lambda v, \quad z \in M,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in X \backslash M.$$

Πράγματι:
Έστω ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in M, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, διάφορα μεταξύ τους ώστε:

$$\begin{aligned} x &= z_1 + \lambda_1 v \\ x &= z_2 + \lambda_2 v \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} z_1 + \lambda_1 v &= z_2 + \lambda_2 v \Rightarrow \\ z_1 - z_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) v \stackrel{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Longrightarrow} \\ v &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

Επειδή $z_1, z_2 \in M \leq X \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(z_1 - z_2) \in M$, και ισούται με $v \notin M$. Άτοπο.
Άρα $x = z + \lambda v, \quad z, \lambda$ μοναδικά.
Αν $\hat{f}$, γραμμική επέκταση της f στο N, ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \hat{f}(z + \lambda v) \\ &= \hat{f}(z) + \lambda \hat{f}(v) \qquad (\hat{f} \text{ γραμμική}) \\ &= f(z) + \lambda \hat{f}(v) \qquad (z \in M) \end{aligned}$$

Άρα πρέπει να δείξουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $c = \hat{f}(v)$ ώστε να ισχύει

$$f(z) + \lambda c \leq p(z + \lambda v).$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. $\lambda = 0$.
Τότε $x = z + 0v = z \in M$ και ισχύει το ζητούμενο.

ii. $\lambda > 0$.
Τότε $\frac{1}{\lambda} > 0$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} f(z) + \frac{1}{\lambda}\lambda c &\leq \frac{1}{\lambda} p(z + \lambda v) \\ f\left(\frac{1}{\lambda} z\right) + c &\leq \frac{1}{\lambda} p(z + \lambda v) \end{aligned}$$

Η p είναι θετικά ομογενής και $\frac{1}{\lambda} > 0$. Άρα $\frac{1}{\lambda} p(z + \lambda v) = p(\frac{1}{\lambda} z + v)$. Δηλαδή

$$c \leq p\left(\frac{1}{\lambda} z + v\right) - f\left(\frac{1}{\lambda} z\right) \quad \text{όταν } \lambda > 0, \text{ για κάθε } z \in M.$$

iii. $\lambda < 0$.
Τότε $-\frac{1}{\lambda} > 0$ και έχουμε:

$$-\frac{1}{\lambda} f(z) - \frac{1}{\lambda}\lambda c \leq p\left(-\frac{1}{\lambda} z - v\right) \quad \text{όταν } \lambda > 0.$$

Δηλαδή

$$c \geq -p\left(-\frac{1}{\lambda}z - v\right) - f\left(\frac{1}{\lambda}z\right) \quad \text{όταν } \lambda < 0.$$

Το $z \in M \leq X \Rightarrow \frac{1}{\lambda}z \in M$. Άρα οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται αν μπορούμε να επιλέξουμε c που να ικανοποιεί την

$$-p(y-v) - f(y) \leq c \leq p(z+v) - f(z), \quad \forall x, y \in M.$$

Καταρχήν πρέπει να δειχτεί ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι μικρότερο το πολύ ίσο με το δεξί. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(z) - f(y) &= f(z-y) \\ &\leq p(z-y) \\ &= p\big((z+v) + (-y-v)\big) \\ &\leq p(z+v) + p(-z-v) \end{aligned}$$

Τελικά $\quad -p(y-v) - f(y) \leq p(z+v) - f(z)$.
Το σύνολο

$$\{-p(y-v) - f(y), y \in M\} \quad \text{είναι άνω φραγμένο σύνολο του } I\!R.$$

Το σύνολο

$$\{p(z+v) - f(z), z \in M\} \quad \text{είναι κάτω φραγμένο σύνολο του } I\!R.$$

Άρα από το αξίωμα της Πληρότητας

$$\exists \sup_{y \in M}\{-p(y-v) - f(y),\} \in I\!R$$

$$\exists \inf_{z \in M}\{p(z+v) - f(z),\} \in I\!R$$

Άρα το c που ζητάμε αρκεί να ικανοποιεί την

$$\sup_{y \in M}\{-p(y-v) - f(y),\} \leq c \leq \inf_{z \in M}\{p(z+v) - f(z),\}.$$

□

Θεώρημα 5.1.1 (Hahn-Banach σε πεπερασμένες διαστάσεις).

Έστω X διανυσματικός χώρος, με $\dim X = d$. Έστω $M \leq X$ γραμμικός υπόχωρος του X. Θεωρούμε
$p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, υπογραμμικό συναρτησοειδές και
$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, γραμμικό συναρτησοειδές, ώστε

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

Τότε:
Υπάρχει $\hat{f}$, γραμμική επέκταση της f, $\hat{f} : N \longrightarrow \mathbb{R}$, $\hat{f}|_M = f$ ώστε να ισχύει

$$\hat{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Απόδειξη.

Έστω $M \leq X$. Αν $M = X$, ισχύει.
Έστω $M < X$. Τότε $\dim M = n < d$. Έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ βάση του M. Αυτή μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του X

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_d\}.$$

Θέτουμε $N \leq X$ τον υπόχωρο του X που παράγεται από τα $\{x_{n+1}, \ldots, x_d\}$. Τότε

$$X = M \oplus N. \quad (\text{γιατί} \quad M \cap N = \{0\} \quad \text{και} \quad X = M + N).$$

Έστω $x \in X$. Τότε αυτό γράφεται:

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} + \cdots + \lambda_d x_d = v + w.$$

όπου $v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in M, \quad w = \lambda_{n+1} x_{n+1} + \cdots + \lambda_d x_d$.
Ισχύει $f(v) \leq p(v)$. (γιατί $v \in M$).
Το $x_{n+1} \notin M$.
Θέτουμε $N_1 =< M \cup \{x_{n+1}\} >$.

Το $x_{n+2} \notin N_1$.
Θέτουμε $N_2 =< N_1 \cup \{x_{n+2}\} >$.
$\vdots$
$N_{d-n} =< N_{d-(n-1)} \cup \{x_d\} >$.
Για τα N_i ισχύουν οι προϋποθέσεις του Λήμματος. Τελικά παίρνουμε

$$\hat{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X \quad f : X \longrightarrow I\!R.$$

$\square$

Παρατήρηση

Για να αποδειχθεί το Θεώρημα Hahn-Banach στην περίπτωση απειροδιάστατων διανυσματικών χώρων, χρειαζόμαστε ένα επιπλέον Αξίωμα από την Θεωρία Συνόλων.

Ορισμός 5.1.4.

Έστω X σύνολο με στοιχεία $\alpha, \beta, \ldots$. Θεωρούμε στο X μια διμελή σχέση (συμβ. $\leq$) με τις ιδιότητες:

i. $\alpha \leq \alpha, \quad \forall \alpha \in X$ *(Αυτοπαθής).*

ii. *Αν* $\alpha \leq \beta$ *και* $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ *(Αντισυμμετρική).*

iii. *Αν* $\alpha \leq \beta$ *και* $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ *(Μεταβατική).*
Τότε η σχέση " $\leq$ " καλείται μερική διάταξη και το $(X, \leq)$, μερικά διατεταγμένο σύνολο.

Ορισμός 5.1.5.

Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο X, λέγεται ολικά διατεταγμένο αν για κάθε ζεύγος στοιχείων $\alpha, \beta \in X$ με $\alpha \neq \beta$ ισχύει κατ'ανάγκη μια εκ των $\alpha \leq \beta, \quad \beta \leq \alpha$.

Παρατήρηση

Μια μερική διάταξη σε ένα σύνολο δεν είναι κατ'ανάγκη και ολική.

Παράδειγμα

$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A : A \subseteq \mathbb{R}\}$, το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$ και θεωρούμε τη σχέση "$\subseteq$", του "περιέχεσθαι". Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι αυτή, είναι μια σχέση διάταξης.

Προφανώς το $(\mathcal{P}, \subseteq)$, δεν είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο αφού

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} &\subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

Δηλαδή $\mathbb{Z}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ενώ δεν ισχύει καμία εκ των $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Ορισμός 5.1.6.

Έστω X, μερικά διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq X$. Αν το A είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο (με τη σχέση διάταξης που ορίστηκε στο X) τότε το A καλείται αλυσίδα.

Ορισμός 5.1.7.

Έστω X, μερικά διατεταγμένο σύνολο και $S \subseteq X$. Ένα στοιχείο $m \in S$ καλείται μεγιστικό στοιχείο του S αν και μόνον αν, δεν υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $x \neq m$ και $m \leq x$.

Παρατήρηση

i. Ένα μεγιστικό στοιχείο δεν είναι κατ'ανάγκην μονοσήμαντα ορισμένο.

ii. Ένα μεγιστικό στοιχείο δεν είναι απαραιτήτως μέγιστο.

Παράδειγμα

1. $(A, \subseteq)$, όπου $A = \big\{\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{4\}\big\}$.
   Τα $\{1,2,3\}, \{4\}$ είναι μεγιστικά στοιχεία του A αλλά το A δεν έχει μέγιστο.

2. $B = \big\{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \dots\big\}$.
   Το B έχει άπειρα μεγιστικά στοιχεία (κάθε στοιχείο του είναι μεγιστικό) ενώ δεν έχει μέγιστο.

Λήμμα 5.1.2 (Zorn).

Έστω X, μερικά διατεταγμένο σύνολο. Αν κάθε αλυσίδα του X έχει άνω φράγμα, τότε το X έχει μεγιστικό στοιχείο.

Παρατήρηση

Το Λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.1.2 (Hahn-Banach σε απειροδιάσταστους χώρους).

Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, υπογραμμικό συναρτησοειδές και
Αν $M \leq X$, γραμμικός υπόχωρος του X και
$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, γραμμικό συναρτησοειδές, ώστε

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

Τότε:
Υπάρχει $\hat{f}$, γραμμική επέκταση της f, $\hat{f} : N \longrightarrow \mathbb{R}$, $\hat{f}|_M = f$ ώστε να ισχύει

$$\hat{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε $\Gamma = \{(g,N)\}$ το σύνολο των γραμμικών επεκτάσεων g της f ώστε $M \subseteq N$, N γραμμικός υπόχωρος του X,

$$g : N \to I\!R : \quad g|_M = f, \quad \text{και} \quad g(x) \leq f(x), \quad \forall x \in N.$$

Στο σύνολο Γ εισάγουμε μια σχέση διάταξης, (συμβ "$\leq$") ώστε:

$$(g,N) \leq (h,L) \Leftrightarrow N \subseteq L \quad \text{και} \quad h|_N = g.$$

Η σχέση " $\leq$ " είναι μια σχέση διάταξης στο Γ. Πράγματι:

i. Αυτοπαθής: $(g,N) \leq (g,N)$

ii. Μεταβατική: Αν $(g,N) \leq (h,L)$ και $(h,L) \leq (\ell,U)$ τότε $(g,N) \leq (\ell,U)$ (διότι $N \subseteq L \subseteq U$ και $\ell|_N = g$).

iii. Αντισυμμετρική: Αν $(g,N) \leq (h,L)$ και $(h,L) \leq (g,N)$ τότε $(g,N) = (h,L)$
(διότι $N \subseteq L$ και $L \subseteq N \Rightarrow N = L$).

Αν $\big\{(f_i,N_i)\big\}$ αλυσίδα του Γ, θέτουμε:

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i \quad \text{και} \quad f : N \longrightarrow I\!R, \quad f|_{N_i} = f_i.$$

Το ζεύγος $(f,N) \in \Gamma$. Πράγματι:
Ο N είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Έστω $x,y \in N \Rightarrow \exists N_i, N_j$ ώστε $x \in N_i, y \in N_j$.
Επειδή $\big\{(f_i,N_i)\big\}$ αλυσίδα θα ισχύει μια εκ των

$$N_i \subseteq N_j$$
$$N_j \subseteq N_i$$

Έστω ότι ισχύει η πρώτη (ομοίως για την δεύτερη). Τότε

$$x,y \in N_j \leq X \Rightarrow x+y, \lambda x \in N_j \subseteq N.$$

Επιπλέον αν

$$x, y \in N \Rightarrow \exists i_o \in I : x \in N_{i_o} \Rightarrow \quad (\text{από τον ορισμό των } N_i)$$

$$f(x) = f_{i_o}(x) \leq p(x).$$

Προφανώς το (f, M) είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\big\{(f_i, N_i)\big\}$. Άρα από το Λήμμα του Zorn:

$$\exists (g_H, H) \in \Gamma \quad \text{μεγιστικό στοιχείο του} \quad \Gamma.$$

Δηλαδή

$$\nexists (g_o, M_o) \in \Gamma : (g_H, H) \leq (g_o, M_o)$$

και ισχύει

$$g_H(x) \leq p(x), \quad \forall x \in H.$$

Θα δείξουμε ότι $H = X$. Έστω ότι $H < X$. Τότε $\exists x_o \in X \backslash H$. Θέτουμε:

$$Z = \big\langle H \cup \{x_o\} \big\rangle.$$

Από το Λήμμα, υπάρχει $f_Z : Z \longrightarrow I\!R$ επέκταση της f_H

$$f_Z|_H = f_H, \quad \text{ώστε} \quad f_Z(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Δηλαδή, υπάρχει ζεύγος $(f_Z, Z) \in \Gamma$ με

$$(f_Z, Z) \neq (g_H, H) \quad \text{και}$$
$$(g_H, H) \neq (f_Z, Z).$$

Άτοπο, γιατί (g_H, H) μεγιστικό στοιχείο του Γ. Άρα $H = X$. $\square$

5.2 Γεωμετρική Μορφή

Ορισμός 5.2.1.

Έστω X διανυσματικός χώρος και $A \subseteq X$.

i. Το A καλείται απορροφούν αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $\lambda > 0$, ώστε $\lambda x \in A$.

ii. Το A καλείται ισορροπημένο, αν

$$A = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A.$$

Δηλαδή αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \leq 1$ και $x \in A$ έχουμε ότι $\lambda x \in A$.

Ορισμός 5.2.2.

Το συναρτησοειδές Minkowski, p_A ενός συνόλου A ορίζεται ως:

$$p_A(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}.$$

όπου θεωρούμε $\inf \varnothing = \infty$. Ισοδύναμα:

$$p_A(x) = \sup\{\mu > 0 : x \in \frac{1}{\mu} A\}.$$

Παρατήρηση

Το $p_A(x)$ είναι ο μικρότερος συντελεστής κατα τον οποίο πρέπει το σύνολο A να μεγαλώσει ώστε να περιλαμβάνει (απορροφά) το x.

Παράδειγμα 5.2.1.

1.

2. *Το συναρτησοειδές Minkowski ενός n-κύβου A που ορίζεται από τη σχέση:*

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \le 1\}.$$

Έστω $u = (u_1, \dots, u_n)$. *Τότε, για* $\alpha > 0$

$$\alpha A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \le \alpha\}.$$

Άρα

$$u \in \alpha A \Leftrightarrow \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\} \le \alpha.$$

Άρα $p_A(u) = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$.

3. *Το συναρτησοειδές Minkowski της μοναδιαίας σφαίρας,*

$$K = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| \le 1\}.$$

(Άσκηση).

Λήμμα 5.2.1.

Μια πραγματική συνάρτηση p σε ένα διανυσματικό χώρο X είναι:

1. *Μη αρνητική και υποπροσθετική αν και μόνον αν είναι το συναρτησοειδές Minkowski ενός ενός κυρτού, απορροφητικού συνόλου C.*
   Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πάρουμε $C = \{x : p(x) \le 1\}$.

2. *Μια ημινόρμα αν και μόνον αν είναι το συναρτησοειδές Minkowski ενός συμμετρικού, κυρτού, απορροφητικού συνόλου.*

Απόδειξη.

Έστω p_C το συναρτησοειδές Minkowski ενός κυρτού, απορροφητικού συνόλου C. Προφανώς p_C θετικά ομογενής (από τον ορισμό).
Για να αποδείξουμε την υποπροσθετικότητα του p_C έστω

$$\alpha, \beta \ge 0 : x \in \alpha C \quad \text{και} \quad y \in \beta C.$$

($x, y \in X$, γιατί X διανυσματικός χώρος). Τότε

$$x + y \in \alpha C + \beta C \overset{C \text{κυρτο}}{=} (\alpha + \beta)C.$$

Έτσι $p_C(x + y) \leq \alpha + \beta$. Έχουμε:

$$p_C(x + y) - \beta \leq \alpha, \quad \forall \alpha > 0, \quad \text{με} \quad x \in \alpha C.$$

Δηλαδή, το $p_C(x + y) - \beta$ είναι ένα κάτω φράγμα των α. Άρα

$$\begin{aligned} p_C(x + y) - \beta &\leq \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha C\} \\ &= p_C(x) \Rightarrow \\ p_C(x + y) - p_C(x) &\leq \beta, \quad \forall \beta > 0, \quad \text{με} \quad y \in \beta C \end{aligned}$$

Όμοια $p_C(x + y) - p_C(x) \leq p_C(y)$.
Δηλαδή

$$p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y).$$

Άρα p_C υποπροσθετική.
Αν το C είναι και συμμετρικο, τότε προφανώς $p_C(x) = p_C(-x)$. Δηλαδή η p_C ικανοποιεί τη σχέση :

$$p_C(\alpha x) = |\alpha| p_C(x).$$

Άρα p_C ημινόρμα.
Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι η p, είναι μια μη αρνητική, υποπροσθετική συνάρτηση. Έστω

$$C = \{x : p(x) \leq 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι το C είναι κυρτό. Πράγματι έστω $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} p\big((1 - \lambda)x + \lambda y\big) &\leq p\big((1 - \lambda)x\big) + p(\lambda y) \\ &= (1 - \lambda)p(x) + \lambda p(y) \\ &\leq 1 - \lambda + \lambda = 1 \end{aligned}$$

Άρα $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$, δηλαδή C κυρτό.

Το C είναι απορροφητικό. Πράγματι έστω $x \in X$.

Αν $p(x) = 0 \leq 1 \Rightarrow x \in C = 1 \cdot C \quad$ (δηλαδή $\quad \exists \lambda = 1 : x \in \lambda C$)

Αν $p(x) > 0$,

$$p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = \frac{1}{p(x)} p(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{p(x)} \in C \Rightarrow x \in p(x)C$$

Δηλαδή $\exists \lambda = p(x) : x \in \lambda C$. Άρα C απορροφητικό.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$x \in \alpha C \Longleftrightarrow p(x) \leq \alpha \qquad (1)$$

$$x \in \alpha C \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} \in C \Leftrightarrow$$

$$p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} p(x) \leq 1 \Leftrightarrow p(x) \leq \alpha.$$

Άρα

$$p_C(x) = \inf\{\alpha : x \in \alpha C\} \stackrel{(1)}{=} \inf\{\alpha : p(x) \leq \alpha\}.$$

□

Ορισμός 5.2.3.

Ένα σημείο x σε ένα διανυσματικό χώρο είναι εσωτερικό σημείο ενός συνόλου B αν υπάρχει απορροφητικό σύνολο $A : x + A \subset B$.
Ισοδύναμα αν το σύνολο $B - x$ είναι απορροφητικό.

Παρατήρηση

Το εσωτερικό σημείο που ορίσαμε, ορίζεται για τυχαίο διανυσματικό χώρο, που δεν είναι εφοδιασμένος με τοπολογία.

Βασικό διαχωριστικό Θεώρημα των Υπερεπιπέδων

Θεώρημα 5.2.1 (Γεωμετρική Μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach).

Δύο μη κενά, ξένα, κυρτά υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου μπορούν να διαχωριστούν γνήσια από ένα μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές, με την προϋπόθεση ότι ένα από αυτά να έχει ένα εσωτερικό σημείο.

Απόδειξη.

Έστω ότι A και B είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους, κυρτά σύνολα σε ένα διανυσματικό χώρο X και υποθέτουμε ότι το A έχει ένα εσωτερικό σημείο, έστω z. Τότε το σύνολο $C = A - B - z$ είναι μη κενό, κυρτό, απορροφητικό (από τον ορισμό του εσωτερικού σημείου) και ικανοποιεί την σχέση:

$$-z \notin C.$$

Πράγματι αν $-z \in C$, τότε

$$\begin{aligned} -z &= \alpha - \beta - z \quad \text{με} \quad \alpha \in A, \beta \in B \Leftrightarrow \\ \alpha - \beta &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha &= \beta \\ A \cap B \neq \varnothing \end{aligned}$$

Άτοπο.
Ισχυριζόμαστε ότι $p_C(-z) \geq 1$. Πράγματι
Αν $p_C(-z) < 1$ τότε

$$\exists 0 \leq \alpha \leq 1 : -z = \alpha C.$$

Εφόσον $0 \in C \Rightarrow -z = \alpha C + (1-\alpha)0 \in C$ (διότι C κυρτό. Άτοπο. (αφού $-z \notin C$).
Επομένως $p_C(-z) \geq 1$. Ιδιαιτέρως $z \neq 0$.
Έστω $M = \{\alpha(-z) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, ο μονοδιάστατος γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το $-z$, και ορίζουμε

$$f : M \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f\big(\alpha(-z)\big) = \alpha.$$

Προφανώς η f είναι γραμμική και ισχύει $f \leq p_C$, στο M. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για $\alpha \geq 0$ έχουμε :

$$p_C\big(\alpha(-z)\big) = \alpha p_C(-z) \geq \alpha = f\big(\alpha(-z)\big)$$

ενώ για $\alpha < 0$ έχουμε :

$$f\big(\alpha(-z)\big) = \alpha < 0 \leq p_C\big(\alpha(-z)\big).$$

Από την Αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει γραμμική επέκταση $\hat{f}$ της f στον X ώστε

$$\hat{f}(x) \leq p_C(x), \quad \forall x \in X.$$

Σημειώνουμε ότι $\hat{f}(z) = -1$ (από τον ορισμό της f), άρα $\hat{f} \neq \mathbf{0}$.
Θεωρούμε κάποιο $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \hat{f}(\alpha - \beta - z) + \hat{f}(z) + \hat{f}(\beta) \\
&\leq p_C(\alpha - \beta - z) + \hat{f}(z) + \hat{f}(\beta) \\
&= p_C(\alpha - \beta - z) - 1 + \hat{f}(\beta) \\
&\leq 1 - 1 + \hat{f}(\beta) \\
&= \hat{f}(\beta).
\end{aligned}$$

Άρα το γραμμικό συναρτησοειδές $\hat{f}$ διαχωρίζει τα κυρτά σύνολα A, B.
Για να διαπιστώσουμε ότι ο διαχωρισμός είναι γνήσιος, θεωρούμε
$z = \alpha - \beta$, όπου $\alpha in A, \beta \in B$. Εφόσον $\hat{f}(z) = -1$ έχουμε ότι $\hat{f}(z) = \hat{f}(\alpha - \beta) = -1$, δηλαδή $\hat{f}(\beta) = \hat{f}(\alpha) - 1$. Άρα $\hat{f}(\alpha) \neq \hat{f}(\beta)$. Δηλαδή τα A, B δεν μπορούν να βρίσκονται στο ίδιο υπερεπίπεδο. □

Ορισμός 5.2.4.

Ένας τοπολογικά διανυσματικός χώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος X (επί του σώματος των πραγματικών αριθμών) με μια τοπολογία ώστε

i. Η πράξη της πρόσθεσης

$$+ : X \times X \longrightarrow X \quad \textit{είναι συνεχής, και}$$

ii. *Η πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού*

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \quad \text{είναι συνεχής}$$

(όπου οι $X \times X$ και $\mathbb{R} \times X$ έχουν την καρτεσιανή τοπολογία).

Πρόταση 5.2.1.

Έστω X τοπολογικά διανυσματικός χώρος και G μη κενό, ανοικτό, κυρτό και ισορροπημένο υποσύνολο του X. Τότε:

i.

$$G = \{x \in X : p_G(x) < 1\}.$$

ii. *Το συναρτησοειδές Minkowski p_G είναι συνεχής ημινόρμα στο X.*

iii. *Αν ο X είναι χώρος Hausdorff και το G είναι και φραγμένο, τότε το p_G είναι συνεχής νόρμα στο X και η τοπολογία X είναι ίση με την τοπολογία της μετρικής που καθορίζει η νόρμα p_G.*

Πρόταση 5.2.2.

