Κυρτή γεωμετρική ανάλυση

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ευκλείδειος χώρος

Το πλαίσιο στο οποίο θα δουλέψουμε είναι ο n–διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τη γραμμική δομή του $\mathbb{R}^n$ και με την έννοια του μετρικού χώρου (πιο συγκεκριμένα, με την τοπολογία που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από την Ευκλείδεια νόρμα). Στο μεγαλύτερο μέρος αυτής της πρώτης παραγράφου συζητάμε λεπτομερέστερα (χωρίς όμως αυστηρότητα) τον ορισμό του n–διάστατου όγκου που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το μάθημα.

§1. Η γραμμική δομή. Ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από όλες τις n-άδες $x = (x_1, \dots, x_n)$ πραγματικών αριθμών. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα λέγονται *διανύσματα* (ή πιο συχνά) *σημεία*. Μπορούμε να προσθέτουμε σημεία: αν $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ τότε ορίζουμε

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n). \tag{1.1.1}$$

Μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάζουμε ένα σημείο με έναν πραγματικό αριθμό: αν $x = (x_1, \dots, x_n)$ και αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε

$$\alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n). \tag{1.1.2}$$

Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με αυτές τις πράξεις είναι ένας γραμμικός χώρος. Οι βασικές έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα θεωρούνται γνωστές.

Αν A και B είναι δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε το *άθροισμα των A και B κατά Minkowski* είναι το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}. \tag{1.1.3}$$

Στην ειδική περίπτωση $A = \{x\}$, γράφουμε $x + B$ αντί του $\{x\} + B$ (το $x + B$ είναι η *μεταφορά του B κατά x*). Επίσης, για κάθε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \geq 0$ ορίζουμε

$$tA = \{ta : a \in A\}. \tag{1.1.4}$$

§2. Η Ευκλείδεια νόρμα. Θεωρούμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$: αν $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$ τότε θέτουμε

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n. \tag{1.1.5}$$

Γράφουμε $\{e_1, \ldots, e_n\}$ για τη συνήθη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.

Μέσω του εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot, \cdot\rangle$ ορίζονται: η (Ευκλείδεια) *νόρμα* του x

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1.1.6}$$

και η *απόσταση* μεταξύ δύο σημείων x και y:

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1.7}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle^2. \tag{1.1.8}$$

Η «τοπολογία» του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ θεωρείται γνωστή.

§3. Ο ορισμός του κυρτού συνόλου. Έστω x και y δύο σημεία στον $\mathbb{R}^n$. Το *ευθύγραμμο τμήμα* $[x, y]$ με άκρα τα x και y είναι το σύνολο όλων των σημείων της μορφής $x + t(y - x)$ με $t \in [0, 1]$:

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{1.1.9}$$

Έστω τώρα A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το A είναι *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in A$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$(1 - t)x + ty \in A. \tag{1.1.10}$$

Με άλλα λόγια, ένα σύνολο είναι κυρτό αν «για κάθε δύο σημεία του περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει».

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο που έχει μη κενό εσωτερικό.

§4. Ο n–διάστατος όγκος. Έστω A ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τη *χαρακτηριστική συνάρτηση* χ_A του A που ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής: $\chi_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $\chi_A(x) = 0$ αν $x \notin A$. Λέμε ότι το A *έχει όγκο* αν η χ_A είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Σε αυτή την περίπτωση, ο όγκος του A ορίζεται από την

$$|A| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\, dx. \tag{1.1.11}$$

Ο ορισμός αυτός προϋποθέτει τη γνώση του ολοκληρώματος Riemann για φραγμένες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$, όπου X είναι ένας κύβος της μορφής $[-M, M]^n$. Ένας ισοδύναμος τρόπος ορισμού του όγκου είναι ο εξής. Ξεκινάμε με την κλάση $\mathcal{I}$ όλων των ορθογωνίων που έχουν τις ακμές τους παράλληλες πρός τους άξονες συντεταγμένων (τις διευθύνσεις των ορθοκανονικών διανυσμάτων e_j). Δηλαδή, $I \in \mathcal{I}$ αν υπάρχουν $a_j \leq b_j$ στο $\mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ ώστε

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]. \tag{1.1.12}$$

Τότε, ο όγκος του I είναι (εξ ορισμού) το γινόμενο των μηκών των ακμών του:

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n). \tag{1.1.13}$$

Ονομάζουμε τώρα *στοιχειώδες σύνολο* κάθε πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που ανήκουν στην κλάση I και έχουν ξένα εσωτερικά (δεν επικαλύπτονται). Συμβολίζουμε την κλάση των στοιχειωδών συνόλων με $\mathcal{F}$. Αν $F = \bigcup_{k=1}^m I_k$ είναι ένα στοιχειώδες σύνολο, τότε ορίζουμε

$$|F| = \sum_{k=1}^{m} |I_k|. \tag{1.1.14}$$

Πρέπει βέβαια να δείξουμε ότι για κάθε στοιχειώδες σύνολο F ο όγκος $|F|$ ορίστηκε καλά, δηλαδή ότι είναι ανεξάρτητος από τον τρόπο με τον οποίο γράψαμε το F σαν πεπερασμένη ένωση μη επικαλυπτόμενων ορθογωνίων από την $\mathcal{I}$ (άσκηση).

Έχοντας ορίσει τον όγκο για την κλάση των στοιχειωδών συνόλων, προσπαθούμε να τον ορίσουμε για γενικότερα σύνολα με μια διαδικασία προσέγγισης από μέσα και απ' έξω (στη γλώσσα του ολοκληρώματος Riemann, μιλάμε για κάτω και άνω αθροίσματα της χ_A). Έστω A ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον *εσωτερικό όγκο* του A μέσω της

$$\underline{|A|} = \sup\{|F| : F \subseteq A, F \in \mathcal{F}\}, \tag{1.1.15}$$

και τον *εξωτερικό όγκο* του A μέσω της

$$\overline{|A|} = \inf\{|F| : A \subseteq F, F \in \mathcal{F}\}. \tag{1.1.16}$$

Λέμε ότι το A *έχει όγκο* (είναι Jordan μετρήσιμο) αν $\underline{|A|} = \overline{|A|}$. Αν αυτό συμβαίνει, ο όγκος του A ορίζεται από την

$$|A| = \underline{|A|} = \overline{|A|}. \tag{1.1.17}$$

Θεώρημα 1.1.1. *Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει όγκο.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1 είναι εκτενής χωρίς να είναι δύσκολη (παραλείπεται). Οι ιδιότητες του όγκου που θα χρησιμοποιούμε στη συνέχεια είναι απλές συνέπειες του ορισμού.

(α) Ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος ως προς μεταφορές. Αν το K έχει όγκο και αν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$|x+K| = |K|. \tag{1.1.18}$$

(β) Αν το K έχει όγκο και αν $t \geq 0$ τότε

$$|tK| = t^n|K|. \tag{1.1.19}$$

Γενικότερα, για κάθε αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$,

$$|T(K)| = |\mathrm{det}T| \cdot |K|. \tag{1.1.20}$$

Γράφουμε Id για την ταυτοτική απεικόνιση. Παρατηρήστε ότι $tK = T(K)$ όπου $T = t \cdot Id$, οπότε η (1.1.19) είναι ειδική περίπτωση της (1.1.20).

(γ) Έστω $r \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το *πλέγμα*

$$\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n = \left\{ \left(\frac{m_1}{r}, \ldots, \frac{m_n}{r} \right) : m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{1.1.21}$$

Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$N_r = \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n \cap K. \tag{1.1.22}$$

Δηλαδή, N_r είναι το σύνολο των σημείων του πλέγματος $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$ τα οποία ανήκουν στο K. Θεωρούμε το *θεμελιώδες ορθογώνιο* $Q_r = \left[0, \frac{1}{r}\right)^n$ του $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$, και την ένωση

$$\bigcup_{z \in N_r} (z + Q_r). \tag{1.1.23}$$

Ο όγκος της είναι ίσος με $|N_r|/r^n$. Είναι λογικό να υποθέσουμε (και μπορούμε να αποδείξουμε) ότι καθώς το $r \to +\infty$, παίρνουμε όλο και καλύτερη προσέγγιση του όγκου του K. Δηλαδή, ισχύει το εξής:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|N_r|}{|K| r^n} = 1. \tag{1.1.24}$$

1.2 Η ανισότητα Brunn–Minkowski

Η ανισότητα Brunn–Minkowski συνδέει τον όγκο με την πράξη της πρόσθεσης κατά Minkowski.

Θεώρημα 1.2.1 (ανισότητα Brunn–Minkowski)**.** *Έστω A και B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \tag{1.2.1}$$

Θα δώσουμε μια απόδειξη που χρησιμοποιεί τα στοιχειώδη σύνολα και οφείλεται στον Lyusternik (1940). Στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου περιγράφουμε την απόδειξη της «συναρτησιακής γενίκευσης» της ανισότητας Brunn–Minkowski (ανισότητα Prékopa–Leindler). Μια τρίτη απόδειξη, με τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner, θα δοθεί αργότερα.

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που τα A και B είναι ορθογώνια με τις ακμές τους παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων. Υποθέτουμε ότι $a_1,\dots,a_n>0$ είναι τα μήκη των ακμών του A, και $b_1,\dots,b_n>0$ είναι τα μήκη των ακμών του B. Τότε, το $A+B$ είναι κι αυτό ορθογώνιο με τις ακμές του παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων, και αντίστοιχα μήκη $a_1+b_1,\dots,a_n+b_n$. Επομένως, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$((a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n))^{1/n} \geq (a_1\cdots a_n)^{1/n} + (b_1\cdots b_n)^{1/n}. \tag{1.2.2}$$

Ισοδύναμα, ζητάμε να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)^{1/n} + \left(\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)^{1/n} \leq 1. \tag{1.2.3}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right) = 1. \tag{1.2.4}$$

Δηλαδή, η ανισότητα Brunn-Minkowski ισχύει σε αυτή την απλή περίπτωση.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι στοιχειώδη σύνολα, καθένα δηλαδή από αυτά είναι πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που έχουν ξένα εσωτερικά και ακμές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων.