Έστω X τοπολογικά διανυσματικός χώρος και G, H μη κενα, κυρτά, ξένα υποσύνολα του X. Τότε:

i. *Αν το G είναι ανοικτό, τότε τα G, H διαχωρίζονται από το συσχετισμένο χώρο $\{x \in X : x^*(x) = \lambda\}$ για κάποιο $x^* \in X^*$ (συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή) και $\lambda \in \mathbb{R}$.*

ii. *(**Πρώτη γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach**).*
Αν $G^o \neq \varnothing$, τότε τα G, H διαχωρίζονται από τον συσχετισμένο χώρο $\{x \in X : x^*(x) = \lambda\}$ για κάποιο $x^* \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii. *Αν τα G, H είναι ανοικτά τότε τα G, H διαχωρίζονται γνήσια από τον συσχετισμένο χώρο $\{x \in X : x^*(x) = \lambda\}$ για κάποιο $x^* \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Παράδειγμα(Μη διαχωρισιμότητα ξένων, κλειστών, κυρτών συνόλων) Στον χώρο Banach, $(\ell_2, ||\cdot||_2)$ θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2 : x_1 \geq n|x_n - n^{-\frac{2}{3}}|, n = 2, 3, \dots\}.$$

Η ακολουθία v με $v_n = n^{-\frac{2}{3}}$ ανήκει στο A (και $v_n \in \ell_2$). Άρα το $A \neq \varnothing$. Προφανώς το A είναι κυρτό.
Έστω

$$B = \{x = (x_1, 0, \dots) \in \ell_2 : x_1 \in I\!R\}.$$

Το σύνολο B είναι προφανώς μη κενό, κυρτό και κλειστό (με την μετρική που επάγεται από την νόρμα). Είναι μια ευθεία, ένας μονοδιάστατος υπόχωρος. Παρατηρούμε ότι τα A και B είναι ξένα. Πράγματι:
Αν $x \in B$, τότε η

$$|x_n - n^{-\frac{2}{3}}| = n^{\frac{1}{3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Άρα $x \notin A \subset \ell_2$.
Ισχυριζόμαστε ότι τα A και B δεν μπορούν να διαχωριστούν από κανένα μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές του ℓ_2. Επιπλέον αποδεικνύουμε το πιο δυνατό συμπέρασμα ότι το $A - B$ είναι πυκνό στον ℓ_2. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$ και κάποιο $z = (z_1, z_2, \dots)$. Επιλέγουμε k τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}} < \frac{\varepsilon^z}{4}$$

και

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Τώρα θεωρούμε το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots) \in A$ που ορίζεται από

$$x_n = \begin{cases} \max\limits_{1\leq n\leq k} n\left|z_n - n^{-\frac{2}{3}}\right| & \text{αν} \quad n = 1 \\ z_n & \text{αν} \quad 2 \leq n \leq k \\ n & \text{αν} \quad n > k \end{cases}$$

Έστω $y = (x_1 - z_1, 0, \dots) \in B$. Το διάνυσμα $x - y \in A - B$ ικανοποιεί την:

$$\begin{aligned} \|z - (x - y)\| &= \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} \left|z_n - n^{-\frac{2}{3}}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα το $A - B$ πυκνό, δηλαδή τα A και B δεν μπορούν να διαχωριστούν από ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές (μη μηδενικό). Πράγματι:

$$A \subseteq \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}.$$

$$B \subseteq \{y \in X : f(y) \geq \alpha\}.$$

Τότε θα διαχωρίζονταν τα $0, A - B$, δηλαδή

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in A - B \overset{f\, \text{συνεχής}}{\Longrightarrow} f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \overline{A - B} = X.$$

Δηλαδή $f = 0$. Άτοπο. (γιατί μια γραμμική, συνεχής συνάρτηση παίρνει και αρνητικές τιμές).

Ορισμός 5.2.5.

Ένας τοπολογικά διανυσματικός χώρος είναι τοπικά κυρτός, αν κάθε περιοχή του μηδενός περιέχει μια κυρτή περιοχή του μηδενός.

Θεώρημα 5.2.2 (Δεύτερη Γεωμετρική Μορφή του Θ. Hahn-Banach).

Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος (όχι απαραίτητα Hausdorff) και δύο ξένα, μη κενά, κυρτά υποσύνολα του. Αν το ένα είναι συμπαγές και το άλλο κλειστό, τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές που τα διαχωρίζει αυστηρά.

Κεφάλαιο 6

Ακραία σημεία, Ακραία υποσύνολα

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ειδικά υποσύνολα του συνόρου ενός κλειστού, κυρτού συνόλου C.

6.1 Εισαγωγή

Ορισμός 6.1.1.

i. *Ένα σημείο $x \in C$ καλείται* **ακραίο σημείο του C** *αν δεν υπάρχουν $x, y \in C, y \neq z$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Δηλαδή το x δεν ανήκει στο σχετικό εσωτερικό ενός $[y, z] \subseteq C$.*
Ισοδύναμα, εάν το $C \backslash \{x\}$ είναι κυρτό.

ii. *Ένα κυρτό υποσύνολο $F \subseteq C$ καλείται* **έδρα ή ακραίο σύνολο του C** *αν $x, y \in C$ και $(1-\lambda)x + \lambda y \in F$ για κάποιο $0 < \lambda < 1$ τότε $x, y \in F$. Εάν F είναι έδρα του C με $\dim F = k$ καλείται* **k-έδρα**.

iii. *Συμβολίζουμε $\operatorname{ext} C$ το σύνολο των ακραίων σημείων του C.*

Ορισμός 6.1.2.

i. Ένα σημείο $\chi \in C$ *καλείται* **εκτεθειμένο σημείο του C** *αν υπάρχει υπερεπίπεδο* H *που φέρει γνήσια το* C *και* $\{x\} = H \cap C$.

ii. Ένα υποσύνολο $F \subseteq C$ *καλείται* **εκτεθειμένη έδρα του C** *αν* $F = \varnothing, F = C$ *ή υπάρχει υπερεπίπεδο* H *που φέρει γνήσια το* C *και* $F = H \cap C$.

iii. Συμβολίζουμε exp *το σύνολο των εκτεθειμένων σημείων του* C.

Πρόταση 6.1.1.

Κάθε εκτεθειμένη έδρα του κυρτού, κλειστού συνόλου C *είναι έδρα του* C. *Ιδιαίτερα,* $\exp C \subseteq \operatorname{ext} C$.

Απόδειξη.

Έστω F εκτεθειμένη έδρα του C. Αν $F = \varnothing$ ή $F = C$ τότε F είναι έδρα του C. Έστω $F = H \cap C$ για κάποιο φέρον υπερεπίπεδο H του C. Τότε F είναι κυρτό σύνολο (H, C κυρτά). Έαν $(1-\lambda)x + \lambda y \in F$ με $x, y \in C, 0 < \lambda < 1$, τότε $x, y \in F$.
Πράγματι αν $x \notin F$ τότε $x \notin H$. Εάν $C \subseteq H^+$ τότε $< x, u >< \alpha$ και $< y, u >\leq \alpha$, άρα $< (1-\lambda)x + \lambda y, u >< \alpha$.
Άτοπο διότι $(1-\lambda)x + \lambda y \in F \cap H$. □

Πρόταση 6.1.2.

Έστω C *κλειστό, κυρτό σύνολο του* $\mathbb{R}^d$. *Τότε:*

i. Κάθε έδρα F *του* C *είναι κλειστό σύνολο.*

ii. Το $G \subseteq F$ *είναι έδρα του* C *αν* G *είναι έδρα της έδρας* F.

iii. Εάν $F \neq C$ *έδρα του* C, *τότε* $F \subseteq \operatorname{rb} C$.

iv. Εάν F, G *έδρες του* C *με* $F \subsetneqq G$, *τότε* $\dim G < \dim F$.

Απόδειξη.

i. Εάν $F = \varnothing$ ή $F = \{x\}$ τότε το F είναι κλειστό. Έστω $\dim F \geq 1$ και $z \in \overline{F}$. Θεωρούμε $x_o \in \operatorname{ri} F (\neq \varnothing), x_o \neq z$. Τότε $[x_o, z) \subseteq F$ με F έδρα του C, άρα $z \in F$. Τελικά $\overline{F} = F$, δηλαδή F κλειστό.

ii. Άμεσο από τον ορισμό.

iii. Έστω F έδρα του C, με $F \cap \operatorname{ri} C \neq \varnothing$. Έστω $x \in F \cap \operatorname{ri} C$ και $y \in C, y \neq x$. Υπάρχει $z \in C$ με $x \in (y, z)$. Επειδή η F είναι έδρα έχουμε ότι $y, z \in F$. Άρα $C = F$. Επομένως εάν F είναι έδρα με $F \neq C$, τότε $F \cap \operatorname{ri} C = \varnothing$. Άρα $F \subseteq \operatorname{rb} C$. $(C = \overline{C} = \operatorname{ri} C \cup \operatorname{rb} C)$.

iv. Το $G \subseteq F$, άρα $\operatorname{aff} G \subseteq \operatorname{aff} F$. Εάν $\operatorname{aff} G = \operatorname{aff} F$ τότε $\operatorname{ri} G \subseteq \operatorname{ri} F$. Από τις $i), ii)$, έχουμε ότι η G είναι έδρα της F και $G \subseteq \operatorname{rb} F$. Άρα $\operatorname{ri} G = \varnothing$. Άτοπο. Άρα $\operatorname{aff} G \subsetneqq \operatorname{aff} F$, δηλαδή $\dim G < \dim F$.

□

Θεώρημα 6.1.1 (Minkowski).

Έστω $M \subseteq C$, C συμπαγές, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τα έξης είναι ισοδύναμα:

i. $C = \operatorname{con} M$.

ii. $\operatorname{ext} C \subseteq M$. *Ιδιαιτέρως* $C = \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$.

Απόδειξη.

$i) \Rightarrow ii)$

Έστω $x \in \operatorname{ext} C, x \notin M$. Τότε $M \subseteq C \backslash \{x\}, \operatorname{con} M \subseteq C \backslash \{x\}$. διότι το $C \backslash \{x\}$ είναι κυρτό. Άτοπο. Άρα $\operatorname{ext} C \subseteq M$

$ii) \Rightarrow i)$

Θα αποδείξουμε ότι $C \subseteq \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$ με επαγωγή στη διάσταση του C. Εάν $C = \{x\}$ τότε προφανώς ισχύει. Εάν $\dim C = 1$, τότε

$$C = [x, y], \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \operatorname{ext} C = \{x, y\}.$$

Άρα $C = \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$.

Έστω $K \subseteq \operatorname{con}(\operatorname{ext} K)$ για τυχαίο κυρτό, συμπαγές K με $\dim K < e, \quad e \geq 2$.

Έστω C με $\dim C = e$. Θεωρούμε $x \in C$.

Αν $x \in \operatorname{ext} C$, τότε $x \in \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$.

Αν $x \notin \operatorname{ext} C$, τότε υπάρχει ευθεία ℓ, με $x \in \operatorname{ri}(\ell \cap C)$. Επειδή το C είναι συμπαγές το $\ell \cap C = [y, z]$ με $y, z \in \operatorname{rb} C$. Υπάρχουν H_y, H_z υπερεπίπεδα του $\operatorname{aff} C (\cong \mathbb{R}^e)$ με $y \in H_y, z \in H_z$, που φέρουν το C. Τότε τα σύνολα

$$F_y = C \cap H_y, F_z = C \cap H_z$$

είναι εκτεθειμένες έδρες του C με

$$\dim F_y, \dim F_z \leq \dim H_y = \dim H_z = e - 1.$$

Από την επαγωγή έχουμε για τα συμπαγή, κυρτά σύνολα F_y, F_z

$$F_y \subseteq \operatorname{con}(\operatorname{ext} F_y), \quad F_z \subseteq \operatorname{con}(\operatorname{ext} F_z).$$

Άρα

$$\sum_i^c \lambda_i y_i, \quad y_i \in \operatorname{ext} F_y \qquad \sum_i^c \mu_i z_i, \quad z_i \in \operatorname{ext} F_z.$$

Τελικά

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z = \lambda \sum_i^c \lambda_i y_i + (1 - \lambda) \sum_i^c \mu_i z_i$$

με $y_i, z_i \in \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$, δηλαδή $x \in \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$. Επομένως $C \subseteq \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$, άρα $C = \operatorname{con}(\operatorname{ext} C)$.

Εάν $M \subseteq C$ με $\operatorname{ext} C \subseteq M$ τότε

$$\operatorname{con}(\operatorname{ext} C) = C \subseteq \operatorname{con} M \subseteq C.$$

Άρα $C = \operatorname{con} M$. □

Πόρισμα 6.1.1.

Έστω C συμπαγές, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\dim C = d$. Κάθε σημείο του C είναι κυρτός συνδιασμός $(d+1)$ το πολύ ακραίων σημείων του C.

Απόδειξη.

Από τα Θεωρήματα Caratheodory και Minkowski. □

Παρατήρηση

Εάν C είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο τότε $C = \text{con}(\text{ext}\, C)$. Γενικά δεν ισχύει $C = \text{con}(\exp C)$. Ισχύει $C = \overline{\text{con}}(\exp C)$. Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση χρησιμοποιούμε το εξής.

Λήμμα 6.1.1.

Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο. Τότε $x \in \text{ext}\, K$ αν και μόνον αν για κάθε περιοχή $S(x,r)$ υπάρχει υπερεπίπεδο H, ώστε $K \cap H^+ \subseteq S(x,r)$ και $x \in \text{int}\, H^+$.

Απόδειξη.

$(\Rightarrow)$

Έστω $x \in \text{ext}\, K$ και $S(x,r)$ περιοχή του x. Το σύνολο

$$B = \text{con}(K \backslash S(x,r))$$

είναι κυρτό, συμπαγές και $x \notin B$ (διότι $x \in \text{ext}\, K$ και $x \in S(x,r)$). Άρα υπάρχε υπερεπίπεδο H που διαχωρίζει τα x, B αυστηρά. Τότε $x \in \text{int}\, H^+$ και $B \subseteq H^-$. Άρα $x \in \text{int}\, H^+$ και $K \cap H^+ \subseteq S(x,r)$.

$(\Leftarrow)$

Έστω $x \notin \text{ext}\, K$. Τότε $x = (1-\lambda)y + \lambda z$, για κάποια $y, z \in K$ και $\lambda \in (0,1)$. Θεωρούμε $S(x,r)$ με $y, z \notin S(x,r)$. Από τν υπόθεση, υπάρχει H ώστε $K \cap H^+ \subseteq S(x,r)$ και $x \in \text{int}\, H^+$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα y, z ανήκει στο $K \cap H^+$ (αν $y, z \in K \cap H^-$ τότε $x \in K \cap H^-$, άτοπο διότι $x \in \text{int}\, H^+$) άρα ανήκει και στην $S(x,r)$. Άτοπο. □

Λήμμα 6.1.2.

Έστω C κυρτό, συμπαγές και $M = \{x \in \mathbb{R}^d :< x, u >> \alpha\}$ ανοικτός ημίχωρος με $M \cap C \neq \varnothing$. Τότε $M \cap \exp C \neq \varnothing$.

Απόδειξη.

Έστω $K = M \cap C$ και $y \in K$. Επειδή $y \notin \{x \in \mathbb{R}^d :< x, u >= \alpha\} = H$, (M ανοικτός ημίχωρος) έχουμε $d(y, H) = \varepsilon > 0$. Έστω

$$\delta = \max\{d(x, y - \varepsilon u) : x \in C \cap H\}.$$

(υπάρχει διότι $C \cap H$ συμπαγές) και $\beta \in \mathbb{R}$ με

$$\beta > \frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

Θεωρούμε το $z = y - \beta u$. Εάν B είναι η κλειστή, μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε:

$$\mu = \inf\{\lambda > 0 : z + \lambda B \supseteq K\}.$$

Το σύνολο $\overline{K}$ είναι συμπαγές, άρα $K \subseteq z + \mu B$ και

$$A = \overline{K} \cap \mathrm{bd}(z + \mu B) \neq \varnothing.$$

Επίσης $\mu \geq \beta$ $(y = z + \beta u \in K)$. Ισχύει $A \cap H = \varnothing$. Πράγματι, αν υπήρχε $w \in A \cap H$, τότε $d(w, y - \varepsilon u) \leq \delta$ και

$$\begin{aligned}
d^2(w, y - \varepsilon u) &= \; < (w - z) - u(\beta - \varepsilon), (w - z) - u(\beta - \varepsilon) > \\
&= \; ||w - z||^2 + (\beta - \varepsilon)^2 - 2(\beta - \varepsilon) < w - z, u > \\
&= \; \mu^2 + (\beta - \varepsilon)^2 - 2(\beta - \varepsilon)^2 \\
&= \; \mu^2 - (\beta - \varepsilon)^2 \\
&= \; (\mu^2 - \beta^2) + 2\beta\varepsilon - \varepsilon^2 \\
&\geq \; 2\beta\varepsilon - \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\delta^2 \geq 2\beta\varepsilon - \varepsilon^2$. Άτοπο από την εκλογή του β. Άρα $A \cap H = \varnothing$ και $A \subseteq K$. Επειδή κάθε σημείο του $\mathrm{bd}(z + \mu B)$ είναι εκτεθειμένο σημείο του $z + \mu B$ και $A \subseteq \mathrm{bd}(z + \mu B)$ έχουμε ότι κάθε σημείο του $A \neq \varnothing$ είναι εκτεθειμένο σημείο του $z + \mu B$. Επειδή $K \subseteq z + \lambda B$, $A \cap H = \varnothing$, κάθε σημείο του A είναι εκτεθειμένο σημείο του $\overline{K}$ και του K. Άρα $M \cap \exp C \neq \varnothing$. $\square$

Θεώρημα 6.1.2 (Straszewicz).

Εάν K είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο, τότε $\operatorname{ext} K \subseteq \overline{\exp} K$ *και* $K = \overline{\operatorname{con}} \exp K$.

Απόδειξη.

Έστω $x \in \operatorname{ext} K$ και $S(x, r)$ περιοχή του x. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο H ώστε $K \cap H^+ \subseteq S(x, r)$ και $x \in \operatorname{int} H^+$. Επειδή $\operatorname{int} H^+ \cap K \neq \varnothing$ υπάρχει $y \in \exp K \cap \operatorname{int} H^+$. Άρα $y \in \exp K \cap S(x, r)$, δηλαδή $\operatorname{ext} K \subseteq \overline{\exp} K$.
Εξ'άλλου

$$K = \operatorname{con}(\operatorname{ext} K) \subseteq \operatorname{con}(\overline{\exp}) K \subseteq \overline{\operatorname{con}}(\exp K) \subseteq \overline{\operatorname{con}}(\operatorname{ext} K) = K.$$

Τελικά $K = \overline{\operatorname{con}} \exp K$. □

Θεώρημα 6.1.3.

Έστω C κλειστό, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε:

i. *Εάν $\{A_i : i \in I\}$ είναι έδρες του C, τότε η $\bigcap_{i \in I} A_i$ είναι έδρα του C.*

ii. *Εάν $\{F_i : i \in I\}$ είναι εκτεθειμένες έδρες του C, τότε η $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι εκτεθειμένη έδρα του C.*

Απόδειξη.

i. Εάν $\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing$, τότε έχουμε το ζητούμενο. Έστω $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \bigcap_{i \in I} A_i, x, y \in C, 0 < \lambda < 1$. Τότε $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A_i, A_i$ έδρα, άρα $x, y \in A_i, i \in I$ άρα $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Επειδή A_i είναι κυρτά, η τομή $\bigcap_{i \in I} A_i$ είναι έδρα από τα προηγούμενα.

ii. Εάν $F = \bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$ ή C τότε έχουμε το ζητούμενο.
1^η*Περίπτωση.*
Έστω $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ με $F_n \neq C$. Τότε $F_i = H(y_i, \alpha_i) \cap C$ και $C \subseteq \{x :< x, y_i > \leq \alpha_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας

υποθέτουμε ότι $0 \in \mathrm{ri}\, C$, τότε $\alpha_i > 0$. Έστω $z_i = \frac{1}{\alpha_i} y_i$. Τότε $F_i = H(z_i, 1) \cap C$ και $C \subseteq \{x :< x, z_i > \leq 1\}$. Θέτουμε

$$z_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} z_i.$$

Τότε για $x \in C$

$$< x, z_o >= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} < x, z_i > \leq 1.$$

Άρα $C \subseteq \{x :< x, z_o > \leq 1\}$. Εάν $x \in C, < x, z_o >= 1$ τότε $< x, z_i >= 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα

$$x \in C \cap H(z_i, 1) = F_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Άρα $C \cap H_o \subseteq F$, $H_o = \{x :< x, z_o >= 1\}$. Όμοια $F \subseteq C \cap H_o$. Τελικά $F = C \cap H_o$ και $C \subseteq \{x :< x, z_o > \leq 1\}$. Δηλαδή η F είναι εκτεθειμένη έδρα.

2^{η} *Περίπτωση.*

Έστω $F = \bigcap_{i \in I} F_i, I$ τυχαίο σύνολο. Έστω $i_1 \in I$. Εάν $F = F_{i_1}$ έχουμε το ζητούμενο. Εάν $F \subsetneqq F_{i_1}$ τότε υπάρχει $i_2 \in I$ με $F \subseteq F_{i_1} \cap F_{i_2} \subsetneqq F_{i_1}$. Από την περίπτωση 1, και την Προταση() ισχύει $\dim(F_{i_1} \cap F_{i_2}) < \dim(F_{i_1})$. Εάν $F = F_{i_1} \cap F_{i_2}$ έχουμε το ζητούμενο. (Από την 1^{η} Περίπτωση). Εάν $F \subsetneqq F_{i_1} \cap F_{i_2}$ τότε υπάρχει $i_3 \in I$ με

$$F \subseteq F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3} \subsetneqq F_{i_1} \cap F_{i_2}.$$

Τότε

$$\dim(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}) < \dim(F_{i_1} \cap F_{i_2}).$$

Επειδή η διάσταση ελαττώνεται κάθε φορά κατά ένα τουλάχιστον, σε κάποιο βήμα λαμβάνουμε

$$F = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_n}.$$

Δηλαδή η F είναι εκτεθειμένη έδρα (από την 1^{η} Περίπτωση).

□

6.2 Ασκήσεις

1. Εάν $K \subseteq I\!R^2$, K κυρτό, συμπαγές τότε το σύνολο $\operatorname{ext} K$, είναι κλειστό, ενώ το $\exp K$ δεν είναι πάντοτε κλειστό.

2. Να κατασκευαστεί σύνολο $K \subseteq I\!R^3$ κυρτό και συμπαγές, τέτοιο ώστε το $\operatorname{ext} K$ να μην είναι κλειστό.

3. Να κατασκευαστεί σύνολο $K \subseteq I\!R^2$ κυρτό και συμπαγές, ώστε $\exp K \neq \operatorname{ext} K$, $\operatorname{con}(\exp K) \neq K$.

4. Έστω K είναι κυρτό, κλειστό υποσύνολο του $I\!R^d$ και F κυρτό υποσύνολο του K. Εάν F είναι έδρα του K τότε το $K \backslash F$ είναι κυρτό. Ισχύει πάντοτε το αντίστροφο;

5. Έστω $M \subseteq \operatorname{ext} C$, C συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του $I\!R^d$. Τότε το $\operatorname{con} M$ είναι έδρα του C, αν και μόνον αν ισχύει

$$(\operatorname{aff} M) \cap \operatorname{con}((\operatorname{ext} C) \backslash M) = \varnothing.$$

Κεφάλαιο 7

Το Θεώρημα Krein - Milman

Κεφάλαιο 8

Πολικότητης

Εάν $x \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $K(x,1) = \{y \in \mathbb{R}^d :< x, y >\leq 1\}$, το οποίο είναι κλειστός ημίχωρος.

Ορισμός 8.0.1.

Για το $M \subseteq \mathbb{R}^d$ το

$$M^o = \bigcap_{x \in M} K(x,1) = \{y \in \mathbb{R}^d :< x, y >\leq 1, x \in M\}$$

καλείται πολικό σύνολο του M. Το $(M^o)^o = M^{oo}$ καλείται διπολικό σύνολο του M. Ισχύει

$$y \in M^o \Leftrightarrow M \subseteq K(y,1).$$

Το M^o είναι κλειστό, κυρτό σύνολο. Εάν $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^o \subseteq M_1^o$.

Πρόταση 8.0.1.

Εάν $M \subseteq \mathbb{R}^d$ τότε:

i. Εάν M φραγμένο, τότε $0 \in \operatorname{int} M^o$.

ii. Εάν $0 \in \operatorname{int} M$, τότε M^o, φραγμένο.

Απόδειξη.

i. Έστω $M \subseteq S(0,r)$. Τότε $S^o(0,r) = S(0,\frac{1}{r}) \subseteq M^o \Rightarrow 0 \in \operatorname{int} M^o$.

ii. Εάν $0 \in \operatorname{int} M$, τότε υπάρχει $r > 0 : S(0,r) \subseteq M \Rightarrow M^o \subseteq S(0,\frac{1}{r})$.

□

Παραδείγματα

1. Έστω $K = \{0\}$. Τότε

$$\begin{aligned} K^o &= \{x \in \mathbb{R}^d :< x, y > \leq 1, \forall y \in K\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d :< x, 0 > \leq 1\} \\ &= \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

   Δηλαδή $\{0\}^o = \mathbb{R}^d$.

2. Έστω $K = \mathbb{R}^d$. Τότε

$$\begin{aligned} K^o &= \{x \in \mathbb{R}^d :< x, y > \leq 1, \forall y \in K\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d :< x, y > \leq 1, \forall y \in \mathbb{R}^d\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

   Δηλαδή $\left(\mathbb{R}^d\right)^o = \{0\}$.

3. Έστω $K = \hat{S}(0,r)$. Τότε

$$\begin{aligned} K^o &= \{x \in \mathbb{R}^d :< x, y > \leq 1, \forall y \in K\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d :< x, y > \leq 1, \forall \|y\| \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \frac{1}{r}\} \\ &= \hat{S}\left(0, \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

   Δηλαδή $\hat{S}^o(0,r) = \hat{S}\big(0,\frac{1}{r}\big)$.

Θεώρημα 8.0.1.

Ισχύει $M^{oo} = \overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\}$. *Δηλαδή το* M^{oo} *είναι το ελάχιστο κλειστό, κυρτό σύνολο που περιέχει το* M *και το 0.*

Απόδειξη.

Έχουμε

$$M^{oo} = \bigcap_{yinM^o} K(y,1) = \bigcap_{M \subseteq K(y,1)} K(y,1).$$

Άρα $\{0\}, M \subseteq M^{oo}$, M^{oo} κλειστό, κυρτό σύνολο, άρα $\overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\} \subseteq M^{oo}$. Έστω $z \notin \overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\}$. Τότε υπάρχουν $u \in I\!R^d, \alpha \in I\!R$, με

$$\overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\} \subseteq \{x \in I\!R^d :< x, u >< \alpha\}$$

και $< z, u >> \alpha$. Επειδή $0 \in \overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\}$ έχουμε ότι $\alpha > 0$. Για $y = \frac{1}{\lambda} u$ έχουμε

$$\overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\} \subseteq \{x \in I\!R^d :< x, y >< 1\}$$

και $< y, z >> 1$. Δηλαδή $M \subseteq K(y,1), z \notin K(y,1)$ άρα $z \notin M^{oo}$. Τελικά $M^{oo} = \overline{\text{con}}\{\{0\} \cup M\}$. □

Πόρισμα 8.0.1.

Έστω C *κυρτό, συμπαγές σύνολο του* $I\!R^d$ *με* $0 \in \text{int}\, C$. *Τότε το* C^o *είναι συμπαγές, κυρτό με* $0 \in \text{int}\, C^o$. *Ισχύει* $C = C^{oo}$.

Θεώρημα 8.0.2.

Έστω C *κυρτό, συμπαγές σύνολο με* $0 \in \text{int}\, C$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i. Το $H(y,1)$ *είναι φέρον υπερεπίπεδο του* C.

ii. $y \in \text{bd}\, C^o$.

Απόδειξη.

$i) \Rightarrow ii)$

Επειδή $C \subseteq K(y,1)$, έχουμε $y \in C^o$. Εάν $y \in \operatorname{int} C^o$ τότε υπάρχει $\lambda > 1$ με $\lambda y \in C^o$, δηλαδή $C \subseteq K(\lambda y, 1)$, άρα $< x, y > \leq \frac{1}{\lambda} < 1, \quad x \in C$. Άτοπο, διότι το $H(y,1)$ είναι φέρον υπερεπίπεδο του C. Άρα $y \in C^o \setminus \operatorname{int} C^o = \operatorname{bd} C^o$.

$ii) \Rightarrow i)$

Έστω $y \in \operatorname{bd} C^o$. Επειδή $0 \in \operatorname{int} C^o$ έχουμε ότι $y \neq 0$. Ισχύει $0 < \max\limits_{x \in C} < x, y > \leq 1$ (διότι $0 \in \operatorname{int} C$). Εάν $\max\limits_{x \in C} < x, y >< 1$ τότε υπάρχει $\lambda > 0$ με $\max\limits_{x \in C} < x, \lambda y >= 1$. Άρα $\lambda y \in C^o$. Επίσης $0 \in \operatorname{int} C^o$, άρα $y \in (0, \lambda y) \subseteq \operatorname{int} C^o$. Άτοπο, διότι $y \in \operatorname{bd} C^o$. Άρα $\max\limits_{x \in C} < x, y >= 1$, δηλαδή το $H(y,1)$ είναι φέρον υπερεπίπεδο του C. □

Πόρισμα 8.0.2.

Εάν $x, y \in \mathbb{R}^d$ και C είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο με $0 \in \operatorname{int} C$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

i. *Το $H(y,1)$ είναι φέρον υπερεπίπεδο του C στο x.*

ii. *Το $H(x,1)$ είναι φέρον υπερεπίπεδο του C^o στο y.*

iii. $< x, y >= 1, \quad x \in \operatorname{bd} C, \quad y \in \operatorname{bd} C^o$.

iv. $< x, y >= 1, \quad x \in C, \quad y \in C^o$.

Κεφάλαιο 9

Πολύτοπα, Πολύεδρα

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τα πολύτοπα και τα πολύεδρα και θα μελετήσουμε τη σχέση που έχουν καθώς και τις ιδιότητες τους.

Ορισμός 9.0.2.

Πολύτοπο *καλείται ένα σύνολο*

$$P = \text{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad x_i \in I\!\!R^d.$$

Εάν $\dim P = k$ *το* P *καλείται* k*-πολύτοπο.*

Πρόταση 9.0.2.

Έστω $P \subseteq I\!\!R^d$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα.*

i. $P = \text{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad x_i \in I\!\!R^d$.

ii. Το P *είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο με* $\text{ext}\, P \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad x_i \in I\!\!R^d$.

Απόδειξη.

$i) \Rightarrow ii)$

Το P είναι συμπαγές (Πορ.()), κυρτό σύνολο. Επειδή $P = \text{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad x_i \in$

$\mathbb{R}^d$, έχουμε (Θεώρ()) $\operatorname{ext} P \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
$ii) \Rightarrow i)$
$P = \operatorname{con}(\operatorname{ext} P)$ άρα $P = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. □

Ορισμός 9.0.3.

Πολύεδρο *καλείται το*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \big\{x \in \mathbb{R}^d :< x, x_i > \leq \alpha_i\big\}.$$

Η παράσταση $\big\{K(x_i, \alpha_i),\ 1 \leq i \leq n\big\}$ *καλείται* **ανάγωγος** *εάν* $n = 1$ *ή για* $n > 1$ *ισχύει*

$$Q \subsetneqq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Πρόταση 9.0.3.

Έστω $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i), \quad \dim Q = d, \quad Q \neq \mathbb{R}^d$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα.*

i. *Η παράσταση* $\big\{K(x_i, \alpha_i) \quad 1 \leq i \leq n\big\}$ *είναι ανάγωγος,* $n > 1$.

ii. $H(x_i, x_j) \bigcap \operatorname{int} \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i) \neq \varnothing$.

Απόδειξη.

$i) \Rightarrow ii)$
Έστω $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i)$. Επειδή $Q \subseteq Q_j, \quad \dim Q = d$, έχουμε ότι $\operatorname{int} Q_j \neq \varnothing$, άρα Q_j δεν περιέχεται στο $H(x_j, \alpha_j)$. Επειδή το

$$Q_j = \cap K(x_j, \alpha_j) = Q \neq \varnothing, \quad Q_j \quad \text{κυρτό}$$

έχουμε ότι $H(x_j, \alpha_j) \cap \operatorname{int} Q_j \neq \varnothing$.
(Εάν $H(x_j, \alpha_j) \cap \operatorname{int} Q_j = \varnothing$ τότε $Q_j \subseteq K(x_j, \alpha_j)$ άρα $Q = K(x_j, \alpha_j)$ άτοπο

διότι η παράσταση είναι ανάγωγος με $n > 1$).

$ii) \Rightarrow i)$

Επειδή $H(x_j, \alpha_j) \cap \operatorname{int} Q_j \neq \varnothing$ έχουμε ότι $Q_j \nsubseteq K(x_j, \alpha_j)$ άρα

$$Q = Q_j \cap K(x_j, \alpha_j) \subsetneqq Q_j.$$

$\square$

Πρόταση 9.0.4.

Έστω $\quad Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i), \quad \dim Q = d, \quad Q \neq \mathbb{R}^d$. *Τότε:*

i.

$$\operatorname{bd} Q = \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i, \alpha_i) \cap Q.$$

ii. Κάθε έδρα διαστάσεως $(d-1)$ *είναι της μορφής* $H(x_j, \alpha_j)$.

iii. Κάθε σύνολο $H(x_j, \alpha_j)$ *είναι μια και μοναδική* $(d-1)$ *έδρα, τότε και μόνον τότε αν η αντίστοιχη αναπαράσταση είναι ανάγωγος.*

Απόδειξη.

i.

$$\operatorname{int} Q = \operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i) = \bigcap \big(K(x_i, \alpha_i) \backslash H(x_i, \alpha_i) \big)$$

άρα

$$\operatorname{bd} Q = Q \backslash \operatorname{int} Q = \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i, \alpha_i) \cap Q.$$

ii. Επειδή $F \subseteq \operatorname{bd} Q$ έχουμε ότι $F \subseteq H(x_i, \alpha_i) \cap Q$ για κάποιο i ($\dim F = d-1$). Η $H(x_i, \alpha_i) \cap Q$ είναι έδρα του Q άρα $F = H(x_i, \alpha_i) \cap Q$

iii. $(\Rightarrow)$

Έστω $F_j = H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ έδρα διαστάσεως $(d-1), \quad 1 \leq j \leq n$. Εάν η παράσταση δεν είναι ανάγωγος, τότε

$$Q = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} K(x_i, \alpha_i)$$

για κάποιο $k \in \{1, \dots, n\}$. Τότε η έδρα

$$F_k = H(x_k, \alpha_k) \cap Q \overset{ii)}{=} H(x_i, \alpha_i) \cap Q = F_i$$

για κάποιο $i \neq k$. Άτοπο.

$(\Leftarrow)$

Έστω $F = H(x_j, \alpha_j) \cap Q$. Τότε

$$\begin{aligned} F &= H(x_j, \alpha_j) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i)) \\ &= H(x_j, \alpha_j) \bigcap (\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i)) \\ &\supseteq H(x_j, \alpha_j) \bigcap \operatorname{int}(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i)) \\ &\neq \varnothing \end{aligned}$$

Άρα το εσωτερικό του F ως προς $H(x_j, \alpha_j)$ είναι μη κενό και η F είναι έδρα $(d-1)$ – διάστασης. Η παράσταση της F είναι μοναδική διότι

$$\{K(x_i, \alpha_i), \quad 1 \leq i \leq n\}$$

είναι ανάγωγος.

□

Πρόταση 9.0.5.

Εάν $F \neq Q$ είναι έδρα του πολυέδρου Q, τότε υπάρχει έδρα G διαστάσεως $(d-1)$ με $F \subseteq G$. $(\dim Q = d)$

Απόδειξη.

$$F \subseteq \operatorname{bd} Q = \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i, \alpha_i) \cap Q$$

με $\{K(x_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq n\}$ ανάγωγα. Έστω $\operatorname{ri} F$. Τότε υπάρχει i με $x \in H(x_i, \alpha_i) \cap Q$. Επειδή η F είναι έδρα που περιέχει το x έχουμε ότι

$$F \subseteq H(x_i, \alpha_i) \cap Q = G \quad \text{με} \quad G(d-1) - \text{έδρα}.$$

□

Πόρισμα 9.0.3.

Κάθε έδρα πολυέδρου, είναι πολύεδρο.

Απόδειξη.

Οι έδρες διαστάσεως $(d-1)$ είναι πολύεδρα, διότι είναι της μορφής $Q \cap H(x, \alpha)$. Εάν F είναι έδρα $(d-2)$ – διάστασης τότε από την Πρόταση() και το προηγούμενο είναι πολύεδρο. Ελαττώνοντας την διάσταση σε κάθε βήμα, έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 9.0.4.

Κάθε πολύεδρο έχει πεπερασμένο αριθμό εδρών.

Απόδειξη.

Οι έδρες διαστάσεως $(d-1)$ είναι πεπερασμένες το πλήθος (Πρόταση()). Επειδή κάθε έδρα $F \subseteq G$ με G $(d-1)$ – έδρα έχουμε ότι οι έδρες είναι πεπερασμένου πλήθους. □

Πόρισμα 9.0.5.

Κάθε φραγμένο πολύεδρο, είναι πολύτοπο.

Απόδειξη.

Το φραγμένο πολύεδρο P είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο με $\operatorname{ext} P = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ δηλαδή είναι πολύτοπο.

Ισχύει και το αντίστροφο. Κάθε πολύτοπο είναι φραγμένο πολύεδρο. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την εξής Πρόταση. $\square$

Πρόταση 9.0.6.

Έστω $P = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $0 \in \operatorname{int} P$, *και* $Q = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$. *Τότε:*

i. $P^o = Q$ *και* $Q^o = P$.

ii. $\operatorname{ext} P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Leftrightarrow Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$ *με* $\{K(x_i, 1), 1 \leq i \leq n\}$ *ανάγωγη παράσταση.*

Απόδειξη.

i. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^o = Q$. Ισχύει

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^o = \big(\operatorname{con}(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)^o.$$

Άρα $P^o = Q$. Επιπλέον

$$Q^o = (P^o)^o = P^{oo} = P.$$

ii. $(\Rightarrow)$

Έχουμε $P = \operatorname{con}(\operatorname{ext} P)$ άρα $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$. Έστω $Q^j = \displaystyle\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, 1)$.

Εάν $Q = Q_j$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ τότε $Q_j^o = Q^o \overset{i)}{=} P$. Άρα

$$P = \operatorname{con}\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}^o = Q \Rightarrow x_j \notin \operatorname{ext} P.$$

Άτοπο. Άρα η παράσταση $\{K(x_i, 1), 1 \leq i \leq n\}$ είναι ανάγωγος.

$(\Leftarrow)$

Έστω $x_j \notin \operatorname{ext} P$. Ισχύει

$$P = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \operatorname{con}\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\} \Rightarrow$$

$$P^o = Q = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, 1)$$

δηλαδή η παράσταση δεν είναι ανάγωγος. Άτοπο.

□

Θεώρημα 9.0.3.

Ένα σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^d$, $\quad P \neq \emptyset$, είναι πολύτοπο τότε και μόνον τότε αν το P είναι φραγμένο πολύεδρο.

Απόδειξη.

($\Leftarrow$)

Πόρισμα().

($\Rightarrow$)

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι $0 \in \operatorname{int} P$. Έστω $P = \operatorname{con}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Τότε το

$$P^o = Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$$

είναι πολύεδρο, φραγμένο (διότι $0 \in \operatorname{int} P$). Άρα το Q είναι πολύτοπο (Πόρισμα()) δηλαδή $Q = \operatorname{con}\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Άρα

$$P = P^{oo} = Q^o = \bigcap_{i=1}^{m} K(y_i, 1).$$

Δηλαδή το P είναι πολύεδρο. Επειδή το $0 \in \operatorname{int} Q$ έχουμε ότι το $Q^o = P$ είναι φραγμένο. □

Πόρισμα 9.0.6.

i. Εάν P_1, P_2 πολύτοπα, τότε το $P_1 \cap P_2$ είναι πολύτοπο.

ii. Η τομή $P \cap A$ όπου P πολύτοπο, A συσχετισμένος υπόχωρος, είναι πολύτοπο.

Πόρισμα 9.0.7.

Κάθε $d-$ πολύτοπο στον Rd έχει τουλάχιστον $(d+1)$ έδρες διαστάσεως $(d-1)$.

Απόδειξη.

Έστω $0 \in \operatorname{int} P$. Τότε το P^o είναι πολύτοπο, έστω $P^o = \operatorname{con}\{y_1, \ldots, y_m\}$. Επειδή $0 \in P^o$ έχουμε ότι $\dim P^o = d$, άρα $m \geq d+1$. Έστω $\{y_1, \ldots, y_m\} = \operatorname{ext} P^o$. Τότε

$$P = \bigcap_{i=1}^{m} K(y_i, 1)$$

με $\{K(y_i,1), 1 \leq i \leq m\}$ ανάγωγη παράσταση.
Επειδή $H(y_i,1) \cap P, \quad 1 \leq i \leq m$ είναι όλες οι $(d-1)-$ έδρες του P διάφορες ανά δύο μεταξύ τους (Πρόταση()), έχουμε ότι αυτές είναι m το πλήθος με $m \geq d+1$. □

Πόρισμα 9.0.8.

Εάν X είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος ανισοτήτων $Ax \leq b$, A πίνακας $n \times d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^n$ τότε το X είναι πολύεδρο.
Εάν το σύνολο X είναι φραγμένο τότε είναι πολύτοπο και κάθε λύση του συστήματος είναι κυρτός συνδιασμός των πεπερασμένων το πλήθος ακραίων σημείων του X.

Απόδειξη.

Άμεσο από τον ορισμό του πολυέδρου, το Πόρισμα() και την Πρόταση(). □

Πόρισμα 9.0.9.

Έστω το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμου:
"Να ευρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της

$$f(x) = < x, u > = c_1 x_1 + \cdots + c_d x_d$$

αν $x \in \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\} = X$*,* X *φραγμένο."*
Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \operatorname{ext} X$ *με* $f(x_1) = \max\{f(x) : x \in X\}$ *και* $f(x_2) = \min\{f(x) : x \in X\}$.

Απόδειξη.

Το σύνολο X είναι πολύτοπο, άρα το X είναι συμπαγές. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει $y_1 \in X : \quad f(y_1) = \max\{f(x) : x \in X\}$, $y_1 \in X = \operatorname{con}(\operatorname{ext} X)$. Άρα

$$y_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i, \quad \{x_1, \dots, x_\nu\} = \operatorname{ext} X.$$

Αν $f(x_1) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_\nu)\}$ τότε

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i f(x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i f(x_1) \\ &= f(x_1). \end{aligned}$$

Άρα $f(x_1) = f(y_1) = \max\{f(x) : x \in X\}$. Όμοια για το ελάχιστο. $\square$

9.1 Ασκήσεις

1. Εάν P_1, P_2 πολύτοπα, τότε τα $\mathrm{con}(P_1 \cup P_2), P_1 + P_2, \lambda P_1 (\lambda > 0)$, είναι πολύτοπα.

2. Εάν P_1, P_2 πολύτοπα, τότε $P_1 + P_2 = \big(\mathrm{ext}\, P_1 + \mathrm{ext}\, P_2\big)$.

3. Εάν T είναι simplex διαστάσεως d τότε:

   (i) Κάθε $k-$ έδρα του T, $(0 \leq k \leq d-1)$ είναι simplex.

   (ii) $(k+1)$ ακραία σημεία του T ορίζουν μια $k-$ έδρα.

   (iii) Ο αριθμός των $k-$ εδρών του T είναι $\begin{pmatrix} d+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ $\quad (0 \leq k \leq d-1)$.

4. Το συμπαγές, κυρτό σύνολο $P \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι πολύγωνο αν και μόνον αν κάθε προβολή του P στο επίπεδο είναι πολύγωνο.

5. Έστω K φραγμένο, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^3$ και $x \in \mathrm{int}\, K$. Το K είναι πολύγωνο τότε και μόνον τότε κάθε τομή του K με 2-επίπεδο, διερχόμενο από το x, είναι πολύγωνο.

6. Εάν K είναι $(d-1)-$ πολύτοπο του $\mathbb{R}^d$ και $p \notin \mathrm{aff}\, K$ το σύνολο $P = \mathrm{con}\big(K \cup \{p\}\big)$ καλείται $d-$πυραμίδα του $\mathbb{R}^d$. Να ευρεθεί ο αριθμός ακραίων σημείων και εδρών σε σχέση με αυτών των ακραίων σημείων και εδρών του K.

Κεφάλαιο 10

Εξίσωση Euler

10.1 Εισαγωγή

Εάν P είναι πολύτοπο διαστάσεως d, συμβολίζουμε με $f_k(P)$, $\quad 0 \leq k \leq d-1, \quad k \in I\!N$ τον αριθμό των $k-$ εδρών του P.Το

$$f(P) = \big(f_o(P), f_1(P), \ldots, f_{d-1}(P)\big)$$

καλούμε $f-$ διάνυσμα του P.
Εάν $f(\mathcal{P}^d) = \{f(P) : P \in P\}$, $\mathcal{P}^d$ το σύνολο των $d-$ πολυτόπων, το πρόβλημα είναι να προσδιοριστούν τα $f-$ διανύσματα. Για $d \leq 3$ το $f(\mathcal{P}^d)$ έχει προσδιοριστεί πλήρως, ενώ για $d \geq 4$ έχει περιγραφεί μόνο για ειδικές περιπτώσεις πολυτόπων. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Euler:

$$\text{Για} \quad f(P) = (f_o, f_1, \ldots, f_{d-1}) \quad \text{ισχύει:} \quad \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i = 1 - (-1)^d.$$

Ορισμός 10.1.1.

Εάν P_1, P_2 είναι πολύτοπα τα οποία ευρίσκονται σε παράλληλα υπερεπίπεδα και η $\mathrm{con}(P_1 \cup P_2)$ είναι διαστάσεως d, τότε το $P^d = \mathrm{con}(P_1 \cup P_2)$ καλείται $d-$ πρισμοειδές, με βάσεις τα P_1, P_2.

Λήμμα 10.1.1.

Εάν P είναι $d-$ πρισμοειδές με βάσεις διαστάσως $d-1$, τότε:

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i = 1-(-1)^d.$$

Απόδειξη.

Για $d=1, d=2$ είναι προφανές ότι η εξίσωση Euler ισχύει για τυχαίο πολύτοπο, άρα και για τα πρισμοειδή.
Έστω $d \geq 3$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η εξίσωση για $k<d$. Αν $P = \mathrm{con}(P_{-1} \cup P_1)$, και P_{-1}, P_1 ανήκουν στα υπερεπίπεδα H_{-1}, H_1 θεωρούμε H_o υπερεπίπεδο παράλληλο των H_{-1}, H_1 με $H_o \cap \mathrm{int}\, P \neq \varnothing$. Έστω $P_o = P \cap H_o$.
Έχουμε:

i. $f_o(P) = f_o(P_{-1}) + f_o(P_1)$

ii. Για $1 \leq k \leq d-1$, μια $k-$ έδρα F του P είναι έδρα του P_{-1}, ή P_1 ή έχει ακραία σημεία σε αμφότερα τα P_{-1}, P_1.

Εάν έχει ακραία σημεία στα P_{-1}, P_1, τότε η $F \cap P_o$ είναι $(k-1)-$ έδρα του P_o. Αντίστροφα, κάθε $(k-1)-$ έδρα του P_o περιέχεται σε μια $k-$ έδρα του P με ακραία σημεία στα P_{-1}, P_1. Επειδή η διάσταση των P_1 και P_{-1} είναι $d-1$ θέτουμε $f_{d-1}(P_1) = f_{d-1}(P_{-1}) = 1$. Τότε:

$$f_k(P) = f_k(P_{-1}) + f_k(P_1) + f_{k-1}(P_o) \quad \text{για} \quad 1 \leq k \leq d-1.$$

Αθροίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k(P) &= \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\big[f_k(P_{-1})+f_k(P_1)\big]+\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^{k+1}f_k(P_o)\\
&= (-1)^{d-1}\cdot 2+\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^k\big[f_k(P_{-1})+f_k(P_1)\big]-\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^k f_k(P_o)\\
&= 2\cdot(-1)^{d-1}+2\big(1-(-1)^{d-1}\big)\\
&= 2\cdot(-1)^{d-1}+1-(-1)^d\cdot(-1)\\
&= -2(-1)^d+1+(-1)^d\\
&= 1-(-1)^d.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 10.1.2.

Εάν P είναι d-simplex, τότε

$$\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k(P)=1-(-1)^d.$$

Απόδειξη.

Ισχύει $f_k(P)=\begin{pmatrix} d+1\\ k+1\end{pmatrix}$, $\quad k=0,1,\ldots,d-1.$ Άρα

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k(P) &= \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\begin{pmatrix} d+1\\ k+1\end{pmatrix}\\
&= -(1-1)^{d+1}+1+(-1)^{d+1}\begin{pmatrix} d+1\\ d+1\end{pmatrix}\\
&= 1-(-1)^d.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 10.1.1.

Εάν P είναι d-πολύτοπο, τότε

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i = 1-(-1)^d.$$

Απόδειξη.