Ονομάζουμε *πολυπλοκότητα* του ζευγαριού (A,B) το συνολικό πλήθος των ορθογωνίων που σχηματίζουν τα A, B. Θα αποδείξουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski με επαγωγή ως προς την πολυπλοκότητα m του (A,B). Οταν $m=2$, τα A και B είναι ορθογώνια και η ανισότητα έχει ήδη αποδειχθεί.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m\geq 3$ και ότι το ζητούμενο ισχύει γιά ζευγάρια στοιχειωδών συνόλων με πολυπλοκότητα $\leq m-1$. Αφού $m\geq 3$, κάποιο από τα A και B (έστω το A) αποτελείται από τουλάχιστον δύο ορθογώνια. Έστω I_1, I_2 δύο από αυτά. Τα I_1 και I_2 έχουν ξένα εσωτερικά, συνεπώς μπορούμε να τα διαχωρίσουμε με ένα υπερεπίπεδο παράλληλο προς κάποιον κύριο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ (άσκηση). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτό το υπερεπίπεδο περιγράφεται από την $x_n=\rho$ γιά κάποιο $\rho\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$A_1 = A\cap\{x\in\mathbb{R}^n : x_n\geq\rho\} \quad \text{και} \quad A_2 = A\cap\{x\in\mathbb{R}^n : x_n\leq\rho\}. \tag{1.2.5}$$

Τα A_1 και A_2 είναι στοιχειώδη σύνολα, έχουν ξένα εσωτερικά και καθένα τους σχηματίζεται από λιγότερα ορθογώνια απ' ότι το A (Το υπερεπίπεδο $x_n = \rho$ στη χειρότερη περίπτωση χωρίζει κάθε ορθογώνιο του A σε δύο ορθογώνια, ένα στο A_1 κι ένα στο A_2. Όμως, το I_1 περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A_1 ενώ το I_2 στο A_2 - ή το αντίθετο). Περνώντας τώρα στο B, βρίσκουμε υπερεπίπεδο $x_n = s$ τέτοιο ώστε αν $B_1 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq s\}$ και $B_2 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq s\}$ να ισχύει

$$\frac{|A_1|}{|A|} = \frac{|B_1|}{|B|}. \tag{1.2.6}$$

Τα B_1 και B_2 είναι στοιχειώδη σύνολα με πλήθος ορθογωνίων που δεν ξεπερνάει αυτό του B. Ονομάζουμε λ τον κοινό λόγο όγκων στην (1.2.6). Προφανώς, $0 < \lambda < 1$.

Παρατηρήστε ότι

$$A + B = (A_1 + B_1) \cup (A_1 + B_2) \cup (A_2 + B_1) \cup (A_2 + B_2). \tag{1.2.7}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A_1 + B_1 \subseteq \{x : x_n \geq \rho + s\}$ και $A_2 + B_2 \subseteq \{x : x_n \leq \rho + s\}$, τα $A_1 + B_1$ και $A_2 + B_2$ έχουν ξένα εσωτερικά. Επομένως,

$$|A + B| \geq |A_1 + B_1| + |A_2 + B_2|. \tag{1.2.8}$$

Με βάση την κατασκευή που κάναμε, εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση στο δεξιό μέλος: έχουμε

$$|A_1 + B_1|^{1/n} \geq |A_1|^{1/n} + |B_1|^{1/n}$$

και

$$|A_2 + B_2|^{1/n} \geq |A_2|^{1/n} + |B_2|^{1/n},$$

οπότε κάνοντας πράξεις, και παίρνοντας υπ' όψιν την (1.2.6) έχουμε

$$\begin{aligned} |A + B| &\geq \Big((\lambda|A|)^{1/n} + (\lambda|B|)^{1/n} \Big)^n + \Big(((1-\lambda)|A|)^{1/n} + ((1-\lambda)|B|)^{1/n} \Big)^n \\ &= \lambda \Big[|A|^{1/n} + |B|^{1/n} \Big]^n + (1-\lambda) \Big[|A|^{1/n} + |B|^{1/n} \Big]^n \\ &= \Big[|A|^{1/n} + |B|^{1/n} \Big]^n, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \tag{1.2.9}$$

Γενική Περίπτωση. Έστω A, B τυχόντα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν ακολουθίες $\{A_m\}$ και $\{B_m\}$ στοιχειωδών συνόλων με τις ιδιότητες

$$A_m \subseteq A, \qquad |A_m| \to |A|, \qquad B_m \subseteq B, \qquad |B_m| \to |B|.$$

Τότε, $A_m + B_m \subseteq A + B$ γιά κάθε $m \in \mathbb{N}$ και

$$\begin{aligned} |A+B|^{1/n} &\geq \limsup_{m\to\infty} |A_m+B_m|^{1/n} \\ &\geq \limsup_{m\to\infty} \left[|A_m|^{1/n} + |B_m|^{1/n}\right] \\ &= |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \end{aligned}$$

Υποθέσαμε ότι τα $A, B, A+B$ έχουν όγκο: σε κάθε περίπτωση, δείξαμε ότι $\underline{|A+B|}^{1/n} \geq \underline{|A|}^{1/n} + \underline{|B|}^{1/n}$. □

Η ανισότητα Brunn–Minkowski συχνά διατυπώνεται και ως εξής:

Πόρισμα 1.2.2. *Έστω A, B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει*

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|^{1/n} \geq \lambda |A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n}. \tag{1.2.10}$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσετε ότι $|\lambda A|^{1/n} = \lambda |A|^{1/n}$ και $|(1-\lambda)B|^{1/n} = (1-\lambda)|B|^{1/n}$. □

Συνέπεια της ανισότητας Brunn–Minkowski είναι η ακόλουθη ανισότητα (η οποία είναι *ανεξάρτητη της διάστασης*).

Πόρισμα 1.2.3. *Έστω A, B μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε*

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda} |B|^{1-\lambda}. \tag{1.2.11}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $z \mapsto \log z$ είναι κοίλη, κι αυτό έχει σαν συνέπεια την

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y \tag{1.2.12}$$

γιά κάθε $x, y > 0$ και $\lambda \in (0,1)$. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\lambda A + (1-\lambda)B| &\geq \left[\lambda |A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n}\right]^n \\ &\geq \left[|A|^{\lambda/n} |B|^{(1-\lambda)/n}\right]^n \\ &= |A|^{\lambda} |B|^{1-\lambda} \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda \in (0,1)$. □

Ιστορικά, η πρώτη απόδειξη της ανισότητας Brunn–Minkowski (για κυρτά σώματα) βασίστηκε στην *αρχή του Brunn*.

Θεώρημα 1.2.4 (αρχή του Brunn). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Θέτουμε $\theta^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}$ και ορίζουμε $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτοντας*

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^{\perp} + t\theta)|. \tag{1.2.13}$$

Τότε, η $f_\theta^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στο φορέα της.

Ο Brunn οδηγήθηκε σε αυτό το συμπέρασμα ξεκινώντας από το ακόλουθο ερώτημα. Είναι σωστό ότι αν τα $t < r < s$ ανήκουν στο φορέα της f_θ τότε

$$f_\theta(r) \geq \min\{f_\theta(t), f_\theta(s)\}; \tag{1.2.14}$$

Παρατηρήστε ότι η απάντηση είναι καταφατική αν δεχτούμε το Θεώρημα 1.2.4. Για κάθε κοίλη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t < r < s$ στο $[a,b]$ γράφουμε $r = (1-\lambda)t + \lambda s$ και έχουμε

$$f(r) \geq (1-\lambda)f(t) + \lambda f(s) \geq \min\{f(t), f(s)\}. \tag{1.2.15}$$

Εφαρμόζοντας την (1.2.15) για την $f = f_\theta^{1/(n-1)}$ παίρνουμε την (1.2.14).

Η απόδειξη της (1.2.14) είναι απλή στην περίπτωση του επιπέδου: ας υποθέσουμε ότι K είναι ένα κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^2$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $\theta = e_2$. Η προβολή $P(K)$ του K στη διεύθυνση του e_2 είναι το σύνολο

$$P(K) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\}. \tag{1.2.16}$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι το $P(K)$ είναι κυρτό. Έστω $x, y \in P(K)$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t και s ώστε $(x,t) \in K$ και $(y,s) \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, έχουμε

$$(1-\lambda)(x,t) + \lambda(y,s) = ((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)t + \lambda s) \in K, \tag{1.2.17}$$

συνεπώς $(1-\lambda)x + \lambda y \in P(K)$. Το $P(K)$ είναι και συμπαγές: αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $P(x,t) = x$, τότε η P είναι συνεχής. Αφού το K είναι συμπαγές, το ίδιο ισχύει και για το $P(K)$. Επίσης, από το γεγονός ότι το K περιέχει έναν δίσκο (έχει μη κενό εσωτερικό) έπεται ότι το $P(K)$ περιέχει κάποιο διάστημα. Τελικά, $P(K) = [a,b]$ για κάποιους $a < b$.

Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $h, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \min\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\} \quad \text{και} \quad g(x) = \max\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\}. \tag{1.2.18}$$

Από τη συμπάγεια του K έπεται ότι οι h και g ορίζονται καλά: το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K\}$ είναι κλειστό διάστημα. Θα δείξουμε ότι η h είναι κυρτή. Αρκεί να δείξουμε ότι γιά κάθε $x, y \in [a,b]$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $h((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y)$.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x) = t$ και $h(y) = s$. Τότε, $(x,t) \in K$ και $(y,s) \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, παίρνουμε

$$(1.2.19) \qquad (1-\lambda)(x,t) + \lambda(y,s) = ((1-\lambda)x + \lambda y), (1-\lambda)t + \lambda s) \in K.$$

Από τον ορισμό της h έπεται ότι

$$(1.2.20) \qquad h\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)t + \lambda s = (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y).$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η g είναι κοίλη. Από τον ορισμό των h και g μπορούμε να γράψουμε το κυρτό σώμα K στη μορφή

$$(1.2.21) \qquad K = \{(x,t) : x \in [a,b],\ h(x) \leq t \leq g(x)\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(1.2.22) \qquad f_\theta(x) = f_{e_2}(x) = g(x) - h(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού η g είναι κοίλη και η h είναι κυρτή, βλέπουμε αμέσως ότι η $f_\theta = g + (-h)$ είναι κοίλη. □

Θα δείξουμε ότι η αρχή του Brunn είναι συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.4. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta = e_n$. Για κάθε t στο φορέα της $f_\theta(t) = |K \cap \{x_n = t\}|$ θέτουμε

$$(1.2.23) \qquad K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,t) \in K\}.$$

Από την κυρτότητα του K έπεται ότι: αν t, s ανήκουν στο φορέα της f_θ και αν $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$(1.2.24) \qquad K(\lambda t + (1-\lambda)s) \supseteq \lambda K(t) + (1-\lambda)K(s).$$

Από το Πόρισμα 1.2.2 έχουμε

$$\begin{aligned} |K(\lambda t + (1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} &\geq |\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s)|^{\frac{1}{n-1}} \\ &\geq \lambda |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} + (1-\lambda)|K(s)|^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Άρα, η $t \mapsto |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{f_\theta(t)}$ είναι κοίλη στο φορέα της. □

Παρατήρηση. Αντίστροφα, η ανισότητα Brunn–Minkowski για κυρτά σώματα προκύπτει από το Θεώρημα 1.2.4 ως εξής: αν K, T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε τα σύνολα

$$(1.2.25) \qquad K_1 = K \times \{0\} \quad \text{και} \quad T_1 = T \times \{1\}$$

στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και ορίζουμε το κυρτό σύνολο L που «παράγουν»:

$$L = \{\lambda(x,0) + (1-\lambda)(y,1) : x \in K, y \in T\}. \tag{1.2.26}$$

Για κάθε $t \in [0,1]$ θέτουμε

$$L(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in L\}. \tag{1.2.27}$$

Παρατηρήστε ότι

$$|L(t)| = |L \cap (e_{n+1}^{\perp} + te_{n+1})| \tag{1.2.28}$$

οπότε το Θεώρημα 1.2.4 δείχνει ότι η συνάρτηση $t \mapsto |L(t)|^{1/n}$ είναι κοίλη στο $[0,1]$. Από τον ορισμό του L βλέπουμε ότι $L(0) = K$, $L(1) = T$ και $L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{K+T}{2}$. Συνεπώς,

$$\left|\frac{K+T}{2}\right|^{1/n} \geq \frac{|K|^{1/n}}{2} + \frac{|T|^{1/n}}{2}. \tag{1.2.29}$$

Έπεται ότι $|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}$. □

1.3 Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn–Minkowski μπορούμε να δώσουμε μια λύση για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$:

> Ανάμεσα σε όλα τα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που έχουν δεδομένο όγκο α, η μπάλα όγκου α έχει ελάχιστη επιφάνεια.

Ο ορισμός της επιφάνειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός του Minkowski, ο οποίος βασίζεται στην έννοια της *t-περιοχής*.

Ορισμός 1.3.1 (t-περιοχή)**.** Αν A είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $t > 0$, η *t-περιοχή* του A είναι το σύνολο

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq t\}, \tag{1.3.1}$$

όπου $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|_2 : a \in A\}$ είναι η *απόσταση* του x από το σύνολο A.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$A_t = A + tB_2^n. \tag{1.3.2}$$

Ορισμός 1.3.2 (επιφάνεια κατά Minkowski)**.** Αν A είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η *επιφάνεια* $\partial(A)$ του A ορίζεται από την

$$\partial(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t}. \tag{1.3.3}$$

Αν το A είναι κυρτό σώμα, τότε το $\liminf$ στο δεξιό μέλος είναι όριο.

Η απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.3. *Αν A είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\partial(A) \geq n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.3.4}$$

Πράγματι, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.3 είναι το εξής.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω A μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοιος ώστε $|A| = |rB_2^n|$. Τότε,*

$$\partial(A) \geq \partial(rB_2^n). \tag{1.3.5}$$

Απόδειξη. Αφού $|A| = \omega_n r^n$, από το Θεώρημα 1.3.3 έχουμε

$$\partial(A) \geq n\omega_n^{(n-1)/n} r^{n-1}\omega_n^{1/n} = n\omega_n r^{n-1}. \tag{1.3.6}$$

Από την (1.3.2) έχουμε $(rB_2^n)_t = rB_2^n + tB_2^n = (r+t)B_2^n$. Από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται ότι

$$\partial(rB_2^n) = \lim_{t\to 0^+}\frac{|(r+t)B_2^n| - |rB_2^n|}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\omega_n(r+t)^n - \omega_n r^n}{t} = n\omega_n r^{n-1}. \tag{1.3.7}$$

Άρα, $\partial(A) \geq \partial(rB_2^n)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.3. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn–Minkowski γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|A_t| - |A|}{t} &= \frac{|A + tB_2^n| - |A|}{t} \\
&\geq \frac{\left(|A|^{1/n} + |tB_2^n|^{1/n}\right)^n - |A|}{t} \\
&= \frac{|A| + nt|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t^2) - |A|}{t} \\
&= n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t),
\end{aligned}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{|A_t| - |A|}{t} \geq n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.3.8}$$

Από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται η (1.3.4). □

Παρατηρήστε ότι αυτό που δείξαμε είναι ακόμα ισχυρότερο: για κάθε $t > 0$, ανάμεσα σε όλα τα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει τη «μικρότερη t-επέκταση».

Πρόταση 1.3.5. *Έστω B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $|A| = |B|$, τότε $|A_t| \geq |B_t|$ για κάθε $t > 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} |A+tB|^{1/n} &\geq |A|^{1/n} + |tB|^{1/n} = |A|^{1/n} + t|B|^{1/n} \\ &= (1+t)|B|^{1/n} = |B+tB|^{1/n}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

1.4 Όγκος και διάσταση

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε τον όγκο των απλούστερων (και πιο σημαντικών) παραδειγμάτων κυρτών σωμάτων. Κεντρικό ρόλο στη μελέτη μας παίζει φυσιολογικά η *μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα*

$$B_2^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}. \tag{1.4.1}$$

Με άλλα λόγια, $x \in B_2^n$ αν και μόνο αν $\|x\|_2 \leq 1$. Αν $r > 0$ τότε rB_2^n είναι η μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα r (το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_2 \leq r$).

Το απλούστερο ίσως παράδειγμα κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ είναι ο *μοναδιαίος κύβος*

$$B_\infty^n = [-1,1]^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1\}. \tag{1.4.2}$$

Ο όγκος του κύβου είναι (από τον ορισμό του όγκου!) ίσος με

$$|B_\infty^n| = 2^n. \tag{1.4.3}$$

Παρατηρήστε ότι

$$B_2^n \subseteq B_\infty^n \subseteq \sqrt{n} B_2^n.$$

Πράγματι, αν $x \in B_2^n$ τότε $|x_i| \leq \|x\|_2 \leq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $x \in B_\infty^n$. Από την άλλη πλευρά, αν $x \in B_\infty^n$ τότε $\|x\|_2^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$ δηλαδή $x \in \sqrt{n}B_2^n$. Οι κορυφές του κύβου είναι τα 2^n σημεία της μορφής $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$. Κάθε τέτοιο σημείο βρίσκεται σε απόσταση $\sqrt{n}$ από το 0. Δηλαδή, καθώς η διάσταση μεγαλώνει, οι κορυφές του κύβου «απομακρύνονται» από τη μπάλα, και ο κύβος μοιάζει «όλο και λιγότερο» με μπάλα.

Άσκηση: Μια ενδιαφέρουσα δοκιμή για τη διαίσθηση σας σχετικά με αυτά τα δύο απλά κυρτά σώματα είναι η εξής. Σχεδιάστε το μοναδιαίο τετράγωνο στο επίπεδο. Τώρα, φτιάξτε τέσσερις δίσκους με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα 1. Οι δίσκοι εφάπτονται στα μέσα των ακμών του τετραγώνου. Υπολογίστε την ακτίνα ρ_2 του μεγαλύτερου δίσκου με κέντρο το 0 η οποία απλώς ακουμπάει (και δεν τέμνει) τους τέσσερις δίσκους. Ποιά είναι η τιμή του ρ_2;

Τώρα κάντε το ίδιο στον n–διάστατο χώρο. Θεωρήστε μπάλες ακτίνας 1 με κέντρα τις 2^n κορυφές του B_∞^n. Αυτές εφάπτονται πάνω στις ακμές του κύβου. Ποιά είναι η ακτίνα ρ_n της μεγαλύτερης μπάλας με κέντρο το 0 η οποία απλώς ακουμπάει τις άλλες μπάλες; Είναι σωστό ότι $\rho_n B_2^n \subseteq B_\infty^n$;

Ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n. Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του ω_n χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavallieri. Αν $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$ τότε για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$|K| = \int_{-\infty}^{\infty} |K \cap H(t)|\, dt \tag{1.4.4}$$

όπου $|K \cap H(t)|$ είναι ο $(n-1)$–διάστατος όγκος της τομής του K με το «επίπεδο» $H(t)$. Στην περίπτωση της μπάλας παίρνουμε

$$\omega_n = \int_{-1}^{1} |B_2^n \cap H(t)| dt. \tag{1.4.5}$$

Παρατηρώντας ότι για κάθε $t \in [-1,1]$ η τομή της B_2^n με το $H(t)$ είναι μια $(n-1)$–διάστατη μπάλα ακτίνας $r(t) = \sqrt{1-t^2}$, έχουμε

$$|B_2^n \cap H(t)| = \omega_{n-1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{1.4.6}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην αναδρομική σχέση

$$\omega_n = 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt. \tag{1.4.7}$$

Συμβολίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με I_n. Αν θέσουμε $t = \cos\theta$ έχουμε

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta. \tag{1.4.8}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta\, d\theta = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{1.4.9}$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Λήμμα 1.4.1. *Ο όγκος της B_2^n είναι ίσος με*

$$\omega_n = \omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \tag{1.4.10}$$

αν $n = 2k$ και

$$\omega_n = \omega_{2k-1} = \pi^{k-1}\frac{2^{2k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \tag{1.4.11}$$

αν $n = 2k-1$.