Εάν $d=2$ η εξίσωση Euler ισχύει. Έστω ότι ισχύει για πολύτοπα διαστάσεως $n<d$. Εκλέγουμε υπερεπίπεδο H ώστε κάθε παράλληλη μεταφορά του να περιέχει το πολύ μια κορυφή του P. Εάν $v=f_o(P)$ ονομάζουμε $H_1, H_2, \ldots, H_v$ τα υπερεπίπεδα τα οποία είναι παράλληλα του H, περιέχει έκαστον μια ακριβώς κορυφή του P και το H_j διαχωρίζει τα H_i, H_k για $i<j<k$. Για $1\leq i\leq v-1$, ορίζουμε K_i το μέρος του P μεταξύ των H_i, H_{i+1}. Τότε τα K_1, K_{v-1} είναι simplex, ενώ τα $K_i, \quad i=2,\ldots,v-2$ είναι πρισμοειδή με βάσεις διαστάσεως $d-1$. Από τα Λήμματα () και () έχουμε ότι η εξίσωση Euler ισχύει για τα $K_i, \quad i=1,2,\ldots,v-1$. Έστω $K^{(j)}=\bigcup_{i=1}^{j} K_i, \qquad j=1,2,\ldots,v-1.$
Για να αποδείξουμε την εξίσωση Euler για το $P=K^{(v-1)}$ θα αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό:
Έστω Q d-πολύτοπο και H_o υπερεπίπεδο με

$$\operatorname{int} Q\cap H_o\neq\varnothing \quad \text{και} \quad H_o\cap \operatorname{ext} Q=\{v_o\}.$$

Υποθέτουμε ότι τα $Q_o=Q\cap H_o, \quad Q_1=Q\cap H^+, \quad Q_2=Q\cap H^-$ ικανοποιούν την εξίσωση Euler. Ισχύει:

i. $f_o(Q)=f_o(Q_1)+f_o(Q_2)-2f_o(Q_o)+1$ διότι $H_o\cap \operatorname{ext} Q=\{V_o\}$.

ii. $f_1(Q)=f_1(Q_1)+f_1(Q_2)-2f_1(Q_o)-f_o(Q_o)+1$
διότι κάθε ακμή του Q είναι ακμή του Q_1 ή του Q_2 μη περιεχόμενη στο Q_o ή είναι ακμή των Q, Q_1, Q_2 που περιέχει κορυφή του Q_o διάφορη του V_o.

iii. $f_2(Q)=f_2(Q_1)+f_2(Q_2)-2f_2(Q_o)$
$\vdots$

$f_{d-2}(Q) = f_{d-2}(Q_1) + f_{d-2}(Q_2) - 2f_{d-2}(Q_o) - f_{d-3}(Q_o)$
διότι κάθε $k-$ έδρα, $\quad 2 \leq k \leq d-2$ του Q είναο έδρα του Q_1 ή του Q_2, αλλά όχι του Q_o, ή είναι έδρα των Q_1, Q_2 που περιέχει μια (k-1)-έδρα του Q_o.

iv. $f_{d-1}(Q) = f_{d-1}(Q_1) - 1 + f_{d-1}(Q_2) - 1 + f_{d-2}(Q_o)$

Επειδή τα Q_o, Q_1, Q_2 ικανοποιούν την εξίσωση Euler έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k(Q) &= \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k(Q_1) + \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k(Q_2) - 2(-1)^{d-1} \\
&\quad -2\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^k f_k(Q_o) + \sum_{k=0}^{d-2}(-1)^k f_k(Q_o) \\
&= 2\big(1-(-1)^d\big) + 2(-1)^d - \big(1-(-1)^{d-1}\big) \\
&= 1-(-1)^d.
\end{aligned}$$

Δηλαδή το Q ικανοποιεί την εξίσωση Euler.
Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για τα

$$K^{(j+1)}, \quad H_{j+1}, \quad K^{(j)} \quad \text{και} \quad K_{j+1}$$

στην θέση των Q, H_o, Q_1, Q_2, εχουμε ότι τα $K^{(2)}, K^{(v-1)}$ ικανοποιούν την εξίσωση Euler. Επειδή $P = K^{(v-1)}$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 11

Hausdorff Μετρική, Θεώρημα Επιλογής του Blaschke

11.1 Εισαγωγή

Εάν $< X, d >$ είναι μετρικός χώρος, ορίζουμε $\mathcal{H}(X)$ το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του X. Θα εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathcal{H}(X)$ με κατάλληλη μετρική h, ώστε ο $\left\langle \mathcal{H}(X), h \right\rangle$ να γίνει πλήρης μετρικός χώρος άν ο $< X, d >$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και συμπαγής μετρικός χώρος αν ο $< X, d >$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

11.2 Η Μετρική Hausdorff

Ορισμός 11.2.1.

Έστω $< X, d >$ μετρικός χώρος και $A, B \in \mathcal{H}(X), x \in X$.

i. Ορίζουμε $d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}$, την απόσταση του x από το B.

ii. Ορίζουμε $\tilde{d}(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$, την απόσταση του A από το B.

Παρατήρηση

Επειδή τα σύνολα A, B είναι συμπαγή, υπάρχουν $y_o \in B$ ώστε $d(x, B) = d(x, y_o)$ και $x_1 \in A, y_1 \in B$ ώστε $\tilde{d}(A, B) = d(x_1, y_1)$.

Ορισμός 11.2.2.

Εάν $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ορίζουμε ως Hausdorff απόσταση μεταξύ των A, B, το

$$h(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}.$$

Πρόταση 11.2.1.

Εάν $< X, d >$ είναι μετρικός χώρος, τότε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Για την h ισχύει $h(A, B) \in \mathbb{R}$. (διότι τα A, B είναι συμπαγή).

i. $h(A, B) \geq 0, \quad A, B \in \mathcal{H}(X)$.(Προφανώς)

$$\begin{aligned} h(A, A) &= \max\{\tilde{d}(A, A), \tilde{d}(A, A)\} \\ &= \tilde{d}(A, A) \\ &= \max\{d(x, A) : x \in A\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Έστω $A \neq B$ και $\alpha \in A : \alpha \notin B$. Τότε

$$h(A, B) \geq d(\alpha, B) > 0.$$

Άρα $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

ii. $h(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} = h(B, A)$.

iii. $h(A,B) \le h(A,C) + h(C,B)$.

Για να δείξουμε την τριγωνική ιδιότητα θα αποδείξουμε πρώτα ότι :

$$\tilde{d}(A,B) \le \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B).$$

Έστω $\alpha \in A$.

$$\begin{aligned} d(\alpha,B) &= \min\{d(\alpha,b) : b \in B\} \\ &\le \min\{d(\alpha,c) + d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(\alpha,c) + \min\{d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(\alpha,c) + d(c,B), \quad \forall c \in C. \end{aligned}$$

Άρα $d(\alpha,B) \le d(\alpha,C) + \tilde{d}(C,B)$ για κάθε $\alpha \in A$. Άρα

$$\tilde{d}(A,B) \le \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B).$$

Όμοια

$$\tilde{d}(B,A) \le \tilde{d}(B,C) + \tilde{d}(C,A).$$

Άρα

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\} \\ &\le \max\{\tilde{d}(A,C), \tilde{d}(C,A)\} + \max\{\tilde{d}(C,B), \tilde{d}(B,C)\} \\ &= h(A,C) + h(C,B) \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες i), ii), iii) έχουμε ότι ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι μετρικός χώρος.

$\square$

Ορισμός 11.2.3.

Εάν $A \in \mathcal{H}(X)$ και $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} A + \varepsilon &= \{y \in X : d(\alpha,y) \le \varepsilon \quad \text{για κάποιο} \quad \alpha \in A\} \\ &= \{y \in X : d(y,\alpha) \le \varepsilon\}. \end{aligned}$$

$A + \varepsilon = \bigcup_{\alpha \in A} \hat{S}(\alpha,\varepsilon)$, όπου $\hat{S}$ κλειστή σφαίρα του $< X, d >$. Το $A+\varepsilon$, είναι κλειστό σύνολο, επειδή το A είναι συμπαγές.

Λήμμα 11.2.1.

Εάν $A, B \in \mathcal{H}(X)$ *και* $\varepsilon > 0$, *τότε*

$$h(A,B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subseteq B + \varepsilon \quad \textit{και} \quad B \subseteq A + \varepsilon.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} h(A,B) \leq \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{d}(A,B), \quad \tilde{d}(B,A) \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad d(\alpha, B) \leq \varepsilon, \quad \forall \alpha \in A \quad \text{και} \quad d(\beta, A) \leq \varepsilon, \quad \forall \beta \in B \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \in B + \varepsilon, \quad \forall \alpha \in A \quad \text{και} \quad \beta \in A + \varepsilon, \quad \forall \beta \in B \\ &\Leftrightarrow \quad A \subseteq B + \varepsilon \quad \text{και} \quad B \subseteq A + \varepsilon \end{aligned}$$

□

Λήμμα 11.2.2 (Λήμμα της Επέκτασης).

Έστω $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ακολουθία βασική στον* $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ *και* $\{A_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ *υπακολουθία της. Εάν* $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ *είναι βασική ακολουθία του* $< X, d >$ *με* $x_{n_k} \in A_{n_k}$, *τότε υπάρχει* $\{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *βασική ακολουθία με* $\bar{x}_n \in A_n$ *και* $\bar{x}_{n_k} = x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_1 = 1$. Θέτουμε $\bar{x}_1 = x_{n_1}$. Έστω $n > 1$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $n \in \{n_k + 1, \ldots, n_{k+1}\}$. Εκλέγουμε $\overline{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_k}) = d(x_{n_k}, A_n)\}$. Ισχύει $\overline{x}_n \in A_n$. Εάν $n = n_k$ για κάποιο k, τότε $x_{n_k} \in A_{n_k} = A_n$ άρα $\overline{x}_{n_k} \in \{x \in A_{n_k} : d(x, x_{n_k}) = d(x_{n_k}, A_{n_k}) = 0\} = \{x_{n_k}\}$ ή $\overline{x}_{n_k} = x_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι η $\{\overline{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βασική ακολουθία. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ για $n_k, n_j, m, n \geq n_o \quad (1)$
Έστω $n, m \geq n_o$. Τότε υπάρχουν j, k ώστε $m \in \{n_{j-1} + 1, \ldots, n_j\}$ και $n \in \{n_{k-1} + 1, \ldots, n_k\}$. Επειδή $n_o \leq m \leq n_j$ και $n_o \leq m \leq n_k$ έχουμε από την (1)

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2)$$

Εξ'άλλου

$$\begin{aligned} d(\overline{x}_m, x_{n_j}) &= d(x_{n_j}, A_m) \\ &\leq \tilde{d}(A_{n_j}, A_m) \\ &\leq H(A_{n_j}, A_m) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{από την } (1)) \end{aligned}$$

και $d(x_{n_k}, \overline{x}_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Άρα $d(\overline{x}_n, \overline{x}_m) \leq d(\overline{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \overline{x}_n) < \varepsilon$ από τις $(2), (3) \quad m, n \geq n_o$. Άρα η $\{\overline{x}_n : n \in I\!N\}$ είναι βασική ακολουθία. □

Θεώρημα 11.2.1 (Πληρότης του χώρου $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$).

Εάν ο $< X, d >$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Έστω $\{A_n : n \in I\!N\}$ βασική ακολουθία του $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $A \in \langle(X)$, ώστε $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Ορίζουμε

$$A = \{x \in X : \exists x_n \in A_n, \quad n \in I\!N \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύουν

i. $A \neq \varnothing$.

ii. A κλειστό σύνολο.

iii. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_o \in I\!N : A \subseteq A_n + \varepsilon$ για $n \geq n_o$.

iv. A ολικά φραγμένο σύνολο.

v. $A \in \mathcal{H}(X)$ και $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

i. Η $\{A_n : n \in I\!N\}$ είναι βασική, άρα υπάρχουν $N_1 < n_2 < \cdots < N_n < \cdots$ με $h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i}$ για $m, n \geq N_i$. Έστω $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Επειδή $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, $\quad x_{N_1} \in A_{N_1} \subseteq A_{N_2} + \frac{1}{2}$ άρα $\exists x_{N_2} \in A_{N_2}$ με $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$. Επαγωγικά εκλέγουμε $x_{N_{n+1}} \in A_{N_{n+1}}$ με $d(x_{N_n}, x_{N_{n+1}}) \leq \frac{1}{2^n}$.

Η $\{x_{N_n} : n \in I\!N\}$ είναι βασική ακολουθία διότι :

Εάν $\varepsilon > 0$ θεωρούμε $n_o \in I\!N$ με $\frac{1}{2^{n+1}}$ για $n \geq n_o$, τότε

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m-1}}) + \cdots + d(x_{N_{n+1}}, x_{N_n}) \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &\leq \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1-n}}\right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \end{aligned}$$

για $m > n \geq n_o$. Από το Λήμμα της Επέκτασης υπάρχει βασική ακολουθία $\{\overline{x}_n : n \in I\!N\}$ με $\overline{x}_n \in A_n$. Επειδή ο . $< X, d >$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, η $\{\overline{x}_n : n \in I\!N\}$ είναι συγκλίνουσα. Εάν $x = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n$, τότε $x \in A$, δηλαδή $A \neq \varnothing$.

ii. Έστω $\alpha_m \in A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_m = \alpha \in X \qquad (1)$

Θα δείξουμε ότι $\alpha \in A$, οπότε το A είναι κλειστό.

$\alpha_m \in A$ άρα υπάρχει ακολουθία $\{x_n^{(m)} : n \in I\!N\}$ με $x_n^{(m)} \in A_n$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{(m)} = \alpha_m \qquad (2)$

Από την (i) έχουμε ότι υπάρχει $N_i \in I\!N$ ώστε $d(\alpha_{N_i}, \alpha) \leq \frac{1}{i}$, $\quad i \in I\!N$ και από την (2) υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots$ ώστε $d(x_{N_i}^{(N_i)}, \alpha_{N_i}) \leq \frac{1}{i}$, $\quad i \in I\!N$. Άρα για την $y_{n_i} = x_{n_i}^{(N_i)} \in A_{N_i}$ έχουμε $d(y_{n_i}, \alpha) \leq \frac{2}{i}$. Η $\{y_{n_i} : i \in I\!N\}$ είναι βασική με $y_{n_i} \in A_{n_i}$, άρα υπάρχει βασική ακολουθία $\{\overline{y}_n : n \in I\!N\}$ με $\overline{y}_n \in A_n$ και $\overline{y}_{n_i} = y_{n_i}$, $\quad i \in I\!N$. Η βασική ακολουθία $\{\overline{y}_n : n \in I\!N\}$ περιέχει υπακολουθία $\{y_{n_i} : i \in I\!N\}$ με $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i} = \alpha$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y}_n = \alpha$, $\quad \overline{y}_n \in A_n$. Επομένως $\alpha \in A$.

iii. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\alpha \in A$.

Τότε υπάρχουν $\alpha_n \in A_n$, $\quad n \in I\!N$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Άρα $\rho(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon$ για

$n \geq n_o$ δηλαδή $\alpha \in A_n + \varepsilon$ για $n \geq n_o$. Επομένως $A \subseteq A_n + \varepsilon$ για $n \geq n_o$.

iv. Έστω ότι το A δεν είναι ολικά φραγμένο. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ ώστε $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ για $i \neq j$. Από το (iii) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $A \subseteq A_{n_o} + \frac{\varepsilon}{3}$, άρα υπάρχει $\{y_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A_{n_o}$ ώστε $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Το σύνολο A_{n_o} είναι συμπαγές, επομένως υπάρχει υπακολουθία $\{y_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνουσα. Έστω $i_n, i_k \in \mathbb{N}$ με $d(y_{i_n}, y_{i_k}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Τότε

$$d(x_{i_n}, x_{i_k}) \leq d(x_{i_n}, y_{i_n}) + d(y_{i_n}, y_{i_k}) + d(y_{i_k}, x_{i_k}) < \varepsilon.$$

Άτοπο.

v. Το σύνολο A είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $< X, d >$, άρα το A είναι πλήρες.
Το A είναι πλήρες και ολικά φραγμένο (iv), άρα το A είναι συμπαγές.
Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε (iii) $\quad \exists n_o \in \mathbb{N} : A \subseteq A_n + \varepsilon$ για $n \geq n_o \qquad (1)$
Έστω $N_o \in \mathbb{N}$ με $h(A_k, A_\nu) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ για $k, \nu \geq N_o$. Έστω $n \geq N_o$ και $n < N_1 < N_2 \cdots$, με $h(A_k, A_\nu) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ για $k, \nu \geq N_i, \quad i = 1, 2, \ldots$ Τότε

$$h(A_{N_1}, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad h(A_{N_{i+1}}, A_{N_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Έστω $y \in A_n$. Τότε υπάρχουν $x_{N_1} \in A_{N_1}$ με $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και $x_{N_{i+1}} \in A_{N_{i+1}}$ με $d(x_{N_{i+1}}, x_{N_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots$
Η ακολουθία $\{x_{N_i} : i \in \mathbb{N}\}$ είναι βασική ακολουθία (όπως στο (i)) και

$$\begin{aligned} d(y, x_{N_i}) &\leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \cdots + d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Η $\{x_{N_i} : i \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει στο $x \in A$. Άρα $d(y, x) \leq \varepsilon \Rightarrow y \in A + \varepsilon$.
Για $n \geq N_o$ έχουμε $A_n \subseteq A + \varepsilon \qquad (2)$
Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $h(A_n, A) \leq \varepsilon$ για $n \geq \max(n_o, N_o)$.
Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

$\square$

Θεώρημα 11.2.2 (Επιλογής του Blaschke).

Εάν ο $< X, d >$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.
Ισοδύναμα:
Κάθε ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $< X, d >$, περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία συγκλίνει σε συμπαγές υποσύνολο του $< X, d >$.

Απόδειξη.

Ο $< X, d >$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, άρα και ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. (Θεώρημα 11.2.1). Για να αποδείξουμε ότι ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι συμπαγής, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ολικά φραγμένος.
Έστω $\varepsilon > 0$. Ο $< X, d >$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, άρα

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Εάν $N_o = \{1, 2, \ldots, n\}$ ορίζουμε

$$\mathcal{P} = \{P = (R, T) : R \cup T = N_o, R \neq \varnothing, R \cap T = \varnothing\}.$$

Για $P \in \mathcal{P}$ θεωρούμε

$$A_P = \{A \in \mathcal{H}(X) : A \cap S_r \neq \varnothing \quad \text{για} \quad R \in R, \quad A \cap S_t = \varnothing \cap \quad \text{για} \quad t \in T\}.$$

Η οικογένεια $\{A_P : P \in \mathcal{P}\}$ είναι πεπερασμένη και $\mathcal{H}(X) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} A_P$.
Θα δείξουμε ότι η διάμετρος $\delta(A_P) = \sup\{h(A, B) : A, B \in A_P\} \leq \varepsilon, \quad P = (R, T)$.
Έστω $A, B \in A_P$. Εάν $y \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, τότε υπάρχει $\nu \in N_o$ με $y \in A \cap S_\nu$. Τότε $\nu \in R$. Επειδή $B \in A_P$ έπεται ότι $B \cap S_\nu \neq \varnothing$, άρα υπάρχει $z \in B \cap S_\nu$. Τότε $y, z \in S_r$ επομένως $d(y, z) \leq \varepsilon$ με $z \in B$, άρα $y \in B + \varepsilon$. Άρα $A \subseteq B + \varepsilon$. Όμοια $B \subseteq A + \varepsilon$. Επομένως $h(A, B) \leq \varepsilon$ για $A, B \in A_P, \quad \delta(A_P) \leq \varepsilon$.
Για $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη $\{A_P : P \in \mathcal{P}\}$ του $\mathcal{H}(X)$ με $\delta(A_P) \leq \varepsilon$, άρα ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι ολικά φραγμένος. $\square$

11.3 Ασκήσεις

1. Έστω $A = [-1,2] \times [2,3]$, $\quad B = [1,2] \times [-1,1]$ και C ο κύκλος κέντρου $(-1,0)$ και ακτίνος 1. Να υπολογισθούν οι αποστάσεις των συνόλων ανά δύο.

2. Να ευρεθούν $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, συμπαγή, κυρτά, ώστε
$$A \subsetneqq B \subsetneqq C \quad \text{ενώ} \quad h(A,B) = h(B,C) = h(A,C).$$

3. Εάν B είναι κλειστή σφαίρα του $\mathbb{R}^d$ και $p \in \mathbb{R}^d$, να υπολογισθεί η $h(B, \{p\})$.

4. Έαν $B_1 = \widehat{S}(x_1, r_1)$, $\quad B_2 = \widehat{S}(x_2, r_2)$ στον $\mathbb{R}^d$ τότε να υπολογισθεί η $h(B_1, B_2)$.

5. Να δοθεί παράδειγμα συνόλων A, B ώστε $\widetilde{d}(A,B) \neq \widetilde{d}(B,A)$.

6. Να βρεθούν τα $\widetilde{d}(A,B)$, $\quad \widetilde{d}(B,A)$, όπου A η Ελλάδα και B οι Η.Π.Α. Ποιά η Hausdorff απόσταση τους;

7. Εάν $\{B_n\}_{n=1}\infty$ είναι ακολουθία σφαιρών του $\mathbb{R}^d$, η οποία συγκλίνει σε σύνολο G να δειχθεί ότι το G είναι σφαίρα.

8. Εάν $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$, $\quad K_n, K \in \mathcal{H}(X)$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(K_n) = \delta(K)$, όπου δ συμβολίζει τη διάμετρο ενός συνόλου.

Κεφάλαιο 12

Εφαρμογές των Θεωρημάτων επιλογής στη θεωρία των Κυρτών Συνόλων

Πρόταση 12.0.1.

Εάν $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι ακολουθία κυρτών, συμπαγών συνόλων του* $\mathbb{R}^d$ *και* $F_n \subseteq I$*, όπου* I *είναι φραγμένο σύνολο του* $\mathbb{R}^d$*, τότε υπάρχει υπακολουθία* $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *η οποία συγκλίνει σε κυρτό, συμπαγές σύνολο* F *του* $\mathbb{R}^d$*.*

Απόδειξη.

Το $\bar{I}$ είναι συμπαγές, άρα ο $\big\langle \mathcal{H}(I), h \big\rangle$ είναι συμπαγής μ.χ. Άρα υπάρχει υπακολουθία $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ και F συμπαγές σύνολο ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k} = F$.
Θα δείξουμε ότι το F είναι και κυρτό.
Έστω $x, y \in F, \quad 0 \leq \theta \leq 1$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k} = F$, έχουμε $F_{n_k} \subseteq F + \varepsilon, F \subseteq F_{n_k} + \varepsilon$, για $k \geq k_o$. Άρα υπάρχουν $x_o, y_o \in F_{n_{k_o}}$ ώστε $|x - x_o|, |y - y_o| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$.
Για τα σημεία $(1-\theta)x_o + \theta y_o \in F_{n_{k_o}} (=$ κυρτό$)$ υπάρχει $w \in F$ ώστε

$$\big|\big[(1-\theta)x_o + \theta y_o\big] - w\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\big|[(1-\theta)x+\theta y]-w\big| &\le \big|[(1-\theta)x+\theta y]-[(1-\theta)x_o+\theta y_o]\big| \\ &\quad+\Big|[(1-\theta)x_o+\theta y_o]-w\Big| \\ &\le \varepsilon \qquad\qquad (\text{από τις } (1),(2))\end{aligned}$$

δηλαδή για το $(1-\theta)x+\theta y$ υπάρχει $w\in F$, ώστε $\big|[(1-\theta)x+\theta y]-w\big|\le\varepsilon$ άρα $(1-\theta)x+\theta y\in\bar{F}=F \quad (F$ κλειστό).
Επομένως το F είναι κυρτό. □

Πρόταση 12.0.2.

Ο χώρος $\langle\mathcal{H}_c(I\!\!R^d),h\rangle$ των κυρτών, συμπαγών συνόλων του $I\!\!R^d$, είναι πλήρης μ.χ.

Απόδειξη.

Εάν $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy ακολουθία, τότε $F_n\subseteq I, \quad n\in I\!\!N$ για κάποιο φραγμένο σύνολο I. Τότε (Προτ.()) υπάρχει υπακολουθία $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει σε F κυρτό, συμπαγές σύνολο. Τότε και η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο $F\in\mathcal{H}_c(I\!\!R^d)$. Άρα ο $\mathcal{H}_c(I\!\!R^d)$ είναι πλήρης μ.χ. □

Πρόταση 12.0.3.

Το σύνολο των πολυτόπων κείται πυκνα στον $\langle\mathcal{H}_c(I\!\!R^d),h\rangle$. Ισοδύναμα: Για κάθε κυρτό, συμπαγές σύνολο K υπάρχει P πολύτοπο, ώστε $h(K,P)\le\varepsilon$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $K\subseteq\cup_{i=1}^{\nu}S(x_i,\varepsilon)$, για κάποια $x_1,x_2,\dots,x_\nu\in K$.
Εάν $P=\mathrm{con}\{x_1,x_2,\dots,x_\nu\}$, τότε το P είναι πολύτοπο με

$$P\subseteq K \quad \text{και} \quad K\subseteq\{x_1,x_2,\dots,x_\nu\}+S(0,\varepsilon)\subseteq P+\varepsilon.$$

Άρα $h(K,P)\le\varepsilon$. □

Λήμμα 12.0.1.

Έστω K_1, K_2 κυρτά, συμπαγή σύνολα με $K_2 \subseteq \operatorname{int} K_1$. Τότε υπάρχει $n > 0$ ώστε αν K είναι κυρτό, συμπαγές με $h(K, K_2) < n$, τότε $K_2 \subseteq K$.

Απόδειξη.