Απόδειξη. Από τις (1.4.7) και (1.4.8) βλέπουμε ότι

$$\frac{\omega_{n+2}}{\omega_n} = \frac{2\omega_{n+1}I_{n+2}}{2\omega_{n-1}I_n} = \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{(n+2)\omega_{n-1}} \tag{1.4.12}$$

για κάθε $n \geq 2$. Δεδομένου ότι $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3}$ (γιατί;), μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι

$$\omega_{n+2} = \frac{2\pi}{n+2}\omega_n \tag{1.4.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διακρίνοντας περιπτώσεις (n άρτιος και n περιττός), και χρησιμοποιώντας πάλι τη μέθοδο της επαγωγής, παίρνουμε το ζητούμενο. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η (1.4.11) τότε

$$\begin{aligned} \omega_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1}\pi^{k-1}\frac{2^{2k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \\ &= \pi^k \frac{2^{2k-1}\cdot 2\cdot 2k\cdot (k-1)!}{(2k+1)\cdot 2k\cdot (2k-1)!} \\ &= \pi^k \frac{2^{2k+1}k!}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Ανάλογα (και πιο απλά) δουλεύουμε στην περίπτωση που ο n είναι άρτιος. □

Στους τύπους που βρήκαμε για τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας εμφανίζονται παραγοντικά. Αν θέλουμε να εκτιμήσουμε σωστά το μέγεθος του αριθμού ω_n για μεγάλες τιμές του n, χρειαζόμαστε ακριβείς εκτιμήσεις για την ακολουθία $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Μια πρώτη εκτίμηση προκύπτει ως εξής: θεωρούμε τη συνάρτηση $x \mapsto \log x$. Έχουμε

$$\int_1^n \log x\, dx = (x\log x - x)\big|_1^n = n\log n - (n-1) = \log(n^n/e^{n-1}). \tag{1.4.14}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η $\log x$ είναι αύξουσα, έχουμε

$$\int_1^n \log x\, dx = \int_1^2 \log x\, dx + \cdots + \int_{n-1}^n \log x\, dx < \log 2 + \cdots + \log n = \log(n!) \tag{1.4.15}$$

και

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x\, dx > \int_2^3 \log x\, dx + \cdots + \int_{n-1}^n \log x\, dx &> \log 2 + \cdots + \log(n-1) \\ &= \log((n-1)!). \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Δηλαδή, $n!/n < n^n/e^{n-1} < n!$, απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}. \tag{1.4.17}$$

Από την (1.4.17) βλέπουμε ότι

$$\frac{e\sqrt[n]{n!}}{n} \to 1, \tag{1.4.18}$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή η $\sqrt[n]{n!}$ «συμπεριφέρεται» σαν την $\frac{n}{e}$ για μεγάλα n. Η εκτίμηση αυτή είναι αρκετή για πολλές εφαρμογές.

Ο *τύπος του Stirling* περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τη συμπεριφορά της ακολουθίας $n!$. Μια απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου.

Λήμμα 1.4.2 (τύπος του Stirling). *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n)^{-1}}. \tag{1.4.19}$$

Έστω (α_n) και (β_n) δύο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Συμφωνούμε να γράφουμε $\alpha_n \sim \beta_n$ αν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Από τους τύπους του Λήμματος 1.4.1 και από την προσέγγιση του $n!$ στο Λήμμα 1.4.2 έπεται το εξής.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω ω_n ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\omega_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2}. \tag{1.4.20}$$

Ειδικότερα, η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχει ακτίνα

$$r_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}}. \tag{1.4.21}$$

Απόδειξη. Έστω $n = 2k$. Αφού $e^{(12k)^{-1}} \to 1$ και $e^{(12k+1)^{-1}} \to 1$ όταν $k \to \infty$,

$$\omega_n = \frac{\pi^k}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\frac{\pi^k e^k}{k^k} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2}. \tag{1.4.22}$$

Η περίπτωση $n = 2k-1$ είναι μια (λίγο) δυσκολότερη άσκηση.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι αν r_n είναι η ακτίνα μιας n–διάστατης μπάλας όγκου 1 τότε $\omega_n r_n^n = 1$. Δηλαδή, $r_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\omega_n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}}$. □

Είδαμε ότι η ακτίνα r_n της n–διάστατης μπάλας όγκου 1 είναι «μεγάλη»: της τάξης της $\sqrt{n}$. Το επόμενο ερώτημα που θα συζητήσουμε είναι: πώς κατανέμεται ο όγκος μέσα σ' αυτή τη μπάλα; Ας δούμε πρώτα ποιός είναι ο όγκος μιας $(n-1)$–διάστατης τομής της $B(n) := r_n B_2^n$ που περνάει από το 0. Σύμφωνα με όσα έχουμε πεί,

$$|B(n) \cap H(0)| = \omega_{n-1} r_n^{n-1} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^{(n-1)/n}}. \tag{1.4.23}$$

Από το Θεώρημα 1.4.3 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^{(n-1)/n}} &\sim \frac{(\sqrt{\pi n})^{(n-1)/n}}{\sqrt{\pi(n-1)}}\left(\frac{2\pi e}{n-1}\right)^{(n-1)/2}\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi e}}\right)^{(n-1)/2} \\ &\sim \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/2}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$|B(n)\cap H(0)| \sim \sqrt{e}. \tag{1.4.24}$$

Τώρα, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον $(n-1)$–διάστατο όγκο της τομής της $B(n)$ που βρίσκεται σε απόσταση t από το 0. Η τομή $B(n)\cap H(t)$ είναι μια μπάλα ακτίνας $\sqrt{r_n^2-t^2}$, αν βέβαια $|t|\leq r_n$. Άρα,

$$|B(n)\cap H(t)| = \omega_{n-1}(r_n^2-t^2)^{(n-1)/2} = \omega_{n-1}r_n^{n-1}\left(1-\frac{t^2}{r_n^2}\right)^{(n-1)/2}. \tag{1.4.25}$$

Αφού $\omega_{n-1}r_n^{n-1} = |B(n)\cap H(0)| \sim \sqrt{e}$ και $r_n^2 \sim n/(2\pi e)$, βλέπουμε ότι

$$|B(n)\cap H(t)| \sim \sqrt{e}\left(1-\frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{1.4.26}$$

Όμως,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{e}\left(1-\frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{e}\cdot\exp(-\pi e t^2). \tag{1.4.27}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής.

Πρόταση 1.4.4. *Έστω $t\in\mathbb{R}$ και έστω $B(n)$ η n–διάστατη μπάλα όγκου 1. Τότε,*

$$|B(n)\cap\{x : x_n = t\}| \to \sqrt{e}\cdot\exp(-\pi e t^2) \tag{1.4.28}$$

καθώς το $n\to\infty$. □

Δηλαδή, αν «προβάλλουμε τον όγκο της $B(n)$ στη διεύθυνση του e_n» ή σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση, παίρνουμε μια κατανομή που, καθώς το n τείνει στο άπειρο, μοιάζει πολύ με την *κανονική κατανομή* διασποράς $1/(2\pi e)$ (η οποία είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση n).

Μια (εκ πρώτης όψεως) παράξενη συνέπεια της Πρότασης 1.4.4 είναι η εξής. Ας θεωρήσουμε τη λωρίδα $L_n = \{x\in\mathbb{R}^n : |x_n|\leq 1\}$. Τότε, για μεγάλα n έχουμε

$$|B(n)\cap L_n| \sim \sqrt{e}\int_{-1}^{1}\exp(-\pi e t^2)\,dt = 1-2\sqrt{e}\int_1^{\infty}\exp(-\pi e t^2)\,dt. \tag{1.4.29}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{e}\int_1^\infty \exp(-\pi e t^2)\,dt \leq \sqrt{e}\int_1^\infty t\exp(-\pi e t^2)\,dt = \frac{\sqrt{e}}{2\pi e}e^{-\pi e}. \tag{1.4.30}$$

Ο αριθμός αυτός είναι «πολύ μικρός». Δηλαδή, παρόλο που η ακτίνα της n–διάστατης μπάλας όγκου 1 είναι της τάξης της $\sqrt{n}$, ο όγκος της είναι σχεδόν ολόκληρος μέσα σε μια (οποιαδήποτε) συμμετρική (ως προς το 0) λωρίδα πλάτους 2 (!)

Επειδή το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται ανεξάρτητα από το ποιά λωρίδα θα διαλέξουμε, μπαίνει κανείς στον πειρασμό να υποθέσει ότι ο όγκος συγκεντρώνεται στην τομή των λωρίδων, δηλαδή κοντά στο κέντρο της μπάλας. Ούτε όμως αυτό είναι σωστό: αν, για παράδειγμα, θεωρήσετε τη μπάλα $(r_n/2)B_2^n$ (που έχει «μεγάλη» ακτίνα), τότε

$$|(r_n/2)B_2^n| = \frac{1}{2^n}|B(n)| = \frac{1}{2^n}\ (!) \tag{1.4.31}$$

Δηλαδή, ο όγκος της μπάλας συγκεντρώνεται κοντά στο σύνορο της.

Το πρόβλημα των Busemann–Petty. Γράφουμε S^{n-1} για την Ευκλείδεια *μοναδιαία σφαίρα*:

$$S^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta\|_2 = 1\}. \tag{1.4.32}$$

Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\theta \in S^{n-1}$ ορίζουμε

$$\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = 0\}. \tag{1.4.33}$$

Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta^\perp + t\theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = t\}. \tag{1.4.34}$$

Το σύνολο $\theta^\perp$ είναι ο $(n-1)$–διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που έχει σαν *κάθετο διάνυσμα* το θ. Το σύνολο $\theta^\perp + t\theta$ είναι το *υπερεπίπεδο* που έχει σαν κάθετο διάνυσμα το θ και βρίσκεται σε (προσημασμένη) απόσταση t από το 0.

Έστω K και T δύο *συμμετρικά* κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο «συμμετρικό» εννοούμε πάντα «συμμετρικό ως προς το 0». Δηλαδή, έχουμε $x \in K$ αν και μόνο αν $-x \in K$ (ομοίως για το T). Υποθέτουμε ότι:

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $|K \cap \theta^\perp| < |T \cap \theta^\perp|$.

Δηλαδή, κάθε *κεντρική τομή* του K έχει μικρότερο $(n-1)$–διάστατο όγκο από την αντίστοιχη κεντρική τομή του T. Το πρόβλημα των Busemann-Petty (1956) είναι το εξής:

Ισχύει τότε ότι $|K| < |T|$;

Η απάντηση είναι καταφατική αν $n = 2$. Για την ακρίβεια, η υπόθεση για τις τομές των K και T έχει σαν συνέπεια ότι $K \subset T$. Η απάντηση όμως για διαστάσεις $n > 2$ δόθηκε πολύ πρόσφατα: είναι καταφατική μόνο αν $n = 2, 3, 4$.

Ο υπολογισμός που κάναμε για την Ευκλείδεια μπάλα $B(n)$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έδειξε ότι: για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$|B(n) \cap \theta^{\perp}| = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^{(n-1)/n}} \to \sqrt{e} \tag{1.4.35}$$

όταν $n \to \infty$. Το αντίστοιχο ερώτημα για τον κύβο $Q(n) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ δυσκολότερο. Ο K. Ball (~ 1985) απέδειξε ότι: για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$1 \leq |Q(n) \cap \theta^{\perp}| \leq \sqrt{2}. \tag{1.4.36}$$

Παρατηρήστε ότι $\sqrt{2} < \sqrt{e}$ (!). Αν λοιπόν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη, τότε $|B(n) \cap \theta^{\perp}| > \sqrt{2}$. Δεν είναι πολύ δύσκολο να ελέγξετε ότι: αν $n \geq 10$, τότε

$$|Q(n) \cap \theta^{\perp}| \leq \sqrt{2} < |B(n) \cap \theta^{\perp}| \tag{1.4.37}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Δηλαδή, το ζευγάρι $K = Q(n)$ και $T = B(n)$ δίνει αντιπαράδειγμα στο ερώτημα των Busemann–Petty: ικανοποιεί τις υποθέσεις αλλά δεν ικανοποιεί το ζητούμενο.

1.4α΄ Νόρμες και συμμετρικά κυρτά σώματα

Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$.

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι σε κάθε χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ με νόρμα αντιστοιχεί φυσιολογικά ένα συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα. Αντίστροφα, όπως θα δούμε αργότερα, κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K επάγει μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.4.5. *Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η «μοναδιαία μπάλα»*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \tag{1.4.38}$$

του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα.

Απόδειξη. Η συμμετρία του K είναι απλή: αν $x \in K$ τότε $\|-x\| = \|x\| \leq 1$, άρα $-x \in K$. Για να δείξουμε ότι το K είναι κυρτό θεωρούμε $x, y \in K$ και $\lambda \in (0,1)$ και παρατηρούμε ότι

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq \|(1-\lambda)x\| + \|\lambda y\| = (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leq (1-\lambda) + \lambda = 1, \tag{1.4.39}$$

δηλαδή $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$.

Για τη συμπάγεια και το μη κενό εσωτερικό του K, παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $u = \sum_{i=1}^n t_i e_i \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|u\| = \left\| \sum_{i=1}^n t_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |t_i|\, \|e_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^n |t_i|. \tag{1.4.40}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι

$$\|u\| \leq \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\| \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{1/2} = M\, \|u\|_2, \tag{1.4.41}$$

όπου $M := \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|$ βλέπουμε ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \leq M\, \|x-y\|_2. \tag{1.4.42}$$

Δηλαδή, η $\|\cdot\|$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς την Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, ο περιορισμός της $\|\cdot\|$ στο συμπαγές σύνολο $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή: υπάρχουν $m, M > 0$ ώστε

$$m \leq \|x\| \leq M \tag{1.4.43}$$

για κάθε $x \in S^{n-1}$. Το γεγονός ότι $m > 0$ δικαιολογελιται ως εξλης: έχουμε $m = \|x_0\|$ για κάποιο $x_0 \in S^{n-1}$ και $\|x_0\| > 0$ αφού $x_0 \neq 0$ και η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα. Τωρα, είναι εύκολο να δούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2. \tag{1.4.44}$$

Πράγματι, αν $x = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα, ενώ αν $x \neq 0$ έχουμε $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$ οπότε

$$m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_2} = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \leq M. \tag{1.4.45}$$

Από την ανισότητα $m\|x\|_2 \leq \|x\|$ έπεται ότι $K \subseteq (1/m)B_2^n$, δηλαδή το K είναι φραγμένο. Από το γεγονός ότι η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής έπεται ότι το K είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Άρα, το K είναι συμπαγές.

Τέλος, από την ανισότητα $\|x\| \leq M\|x\|_2$ έπεται ότι $K \supseteq (1/M)B_2^n$, και ειδικότερα, το K έχει μη κενό εσωτερικό. □

Η επόμενη πρόταση δίνει μια ταυτότητα που εκφράζει τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ σαν ολοκλήρωμα «συνάρτησης της νόρμας» στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.4.6. *Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω K η αντίστοιχη μοναδιαία μπάλα. Για κάθε $p>0$ ισχύει η ισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} = |K| \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt. \tag{1.4.47}$$

Ειδικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|} dx = |K| \int_0^\infty t^n e^{-t} dt. \tag{1.4.48}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|x\|}^\infty p t^{p-1} e^{-t^p} dt dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{tK}(x) p t^{p-1} e^{-t^p} dx dt = \int_0^\infty p t^{p-1} e^{-t^p} |tK| dt$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} = |K| \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt.$$

□

1.5 Παράρτημα

1.5α′ Ανισότητα Prékopa–Leindler

Η ανισότητα των Prékopa και Leindler είναι η γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski στο πλαίσιο των μετρήσιμων θετικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $f,g,h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x,y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}. \tag{1.5.1}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{1.5.2}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

(α) $n=1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Ορίζουμε $x,y:(0,1)\to\mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t\int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t\int g. \tag{1.5.3}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t)f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t)g(y(t)) = \int g. \tag{1.5.4}$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t). \tag{1.5.5}$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Επομένως, η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}. \tag{1.5.6}$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}
\int h(s)ds &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\
&\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}dt \\
&\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\
&= \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Έστω f, g, h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την υπόθεση του θεωρήματος για τις f, g και h έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda}, \tag{1.5.7}$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}
H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{1.5.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa–Leindler μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Brunn–Minkowski. Δείχνουμε πρώτα το εξής:

Πρόταση 1.5.2. *Έστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{1.5.9}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K+(1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.5.1. Πράγματι, αν $x \notin K$ ή $y \notin T$ τότε

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}, \tag{1.5.10}$$

ενώ αν $x \in K$ και $y \in T$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda K + (1-\lambda)T$, άρα

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}. \tag{1.5.11}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε το ζητύμενο. □

Θεωρούμε τώρα συμπαγή μη-κενά K και T (με $|K|>0$ και $|T|>0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n}K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n}T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n}+|T|^{1/n}}. \tag{1.5.12}$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (1.5.9) παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geq 1. \tag{1.5.13}$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n}+|T|^{1/n}}, \tag{1.5.14}$$

επομένως η (1.5.13) παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n}+|T|^{1/n}\right)^n \tag{1.5.15}$$

και έπεται το ζητούμενο. □

1.5β′ Η συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση $\Gamma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Λήμμα 1.5.3. *Η συνάρτηση* Γ *ικανοποιεί τα εξής:*

(α) $\Gamma(1) = 1$.

(β) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x > 0$.

(γ) $\Gamma(n+1) = n!$ *για κάθε* $n = 0, 1, 2, \dots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Επίσης, η συνάρτηση Γ *είναι λογαριθμικά κυρτή: η* $\log \Gamma$ *είναι κυρτή συνάρτηση.*

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 1. \tag{1.5.16}$$

(β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = xG(x) \tag{1.5.17}$$

χρησιμοποιώντας την $\lim_{t\to\infty} t^x e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \exp(x\log t - t) = 0$.
(γ) Εφαρμόζοντας το (β) για $x = 1, \dots, n$ παίρνουμε

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!. \tag{1.5.18}$$

(δ) Θέτοντας όπου $x = \frac{1}{2}$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s^2 = t$ παίρνουμε:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}. \tag{1.5.19}$$

Τέλος δείχνουμε ότι η συνάρτηση Γάμμα είναι λογαριθμικά κυρτή: αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda, \mu \geq 0$ με $\lambda + \mu = 1$ ισχύει

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) \leq (\Gamma(x))^\lambda (\Gamma(y))^\mu. \tag{1.5.20}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) = \int_0^\infty (t^{x-1}e^{-t})^\lambda (t^{y-1}e^{-t})^\mu dt. \tag{1.5.21}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Hölder

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q} \tag{1.5.22}$$

όπου $p,q>0$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ για τις συναρτήσεις $f(t)=(t^{x-1}e^{-t})^{\lambda}$ και $g(t)=(t^{y-1}e^{-t})^{\mu}$ με $p=\frac{1}{\lambda}$, $q=\frac{1}{\mu}$ έχουμε ότι

$$\Gamma(\lambda x+\mu y)\leq\left(\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^{\infty}t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\mu}=\big(\Gamma(x)\big)^{\lambda}\big(\Gamma(y)\big)^{\mu}. \tag{1.5.23}$$

$\square$

Στην παράγραφο 1.4(α) είδαμε ότι αν K είναι η μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $p>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|^p}dx=|K|\cdot\int_0^{\infty}pt^{n+p-1}e^{-t^p}dt.$$

Έστω $1\leq p<\infty$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη γενική ταυτότητα, θα δείξουμε ότι ο όγκος της $B_p^n=\{x\in\mathbb{R}^n:|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p\leq 1\}$ είναι ίσος με

$$|B_p^n|=\frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}. \tag{1.5.24}$$

Πράγματι, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|_p^p}dx=|B_p^n|\int_0^{\infty}pt^{n+p-1}e^{-t^p}dt. \tag{1.5.25}$$