Επειδή $K_2 \subseteq \operatorname{int} K_1$ έχουμε ότι $\operatorname{bd} K_1 \cap \operatorname{bd} K_2 = \emptyset$, άρα $n = \min\{|x-y| : x \in \operatorname{bd} K_1, y \in \operatorname{bd} K_2\} > 0$. Έστω K κυρτό, συμπαγές με $h(K, K_2) < n$. Τότε $K_1 \subseteq K + S(0,n)$ Από τον ορισμό του n έχουμε $K_2 + S(0,n) \subseteq K_1$, άρα $K_2 + S(0,n) \subseteq K + S(0,n)$, δηλαδή $K_2 \subseteq K$. □

Πρόταση 12.0.4.

Εάν K είναι κυρτό, συμπαγές με $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ και $\lambda > 1$, τότε υπάρχει πολύτοπο P ώστε $P \subseteq K \subseteq \lambda P$.

Απόδειξη.

Έστω $0 \in \operatorname{int} K$ και $\overline{S(0,\rho)} \subseteq \operatorname{int} K, \quad 0 < \varepsilon < (\lambda - 1)\rho$. Τότε (Λημμα) υπάρχει $n > 0$, ώστε αν $h(k_1, K) < n$ να έχουμε $\overline{S(0,\rho)} \subseteq K_1$.
Για $\varepsilon' = \min\{n, \varepsilon\}$, υπάρχει P πολύτοπο με $P \subseteq K \subseteq P + S(0,\varepsilon')$ (Προτ.()). Άρα

$$\begin{aligned}
\overline{S(0,\rho)} \subseteq P \subseteq K &\subseteq P + S(0,\varepsilon') \\
&\subseteq P + S(0,\varepsilon) \subseteq P + (\lambda-1)\rho S(0,1) \\
&= P + (1-\lambda)S(0,\rho) \\
&\subseteq P + (1-\lambda)P = \lambda P.
\end{aligned}$$

Τελικά $P \subseteq K \subseteq \lambda P$. □

Ορισμός 12.0.1.

Έστω K κυρτό, συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^d$.

i. Η σφαίρα (κλειστή) S καλείται **εγγεγραμμένη σφαίρα** *του K, εάν $S \subseteq K$ και η S έχει τη μεγαλύτερη διάμετρο από τις σφαίρες B, με $B \subseteq K$.*

ii. *Η σφαίρα S καλείται* **περιγεγραμμένη σφαίρα** *του K, εάν $S \supseteq K$ και η S έχει την ελάχιστη διάμετρο από τις σφαίρες B, με $B \supseteq K$.*

Πρόταση 12.0.5.

Κάθε κυρτό, συμπαγές σύνολο K του $\mathbb{R}^d$ έχει (τουλάχιστον) μια εγγεγραμμένη και (τουλάχιστον) μια περιγεγραμμένη σφαίρα.

Απόδειξη.

Έστω $\mathcal{A} = \big\{S(x,r) : S(x,r) \quad (\text{κλειστή}) \text{ σφαίρα με } \quad S(x,r) \subseteq K\big\}$.
Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\big\langle \mathcal{H}(K), h\big\rangle$.
Έστω $\Big\{S(x_n, r_n)\Big\}_{n=1}^{\infty}, S(x_n,r_n) \in \mathcal{A}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n,r_n) = G \qquad (1)$. Επειδή $x_n \in K$ (συμπαγές) και $0 \leq r_n \leq \delta(K) \quad (< +\infty)$ υπάρχουν υπακολουθίες $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}, \{r_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = y \in K$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{k_n} = \rho < +\infty$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\lim_{n\to\infty} S(x_{k_n}, r_{k_n}) = S(y,\rho) \subseteq K$. Άρα $S(y,\rho) \in \mathcal{A}$. Από τις $(1),(2)$ έχουμε ότι $G = S(y,\rho) \in \mathcal{A}$, άρα το $\mathcal{A}$ είναι κλειστός υπόχωρος του συμπαγούς μετρικού χώρου $\big\langle \mathcal{H}(K), h\big\rangle$. Επομένως το $\big\langle \mathcal{A}, h\big\rangle$ είναι συμπαγής.
Θεωρούμε $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \varphi\big(S(x,r)\big) = r$. Τότε

$$\begin{aligned} \big|\varphi\big(S(x_1,r_1)\big) - \varphi\big(S(x_2,r_2)\big)\big| &= |r_1 - r_2| \\ &\leq h\big(\big(S(x_1,r_1)\big) - \varphi\big(S(x_2,r_2)\big)\big). \end{aligned}$$

Άρα η φ είναι συνεχής απεικόνιση στο συμπαγές $\mathcal{A}$, επομένως υπάρχει $S(x_o, r_o) \in \mathcal{A}$ με

$$\varphi\big(S(x_o,r_o)\big) = \max\big\{\varphi\big(S(x,r)\big) : S(x,r) \in \mathcal{A}\big\}.$$

Άρα υπάρχει εγγεγραμμένη σφαίρα του K. Ομοίως αποδεικνύεται για την περιγεγραμμένη. $\square$

Ορισμός 12.0.2.

Το κλειστό σύνολο A του $\mathbb{R}^d$ έχει την ιδιότητα του εγγυτάτου σημείου αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha \in A$ ώστε $|x - \alpha| = d(x,A)$.

Πρόταση 12.0.6.

Έστω A κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

i. Το A είναι κυρτό.

ii. Το A έχει την ιδιότητα του εγγυτάτου σημείου.

Απόδειξη.

$i) \Rightarrow ii)$

Επειδή το A είναι κλειστό, υπάρχει $\alpha \in A$ ώστε $|x-\alpha| = d(x,A)$.
Εάν υπήρχε $\beta \in A, \beta \neq \alpha$ ώστε $|x-\beta| = d(x,A)$, τότε για το σημείο $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \in A$, ($A$ κυρτό) ισχύει

$$\begin{aligned} \big|x - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\big| &= \big|\frac{1}{2}(x-\alpha) + \frac{1}{2}(x-\beta)\big| \\ &\overset{*}{<} \frac{1}{2}|x-\alpha| + \frac{1}{2}|x-\beta| \\ &= d(x,A) \end{aligned}$$

Άτοπο. Άρα το α είναι μοναδικό.
(Ισχύει η $*$ διότι : αν $y,z \in \mathbb{R}^d, |y| = |z| = 1, y \neq z$ τότε $|\frac{1}{2}(y+z)| < 1$, όπου $|\cdot|$ η Ευκλείδεια νόρμα).
$ii) \Rightarrow i)$
Έστω ότι το A δεν είναι κυρτό. Τότε υπάρχουν $x,y \in \mathrm{bd}\, A$ ώστε $(x,y) \subseteq A^c$. Για το $z = \frac{x+y}{2} \in A^c$ (ανοικτό), υπάρχει $r > 0$ ώστε $S(z,r) \subseteq A^c$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{B} = \big\{ S(w,r) : S(z,r) \subseteq S(w,\rho) \quad \text{και} \quad A \cap S^o(w,\rho) = \varnothing \big\}.$$

Τότε $S(z,r) \in \mathcal{B}$. Για τις σφαίρες $S(w,\rho) \in \mathcal{B}$ υπάρχει συμπαγές σύνολο ώστε $S(w,\rho) \subseteq F$. $(x,y \notin S(w,\rho), S\big(\frac{x+y}{2}, r\big) \subseteq S(w,\rho))$. Άρα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}(F)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\big\langle \mathcal{H}(F), h \big\rangle$, άρα ο $\big\langle \mathcal{B}, h \big\rangle$ είναι συμπαγής μ.χ. Η συνάρτηση

$$\varphi : < \mathcal{B}, h > \to \mathbb{R}, \quad \varphi\big(S(w,r)\big) = \rho$$

είναι συνεχής, άρα υπάρχει $S(x_o, r_o) \in \mathcal{B}$, με μέγιστη ακτίνα. Επειδή το σύνολο A έχει την ιδιότητα του εγγυτάτου σημείου και η $S(x_o, r_o)$ είναι μέγιστης ακτίνας έχουμε $S(x_o, r_o) \cap A = \{q\}$.

Αν $S(z, r) \cap \mathrm{bd}\, S(x_o, r_o) = \varnothing$, θέτουμε $p = z$. Αν $S(z, r) \cap \mathrm{bd}\, S(x_o, r_o) \neq \varnothing$, τότε $S(z, r) \cap \mathrm{bd}\, S(x_o, r_o)$ είναι ένα μόνο σημείο, έστω το p. Και στις δύο περιπτώσεις $p \neq q$ και $(p, q) \subseteq S^o(x_o, r_o)$. Επειδή το A είναι κλειστό με $S(x_o, r_o) \cap A = \{q\}$ και $(p, q) \subseteq S^o(x_o, r_o)$, υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $S\big(x_o + \lambda(p - q), r_o\big) \cap A = \varnothing$ και $S(z, r) \subseteq S\big(x_o + \lambda(p - q), r_o\big)$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S^o\big(x_o + \lambda(p - q), r_o + \varepsilon\big) \cap A = \varnothing$ και $S(z, r) \subseteq S\big(x_o + \lambda(p - q), r_o + \varepsilon\big)$, δηλαδή $S\big(x_o + \lambda(p - q), r_o + \varepsilon\big) \in \mathcal{B}$ με ακτίνα $r_o + \varepsilon > r_o$. Άτοπο. Άρα το A είναι κυρτό σύνολο. $\square$

Κεφάλαιο 13

Όγκος κυρτού συνόλου

13.1 Εισαγωγή

Εάν K είναι κυρτό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε ορίζουμε ως **όγκο** $V_d(K) = \lambda(K)$, όπου $\lambda(= \lambda_d)$ είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$. Εάν δεν υπάρχει σύγχυση, γράφουμε $V_d = V$.
Για τον όγκο V ισχύουν οι ιδιότητες του λ από τις οποίες χρησιμοποιούμε εδώ τις εξής:

i. $V\big([\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_d, \beta_d]\big) = (\beta_1 - \alpha_1) \cdots (\beta_d - \alpha_d)$.

ii. $V(K) \geq 0, \quad \text{και} \quad V(K) = 0 \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \operatorname{int} K = \varnothing$.

iii. $V(K + x) = V(K), \quad x \in \mathbb{R}^d$.

iv. $V(\lambda K) = \lambda^n V(K), \quad \lambda \geq 0$.

Εάν χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Fubini θα έχουμε ότι

$$V_d(K) = \int_R V_{d-1}\big(K \cap H(u,t)\big) dt \qquad (*)$$

όπου $H(u,t) = \{x \in I\!R^d :< x, u >= t\}$ με $u \in I\!R^d, \quad \|u\| = 1$. Από τον τύπο

$(*)$ έχουμε τα εξής σημαντικά συμπεράσματα.

1. Εάν $K = \mathrm{con}\big(\{v\} \cup C\big)$, όπου C κυρτό, συμπαγές σύνολο με $\dim C = d-1$ και $v \in I\!R^d, \quad v \notin \mathrm{aff}\, C$, τότε

$$V_d(K) = \frac{1}{d} h V_{d-1}(C)$$

όπου h η απόσταση του v από το $H = \mathrm{aff}\, C$.

Πράγματι: Επειδή ο όγκος είναι συνάρτηση αναλλοίωτη στην μετατόπιση $(V(K+x) = V(K))$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in C$. Τότε

$$\begin{aligned} V_d(K) &= \int_0^h V_{d-1}\big((1-\frac{t}{h})v + \frac{t}{h}C\big)dt \\ &= \int_0^h V_{d-1}\big(\frac{t}{h})C\big)dt \\ &= \frac{1}{h^{d-1}} V_{d-1}(C) \int_0^h t^{d-1} dt \\ &= \frac{1}{d} h V_{d-1}(C). \end{aligned}$$

2. Εάν P είναι πολύτοπο διαστάσεως d με $0 \in \mathrm{int}\, P$ και $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι οι $(d-1)-$ έδρες του, τότε

$$V_d(P) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n h_i V_{d-1}(F_i)$$

όπου h_i είναι η απόσταση του 0 από το $\mathrm{aff}\, F_i, \quad i = 1, \ldots n$.

Πράγματι: $P = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{con}\big\{\{0\}, F_i\big\}$, επειδή $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{con}\big\{\{0\}, F_i\big\} \subseteq P$ και αν $x \in P$, τότε υπάρχει $y \in \mathrm{bd}\, P = \bigcup_{i=1}^n F_i$ (Προτ.())

με $x \in [0, y] \subseteq \mathrm{con}\big\{\{0\}, F_r\big\}$, για κάποιο r, με $y \in F_r$.

Εξ'άλλου αν $F_k \neq F_\nu$, τότε το $\mathrm{con}\big\{\{0\}, F_k\big\} \cap \mathrm{con}\big\{\{0\}, F_\nu\big\}$ έχει διάσταση το πολύ $(d-1)$. (η $F_k \cap F_\nu$ είναι έδρα του P διαστάσεως το πολύ $(d-2)$ ή $F_k \cap F_\nu = \varnothing$ και

$$\operatorname{con}\{\{0\}, F_k\} \cap \operatorname{con}\{\{0\}, F_\nu\} \subseteq \operatorname{con}\{\{0\}, F_k \cap F_\nu\})$$

Άρα

$$V_d(P) = \sum_{i=1}^{n} V_d\big(\operatorname{con}\{\{0\}, F_i\}\big) \overset{(1)}{=} \frac{1}{d} V_{d-1}(F_i).$$

Θεώρημα 13.1.1.

Η συνάρτηση $V_d : \langle \mathcal{H}_c, h \rangle \to I\!R$, V_d *ο όγκος του* K *και* $\langle \mathcal{H}_c, h \rangle$ *ο χώρος των συμπαγών, κυρτών υποσυνόλων του* $I\!R^d$ *εφοδιασμένος με την μετρική Hausdorff,* **είναι συνεχής**. *Δηλαδή :*

$$\text{αν} \quad \lim_{n\to\infty} h(K_n, K) = 0 \quad \text{τότε} \quad \lim_{n\to\infty} V_d(K_n) = V_d(K).$$

Απόδειξη.

Έστω $K_n, K \in \mathcal{H}_c$, με $\lim_{n\to\infty} h(K_n, K)0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

I $V_d(K) = 0$.
Επειδή $\dim K \leq d-1$, υπάρχει υπερεπίπεδο $H \supseteq K$, u το κάθετο διάνυσμα στο H. Θεωρούμε τυχαίο πολύτοπο P του H με $\operatorname{ri} P \supseteq K$, $\dim P = d$. (Θεώρ. ()). Τότε η απόσταση του $\operatorname{rb} P, \operatorname{rb} K$ είναι $\delta > 0$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\gamma = \min\{\frac{\varepsilon}{2V_{d-1}(P)}, \delta\}$. Εάν $Q(\gamma) = \{x + tu, x \in Q, t \in [-\gamma, +\gamma]\}$ τότε

$$\begin{aligned} K + \gamma S &\subseteq Q(\gamma) \qquad (1) \quad (\gamma \leq \delta) \quad \text{και} \\ V_d(Q(\gamma)) &= 2\gamma V_{d-1}(Q) \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} h(K_n, K)0$ ισχύει $K_n \subseteq K + \gamma S$, για $n \geq n_o$. (2).
Από τις $(1), (2)$ έχουμε $K_n \subseteq Q(\gamma)$, $n \geq n_o$. Άρα

$$V_d(K_n) \leq V_d(Q(\gamma)) = 2\gamma V_{d-1}(Q) \leq \varepsilon, \quad n \geq n_o.$$

Τελικά $\lim_{n\to\infty} V_d(K_n) = 0 = V_d(K)$.

II $V_d(K) > 0$.

Τότε $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ και επειδή η μετρική h είναι αναλλοίωτη στις μετατοπίσεις, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \operatorname{int} K$. Έστω $\delta > 0$ με $S(0,\delta) \subseteq K$. Τότε για $n \geq n_o$ έχουμε $h(K_n, K) < \frac{\delta}{3}$. Ισχύει $S\big(0, \frac{\delta}{3}\big) \subseteq K_n$ διότι αν υπήρχε $x \in S(0, \frac{\delta}{3})$ και $x \notin K_n$, θα υπήρχε υπερεπίπεδο $H = H(\xi, \alpha)$ με $x \in H$ και $K_n \cap H = \varnothing, \|\xi\| = 1$. Τότε $|\alpha| \leq \frac{\delta}{3}$. Για τα $\delta\xi, -\delta\xi \in K$ υπάρχουν $h_1, h_2 \in K_n$ με

$$\|h_1 + \delta\xi\| \leq \frac{\delta}{3}, \quad \|h_2 - \delta\xi\| \leq \frac{\delta}{3} \qquad (H(K_n, K) < \frac{\delta}{3}).$$

Άρα $< \xi, h_1 >> \frac{1}{2}\delta > \alpha$ και $< \xi, h_2 >< -\frac{1}{2}\delta < \alpha$. Δηλαδή υπάρχουν $h_1, h_2 \in K_n$ στους διαφορετικούς ημίχωρους H^+, H^-. Άτοπο, διότι $K_n \cap H = \varnothing$. Εξ'άλλου

$$K \subseteq K_n + h(K_n, K)S = K_n + h(K_n, K)\frac{3}{\delta}S(0, \frac{\delta}{3}) \subseteq \{1 + \frac{3}{\delta}h(K_n, K)\}K_n$$

και ομοίως $K_n \subseteq \{1 + \frac{3}{\delta}h(K_n, K)\}K$. Θέτοντας $\lambda_n = h(K_n, K)\frac{3}{\delta}$ έχουμε $K_n \subseteq (1 + \lambda_n)K, K \subseteq (1 + \lambda_n)K_n$, επομένως

$$V_d(K_n) \leq (1 + \lambda_n)^d V_d(K), \quad V_d(K) \leq (1 + \lambda_n)^d V_d(K_n) \quad \text{και}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} V_d(K_n) \leq V_d(K) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} V_d(K_n).$$

Τελικά έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} V_d(K_n) = V_d(K)$. $\qquad (\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0)$.

□

Πόρισμα 13.1.1.

Εάν K είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε

$$\begin{aligned} V_d(K) &= \sup\{V_d(P) : P \subseteq K, P \quad \textit{πολύτοπο}\} \\ &= \inf\{V_d(Q) : Q \supseteq K, Q \quad \textit{πολύτοπο}\} \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 14

Ανισότητα των Brünn - Minkowski

14.1 Εισαγωγή

Η ανισότητα των Brünn - Minkowski, είναι από τα κυριότερα αποτελέσματα που ισχύουν για τα κυρτά, συμπαγή σύνολα. Έχει πολλές εφαρμογές και βοηθά να λυθούν ορισμένα προβλήματα.

Θεώρημα 14.1.1 (Ανισότης Brünn - Minkowski).

Η συνάρτηση $V^{\frac{1}{d}} : \mathcal{H}_c \to \mathbb{R}$, είναι κοίλη, δηλαδή, αν K_o, K_1 είναι κυρτά, συμπαγή σύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε

$$V^{\frac{1}{d}}\big((1-\lambda)K_o + \lambda K_1\big) \geq (1-\lambda)V^{\frac{1}{d}}(K_o) + \lambda V^{\frac{1}{d}}(K_1), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Εάν $0 < \lambda < 1$, τότε ισχύει η ισότης αν και μόνον αν ισχύει ένα από τα κάτωθι:

1. *Τα K_o, K_1 είναι σε παράλληλα υπερεπίπεδα.*
2. $K_o = \{x\}$ *ή* $K_1 = \{y\}$.
3. *Τα K_o, K_1 είναι ομοιόθετα, δηλαδή $K_1 = rK_o + t$ για κάποιο $r > 0, \quad t \in \mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη.

Για να δείξουμε την ανισότητα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. $\mathbf{V}(K_o), V(K_1) > 0$.
Για $d = 1$, ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $d-1, d \geq 2$.

α. $V(K_o) = V(K_1) = 1$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $V\big((1-\lambda)K_o + \lambda K_1\big) \geq 1$.
Εάν $u \in \mathbb{R}^d, \|u\| = 1$, ορίζουμε για K κυρτό συμπαγές με $V(K) = 1$,

$$g(t) = V\big(K \cap H^-(u,t)\big), \quad t \in [c, C]$$

όπου $c = \min\{< u, x >: x \in K\}$ και $C = \max\{< u, x >: x \in K\}$. Τότε η g είναι "1-1" και επί του $[0,1]$. Επειδή

$$g(t) = \int_c^t V_{d-1}\big(K \cap H(u,z)\big) dz^1$$

έχουμε ότι

$$\frac{dV\big(K \cap H^-(u,t)\big)}{dt} = V_{d-1}\big(K \cap H(u,t)\big), \quad t \in [c, C]. \qquad (1)$$

Για την g υπάρχει η αντίστροφος συνάρτηση $g^{-1} = f$ που είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει για $f(r) = t$

$$V\big(K \cap H^-(u, f(r))\big) = V\big(K \cap H^-(u,t)\big) = g(t) = g\big(g^{-1}(r)\big) = r. \qquad (2)$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &\overset{(2)}{=} \frac{V\big(K \cap H^-(u, f(r))\big)}{dr} \\ &= \left.\frac{V\big(K \cap H^-(u,t)\big)}{dt}\right|_{t=f(r)} \cdot \frac{df(r)}{dr} \\ &\overset{(1)}{=} V\big(K \cap H(u, f(r))\big) \frac{df(r)}{dt} \end{aligned}$$

Για τα K_o, K_1 ορίζουμε g_o, g_1 και f_o, f_1 τις αντίστοιχες συναρτήσεις και $f_\lambda(r) = (1-\lambda)f_o(r) + \lambda f_1(r), \quad r \in [0,1]$. Τότε αν $K_\lambda = (1-\lambda)K_o + \lambda K_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} K_\lambda \cap H(u, f_\lambda(r)) \;\supseteq\; & (1-\lambda)\big\{K_o \cap H(u, f_o(r))\big\} \\ & +\lambda\big\{K_1 \cap H(u, f_1(r))\big\}. \qquad (4) \end{aligned}$$

Τα σύνολα $M_o(r) = K_o \cap H(u, f_o(r)), M_1(r) = K_1 \cap H(u, f_1(r))$ και $M_\lambda(r) = (1-\lambda)M_o(r) + \lambda M_1(r), \quad (0 < r < 1)$ βρίσκονται σε παράλληλα $(d-1)-$ επίπεδα και είναι διάστασης $(d-1)$. Μεταφέροντας τα σε ένα $(d-1)-$ επίπεδο ο V_{d-1} όγκος δεν μεταβάλλεται και από την υπόθεση ότι η ανισότης ισχύει για $(d-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_{d-1}\big(K_\lambda \cap H^-(u, f_\lambda(r))\big) &\overset{(4)}{\geq} V_{d-1}\big(M_\lambda(r)\big) \\ \geq \Big[(1-\lambda)V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}\big(M_o(r)\big) &+ \lambda V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}\big(M_1(r)\big)\Big]^{d-1} \qquad (5) \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} V(K_\lambda) &= V\big((1-\lambda)K_o + \lambda K_1\big) \\ &= \int_0^1 V_{d-1}\big(K_\lambda \cap H(u,t)\big)dt \\ &= \int_0^1 V_{d-1}\big(K_\lambda \cap H(u, f_\lambda(r))\big)\frac{df_\lambda(r)}{dr}dr \\ &\overset{(5)}{\geq} \int_0^1 \Big[(1-\lambda)V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}\big(M_o(r)\big) + \lambda V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}\big(M_1(r)\big)\Big]^{d-1} \\ &\qquad \cdot\Big[(1-\lambda)\frac{df_o(r)}{dr} + \lambda\frac{df_1(r)}{dr}\Big]dr \\ &\overset{(3)}{=} \int_0^1 \Big[(1-\lambda)V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}\big(M_o(r)\big) + \lambda V_{d-1}^{\frac{1}{d-1}}\big(M_1(r)\big)\Big]^{d-1} \\ &\qquad \cdot\Big[(1-\lambda)\frac{1}{V_{d-1}\big(M_o(r)\big)} + \lambda\frac{1}{V_{d-1}\big(M_1(r)\big)}\Big]dr \end{aligned}$$

Ισχύει

$$\left[(1-\lambda)\alpha^{\frac{1}{\nu}}+\lambda\beta^{\frac{1}{\nu}}\right]^{\nu}\cdot\left[(1-\lambda)\frac{1}{\alpha}+\lambda\frac{1}{\beta}\right]\geq 1$$

με ισότητα μόνον αν $\alpha=\beta$ (6). Άρα $V\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big)\geq 1$.

β. $V(K_o),V(K_1)>0$.

Ορίζουμε $K_i'=\left(\frac{1}{V(K_i)}\right)^{\frac{1}{d}}$, $i=0,1$. Τότε $V(K_i')=1$, $i=0,1$ και

$$\lambda'=\frac{\lambda V^{\frac{1}{d}}(K_1)}{(1-\lambda)V^{\frac{1}{d}}(K_o)+\lambda V^{\frac{1}{d}}(K_1)}.$$

Τότε

$$(1-\lambda')K_o'+\lambda' K_1'=\frac{1}{(1-\lambda)V^{\frac{1}{d}}(K_o)+\lambda V^{\frac{1}{d}}(K_1)}\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big).$$

Από το α) έχουμε $V\big((1-\lambda')K_o'+\lambda'K_1'\big)\geq 1$, άρα αντικαθιστώντας

$$V\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big)\geq\left[(1-\lambda)V^{\frac{1}{d}}(K_o)+\lambda V^{\frac{1}{d}}(K_1)\right]^{d}.$$

II. $\mathbf{V}(K_o)=0$ ή $V(K_1)=0$.

Εάν $V(K_o)=V(K_1)=0$ τότε προφανώς $V^{\frac{1}{d}}\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big)\geq 0$.

Έστω $V(K_o)=0$ και $V(K_1)>0$. Για $x_o\in K_o$ έχουμε $K_\lambda\supseteq(1-\lambda)x_o+\lambda K_1$, άρα $V(K_\lambda)\geq V(\lambda K_1)=\lambda^n V(K)$ ή

$$V^{\frac{1}{n}}\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big)\geq(1-\lambda)V^{\frac{1}{n}}(K_o)+\lambda V^{\frac{1}{n}}(K_1).$$

Ισότης

Εάν ισχύει μία από τις περιπτώσεις 1., 2., 3. τότε προφανώς ισχύει η ισότης.
Έστω ότι $V^{\frac{1}{d}}\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big)=(1-\lambda)V^{\frac{1}{d}}(K_o)+\lambda V^{\frac{1}{d}}(K_1)$. Εάν $V(K_o)=V(K_1)=0$ τότε και $V\big((1-\lambda)K_o+\lambda K_1\big)=0$ άρα τα K_o,K_1 βρίσκονται σε παράλληλα υπερεπίπεδα. Έχουμε την περίπτωση 1.
Εάν $V(K_o)=0,V(K_1)>0$ θα έχουμε ότι $K_\lambda=(1-\lambda)x_o+\lambda K_1$ (II) άρα

$K_o = \{x_o\}$. Όμοια για $V(K_o) > 0, V(K_1) = 0$ έχουμε ότι $K_1 = \{x_1\}$ και λαμβάνουμε την περίπτωση 2.

Εάν $V(K_o), V(K_1) > 0$, εφόσον ισχύει η ισότης, πρέπει να ισχύει και η (6) ως ισότης, δηλαδή

$$V_{d-1}\big(K \cap H(u, f_o(r))\big) = V_{d-1}\big(K \cap H(u, f_1(r))\big), \quad r \in [0,1].$$

α. Τα K_o, K_1 έχουν το ίδιο κέντρο βάρους $\bar{x}_o = \bar{x}_1 = \int_{K_o} xdV = \int_{K_1} xdV$. Τότε

$$\begin{aligned} < \bar{x}_o, u > &= \Big\langle \int_{K_o} xdV, u \Big\rangle \\ &= \int_{K_o} \big\langle xdV, u \big\rangle \\ &= \int_{c_o}^{C_o} \int_{K_o \cap H(u,t)} < x, u > dydt \\ &= \int_{c_o}^{C_o} tV\big(K_o \cap H(u, f_o(r))\big) f_o(r) \frac{df_o(r)}{dr} dr \\ &\overset{(3)}{=} \int_0^1 f_o(r) dr \end{aligned}$$

Ομοίως $< \bar{x}_1, u >= \int_0^1 f_1(r)dr$. Εξ'άλλου

$$1 = V\big(K \cap H(u, f_o(r))\big) \frac{df_o(r)}{dr} = V\big(K \cap H(u, f_1(r))\big) \frac{df_1(r)}{dr}.$$

Επειδή $V\big(K \cap H(u, f_o(r))\big) = V\big(K \cap H(u, f_1(r))\big)$ έχουμε

$$\frac{df_o(r)}{dr} = \frac{df_1(r)}{dr}, \quad r \in [0,1].$$

Άρα $f_o = f_1 + \theta, \quad \theta$ σταθερά. Αλλα

$$< \bar{x}_o, u >=< \bar{x}_1, u >= \int_0^1 f_o(r)dr = \int_0^1 f_1(r)dr + \theta = \int_0^1 f_1(r)dr.$$

Τελικά $\theta = 0$ και $f_o(r) = f_1(r), \quad r \in [0,1]$. Άρα

$$f_o(r) = f_1(r) = \max\{< u, x >: x \in K_o\} = \max\{< u, x >: x \in K_1\}.$$

Τα ανωτέρω ισχύουν για τυχαίο $u \in I\!R^d$, επομένως τα K_o, K_1 έχουν την ίδια φέρουσα συνάρτηση, άρα $K_o = K_1$.

β. Τα K_o, K_1 δεν έχουν το ίδιο κέντρο βάρους. Τότε τα $K_o - \bar{x}_o, K_1 - \bar{x}_1$ έχουν κέντρο βάρους το 0. Άρα $K_o - \bar{x}_o = K_1 - \bar{x}_1$ (από το α), δηλαδή $K_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_o) + K_o$, K_o, K_1 ομοιόθετα.

$\square$

Κεφάλαιο 15

Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα

15.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε απάντηση στο εξής ερώτημα:
Από όλα τα κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$ *που έχουν τον ίδιο όγκο, ποιό είναι αυτό που έχει το ελάχιστο εμβαδό επιφανείας.*
Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των μικτών όγκων.

Θεώρημα 15.1.1.

Εάν P, Q *είναι υποσύνολα του* $\mathbb{R}^d$ *και* $\lambda, \mu \geq 0$*, τότε ο όγκος*

$$V_d(\lambda P + \mu Q) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} v_o \lambda^d + \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix} v_1 \lambda^{d-1}\mu + \cdots + \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} v_d \mu^d$$

όπου

$v_o = V(\underbrace{P, \dots, P}_{d})$, $\quad v_1 = V(\underbrace{P, \dots, P}_{d\text{-}1}, \underbrace{Q}_{1})$, $\quad v_2 = V(\underbrace{P, \dots, P}_{d\text{-}2}, \underbrace{Q, Q}_{2}), \dots ,$
$v_d = V(\underbrace{Q, Q, \dots, Q}_{d})$ *σταθερές, οι οποίες καλούνται* **μικτοί όγκοι.**

Απόδειξη.

Έστω $R = \lambda P + \mu Q$. Επειδή ο όγκος V είναι αμετάβλητος στις μετατοπίσεις, υποθέτουμε ότι $0 \in R$.

Εάν $d = 1$, τότε το μήκος του R είναι

$$V_1(R) = \lambda V_1(P) + \mu V_1(Q)$$

άρα ισχύει το ζητούμενο με $v_o = V_1(P), v_1 = V_1(Q)$.
Έστω ότι ισχύει για $d-1$ με $d \geq 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για d.
το R είναι πολύτοπο και αν F είναι έδρα του, τότε $F = \lambda F_1 + \mu F_2$ όπου F_1, F_2 έδρες των P, Q αντίστοιχα με

$$F_1 = P \cap H\big(u, \varphi(P,u)\big), \quad F_2 = Q \cap H\big(u, \varphi(Q,u)\big)$$

αν $F = R \cap H\big(u, \varphi(R,u)\big)$. Αν $R^1, R^2, \ldots, R^m$ είναι οι έδρες του R διαστάσεως $(d-1)$ τότε

$$V_d(R) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{m} h_j V_{d-1}(R^j)$$

όπου h_j είναι η απόσταση του 0 από το $\operatorname{aff} R^j$. Επειδή $R^j = \lambda P^j + \mu Q^j$ με P^j, Q^j έδρες των P, Q, έχουμε $h^j = \lambda h_1^j + \mu h_2^j$, όπου $h_1^j \begin{pmatrix} j \\ h_i \end{pmatrix}$ είναι η απόσταση του 0 από το υπερεπίπεδο που περιέχει την $P^j(Q^j)$ και είναι παράλληλο στο $\operatorname{aff} R^j$. Λόγω της υπόθεσης για τον V_{d-1} έχουμε ότι το $V_{d-1}(R^j)$ είναι ομογενές πολυώνυμο $(d-1)$ βαθμού ως προς λ, μ, άρα ο

$$V_d(R) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{m} h_j \big(\lambda h_1^j + \mu h_2^j\big) V_{d-1}(R^j)$$

είναι πολυώνυμο $d-$ βαθμού ως προς λ, μ. □

Παρατήρηση

Για $\lambda = 1, \mu = 0$ έχουμε $V_d(P) = v_o$ ενώ για $\lambda = 0, \mu = 1$ $V_d(Q) = v_d$.
Για $d = 2$, ο τόπος γίνεται

$$V_2(\lambda P + \mu Q) = V_2(P)\lambda^2 + 2V(P,Q)\lambda\mu + V_2(Q)\mu^2$$

Επαγωγικά είναι εύκολο να δούμε ότι $v_j \geq 0, \quad 0 \leq j \leq d$. Για $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$,

$$V_d(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q) = \left(\begin{array}{c} d \\ 0 \end{array}\right) v_o \frac{1}{2^d} + \left(\begin{array}{c} d \\ 1 \end{array}\right) v_1 \frac{1}{2^d} + \cdots + \left(\begin{array}{c} d \\ d \end{array}\right) v_d \frac{1}{2^d} \geq v_j \frac{1}{2^d}$$

$0 \leq j \leq d, \quad (v_o, v_1, \ldots, v_d \geq 0)$.
Εάν $P, Q \subseteq K$ για K συμπαγές, κυρτό σύνολο, τότε οι μικτοί όγκοι $v_j \leq V_d(K) \cdot 2^d$. $\quad (\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \subseteq K)$.

Επειδή το σύνολο των πολυτόπων κείται πυκνά στο σύνολο των συμπαγών, κυρτών συνόλων του $\mathbb{R}^d$ και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης V_d οι μικτοί όγκοι ορίζονται και για τυχαία συμπαγή, κυρτά σύνολα K_1, K_2 του $\mathbb{R}^d$.
Έστω $P_n^{(1)} \xrightarrow{h} K_1, P_n^{(2)} \xrightarrow{h} K_2$. Τότε

$$\lambda P_n^{(1)} + \mu P_n^{(2)} \xrightarrow{h} \lambda K_1 + \mu K_2 \quad \text{και} \quad V\big(\lambda P_n^{(1)} + \mu P_n^{(2)}\big) \to V\big(\lambda K_1 + \mu K_2\big).$$

Από το Θεώρημα () έχουμε

$$V\big(\lambda P_n^{(1)} + \mu P_n^{(2)}\big) = \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array}\right) v_i^{(n)} \lambda^{d-i} \mu^i,$$

όπου

$$v_i^{(n)} = V(\underbrace{P_n^{(1)}, P_n^{(1)}, \ldots, P_n^{(1)}}_{\text{d-i}}, \underbrace{P_n^{(2)}, P_n^{(2)}, \ldots, P_n^{(2)}}_{\text{i}}), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Λόγω της σύγκλισης έχουμε ότι $P_n^{(1)}, P_n^{(2)} \subseteq K$ για κάποιο K συμπαγές, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$, άρα οι ακολουθίες $\{v_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}, \quad 0 \leq i \leq d$ είναι φραγμένες. Άρα υπάρχει υπακολουθία $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, ώστε $v_i^{n_k} \to v_i$. Τότε

$$V\big(\lambda P_n^{(1)} + \mu P_n^{(2)}\big) \to \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array}\right) v_i^{(n)} \lambda^{d-i} \mu^i.$$

Άρα

$$V\big(\lambda K_1 + \mu K_2\big) = \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array}\right) v_i^{(n)} \lambda^{d-i} \mu^i.$$

Εάν θεωρήσουμε άλλες ακολουθίες πολυτόπων θα έχουμε

$$V\big(\lambda K_1 + \mu K_2\big) = \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) u_i^{(n)} \lambda^{d-i} \mu^i .$$

Επειδή τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $\lambda, \mu \geq 0$, έχουμε ότι $v_i = u_i, \quad 0 \leq i \leq n$. Τελικά

$$V\big(\lambda K_1 + \mu K_2\big) = \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) v_i^{(n)} \lambda^{d-i} \mu^i ,$$

δηλαδή ο όγκος $V\big(\lambda K_1 + \mu K_2\big)$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμου d ως προς λ, μ. Οι σταθερές $v_o, v_1, \ldots, v_d$ καλούνται **μικτοί όγκοι** και είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Θεώρημα 15.1.2.

Έστω K_o, K_1 συμπαγή, κυρτά σύνολα με μη κενό εσωτερικό στον $\mathbb{R}^d$. Τότε $v_1^d \geq v_o^{d-1} \cdot v_d$.
Ισότης ισχύει, αν και μόνον αν τα K_o, K_1 είναι ομοιόθετα.

Απόδειξη.

Έστω $K_\vartheta = (1-\vartheta)K_o + \vartheta K_1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1$. Τότε

$$V\big(K_\vartheta\big) = \sum_{i=0}^{d} \left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array} \right) v_i^{(n)} (1-\vartheta)^{d-i} \vartheta^i , \qquad (*)$$

v_i οι μικτοί όγκοι.
Από την ανισότητα Brünn - Minkowski, έχουμε ότι η $V^{\frac{1}{d}}(K_\vartheta)$ είναι κοίλη συνάρτηση ως προς ϑ, άρα για την f :

$$f(\vartheta) = V^{\frac{1}{d}}(K_\vartheta) - (1-\vartheta)V^{\frac{1}{d}}(K_o) + \vartheta V^{\frac{1}{d}}(K_1) = V^{\frac{1}{d}}(K_\vartheta) - (1-\vartheta)v_o^{\frac{1}{d}} - \vartheta v_d^{\frac{1}{d}}$$

ισχύει $f(\vartheta) \geq 0$ και $f(\vartheta) = 0$ αν και μόνον αν τα K_o, K_1 είναι ομοιόθετα. $(V(K_o), V(K_1) > 0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (από την $(*)$) και $f(0) = 0 = f(1)$. Άρα $f'(0) \geq 0$ και $f'(0) = 0$ αν και μόνον αν $f(\vartheta) = 0, \vartheta \in [0,1]$. Υπολογίζοντας βρίσκουμε ότι

$$f'(0) = \frac{v_1 - v_o^{1-\frac{1}{d}} \cdot v_d^{\frac{1}{d}}}{v_o^{1-\frac{1}{d}}}.$$

Άρα $v_1^d \geq v_o^{d-1} \cdot v_d$ και η ισότης ισχύει αν και μόνον αν τα K_o, K_1 είναι ομοιόθετα.

□

Ορισμός 15.1.1.

Εάν K συμπαγές, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$, ορίζουμε ως **εμβαδό επιφανείας** *του K το όριο*

$$A(K) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{V(K + \delta S) - V(K)}{\delta}$$

όπου S η κλειστή μοναδιαία σφαίρα.

Παρατήρηση

1. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(K + \delta S) &= \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} v_i^{(n)} (1 - \vartheta)^{d-i} \delta^i \\ &= V(K) + \delta v_1 \delta + \binom{d}{2} v_2 \delta^2 + \cdots + \binom{d}{d} V(S) \delta^d, \end{aligned}$$

$\delta > 0$. Άρα

$$\frac{V(K + \delta S) - V(K)}{\delta} = \delta v_1 \delta + \binom{d}{2} v_2 \delta + \cdots + \binom{d}{d} V(S) \delta^{d-1},$$

$\delta > 0$. Επομένως το όριο $A(K) = dv_1, \quad (v_1 = V(K, K, \ldots, K, S))$ υπάρχει.

2. Εάν $K = S$ τότε $A(S) = dV(S)$.

Θεώρημα 15.1.3 (Ισοπεριμετρική Ανισότητα).

Εάν K κυρτό, συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^d$, (με μη κενό εσωτερικό) τότε

$$\left[\frac{A(K)}{A(S)}\right]^d \geq \left[\frac{V(K)}{V(S)}\right]^{d-1}.$$

Ισότης ισχύει αν και μόνον το K είναι σφαίρα.

Απόδειξη.

Εάν θέσουμε $K_o = K, K_1 = S$ στο Θεώρ.(), έχουμε

$$\left[\frac{A(K)}{d}\right]^d \geq V(K)^{d-1} \cdot V(S).$$

Επειδή $A(S) = dV(S)$, αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\left[\frac{A(K)}{A(S)}\right]^d \geq \left[\frac{V(K)}{V(S)}\right]^{d-1}.$$

Ισότης ισχύει αν και μόνον το K είναι ομοιόθετο με τη σφαίρα S, δηλαδή το K είναι σφαίρα. □

Πόρισμα 15.1.1.

Από όλα τα κυρτά, συμπαγή σύνολα του $\mathbb{R}^d$ με δοθέντα όγκο V, η σφαίρα S_ν όγκου V έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας.

Απόδειξη.

Έστω $V(K) = V(S_\nu) = V$. Τότε το $K_1 = \frac{V^{\frac{1}{d}}(S)}{V^{\frac{1}{d}}}K$ έχει όγκο $V(K_1) = V(S)$ και εμβαδόν επιφανείας

$$A(K_1) = \left(\frac{V(S)}{V}\right)^{\frac{d-1}{d}} A(K).$$

Επίσης έχουμε

$$\left[\frac{A(S_\nu)}{A(S)}\right]^d = \left[\frac{V}{V(S)}\right]^{d-1} \quad \text{ή} \quad A(S) = \left(\frac{V(S)}{V}\right)^{\frac{d-1}{d}} A(S_\nu).$$

Αντικαθιστώντας τα K_1, S στην ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε

$$\left[\frac{A(K_1)}{A(S)}\right]^d \geq \left[\frac{V(K_1)}{V(S)}\right]^{d-1} = 1 \quad \acute{\eta} \quad A(K) \geq A(S_\nu)$$

με ισότητα, τότε και μόνον τότε, αν το K είναι σφαίρα όγκου V. □

Πόρισμα 15.1.2.

Από όλα τα κυρτά, συμπαγή σύνολα του $\mathbb{R}^d$ με δοθέν εμβαδόν επιφανείας A, η σφαίρα εμβαδού επιφανείας A έχει τον μέγιστο όγκο.

Απόδειξη.

Όμοια με το Πόρισμα 4. □

Κεφάλαιο 16

Συμμετρικοποίηση Steiner

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την συμμετρικοποίηση κατά Steiner και θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί.

16.1 Εισαγωγή

Ορισμός 16.1.1.

Έστω Π ένα υπερεπίπεδο του E^n με $0 \in \Pi$ και p να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του Π, δηλαδή

$$\Pi = \{x \in E^n : x \cdot p = 0\}.$$

Τότε κάθε $z \in E^n$ αναλύεται ως εξής, $z = y(z) + \nu p$, όπου $y(z) \in \Pi, \quad \nu \in E$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Το $y(z)$ καλείται **ορθογώνιος προβολή του z** *στο Π.*
Έστω K κυρτό σώμα του E^n. Τότε το $k \in K$ βρίσκεται στην ευθεία $\{y(k) + \lambda p : -\infty < \lambda < +\infty\}$. Αν η ευθεία αυτή τέμνει το K στο ευθύγραμμο τμήμα $\{y(k) + \lambda p : \alpha(k) \leq \lambda \leq \beta(k)\}$ γράφουμε $y(k) = \beta(k) - \alpha(k)$ και $\delta(k) = \frac{1}{2}\big(\beta(k) + \alpha(k)\big)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi : K \to E^n, \quad \varphi(k) = k - \delta(k)p.$$

Τότε το $y(k)$ βρίσκεται στο μέσον του μετασχηματισμένου ευθύγραμμου τμήματος.
Το σύνολο $\varphi(K) = S_\Pi(K)$, λέμε ότι προήλθε από το K, μετά από εφαρμογή της **συμμετρικοποίησης κατά Steiner ως προς το επίπεδο** Π.
Είναι εύκολο να δούμε ότι το $S_\Pi(K)$ είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο Π, δηλαδή αν το $w = y(w) + \mu p \in S_\Pi(K)$ τότε και το $w' = y(w) - \mu p \in S_\Pi(K)$.

Θεώρημα 16.1.1.

Εάν K είναι κυρτό σώμα του E^n, τότε και το $K^* = S_\Pi(K)$ είναι κυρτό σώμα.

Απόδειξη.

Το K είναι φραγμένο, άρα υπάρχει σφαίρα $S(w,R)$ με $w \in \Pi$ και $K \subseteq S(w,R)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $S_\Pi\big(S(w,R)\big) = S(w,R)$ και αν $K \subseteq H$ τότε και $S_\Pi(K) \subseteq S_\Pi(H)$. Έτσι έχουμε

$$K^* = S_\Pi(K) \subseteq S_\Pi\big(S(w,R)\big) = S(w,R)$$

δηλαδή το K^* είναι φραγμένο.
Έστω $\{x_i^*\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία του K^* με $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^* = x_o^* \qquad (1).$
Θα δείξουμε ότι $x_o^* \in K^*$.
Για το $x_i^* \in \varphi(K)$ υπάρχει $k_i \in K$ με $x_i^* = k_i - \delta(k_i)p$, όπου $\delta(k_i) = \frac{1}{2}\big(\alpha(k_i) + \beta(k_i)\big)$. Όμως $k_i = y(k_i) + \nu_i p$ για κάποιο $\nu_i \in E, \quad \alpha(k_i) \le nu_i \le \beta(k_i)$. Άρα

$$x_i^* = y(k_i) + [\nu_i - \delta(k_i)]p = y(k_i) + \lambda_i p \qquad (2)$$

για κάποιο $\lambda_i \in E, \quad -\frac{1}{2}\big(\alpha(k_i) - \beta(k_i)\big) \le \lambda_i \le \frac{1}{2}\big(\alpha(k_i) - \beta(k_i)\big). \qquad (4)$
Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι φραγμένες ακολουθίες

$$\{k_i\}_{i=1}^\infty \subseteq K, \quad \{\alpha(k_i)\}_{i=1}^\infty, \quad \{\beta(k_i)\}_{i=1}^\infty$$

συγκλίνουν, έστω στα $k_o \in K, \alpha_o, \beta_o$ αντίστοιχα. $\qquad (3)$
Από τις $(1), (2), (3)$ έχουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda_o \in E$ και $x_o^* = y(k_o) +$

$\lambda_o p, \quad k_o \in K$. Από τον ορισμό των $\alpha(k_i), \beta(k_i)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y(k_i) + \alpha(k_i)p &\in K \\ y(k_i) + \beta(k_i)p &\in K \end{aligned}$$

Λόγω της κλειστότητας του K έχουμε

$$\lim_{i\to\infty}\{y(k_i) + \alpha(k_i)p\} = y(k_o) + \alpha_o p \in K \quad \text{και}$$

$$\lim_{i\to\infty}\{y(k_i) + \beta(k_i)p\} = y(k_o) + \beta_o p \in K$$

άρα $\alpha(k_o) \le \alpha_o$ και $\beta(k_o) \ge \beta_o \qquad (5)$.
Έτσι $x_o^* = y(k_o) + \lambda_o p, \quad k_o \in K$ και $|\lambda_o| \le \frac{1}{2}(\beta_o - \alpha_o) \le \frac{1}{2}\big(\beta(k_o) - \alpha(k_o)\big)$ (από τις $(4),(5)$). Έτσι το K^* είναι κλειστό.
Έστω $x_1^*, x_2^* \in K^*$ και $0 < \vartheta < 1$. Θα δείξουμε ότι $x^* = (1-\vartheta)x_1^* + \vartheta x_2^* \in K^*$. Αν $x_1^* = y(k_1) + \lambda_1 p, x_2^* = y(k_2) + \lambda_2 p$, για $k_i \in K, \quad |\lambda_i| \le \big(\beta(k_i) - \alpha(k_i)\big), \quad i = 1, 2$, τότε

$$\begin{aligned} x^* &= \big[(1-\vartheta)y(k_1) + \vartheta y(k_2)\big] + \big[(1-\vartheta)\lambda_1 + \vartheta\lambda_2\big]p \\ &= y[(1-\vartheta)k_1 + \vartheta k_2] + [(1-\vartheta)\lambda_1 + \vartheta\lambda_2]p \end{aligned}$$

Επειδή το K είναι κυρτό, το σημείο $k_o = (1-\vartheta)k_1 + \vartheta k_2 \in K$. Εξ'άλλου έχουμε

$$(1-\vartheta)\big[y(k_1) + \alpha(k_1)p\big] + \vartheta\big[y(k_2) + \alpha(k_2)p\big] \in K \Rightarrow$$

$$y(k_o) + \big[(1-\vartheta)\alpha(k_1) + \vartheta\alpha(k_2)\big]p \in K,$$

άρα $\alpha(k_o) \le (1-\vartheta)\alpha(k_1) + \vartheta\alpha(k_2)$ και όμοια $(1-\vartheta)\beta(k_1) + \vartheta\beta(k_2) \le \beta(k_o) \qquad (7)$.
Άρα

$$\begin{aligned} |(1-\vartheta)\lambda_1 + \vartheta\lambda_2| &\le (1-\vartheta)|\lambda_1| + \vartheta|\lambda_2| \\ &\overset{(6)}{\le} \frac{(1-\vartheta)}{2}\big(\beta(k_1) - \alpha(k_1)\big) + \frac{\vartheta}{2}\big(\beta(k_2) - \alpha(k_2)\big) \\ &\overset{(7)}{\le} \frac{1}{2}\big(\beta(k_o) - \alpha(k_o)\big) \end{aligned}$$

Τελικά το $x^* = y(k_o) + \big[(1-\vartheta)\lambda_1 + \vartheta\lambda_2\big]p \in K$ επειδή $k_o \in K$ και

$$|(1-\vartheta)\lambda_1 + \vartheta\lambda_2| \leq \frac{1}{2}\big(\beta(k_o) - \alpha(k_o)\big)$$

δηλαδή το K^* είναι κυρτό.
Έστω $k_o \in K^o$. Τότε υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε $k_o + rS \subseteq K$. Άρα

$$\begin{aligned}
\varphi(k_o + rS) &\subseteq \varphi(K) \Rightarrow \\
\varphi(k_o) + rS &\subseteq K^* \Rightarrow \\
\varphi(k_o) &\in (K^*)^o
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το K^* είναι κυρτό σώμα. □

Θεώρημα 16.1.2.