Όμως,

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|_p^p}dx=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}e^{-|x_1|^p}\cdots e^{-|x_n|^p}dx_1\cdots dx_n=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-|t|^p}dt\right)^n=\left(2\int_0^{\infty}e^{-t^p}dt\right)^n. \tag{1.5.26}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t^p=s$ παίρνουμε

$$\int_0^{\infty}e^{-t^p}dt=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}s^{\frac{1}{p}-1}e^{-s}ds=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right). \tag{1.5.27}$$

Με την ίδια αντικατάσταση βλέπουμε ότι

$$\int_0^{\infty}pt^{n+p-1}e^{-t^p}dt=\int_0^{\infty}s^{n/p}e^{-s}ds=\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right). \tag{1.5.28}$$

Συνεπώς,

$$\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n=|B_p^n|\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right). \tag{1.5.29}$$

Έπεται ότι

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}. \tag{1.5.30}$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση $p = 2$ έχουμε

$$\omega_n = |B_2^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \tag{1.5.31}$$

χρησιμοποιώντας την $2\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1.5γ΄ Ο τύπος του Stirling

Λήμμα 1.5.4 (τύπος του Stirling). *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n)^{-1}}. \tag{1.5.32}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία

$$d_n := \log n! - (n+\frac{1}{2})\log n + n. \tag{1.5.33}$$

Παρατηρούμε ότι

$$d_n - d_{n+1} = (n+\frac{1}{2})\log\frac{n+1}{n} - 1. \tag{1.5.34}$$

Γράφουμε

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}, \tag{1.5.35}$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \cdots$ παίρνουμε

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots. \tag{1.5.36}$$

Συγκρίνοντας το δεξιό μέλος με την γεωμετρική σειρά λόγου $(2n+1)^{-2}$ βλέπουμε ότι

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3[(2n+1)^2-1]} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}. \tag{1.5.37}$$

Από την (1.5.36) η $\{d_n\}$ είναι φθίνουσα και από την (1.5.37) η $\{d_n-(12n)^{-1}\}$ είναι αύξουσα. Άρα, το όριο $C := \lim d_n$ υπάρχει. Από την (1.5.36) βλέπουμε επίσης ότι

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{3(2n+1)^2} > \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)-1}, \tag{1.5.38}$$

δηλαδή η $\{d_n - (12n+1)^{-1}\}$ είναι φθίνουσα. Άρα,

$$C + \frac{1}{12n+1} < d_n < C + \frac{1}{12n} \tag{1.5.39}$$

Μένει να ελέγξουμε ότι $C = \log(\sqrt{2\pi})$. Μια πολύ σύντομη απόδειξη γι' αυτό είναι η εξής: από την $d_n \to C$ έπεται εύκολα ότι

$$\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \to \frac{\sqrt{2}}{e^C} \tag{1.5.40}$$

καθώς το $n \to \infty$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(x) = (1+x)^{2n+1}$. Από το θεώρημα του Taylor,

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{u''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x u^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{1.5.41}$$

Θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= \sum_{0\le k\le n}\binom{2n+1}{k} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (2n+1)(2n)\cdots(n+1)(1+t)^n(1-t)^n dt \\ &= 2^{2n} + \binom{2n}{n}(2n+1)\int_0^1 (1-t^2)^n dt. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{2n+1}{\sqrt{n}}\int_0^1 (1-t^2)^n dt = 1. \tag{1.5.42}$$

Ομως,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{2n+1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} (1-u^2/n)^n du \to 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \tag{1.5.43}$$

καθώς το $n \to \infty$. Από τις (1.5.40), (1.5.42) και (1.5.43) παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{2}}{e^C} \cdot \sqrt{\pi} = 1, \tag{1.5.44}$$

δηλαδή, $C = \log(\sqrt{2\pi})$. □

1.6 Ασκήσεις

1. Δίνονται δύο ορθογώνια $I_1 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ και $I_2 = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν επικαλύπτονται (έχουν ξένα εσωτερικά). Δείξτε ότι υπάρχουν $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε το υπερεπίπεδο $\{x : x_j = t\}$ να διαχωρίζει τα I_1 και I_2 (δηλαδή, είτε $I_1 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ ή $I_1 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$).

2. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Δείξτε ότι

$$f_\theta(0) \geq f_\theta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

3. (*το Λήμμα του Borell*) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε το $A \cap B$ να έχει όγκο, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leq a \left(\frac{1-a}{a} \right)^{(t+1)/2}.$$

Συμπέρασμα: Αν $\mu_B(M) = a > 1/2$, δηλαδή αν το M τέμνει «παραπάνω από το μισό» B, τότε το ποσοστό του B που μένει έξω από το tM φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς το $t \to \infty$ (για παράδειγμα, αν $\mu_B(M) = 2/3$ τότε $1 - \mu_B(tM) \leq 2^{-t/2}$ για κάθε $t > 1$).

4. Αυτή η άσκηση δείχνει ότι (για μεγάλες διαστάσεις) δύο υποσύνολα της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας μπορούν να έχουν «σχετικά μεγάλη» απόσταση μόνο αν κάποιο από τα δύο είναι «πολύ μικρό».

Έστω A και C δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα της B_2^n. Υποθέτουμε ότι

$$d(A, C) = \min\{\|a - c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\frac{A + C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε $a \in A$ και $c \in C$, και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.]

(β) Δείξτε ότι

$$\min\{|A|, |C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8)|B_2^n|.$$

5. Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι $\frac{1}{2}[K \cap (x+T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x+T)] \subseteq K \cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) Δείξτε ότι $|K \cap (x+T)| \leq |K \cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμοί για τις ασκήσεις 6–9. Έστω K και T κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ελάχιστο πλήθος μεταφορών $x_i + T$ του T που η ένωσή τους καλύπτει το K. Μπορούμε να ζητήσουμε τα «κέντρα» x_i να ανήκουν στο K ή να επιλέγονται ελεύθερα στο χώρο. Έτσι, ορίζουμε

$$\overline{N}(K,T) = \min\left\{ N \in \mathbb{N} \;\Big|\; \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n : \, K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + T) \right\}$$

και

$$N(K,T) = \min\left\{ N \in \mathbb{N} \;\Big|\; \exists x_1, \ldots, x_N \in K : \, K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + T) \right\}.$$

Λόγω συμπάγειας, οι *αριθμοί κάλυψης* $\overline{N}(K,T)$ και $N(K,T)$ ορίζονται καλά.

6. Δείξτε ότι αν K, T και M είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\overline{N}(K,M) \leq \overline{N}(K,T) \cdot \overline{N}(T,M).$$

7. Από τους ορισμούς βλέπουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(K,T) \leq N(K,T).$$

Δείξτε ότι: αν τα K και T είναι συμμετρικά ως προς το 0, τότε

$$N(K,2T) \leq \overline{N}(K,T).$$

8. Έστω K ένα συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε τον αριθμό κάλυψης $N(K, \rho B_2^n)$ είναι ο εξής. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $S = \{x_1, \ldots, x_N\}$ του K με την εξής ιδιότητα:

$$(*) \quad \text{αν } i \neq j \text{ τότε } \|x_i - x_j\|_2 \geq \rho.$$

(α) Δείξτε ότι

$$N \leq \frac{\left|K + \frac{\rho}{2} B_2^n\right|}{\left|\frac{\rho}{2} B_2^n\right|}.$$

(β) Δείξτε ότι: για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει μεγιστικό $S \subset K$ που ικανοποιεί την $(*)$. Με τον όρο «μεγιστικό» εννοούμε ότι το S ικανοποιεί την $(*)$ αλλά αν προσθέσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο $z \in K \setminus S$ στο S, τότε το $S \cup \{z\}$ δεν ικανοποιεί την $(*)$. Λέμε ότι το S είναι ένα *ρ-δίκτυο*.

(γ) Δείξτε ότι αν $S = \{x_1, \ldots, x_N\}$ είναι ένα ρ-δίκτυο στο K, τότε

$$N(K, \rho B_2^n) \leq N.$$

9. Δείξτε ότι: για κάθε $\rho \in (0,1)$,

$$N(B_2^n, \rho B_2^n) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

10*. Έστω $S = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset S^{n-1}$ με την εξής ιδιότητα: αν $i \neq j$ τότε $\|x_i - x_j\|_2 \geq \sqrt{2}$. Δείξτε ότι $N \leq 2n$.

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το γ_n είναι το *μέτρο του Gauss* στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler δείξτε ότι: αν A, B είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\gamma_n\Big(\lambda A + (1-\lambda)B\Big) \geq \Big(\gamma_n(A)\Big)^{\lambda} \Big(\gamma_n(B)\Big)^{1-\lambda}.$$

12. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2} \gamma_n(A) \leq \gamma_n(A + x) \leq \gamma_n(A).$$

13. Έστω $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: (α) $g(1) = 1$, (β) $g(x+1) = xg(x)$ για κάθε $x > 0$, (γ) η $\log g$ είναι κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $g \equiv \Gamma$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας μόνο τις (α), (β) και (γ) αποδείξτε ότι

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

14. Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ισότητα

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.

Κεφάλαιο 2

Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο

2.1 Κυρτή θήκη

Στην §1.1 δώσαμε τον ορισμό του κυρτού συνόλου. Αν x και y είναι δύο σημεία στον $\mathbb{R}^n$, το *ευθύγραμμο τμήμα* $[x,y]$ με άκρα τα x και y είναι το σύνολο όλων των σημείων της μορφής $x+t(y-x)$ με $t\in[0,1]$:

$$[x,y]=\{(1-t)x+ty:0\leq t\leq 1\}. \tag{2.1.1}$$

Ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό* αν για κάθε $x,y\in A$ και για κάθε $t\in[0,1]$ έχουμε

$$(1-t)x+ty\in A. \tag{2.1.2}$$

Δηλαδή, το A είναι κυρτό αν, για κάθε δύο σημεία του, περιέχει ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει.

Σημείωση: Συμφωνούμε ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι κυρτό (παρατηρήστε ότι «ικανοποιεί κατά τετριμμένο τρόπο» τον ορισμό).