Εάν $K^* = S_\Pi(K)$, K κυρτό σώμα, τότε $V(K^*) = V(K)$.

Απόδειξη.

Κατ'αρχάς, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $y\big((K^*)^o\big) = y(K^o)$ (1)
όπου y είναι η συνάρτηση προβολή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι

$$\Pi = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n : x_n = 0\big\} = \big\{x \in E^n : x \cdot e_n = 0\big\}$$

$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Τα σύνολα K, K^* είναι κλειστά, άρα

$$K = K^o \cup \operatorname{bd} K, \quad K^* = (K^*)^o \cup \operatorname{bd} K^*. \qquad (2)$$

Επειδή τα K, K^* είναι σώματα, οι χ_K, χ_{K^*} είναι ολοκληρώσιμες, άρα

$$V(\operatorname{bd} K) = V(\operatorname{bd} K^*) = 0 \qquad (3)$$

Εξ'άλλου, για $k_o \in y(K)$, ορίζουμε $\alpha(k_o) = \alpha(k), \beta(k_o) = \beta(k)$ αν $y(k) = k_o$

$$K^o = \big\{(x_1, \dots, x_n) = k \in K : (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = k_o \in y(K^o), \quad \alpha(k_o) < x_n < \beta(k_o)\big\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\alpha, \beta : y(K^o) \to E$ είναι συνεχείς.
Έστω $\varepsilon > 0$, και $k_o = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in y(K^o)$. Για το k_o υπάρχει $k = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in K^o$ με $y(k) = k_o$. Τότε

$$k = k_o + x_n e_n \in K^o \Rightarrow \exists \zeta > 0 \quad \text{με} \quad k_o + x_n e_n + \zeta S \subseteq K \Rightarrow \beta(k) > x_n.$$

Θεωρούμε $0 < \varepsilon_o < \min\{\varepsilon, \beta(k) - x_n\}$. Έχουμε

$$k_o + \big(\beta(k) + \varepsilon_o\big)e_n \notin K \Rightarrow$$

$$\exists \eta > 0, \quad \eta < \frac{\varepsilon_o \zeta}{\beta(k) - x_n} \quad \text{με} \quad \big[k_o + \big(\beta(k) + \varepsilon_o\big)e_n + \eta S\big] \cap K = \varnothing \quad (4)$$

(K^c ανοικτο).
Αλλά $k_o + \beta(k)e_n \in K, \quad k_o + x_n e_n + \zeta S \subseteq K \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\beta(k) - x_n - \varepsilon_o}{\beta(k) - x_n}\big(k_o + \beta(k)e_n\big) + \frac{\varepsilon_o}{\beta(k) - x_n}\big(k_o + x_n e_n + \zeta S\big) \quad &\subseteq \quad K \quad (K \text{ κυρτό}) \\ \Rightarrow k_o + x_n e_n + \left(\frac{\beta(k) - x_n - \varepsilon_o}{\beta(k) - x_n}\right)\big(\beta(k) - x_n\big)e_n + \eta S \quad &\subseteq \quad K \\ \Rightarrow k_o + \big(\beta(k) - \varepsilon_o\big)e_n + \eta S \quad &\subseteq \quad K \qquad (5) \end{aligned}$$

Έστω $k' \in K^o$ με $|y(k') - y(k)| < \eta$. Τότε

$$y(k') = y(k) + \delta x_o = k_o + \delta x_o, \quad \text{για} \quad \delta < \eta \quad \text{και} \quad x_o \in S$$

$$\Rightarrow y(k) + \big(\beta(k) + \varepsilon_o\big)e_n + \delta x_o = y(k') + \big(\beta(k) + \varepsilon_o\big)e_n \notin K \quad \text{από την (4).}$$

Άρα $\beta(k') < \beta(k) + \varepsilon_o$. Εξ'άλλου $y(k') + \big(\beta(k) - \varepsilon_o\big)e_n \in K$ (από την (5)). Άρα $\beta(k') > \beta(k) - \varepsilon_o$. Τελικά για $|y(k') - y(k)| < \eta, \quad k', k \in K^o$ έχουμε $\big|\beta(y(k')) - \beta(y(k))\big| < \varepsilon_o < \varepsilon$, δηλαδή η β είναι συνεχής στο $y(K^o)$. Όμοια αποδεικνύεται ότι η α είναι συνεχής στο $y(K^o)$.
Από τις σχέσεις $(1), (2), (3)$ και το Θεώρημα του Fubini (το οποίο ισχύει εφόσον

α, β είναι συνεχείς) έχουμε

$$\begin{aligned} V(K) &= V(K^o) + V(\mathrm{bd}\, K) = V(K^o) \\ &= \int_{E^n} \chi_{K^o} dx \\ &= \int_{K^o} \left[\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} dx_n \right] dz \\ &= \int_{y(K^o)} \big(\beta(z) - \alpha(z)\big) dz \\ &= \int_{y((K^*)^o)} \left[\int_{-\frac{1}{2}\left(\beta(z)-\alpha(z)\right)}^{+\frac{1}{2}\left(\beta(z)-\alpha(z)\right)} dx_n \right] dz \\ &= V\big((K^*)^o\big) = V(K^*) \end{aligned}$$

□

Εάν K είναι κυρτό σώμα του E^n, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η **ροπή**

$$I(K) = \int_K |x|^2 dx.$$

Για αυτήν ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα, που είναι χρήσιμο για τα επόμενα.

Θεώρημα 16.1.3.

Εάν K^* είναι η συμμετρικοποίηση του K ως προς Π, τότε

$$I(K^*) = \int_{K^*} |x|^2 dx \leq \int_K |x|^2 dx = I(K).$$

Η ισότης ισχύει, τότε και μόνον τότε, αν το K είναι συμμετρικό ως προς Π.

Απόδειξη.

Όπως και στο Θεώρημα 13.2.2, υποθέτουμε ότι $\Pi = \big\{x \in E^n : x \cdot e_n = 0\big\}$.

$$\begin{aligned} I(K) &= \int_K |x|^2 dx \\ &= \int_{y(K^o)} \left[\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} \big[|z|^2 + x_n^2\big] dx_n \right] dz \\ &= \int_{y(K^o)} \left[|z|^2 \big(\beta(z) - \alpha(z)\big) + \frac{1}{3}\big(\beta^3(z) - \alpha^3(z)\big) \right] dz \end{aligned}$$

Γράφουμε $\alpha(z) = \delta(z) - \gamma(z), \quad \beta(z) = \delta(z) + \gamma(z)$. Τότε

$$\frac{1}{2}\big[\beta(z) - \alpha(z)\big] = \gamma(z) \quad \text{και} \quad \beta^3(z) - \alpha^3(z) = 6\delta^2(z)\gamma(z) + 2\gamma^3(z).$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned} I(K) &= \int_{y((K^*)^o)} \left[|z|^2\left(\gamma(z) - \big(-\gamma(z)\big) + \frac{1}{3}\big(\gamma^3(z) - \big(-\gamma^3(z)\big)\big)\right)\right] dz \\ &\quad + \int_{y(K)} 2\delta^2(z)\gamma(z)dz \\ &= \int_{K^*} |x|^2 dx + 2\int_{y(K^o)} \delta^2(z)\gamma(z)dz \\ &= I(K^*) + 2\int_{y(K^o)} \delta^2(z)\gamma(z)dz \qquad (1) \end{aligned}$$

Άρα $I(K) \leq I(K^*)$.

Εάν το K είναι συμμετρικό ως προς Π τότε

$$\beta(z) = -\alpha(z) \Rightarrow \delta(z) = \frac{1}{2}\big(\alpha(z) + \beta(z)\big) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} I(K) = I(K^*).$$

Οι συναρτήσεις α, β είναι συνεχείς στο $y(K^o)$, και $\beta(z) > \alpha(z)$ για $z \in y(K^o)$. (βλ. απόδ. Θεωρ. 13.2.2). Εάν $I(K) = I(K^*)$ τότε

$$\int_{y(K^o)} \delta(z)\gamma(z)dz = 0.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\delta(z) = 0, z \in y(K^o) \Rightarrow \alpha(z) = -\beta(z) \quad \text{για} \quad z \in y(K^o) \Rightarrow$$

Το K^o είναι συμμετρικό ως προς Π. Επειδή $K = \overline{K^o}$ συμπεραίνουμε ότι το K είναι συμμετρικό ως προς Π. □

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των εμβαδών επιφανείας των K, K^*, χρησιμοποιούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 16.1.1.

Εάν K είναι κυρτό σώμα και $\varepsilon > 0$, τότε

$$S_\Pi(K) + \varepsilon S \subseteq S_\Pi(K + \varepsilon S).$$

Απόδειξη.

Έστω $q \in S_\Pi(K) + \varepsilon$. Τότε $q = k^* + \varepsilon b, \quad k^* \in S_\Pi(K) = K^*$ και $b \in S$. Το $k^* = z + \lambda p, \quad z \in \Pi$ και

$$-\frac{1}{2}\big(\beta(z) - \alpha(z)\big) \leq \lambda \leq +\frac{1}{2}\big(\beta(z) - \alpha(z)\big),$$

$b = w + \eta p$ για $w \in \Pi$. Τότε το $c = w + |\eta| p \in S, c' = w - |\eta| p \in S$.
Το σημείο $z \pm \lambda p + \frac{1}{2}\big(\beta(z) - \alpha(z)\big)p \in K$ άρα $z \pm \lambda p + \frac{1}{2}\big(\beta(z) + \alpha(z)\big)p + \varepsilon c \in K + \varepsilon S \Rightarrow \big(\beta(z) + \alpha(z)\big)p \pm \varepsilon|\eta|p \in K + \varepsilon S \qquad (1)$
Έστω $\alpha^* = \alpha(z + \varepsilon w), \quad \beta^* = \beta(z + \varepsilon w)$ ως προς το σύνολο $K + \varepsilon S$. Η σχέση (1) ισχύει για τυχαίο $|\lambda| \leq \frac{1}{2}\big(\beta(z) - \alpha(z)\big)$ άρα

$$\begin{aligned}(z + \varepsilon w) + \big(\alpha(z) \pm \varepsilon|\eta|\big)p &\in K + \varepsilon S \qquad \text{και}\\ (z + \varepsilon w) + \big(\beta(z) \pm \varepsilon|\eta|\big)p &\in K + \varepsilon S \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\alpha^* \leq \alpha(z) \pm \varepsilon|\eta| \leq \beta(z) \pm \varepsilon|\eta| \leq \beta^* \qquad (2)$$

Από την (2) έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^* &\leq \frac{1}{2}(\alpha^* + \beta^*) - \frac{1}{2}\big(\beta(z) - \alpha(z)\big) - \varepsilon\eta\\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha^* + \beta^*) + \lambda + \varepsilon\eta\\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha^* + \beta^*) + \frac{1}{2}\big(\beta(z) - \alpha(z)\big) + \varepsilon\eta\\ &\leq \beta^*\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}(z + \varepsilon w) + \left(\frac{1}{2}(\alpha^* + \beta^*) + \lambda + \varepsilon\eta\right)p &\in K + \varepsilon S \Rightarrow\\ (z + \varepsilon w) + (\lambda + \varepsilon\eta)p &\in S_\Pi\big(K + \varepsilon S\big) \Rightarrow\\ k^* + \varepsilon b = q &\in S_\Pi(K + \varepsilon S)\end{aligned}$$

Άρα $S_\Pi(K) + \varepsilon S \subseteq S_\Pi(K + \varepsilon S)$. □

Θεώρημα 16.1.4.

Εάν K είναι κυρτό σώμα και $K^* = S_\Pi(K)$ τότε $A(K^*) \leq A(K)$.

Απόδειξη.

Επειδή (Λημμα()) $K^* + \varepsilon S \subseteq S_\Pi(K + \varepsilon S)$ έχουμε

$$V(K^* + \varepsilon S) \leq V\big(S_\Pi(K + \varepsilon S)\big) = V(K + \varepsilon S).$$

Άρα

$$\begin{aligned} A(K^*) &= \liminf_{\varepsilon > 0} \frac{V(K^* + \varepsilon S) - V(K^*)}{\varepsilon} \\ &\leq \lim_{\varepsilon > 0} \frac{V(K + \varepsilon S) - V(K)}{\varepsilon} = A(K) \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση

Εάν το K είναι συμμετρικό ως προς Π, τότε $K = K^*$ άρα και $A(K) = A(K^*)$. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $A(K) = A(K^*)$, τότε το K είναι συμμετρικό ως προς Π. Για την απόδειξη αυτού χρειαζόμαστε την συνέχεια της συνάρτησης A και τον "τύπο Cauchy για το εμβαδόν επιφανείας".

Θεώρημα 16.1.5.

Εάν K είναι κυρτό σώμα και $K^* = S_\Pi(K)$, τότε $d(K^*) \leq d(K)$. (d η διάμετρος).

Απόδειξη.

Επειδή το K^* είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, x_2 \in K^*$ με $|x_1 - x_2| = \delta(K^*)$. Έστω $x_i = z_i + \lambda_i p, \quad z_i \in \Pi$ και

$$-\frac{1}{2}\big(\beta(z_i) - \alpha(z_i)\big) \leq \lambda_i \leq +\frac{1}{2}\big(\beta(z_i) - \alpha(z_i)\big).$$

Τότε το $w_i = z_i + \left(\frac{1}{2}\big(\beta(z_i) + \alpha(z_i)\big) + \lambda_i\right)p \in K$, για $i = 1, 2$. Αλλά

$$|w_1 - w_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |(\delta(z_1) - \delta(z_2)) + (\lambda_2 - \lambda_1)|^2$$

όπου $\delta(z_i) = \frac{1}{2}\big((\beta(z_i) - \alpha(z_i)\big), \quad i = 1, 2$. Εκλέγοντας κατάλληλα το $(+)$ ή το $(-)$ έχουμε

$$|w_1 - w_2|^2 \geq |z_1 - z_2|^2 + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 = |x_1 - x_2|^2 = d^2(K^*).$$

Άρα $d(K) \geq d(K^*)$. □

Θεώρημα 16.1.6.

Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, συμπαγή, κυρτά σύνολα με $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K_o$, όπου K_o είναι κυρτό σ'ωμα με $0 \in K_o^o$. Τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} S_\Pi K_n = S_\Pi K_o.$$

Απόδειξη.

Επειδή $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, είναι φραγμένη ακολουθία, έστω $K_n \subseteq R\cdot S$, για $n = 0, 1, 2, \dots \quad (R > 0)$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K_o$, υπάρχει $n_o \in I\!N$ ώστε

$$\rho(K_n, K_o) < \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^3}{R^3} \quad \text{για} \quad n \geq n_o. \qquad (1)$$

Έστω $\frac{\varepsilon^2}{r^2} < \eta < \frac{\varepsilon}{R}$ με $S(0, \eta) \subseteq K_o \qquad (2)$.
Από τις $(1), (2)$ και το Θεώρημα() έχουμε ότι

$$K_n \subseteq \big\{1 + \frac{\varepsilon}{\eta}\rho(K_n, K_o)\big\}K_o \subseteq \big\{1 + \frac{\varepsilon}{R}\big\}K_o \quad \text{για} \quad n \geq n_o$$

και $K_o \subseteq \big\{1 + \frac{\varepsilon}{R}\big\}K_n$ για $n \geq n_o$. Άρα

$$\begin{aligned}
S_\Pi(K_n) &\subseteq S_\Pi\Big((1 + \frac{\varepsilon}{R})K_o\Big) \\
&= (1 + \frac{\varepsilon}{R})S_\Pi(K_o) \\
&\subseteq S_\Pi(K_o) + \frac{\varepsilon}{R}S_\Pi(K_o) \\
&\subseteq S_\Pi(K_o) + \frac{\varepsilon}{R}S_\Pi(R\cdot S) \\
&= S_\Pi(K_o) + \varepsilon S \qquad \text{για } n \geq n_o
\end{aligned}$$

Όμοια $S_\Pi(K_o) \subseteq S_\Pi(K_n) + \varepsilon S$ για $N \geq n_o$.
Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} S_\Pi K_n = S_\Pi K_o$. □

Πόρισμα 16.1.1.

Η $S_\Pi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ τα κυρτά σώματα του E^n) είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 16.1.7.

Έστω K κυρτό σώμα του E^n με $0 \in K^o$. Έστω $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$ υπερεπίπεδα που περνούν από το 0. Ορίζουμε $\Pi_{t\cdot r+s} = \Pi_s$ για $t = 0, 1, \dots$ και $1 \leq s \leq r$. Θέτουμε $K_o = K$ και $K_{t\cdot r+s}$ την συμμετρικοποίηση του $K_{t\cdot r+s-1}$ ως προς το $\Pi_{t\cdot r+s}$ για $t = 0, 1, \dots$ και $1 \leq s \leq r$.
Τότε η ακολουθία $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$, συγκλίνει σε ένα κυρτό σώμα K^* που έχει τον ίδιο όγκο με το K και είναι συμμετρικό ως προς $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$.

Απόδειξη.

Συμβολίζουμε $S_m = S_{\Pi_m}$, $K_{m+1} = S_{m+1}K_m$, $K_o = K$. Τα K_m είναι κυρτά σώματα (Θεώρ()) και $V(K_m) = V(K)$ (Θεώρ()). Εξ' άλλου για την ροπή ισχύει

$$I(K_o) \geq I(K_1) \geq \cdots, I(K) = \int_K |x|^2 dx. \quad (\Theta\varepsilon\omega\rho.()).$$

Εάν $B \subseteq R \cdot S$, $(R > 0)$, τότε και $K_m \subseteq R \cdot S$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$. Έστω το σύστημα ακολουθιών

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_o & \overset{S_{\Pi_1}}{,} & K_1 & \overset{S_{\Pi_2}}{,} & K_2, & \dots & \overset{S_{\Pi_r}}{,} & K_r \\
K_r & , & K_{r+1} & , & K_{r+2}, & \dots & , & K_{2r} \\
K_{2r} & , & K_{2r+1} & , & K_{2r+2}, & \dots & , & K_{3r} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \dots & & \dots & & & \vdots
\end{array}$$

Για την ακολουθία $\{K_{t\cdot r}\}_{t=0}^{\infty}$ του $\mathcal{K}_{RS}$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα Blaschke). Έστω

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in T}} K_{t\cdot r} \overset{\rho}{=} K_o^*.$$

Τότε

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} K_{t\cdot r+s} = \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} S_S\big(K_{t\cdot r+s-1}\big) = K_S^*$$

για $1 \leq s \leq r$. (Πορ()).
Ισχύει $V(K) = V(K_{t\cdot r+s}$ για $t = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq s \leq r$ (Θεώρ. ()). Επειδή ο όγκος είναι συνεχής συνάρτηση στα κυρτά σώματα (Πόρ. ()) ισχύει

$$V(K_o^*) = V(K_1^*) = \cdots = V(K_r^*) = V(K) \qquad (1)$$

Επίσης ισχύει

$$I(K_{t\cdot r}) \geq I(K_{t\cdot r+1}) \geq \cdots \geq I(K_{t\cdot r+r}) \quad (\text{Θεώρ}())$$

και επειδή η I είναι της μορφής του Θεωρήματος () (με $g(x) = |x|^2$) η I είναι συνεχής στα κυρτά σώματα, άρα

$$I(K_o^*) \geq I(K_1^*) \geq \cdots \geq I(K_r^*) \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι $I(K_o^*) = I(K_r^*)$.
Έστω ότι $I(K_o^*) > I(K_r^*)$. Τότε υπάρχει J με $I(K_o^*) > J > I(K_r^*)$.

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} I\big(K_{t\cdot r+r}\big) = I(K_r^*) \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} I\big(K_{t\cdot r}\big) = I(K_o^*)$$

υπάρχουν $t_1, t_2 \in T$ με $t_2 > t_1, \quad I(K_{t_2\cdot r}) > J > I(K_{t_1\cdot r+r})$. Αλλά

$$J > I(K_{t_1\cdot r+r}) = I(K_{(t_1+1)r}) \geq I(K_{t_2\cdot r}) > J.$$

Άτοπο. Άρα $I(K_o^*) = I(K_r^*)$.
Από την (2) έχουμε ότι $I(K_o^*) = I(K_1^*) = \cdots = I(K_r^*)$. Επειδή

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} K_{t\cdot r+s-1} = K_{s-1}^* \quad \text{για} \quad 0 \leq s-1 \leq r \quad \text{έχουμε (Πορ())}$$

$$K_s^* = \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} K_{t\cdot r+s} = \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} S_s\big(K_{t\cdot r+s-1}\big) = S_s\big(K_{s-1}^*\big) \quad \text{για } s = 1, 2, \dots, r$$

δηλαδή $K_s^* = S_s(K_{s-1}^*$ και $I(K_s^*) = I(K_{s-1}^*), \quad 1 \leq s \leq r \qquad (3)$.
Τότε (Θεώρ ()) το K_o^* είναι συμμετρικό ως προς το Π_1, επομένως $K_1^* = S_1 K_o^* = K_o^*$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία χρησιμοποιώντας την (3) έχουμε ότι $K_o^* = K_1^* = \cdots = K_r^*$ και το $K_o^* =: K^*$ είναι συμμετρικό ως προς $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r. \qquad (4)$
Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} K_n \stackrel{\rho}{=} K^*$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim\limits_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}} K_{tr} = K^*$, υπάρχει $t_o \in T$ τέτοιο ώστε $K_{t_o r} \subseteq \big(1+\frac{\varepsilon}{R}\big)K^*$ και $K^* \subseteq \big(1+\frac{\varepsilon}{R}\big)k_{t_o r} \qquad (5)$
(βλ. απόδ. Θεωρ.()). Επειδή το $\big(1+\frac{\varepsilon}{R}\big)K^*$ είναι συμμετρικό ως προς $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r$ εφαρμόζοντας διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις στην (5) παίρνουμε

$$K_m \subseteq \big(1+\frac{\varepsilon}{R}\big)K^* \quad \text{και} \quad K^* \subseteq \big(1+\frac{\varepsilon}{R}\big)K_m \quad \text{για } m \geq t_o r.$$

Άρα $\rho(K_m, K^*) \leq \varepsilon$ για $m \geq t_o r$ δηλαδή το $\lim\limits_{n\to\infty} K_n \stackrel{\rho}{=} K^* \qquad (5)$.
Από τις $(1), (4)$ και (5) έχουμε το ζητούμενο. □

16.1.1 Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει προσπάθεια επίλυσης ισοπεριμετρικών προβλημάτων με τη βοήθεια της συμμετρικοποίησης κατά Steiner.

Λήμμα 16.1.2.

Έστω r άρρητος αριθμός και $A = \{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Τότε το A κείται πυκνά στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $r > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{m + nr : 0 < m + nr \leq r, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Είναι φραγμένο και περιέχει άπειρο αριθμό στοιχείων. Πράγματι:
αν $m \in \mathbb{Z}^+$ υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$(n+1)r > m > nr \Rightarrow r > m - nr > 0 \Rightarrow m + (-n)r \in B.$$

Επομένως το B έχει σημείο συσσώρευσης. Έστω $\varepsilon > 0$ και $m_1 + n_1 r, m_2 + n_2 r$ στοιχεία του B, διάφορα μεταξύ τους, με

$$\begin{aligned} \left|(m_2 + n_2 r) - (m_1 + n_1 r)\right| &< \varepsilon \Rightarrow \\ \left|(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1) r\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

με $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ και $m_1 \neq m_2, \quad n_1 \neq n_2$. Επομένως υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ με $0 \leq m + nr < \varepsilon$. Επειδή ο r είναι άρρητος $0 < m + nr < \varepsilon$. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta \in B$ με $0 < \beta < \varepsilon$.
Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $y - x > 0$. Τότε υπάρχει $\beta \in B$ με $0 < \beta < y - x$. $\quad$ (1).
Για τον $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $k\beta \geq x \geq (k-1)\beta$. $\quad$ (2).
Από τις (1), (2) έχουμε

$$x \geq (k-1)\beta > k\beta - y + x \Rightarrow y > k\beta \geq x.$$

Επομένως για $x, y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k\beta \in A$ με $y > k\beta \geq x \Rightarrow \overline{A} = \mathbb{R}$. □

Σημείωση

Το παραπάνω Λήμμα είναι γνωστό στη "Θεωρία αριθμών" ως "Θεώρημα του Dirichlet".

Θεώρημα 16.1.8.

Εάν K είναι συμπαγές, κυρτό σύνολο του E^2, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τις ευθείες

$$y = 0, \quad y = x \tan \vartheta$$

όπου $\frac{\vartheta}{\pi}$ είναι άρρητος, τότε το $K \neq \varnothing$ ή $K = \{0\}$ ή K είναι κύκλος με κέντρο το $0 = (0,0)$.

Απόδειξη.

Έστω $K \neq \varnothing$ και $k = (k_1, k_2) = (r\cos\phi, r\sin\phi) \in K$. Εφόσον το K είναι συμμετρικό ως προς την $y = x\tan\vartheta$, θα πρέπει το $(r\cos(2\vartheta - \phi), r\sin(2\vartheta - \phi)) \in K$ και επειδή είναι συμμετρικό ως προς την $y = 0$ το $(r\cos(\phi - 2n\vartheta), r\sin(\phi - 2n\vartheta)) \in K$ για κάθε $n \in I\!N$. Εξ'άλλου αν $k' = (r'\cos\phi', r'\sin\phi') \notin K$, τότε όμοια έχουμε ότι $(r'\cos(\phi' - 2n\vartheta), r'\sin(\phi' - 2n\vartheta)) \notin K$ για κάθε $n \in I\!N$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα() και τη συνέχεια των συναρτήσεων $\sin, \cos$ έχουμε ότι τα σημεία $(r\cos(\phi - 2n\vartheta), r\sin(\phi - 2n\vartheta)) \in K$ για $n = 1, 2, \ldots$ κείνται πυκνά στην περιφέρεια $(r\cos t, r\sin t), \quad t \in I\!R$. Επειδή το K είναι κλειστό έχουμε ότι $(r\cos t, r\sin t) \subseteq K, \quad t \in I\!R$. Έστω $k_o \in K$ με $R = |k_o| = \max\limits_{k\in K}|k|$. (υπάρχει τέτοιο σημείο εφ'όσον το K είναι συμπαγές). Τότε

$$(R\cos t, R\sin t) \subseteq K \subseteq S(0, R), \quad t \in I\!R.$$

Λόγω της κυρτότητας του K έχουμε $S(0, R) \subseteq K \subseteq S(0, R)$ δηλαδή $K = S(0, R)$. Αν $R = 0$ τότε $K = \{0\}$, αν $R > 0$ τότε το K είναι ο κύκλος $S(0, R)$. $\square$

Θεώρημα 16.1.9.

Εάν K είναι κυρτό, συμπαγές σύνολο του E^n, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα

$$\begin{aligned}
x_1 \sin\vartheta - x_n \cos\vartheta &= 0 && (1)\\
x_2 \sin\vartheta - x_n \cos\vartheta &= 0 && (2)\\
&\;\;\vdots && \;\;\vdots\\
x_{n-1} \sin\vartheta - x_n \cos\vartheta &= 0 && (n-1)\\
x_n &= 0 && (n)
\end{aligned}$$

όπου $\frac{\vartheta}{\pi}$ είναι άρρητος, τότε το $K \neq \varnothing$ ή $K = \{0\}$ ή K είναι κύκλος με κέντρο το 0.

Απόδειξη.

Έστω $K \neq \varnothing$ και $k' = (k'_1, k'_2, \ldots, k'_{n-1}, k'_n) \in K$, με $|k'| = R = \max\limits_{k\in K}\{|k|\}$. Τότε $K \subseteq S(0, R)$. Θεωρούμε

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in S(0, R) \quad \text{με} \quad |k| = (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)^{\frac{1}{2}} = R.$$

Τότε και το σημείο

$$\big(0, 0, \ldots, 0, (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)^{\frac{1}{2}}\big) = (0, 0, \ldots, 0, R) \in S(0, R).$$

Επειδή το K είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα (1) και (n) και το $k' \in K$ από το Θεώρ. () θα πρέπει και το $\big(0, k_2', \ldots, k_{n-1}', (k_1'^2 + k_n'^2)^{\frac{1}{2}}\big) \in K$. Λόγω της συμμετρίας του K ως προς τα επίπεδα (2) και (n) θα έχουμε το $\big(0, 0, k_3', \ldots, k_{n-1}', (k_1'^2 + k_2'^2 + k_n'^2)^{\frac{1}{2}}\big) \in K$. Συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι το σημείο $\big(0, 0, \ldots, 0, (k_1'^2 + k_2'^2 + \cdots + k_n'^2)^{\frac{1}{2}}\big) \in K$, δηλαδή το $\big(0, 0, \ldots, 0, (k_1^2 + k_2^2 + k_n^2)^{\frac{1}{2}}\big) \in K$. Ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία, χρησιμοποιώντας το Θεώρ. () διαδοχικά βρίσκουμε ότι το $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K$. Επομένως

$$\{k \in S(0, R), |k| = R\} \subseteq K \subseteq S(0, R).$$

Εφ'όσον το K είναι κυρτό έχουμε $K = S(0, R)$. □

Θεώρημα 16.1.10.

Έστω $V_o > 0$ και

$$\mathcal{K}_{V_o} = \{K \subseteq E^n : K \quad \textit{κυρτά σώματα με} \quad V(K) = V_o\}.$$

Εάν B είναι σφαίρα με $V(B) = V_o$ τότε

i. $A(B) \leq A(K), \quad K \in \mathcal{K}_{V_o}$.

ii. $d(B) \leq d(K), \quad K \in \mathcal{K}_{V_o}$.

iii. Αν η B_o έχει κέντρο το 0, $I(B_o) \leq I(K), \quad K \in \mathcal{K}_{V_o}$.

Απόδειξη.

Εάν $\alpha \in K^o$ τότε το $k_o = K - \alpha$ έχει εσωτερικό σημείο το 0 και $V(K_o) = V(K) = V_o$.

Θεωρούμε τα επίπεδα $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ με $\frac{\vartheta}{\pi}$ άρρητο : $\Pi_i : x_i \sin\vartheta - x_n \cos\vartheta = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$ και $\Pi_n : x_n = 0$. Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{K_r\}_{r=0}^{\infty}$ όπως στο Θεώρημα (). Τότε η ακολουθία αυτή συγκλίνει σε ένα κυρτό σώμα K^* με $V(K^*) = V(K)$ και το K^* είναι συμμετρικό ως προς $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Από το Θεώρ. () έχουμε ότι το K^* είναι σφαίρα με κέντρο 0 έστω B_o. Έτσι $V_o = V(K) = V(B_o) = V_o$ όπου B σφαίρα με όγκο $V(B) = V_o$.

i. Η ακολουθία $\{K_{tn}\}_{t=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο B_o και ισχύει

$$\begin{aligned} S_{\Pi_1}(K_{tn}) + \varepsilon S &\subseteq S_{\Pi_1}(K_{tn} + \varepsilon S) \quad (\text{Λήμμα ()}) \Rightarrow \\ V\big(S_{\Pi_1}(K_{tn}) + \varepsilon S\big) &\subseteq V\big(K_{tn} + \varepsilon S\big) \quad (\text{Θεώρ.()}) \end{aligned}$$

Αλλά

$$K_{tn} + \varepsilon S = S_{\Pi_{n-1}}(K_{tn-1}) + \varepsilon S \subseteq S_{\Pi_{n-1}}(K_{tn-1} + \varepsilon S) \Rightarrow$$

$$V(K_{tn} + \varepsilon S) \leq V(K_{tn-1} + \varepsilon S)$$

Συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι

$$V\big(S_{\Pi_1}(K_{tn}) + \varepsilon S\big) \leq V(K_o + \varepsilon S) \qquad (1)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} K_{tn} &= B_o \Rightarrow \\ \lim_{t\to\infty}\big(S_{\Pi_1}(K_{tn}) + \varepsilon S\big) &= S_{\Pi_1}(B_o) + \varepsilon S = B_o + \varepsilon S \quad \text{Θεώρ.())} \qquad (2) \end{aligned}$$

Επειδή ο όγκος είναι συνεχής συνάρτηση έχουμε από τη (2)

$$\lim_{t\to\infty}\big(S_{\Pi_1}(K_{tn}) + \varepsilon S\big) = V(B_o + \varepsilon S) \leq V(K_o + \varepsilon S) \quad \text{από την (2).}$$

Άρα

$$\begin{aligned} A(B) = A(B_o) &= \liminf_{\varepsilon>0} \frac{V(B_o + \varepsilon S) - V(B_o)}{\varepsilon} \\ &\leq \liminf_{\varepsilon>0} \frac{V(K_o + \varepsilon S) - V(K_o)}{\varepsilon} = A(K_o) = A(K) \end{aligned}$$

ii. Από το Θεώρημα () έχουμε ότι

$$d(K_{tn}) \leq d(K_{tn-1}) \leq \cdots \leq d(K_o).$$

Επειδή η συνάρτηση d είναι συνεχής έχουμε

$$d(B_o) = d(B) \leq d(K_o) = d(K).$$

iii. Έστω $B_o = (0, \alpha), \quad (\alpha > 0)$.

$$\begin{aligned} I(K) - I(B_o) &= \int_K |x|^2 dx - \int_{B_o} |x|^2 dx \\ &= \left(\int_K |x|^2 dx - \alpha^2 V(K)\right) - \left(\int_{B_o} |x|^2 dx - \alpha^2 V(B_o)\right) \end{aligned}$$

εφ'όσον $V(K) = V(B_o)$. Άρα

$$\begin{aligned} I(K) - I(B_o) &= \int_K \big(|x|^2 - \alpha^2\big) dx - \int_{B_o} \big(|x|^2 - \alpha^2\big) dx \\ &= \int_{K \backslash B_o} \big(|x|^2 - \alpha^2\big) dx - \int_{B_o \backslash K} \big(|x|^2 - \alpha^2\big) dx \end{aligned}$$

Για $x \in K \backslash B_o$ έχουμε $|x|^2 > \alpha^2$ και για $x \in B_o \backslash K, \quad |x|^2 \leq \alpha^2$. Άρα $I(K) - I(B_o) \geq 0$.

□

Ορισμός 16.1.2.

Εάν K είναι κυρτό σώμα ορίζουμε σαν **σώμα διαφορών** *το σύνολο*

$$DK = \{k_1 - k_2, \quad k_1, k_2 \in K\}.$$

Θεώρημα 16.1.11.

Εάν K είναι κυρτό σώμα τότε το DK είναι επίσης κυρτό σώμα και είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων 0.

Απόδειξη.

Το $DK = K + (-K)$ είναι συμπαγές και κυρτό. Είναι εύκολο να δούμε ότι $(DK)^o \neq \emptyset$, δηλαδή το DK είναι κυρτό σώμα.
Έστω $d \in DK$, τότε $d = k_1 - k_2, \quad k_1, k_2 \in K \Rightarrow -d = k_2 - k_1, \quad k_1, k_2 \in K \Rightarrow -d \in DK \Rightarrow DK$ συμμετρικό ως προς το 0. □

Θεώρημα 16.1.12.

Εάν K είναι κυρτό σώμα του E^n τότε

$$V(DK) \geq 2^n V(K).$$

Απόδειξη.

Το $DK = K + (-K)$ και $V(-K) = V(K)$. Από την ανισότητα Brünn - Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned} \big(V(D(K))\big)^{\frac{1}{n}} &= \big(V(K + (-K))\big)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq V^{\frac{1}{n}}(K) + V^{\frac{1}{n}}(-K) \\ &= 2V^{\frac{1}{n}}(K) \Rightarrow \\ V(DK) &= 2^n V(K). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση

Για τον όγκο $V(DK)$ ισχύει $V(DK) \leq \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} V(K)$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνον τότε, αν το K είναι simplex, δηλαδή $K = \text{con}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq E^n$, όπου $x_1, \ldots, x_{n+1} \in E^n$.
Η ανισότης αυτή αποδείχτηκε για $n = 2$ από τον Rademacher (1925), $n = 3$ από τους Estërman και Süss (1928) και γενικά για $n \geq 4$ από τους Rogers και Stephard (1957).

16.1.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα

Έστω K κυρτό σώμα του E^n. Ζητάμε να βρούμε σχέση μεταξύ του όγκου $V(K)$ και του εμβαδού επιφανείας $A(K)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brünn - Minkowski έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(K+\varepsilon S) &\geq \left(V^{\frac{1}{n}}(K)+\varepsilon V^{\frac{1}{n}}(S)\right)^n \\ &= V(K)+n\varepsilon V^{\frac{n-1}{n}}(K)V^{\frac{1}{n}}(S)+\cdots+\varepsilon^n V(S) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} A(K) &= \liminf_{\varepsilon>0}\frac{V(K+\varepsilon S)-V(K)}{\varepsilon} \\ &\geq nV^{\frac{n-1}{n}}(K)V^{\frac{1}{n}}(S) \Rightarrow \\ \left[\frac{A(K)}{A(S)}\right]^n &\geq \left[\frac{V(K)}{V(S)}\right]^{n-1} \qquad \textbf{Ισοπεριμετρική ανισότης.} \end{aligned}$$

Πόρισμα 16.1.2.

Από τα κυρτά σώματα του E^n, που έχουν δοθέντα όγκο V_o, η σφαίρα S όγκου V_o έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας. (Δεν αποκλείουμε να υπάρχει και άλλο K με $V(K)=V_o$ και $A(K)=A(S)$).

Πόρισμα 16.1.3.

Από τα κυρτά σώματα του E^n, που έχουν δοθέν εμβαδόν επιφανείας A_o, η σφαίρα S επιφανείας A_o έχει μέγιστο όγκο. (Δεν αποκλείουμε να υπάρχει και άλλο K με $A(K)=A_o$ και $V(K)=V(S)$).

Στην περίπτωση $n=2$ έχουμε $L=A(K)$, το μήκος της περιμέτρου του K και $A=V(K)$ το εμβαδόν του K. Τότε από την ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Η ανισότητα αυτή που εδώ αποδείχθηκε με τη βοήθεια της συμμετρικοποίησης κατά Steiner έχει αποδειχθεί με πολλούς τρόπους (π.χ Blaschke (1936), Santalo

(1940), Pleijel (1956) κ.α). Ο Bounesen (1929) ισχυροποίησε την ανισότητα, αποδεικνύοντας ότι

$$L^2 \geq 4\pi A + \pi^2(R^2 - r^2)$$

όπου r, R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου του K. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε δεν δίνει συνθήκες που ισχύει $L^2 = 4\pi A$. Για αυτό θα δώσουμε ανεξάρτητη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας για $n = 2$ σε ορισμένες περιπτώσεις κυρτών σωμάτων του E^2 και παίρνοντας το μήκος της περιμέτρου $\Gamma = \{\vec{r}(\vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi]\}$, ως $L = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(\vartheta)| d\vartheta$.

Θεώρημα 16.1.13.

Έστω K κυρτό σώμα του E^2 με φέρουσα συνάρτηση h. Υποθέτουμε ότι για $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $p(\vartheta) = h(\cos\vartheta, sin\vartheta)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $p(\vartheta) + p''(\vartheta) \geq 0$. Τότε, το μήκος L της περιμέτρου είναι

$$L = \int_0^{2\pi} p(\vartheta) d\vartheta.$$

Απόδειξη.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, ότι η ευθεία του E^2

$$\{(x, y) \quad : (x, y) \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta) = p(\vartheta)\}$$

είναι φέρουσα ευθεία του K, για τυχαίο $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ και ότι κάθε φέρουσα ευθεία του K είναι της παραπάνω μορφής. Επομένως οι φέρουσες ευθείες του K έχουν αναλυτικές εξισώσεις

$$f(x, y, \vartheta) = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - p(\vartheta) = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Εφ'όσον το K είναι κυρτό και συμπαγές, κάθε συνοριακό σημείο (x, y) είναι φέρον σημείο, δηλαδή υπάρχει $\vartheta_o = \vartheta(x, y)$ με

$$x\cos\vartheta_o + y\sin\vartheta_o - p(\vartheta_o) = 0 \qquad (1)$$

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{array}{ll} x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - p(\vartheta) = 0, & f(x,y,\vartheta) = 0 \\ -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta - p'(\vartheta) = 0, & \frac{\partial f}{\partial\vartheta}(x,y,\vartheta) = 0 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι για τα σημεία $(x, y, \vartheta(x, y))$, $\quad (x, y) \in \mathrm{bd}\, K$ ισχύει

$$x\cos\vartheta_o + y\sin\vartheta_o - p(\vartheta_o) = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad f(x,y,\vartheta_o) = 0 \quad (2)$$

Για σταθερό σημείο $(x, y) \in \mathrm{bd}\, K$ έχουμε $(x, y) \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \leq p(\vartheta)$, δηλαδή η $f(x, y, \vartheta) \leq 0$ για κάθε ϑ. Εξ'άλλου για τη συνάρτηση $f(x, y, \vartheta) = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - p(\vartheta)$ με σταθερό $(x, y) \in \mathrm{bd}\, K$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} &= -x\cos\vartheta - y\sin\vartheta - p''(\vartheta) \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}(x,y,\vartheta_o) &\overset{(2)}{=} -p(\vartheta_o) - p''(\vartheta_o) < 0 \end{aligned}$$

εξ'υποθέσεως. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x, y, \vartheta)$ ως προς ϑ είναι κοίλη στο ϑ_o μη θετική και $f(x, y, \vartheta_o) = 0$ άρα

$$\frac{\partial f}{\partial\vartheta}(x,y,\vartheta_o) = 0 \quad (3) \Rightarrow -x\sin\vartheta_o + y\cos\vartheta_o - p'(\vartheta_o) = 0.$$

Επιπλέον η ορίζουσα

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\vartheta} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\vartheta} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad (4)$$

για τυχαίο σημείο (x, y, ϑ). Έτσι από τις $(2), (3), (4)$ έχουμε για το σύστημα

$$\begin{array}{c} f(x,y,\vartheta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial\vartheta}(x,y,\vartheta) = 0 \end{array}$$

$f(x, y, \vartheta_o) = 0, \frac{\partial f}{\partial\vartheta}(x, y, \vartheta_o) = 0, A \neq 0$ για $(x, y) \in \mathrm{bd}\, K$ και $\vartheta_o = \vartheta(x, y)$. Από το Θεώρημα της πεπλεγμένης διανυσματικής συνάρτησης, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $x(\vartheta), y(\vartheta)$ με $x'(\vartheta), y'(\vartheta)$ συνεχείς και

$$\begin{aligned} x(\vartheta)\cos\vartheta + y(\vartheta)\sin\vartheta - p(\vartheta) &= 0 \\ -x(\vartheta)\sin\vartheta + y(\vartheta)\cos\vartheta - p'(\vartheta) &= 0 \quad (x(\vartheta), y(\vartheta)) \in \mathrm{bd}\, K, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Άρα οι

$$x(\vartheta) = p(\vartheta)\cos\vartheta - p'(\vartheta)\sin\vartheta, \quad y(\vartheta) = p(\vartheta)\sin\vartheta + p'(\vartheta)\cos\vartheta, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

είναι παραμετρικές εξισώσεις του $\operatorname{bd} K$. Τότε το μήκος της περιμέτρου είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(\vartheta) + y'^2(\vartheta)}d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \big(p'(\vartheta) + p''(\vartheta)\big)d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} p(\vartheta)d\vartheta + p'(2\pi) - p'(0) \\ &= \int_0^{2\pi} p(\vartheta)d\vartheta \end{aligned}$$

(Στην ολοκλήρωση χρησιμοποιήσαμε την $p(\vartheta) + p''(\vartheta) \ge 0$). □

Θεώρημα 16.1.14.

Εάν K, p είναι όπως στο προηγούμενο Θεώρημα, τότε το εμβαδόν του K είναι

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[p^2(\vartheta) - p^{'2}(\vartheta)\big]d\vartheta.$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε το $\operatorname{bd} K$ ως καμπύλη $\vec{r}(\vartheta) = (x(\vartheta), y(\vartheta)), \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$, με

$$x(\vartheta) = p(\vartheta)\cos\vartheta - p'(\vartheta)\sin\vartheta, \quad y(\vartheta) = p(\vartheta)\sin\vartheta + p'(\vartheta)\cos\vartheta.$$

Από το Θεώρημα του Green έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(-y(\vartheta), x(\vartheta)\big)\cdot\big(x'(\vartheta), y'(\vartheta)\big)d\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x(\vartheta)\frac{dy(\vartheta)}{d\vartheta} - y(\vartheta)\frac{dy(\vartheta)}{d\vartheta}\right)d\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(p^2(\vartheta) + p(\vartheta)p''(\vartheta)\big)d\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[p^2(\vartheta) - p^{'2}(\vartheta)\big]d\vartheta. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση

Από τα Θεωρήματα 16.1.13, 16.1.14 είναι εύκολο να δούμε ότι

$$L(K) = \liminf_{\varepsilon > 0} \frac{A(K + \varepsilon S) - A(K)}{\varepsilon}.$$

Θεώρημα 16.1.15.

Εάν K είναι κυρτό σώμα του E^2, με φέρουσα συνάρτηση h και $p(\vartheta) = h(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, τέτοια ώστε p'' συνεχής, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ και $p(\vartheta) + p''(\vartheta) > 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, τότε

$$4\pi A(K) \leq L^2(K).$$

Η ισότης ισχύει, τότε και μόνον τότε, όταν το K είναι κύκλος.

Απόδειξη.

Η περιοδική συνάρτηση $p(\vartheta)$ αναλύεται σε σειρά Fourier, έστω

$$p(\vartheta) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)\big).$$

Τότε

$$p'(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(n b_n \cos(n\vartheta) + (-n\alpha_n)\sin(n\vartheta)\big).$$

Από τον " τύπο του Parseval " για τους συντελεστές της σειράς Fourier έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |p(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n^2 + b_n^2\big) \quad \text{και}$$

$$\int_0^{2\pi} p(\vartheta)d\vartheta = \pi\alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)\big)d\vartheta = \pi\alpha_o.$$

Έτσι από τα Θεωρήματα 16.1.13, 16.1.14 και τα παραπάνω έχουμε

$$L = \int_0^{2\pi} p(\vartheta)d\vartheta = \pi\alpha_o \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[p^2(\vartheta) - p'^2(\vartheta)\right]d\vartheta \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + b_n^2)\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty}((nb_n)^2 + (-n\alpha_n)^2)\right)\right] \\ &= \frac{\pi\alpha_o^2}{4} - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)(\alpha_n^2 + b_n^2) \\ &\leq \frac{\pi^2\alpha_o^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}L^2 \Rightarrow \\ 4\pi A &\leq L^2 \end{aligned}$$

Εάν το K είναι κύκλος, τότε προφανώς ισχύει η ισότης. Αν $4\pi A = L^2$ τότε

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)(\alpha_n^2 + b_n^2) = 0 \Rightarrow \alpha_n = b_n = 0 \quad \text{για} \quad n \geq 2.$$

Τότε η $p(\vartheta) = \frac{\alpha_o}{2} + \alpha_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta \Rightarrow (x-\alpha_1)^2 + (y-b_1)^2 = \frac{\alpha_o^2}{4}$ δηλαδή το K είναι κύκλος. □

Πόρισμα 16.1.4.

Από όλα τα κυρτά σώματα του E^2, που περιβάλλονται από λείες καμπύλες και έχουν δοθέν εμβαδόν A, ο κύκλος έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Πόρισμα 16.1.5.

Κάθε κυρτό σώμα του E^2 που περιβάλλεται από λεία καμπύλη και **δεν** *είναι κύκλος, έχει περίμετρο μεγαλύτερη από κύκλου ιδίου εμβαδού.*

Πόρισμα 16.1.6.

Από όλες τις κλειστές, λείες καμπύλες του E^2 με ίδιο μήκος L, η περιφέρεια L κύκλου περικλείει μέρος του E^2 μεγίστου εμβαδού.

Πόρισμα 16.1.7.

Εάν η κλειστή, λεία καμπύλη του E^2, **δεν** *είναι περιφέρεια κύκλου, τότε αυτή περικλείει εμβαδόν μικρότερο από αυτό που περικλείει περιφέρεια κύκλου ιδίου μήκους.*

Βιβλιογραφία

[1] Barnsley M., (1988), *Fractals Everywhere*, Academic Press.

[2] Brondsted A., (1983), *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer - Verlag.

[3] Eggleston H.G., (1958), *Convexity*, Cambridge University Press.

[4] Falconer K., (1990), *Fractal Geometry*, John - Willey.

[5] Grünbaum B., (1967), *Convex Polytopes*, John - Willey.

[6] Lay S., (1982), *Convex Sets and their Applications*, John - Willey.

[7] McMullen P. and Shephard G., (1971), *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, Cambridge University Press.

[8] Schneider R., (1993), *Convex Bodies : The Brünn - Minkowski Theory*, Cambridge University Press.

[9] Valentine F., (1964), *Convex Sets*, McGraw Hill.

Δείκτης