Ορισμός 2.1.1 (κυρτός συνδυασμός). Έστω $m\geq 1$ και $\{x_1,\dots,x_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Αν $t_1,\dots,t_m\geq 0$ και $t_1+\cdots+t_m=1$, τότε το

$$x=t_1x_1+\cdots+t_mx_m \tag{2.1.3}$$

λέγεται *κυρτός συνδυασμός* των $x_1,\dots,x_m$.

Από τον ορισμό του κυρτού συνόλου, ένα σύνολο είναι κυρτό αν περιέχει τους κυρτούς συνδυασμούς οποιωνδήποτε δύο σημείων του. Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Πρόταση 2.1.2. *Ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν και μόνο αν κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του A ανήκει στο A.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι απλή: αν κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του A ανήκει στο A, τότε για κάθε $x, y \in A$ και $t \in [0,1]$, παίρνοντας $t_1 = 1-t$ και $t_2 = t$ βλέπουμε ότι ο κυρτός συνδυασμός $(1-t)x + ty$ ανήκει στο A. Άρα, το A είναι κυρτό.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε ένα κυρτό σύνολο A. Θα δείξουμε ότι, για τυχόντα $x_1, \ldots, x_m \in A$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$ ισχύει $t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \in A$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το m. Ο ορισμός της κυρτότητας του A εξασφαλίζει την περίπτωση $m = 2$ (αν $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για οποιονδήποτε κυρτό συνδυασμό από m ή λιγότερα σημεία, και θεωρούμε έναν κυρτό συνδυασμό $x = \sum\limits_{i=1}^{m+1} t_ix_i$, όπου $x_i \in A$.

Αφού $\sum\limits_{i=1}^{m+1} t_i = 1$ και $m+1 > 1$, κάποιος από τους t_i είναι μικρότερος από 1. Αλλάζοντας τη σειρά των t_i, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_{m+1} < 1$. Τότε,

$$x = (1 - t_{m+1}) \sum_{i=1}^{m} \frac{t_i}{1 - t_{m+1}} x_i + t_{m+1}x_{m+1} = (1 - t_{m+1})y + t_{m+1}x_{m+1}, \tag{2.1.4}$$

όπου

$$y = \sum_{i=1}^{m} \frac{t_i}{1 - t_{m+1}} x_i. \tag{2.1.5}$$

Αφού $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 1 - t_{m+1}$, το y είναι κυρτός συνδυασμός m σημείων του A. Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $y \in A$. Χρησιμοποιώντας ξανά την επαγωγική υπόθεση για τα y και x_{m+1} ($m = 2$) συμπεραίνουμε ότι $x \in A$. □

Πρόταση 2.1.3. (i) *Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Η τομή $\bigcap_{i \in I} A_i$ των A_i είναι κυρτό σύνολο.*

(ii) *Έστω (A_m) μια αύξουσα ακολουθία κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$: δηλαδή, $A_m \subseteq A_{m+1}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, η ένωση $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ των A_m είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Ορισμός 2.1.4 (κυρτή θήκη)**.** Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *κυρτή θήκη* του S είναι το σύνολο $\mathrm{conv}(S)$ που αποτελείται από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του S.

Πρόταση 2.1.5. *Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η κυρτή θήκη του S είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το S. Δηλαδή,*

(i) *Το σύνολο* $\mathrm{conv}(S)$ *είναι κυρτό.*

(ii) *Αν το A είναι κυρτό σύνολο και $A \supseteq S$ τότε $A \supseteq \mathrm{conv}(S)$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $x, y \in \mathrm{conv}(S)$ και έστω $t \in [0,1]$. Τα x και y γράφονται σαν κυρτοί συνδυασμοί σημείων του S:

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \quad \text{και} \quad y = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j. \tag{2.1.6}$$

Τότε,

$$(1-t)x + ty = \sum_{i=1}^{k} ((1-t)a_i)x_i + \sum_{j=1}^{m} (tb_j)y_j \in \mathrm{conv}(S) \tag{2.1.7}$$

γιατί $x_i, y_j \in S$ και

$$\sum_{i=1}^{k}(1-t)a_i + \sum_{j=1}^{m} tb_j = (1-t)\sum_{i=1}^{k} a_i + t\sum_{j=1}^{m} b_j = (1-t)\cdot 1 + t \cdot 1 = 1. \tag{2.1.8}$$

Άρα, η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Εστω A ένα κυρτό σύνολο που περιέχει το S. Από την Πρόταση 2.1.2, το A περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του A. Ειδικότερα, αφού $A \supseteq S$, το A περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του S. Δηλαδή, $A \supseteq \mathrm{conv}(S)$. □

Ειδικές κλάσεις κυρτών συνόλων. Στη συνέχεια του μαθήματος θα ασχολούμαστε συχνά με τρεις σημαντικές κλάσεις κυρτών υποσυνόλων του Ευκλείδειου χώρου: τα κυρτά σώματα, τα πολύτοπα και τα πολύεδρα.

(α) Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ είναι η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου S σημείων του $\mathbb{R}^n$.

(γ) Πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια «πεπερασμένη τομή ημιχώρων», δηλαδή ένα σύνολο της μορφής

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_i \rangle \leq \beta_i \ \text{ για } \ i = 1, \dots, m\} \tag{2.1.9}$$

όπου $m \in \mathbb{N}$, $\theta_1, \dots, \theta_m \in S^{n-1}$ και $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε πολύτοπο είναι πολύεδρο. Αντίστροφα, αν ένα πολύεδρο είναι φραγμένο σύνολο, τότε είναι πολύτοπο.

2.2 Το θεώρημα του Καραθεοδωρή

Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $\mathrm{conv}(S)$ η κυρτή του θήκη. Αν $z \in \mathrm{conv}(S)$ τότε το z γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός σημείων του S. Φαίνεται λογικό, τουλάχιστον στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις, ότι μπορούμε να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό «λίγων» σημείων του S, τα οποία φυσικά θα εξαρτώνται από το z. Αυτό είναι αλήθεια σε κάθε διάσταση: θα αποδείξουμε το εξής γενικό αποτέλεσμα του Καραθεοδωρή.

Θεώρημα 2.2.1 (Καραθεοδωρής, 1907)**.** *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $z \in \mathrm{conv}(S)$ υπάρχουν $y_1, \ldots, y_{n+1} \in S$ και $t_i \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$ ώστε*

$$z = t_1 y_1 + \cdots + t_{n+1} y_{n+1}. \tag{2.2.1}$$

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathrm{conv}(S)$. Από τον ορισμό της κυρτής θήκης, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_m \in S$ και $\alpha_i \geq 0$ με $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$ ώστε

$$z = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m. \tag{2.2.2}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_i > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Αν $m < n+1$ τότε, προσθέτοντας όρους της μορφής $0 \cdot y_1$, μπορούμε να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό $n+1$ σημείων του S.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m > n+1$ και θα δείξουμε ότι μπορούμε να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό λιγότερων από m σημείων του S. Επαναλαμβάνοντας αυτό το βήμα πεπερασμένες το πλήθος φορές, θα πάρουμε το ζητούμενο.

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \cdots + \gamma_m &= 0 \\ \gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_m y_m &= 0. \end{aligned}$$

Αν για κάθε $i = 1, \ldots, m$ γράψουμε $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$, έχουμε τις $n+1$ εξισώσεις

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \cdots + \gamma_m &= 0 \\ \gamma_1 y_{11} + \cdots + \gamma_m y_{m1} &= 0 \\ \gamma_1 y_{12} + \cdots + \gamma_m y_{m2} &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ \gamma_1 y_{1n} + \cdots + \gamma_m y_{mn} &= 0. \end{aligned}$$

Το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, άρα υπάρχει μη τετριμμένη λύση $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Από την $\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 0$ βλέπουμε ότι υπάρχουν γνήσια θετικοί και γνήσια αρνητικοί γ_i. Αφού το $\{i \leq m : \gamma_i > 0\}$ είναι μη κενό, υπάρχει $1 \leq i_0 \leq m$ ώστε

$$\frac{\alpha_{i_0}}{\gamma_{i_0}} = \tau = \min\left\{\frac{\alpha_i}{\gamma_i} : \gamma_i > 0\right\}. \tag{2.2.3}$$

Ορίζουμε

$$\beta_i = \alpha_i - \tau\gamma_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.2.4}$$

Από τον ορισμό του τ έπεται ότι $\beta_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, και $\beta_{i_0} = 0$. Επιπλέον,

$$\beta_1 + \cdots + \beta_m = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) - \tau(\gamma_1 + \cdots + \gamma_m) = 1 \tag{2.2.5}$$

γιατί $\gamma_1 + \cdots + \gamma_m = 0$, και

$$\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m - \tau(\gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_m y_m) = z \tag{2.2.6}$$

γιατί $\gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_m y_m = 0$. Γράψαμε λοιπόν το z σαν κυρτό συνδυασμό:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i = \sum_{i \neq i_0} \beta_i y_i \tag{2.2.7}$$

$m-1$ σημείων του S (μπορούμε να παραλείψουμε το y_{i_0} αφού $\beta_{i_0} = 0$). Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε τελικά να γράψουμε το z σαν κυρτό συνδυασμό $n+1$ (ή λιγότερων) σημείων του S. □

Μια χρήσιμη συνέπεια του θεωρήματος του Καραθεοδωρή είναι η εξής.

Πρόταση 2.2.2. *Αν S είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ είναι συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το *simplex*

$$\Delta = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_i \geq 0 \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n+1 \right\}. \tag{2.2.8}$$

Το Δ είναι συμπαγές σύνολο, άρα το σύνολο $P := S \times \cdots \times S \times \Delta$ (όπου το S παίρνεται $n+1$ φορές) είναι συμπαγές υποσύνολο (του $\mathbb{R}^{(n+1)n+(n+1)}$).

Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : P \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(y_1, \dots, y_{n+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1}. \tag{2.2.9}$$

Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή, η εικόνα της Φ είναι ακριβώς ίση με $\mathrm{conv}(S)$ (γιατί;). Αφού η Φ είναι συνεχής και το P είναι συμπαγές, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathrm{conv}(S) = \Phi(P)$ είναι συμπαγές. □

2.3 Τα θεωρήματα των Radon και Helly

Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου αποδείχτηκε από τον Radon.

Θεώρημα 2.3.1 (Radon, 1921). *Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που έχει τουλάχιστον $n+2$ σημεία. Τότε, υπάρχουν ξένα υποσύνολα R και B του S ώστε*

$$\mathrm{conv}(R)\cap \mathrm{conv}(B)\neq\emptyset. \tag{2.3.1}$$

Σημείωση. Όπως θα φανεί και από την απόδειξη, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $R\cup B=S$. Άλλωστε, αν βρούμε R και B που ικανοποιούν το συμπέρασμα και αν $V=S\setminus(R\cup B)\neq\emptyset$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα $R_1=R\cup V$ και B: έχουμε $R_1\cap B=\emptyset$, $R_1\cup B=S$ και

$$\mathrm{conv}(R_1)\cap \mathrm{conv}(B)\supseteq \mathrm{conv}(R)\cap \mathrm{conv}(B)\neq\emptyset.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχουν $m\geq n+2$ και σημεία $v_1,\ldots,v_m\in S$ τα οποία είναι διαφορετικά ανά δύο. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}\gamma_1+\cdots+\gamma_m &= 0\\ \gamma_1v_1+\cdots+\gamma_mv_m &= 0\end{aligned}$$

με αγνώστους τους $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε και στην απόδειξη του θεωρήματος του Καραθεοδωρή. Αφού το πλήθος $m\geq n+2$ των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος $n+1$ των εξισώσεων, υπάρχει μη τετριμμένη λύση του συστήματος. Ορίζουμε

$$R=\{v_i:\gamma_i>0\}\quad\text{και}\quad B=\{v_i:\gamma_i\leq 0\}. \tag{2.3.2}$$

Από τον ορισμό των R και B έχουμε $R\cap B=\emptyset$.

Θέτουμε $\beta=\sum\limits_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_i>0$. Αφού $\gamma_1+\cdots+\gamma_m=0$, έχουμε

$$\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}(-\gamma_i)=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_i=\beta. \tag{2.3.3}$$

Από την $\gamma_1v_1+\cdots+\gamma_mv_m=0$ παίρνουμε

$$\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_iv_i=\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}(-\gamma_i)v_i. \tag{2.3.4}$$

Διαιρούμε με β και ορίζουμε

$$v=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\frac{\gamma_i}{\beta}v_i=\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}\frac{-\gamma_i}{\beta}v_i. \tag{2.3.5}$$

Από την (2.3.3) είναι φανερό ότι το v είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του R και, ταυτόχρονα, κυρτός συνδυασμός σημείων του B. Δηλαδή, $v\in\mathrm{conv}(R)\cap\mathrm{conv}(B)$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα αποδείχτηκε από τον Helly το 1913. Χρησιμοποιώντας το δικό του θεώρημα, ο Radon έδωσε (το 1921) την απόδειξη που παρουσιάζουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.2 (Helly). *Έστω $m \geq n+1$ και $\{A_1, \ldots, A_m\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε $n+1$ από τα A_i έχουν μη κενή τομή: αν $i_1, \ldots, i_{n+1}$ είναι δείκτες από το $\{1, \ldots, m\}$, τότε*

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.3.6}$$

Τότε, η τομή όλων των A_i είναι μη κενή:

$$A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset. \tag{2.3.7}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το πλήθος m των συνόλων. Αν $m = n+1$ τότε το συμπέρασμα συμπίπτει με την υπόθεση.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m > n+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, η τομή $A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m$ είναι μη κενή. [Πράγματι, η οικογένεια $\{A_j : j \neq i\}$ ικανοποιεί την (2.3.6) και αποτελείται από λιγότερα από m σύνολα.] Μπορούμε λοιπόν, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, να βρούμε

$$p_i \in A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m. \tag{2.3.8}$$

Έτσι, έχουμε $m > n+1$ σημεία $p_1, \ldots, p_m$ με την ιδιότητα: το p_i ανήκει σε όλα τα σύνολα A_j εκτός ίσως από το A_i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Υπάρχουν δείκτες $i \neq s$ ώστε $p_i = p_s = p$ (δύο από τα p_i συμπίπτουν). Τότε, το p ανήκει σε όλα τα A_j: αφού $p = p_i$, το p ανήκει σε όλα τα A_j εκτός ίσως από το A_i, αφού όμως $p = p_s$, το p ανήκει και στο A_i. Έπεται ότι

$$p \in A_1 \cap \cdots \cap A_m, \tag{2.3.9}$$

δηλαδή ισχύει η (2.3.7).

(β) Τα $p_1, \ldots, p_m$ είναι διαφορετικά ανά δύο. Αφού $m \geq n+2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Radon. Υπάρχουν $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ με $I \cap J = \emptyset$ ώστε αν θέσουμε $R = \{p_i : i \in I\}$ και $B = \{p_j : j \in J\}$ τότε υπάρχει κάποιο σημείο

$$q \in \mathrm{conv}(R) \cap \mathrm{conv}(B). \tag{2.3.10}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το q ανήκει σε όλα τα A_i. Πράγματι, από τον τρόπο επιλογής των p_i έχουμε

$$R \subset \bigcap \{A_s : s \notin I\}. \tag{2.3.11}$$

Το σύνολο δεξιά είναι κυρτό, ως τομή κυρτών συνόλων, άρα

$$\mathrm{conv}(R) \subset \bigcap \{A_s : s \notin I\}. \tag{2.3.12}$$

Όμοια,

$$\mathrm{conv}(B) \subset \bigcap \{A_s : s \notin J\}. \tag{2.3.13}$$

Αφού $q \in \mathrm{conv}(R) \cap \mathrm{conv}(B)$, συμπεραίνουμε ότι

$$q \in \bigcap \{A_s : s \notin I\} \quad \text{και} \quad q \in \bigcap \{A_s : s \notin J\}. \tag{2.3.14}$$

Αφού $I \cap J = \emptyset$, για κάθε $s \in \{1, \ldots, m\}$ έχουμε «είτε $s \notin I$ ή $s \notin J$». Από την (2.3.14) έπεται ότι $q \in A_1 \cap \cdots \cap A_m$, άρα $A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset$. □

Το θεώρημα του Helly δεν ισχύει για άπειρες οικογένειες κυρτών συνόλων. Για παράδειγμα θεωρήστε τα σύνολα $A_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ ή τα σύνολα $B_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει όμως, αν κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι τα δοθέντα κυρτά σύνολα είναι συμπαγή.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $\{A_i : i \in I\}$ ($|I| \geq n+1$) μια ενδεχομένως άπειρη οικογένεια συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε $n+1$ από τα A_i έχουν μη κενή τομή: αν $i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$, τότε*

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.3.15}$$

Τότε, η τομή όλων των A_i είναι μη κενή:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset. \tag{2.3.16}$$

Απόδειξη. Αν J είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I με πληθάριθμο $|J| \geq n+1$ τότε η οικογένεια $\{A_j : j \in J\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.2, άρα έχει μη κενή τομή. Αν πάλι $|J| < n+1$ τότε οι υποθέσεις μας εξασφαλίζουν ότι η οικογένεια $\{A_j : j \in J\}$ έχει μη κενή τομή. Δηλαδή, για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$ ισχύει

$$\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset. \tag{2.3.17}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Τότε, αν σταθεροποιήσουμε $i \in I$, έχουμε

$$A_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} A_j^c. \tag{2.3.18}$$

Τα σύνολα A_j^c, $j \neq i$, σχηματίζουν ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου A_i. Άρα, υπάρχει πεπερασμένο $F \subseteq I \setminus \{i\}$ ώστε

$$A_i \subseteq \bigcup_{j \in F} A_j^c. \tag{2.3.19}$$

Τότε, το $J = F \cup \{i\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο και

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset. \tag{2.3.20}$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την (2.3.17). Άρα, $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. $\square$

Αν κοιτάξετε προσεκτικά την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3 θα παρατηρήσετε ότι χρησιμοποιήσαμε τη συμπάγεια *ενός μόνο* από τα σύνολα A_i και το γεγονός ότι *όλα* τα A_i ήταν κλειστά. Με άλλα λόγια, έχουμε δείξει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $\{A_i : i \in I\}$ ($|I| \geq n+1$) μια ενδεχομένως άπειρη οικογένεια κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $i_* \in I$ ώστε το A_{i_*} να είναι συμπαγές και ότι οποιαδήποτε $n+1$ από τα A_i έχουν μη κενή τομή. Τότε, η τομή όλων των A_i είναι μη κενή.* $\square$

2.4 Εφαρμογές στη συνδυαστική γεωμετρία

Το θεώρημα του Helly έχει πολλές εφαρμογές στη συνδυαστική γεωμετρία. Θα μελετήσουμε κάποιες από αυτές σε αυτή την παράγραφο και στις ασκήσεις.

Το θεώρημα του Kirchberger. Το πρώτο μας παράδειγμα είναι το θεώρημα του Kirchberger (αποδείχτηκε το 1903, πριν από το θεώρημα του Helly). Για να το διατυπώσουμε χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό: αν $A, B \subset \mathbb{R}^n$, λέμε ότι το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \alpha\}$ (όπου $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$) *διαχωρίζει γνήσια* τα A και B αν

$$\langle x, y\rangle < \alpha \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } \langle x, y\rangle > \alpha \text{ για κάθε } x \in B.$$

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω R και B δύο πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $S \subset R \cup B$ με πληθάριθμο $|S| \leq n+2$ υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια τα $S \cap R$ και $S \cap B$. Τότε, υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια τα R και B.*

Απόδειξη. Ταυτίζουμε το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \alpha\}$ με το σημείο $(y, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$.

Για κάθε σημείο $r \in R$ ορίζουμε ένα σύνολο $A_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ θέτοντας

$$A_r = \{(y, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle r, y\rangle < \alpha\} \tag{2.4.1}$$

και για κάθε σημείο $b \in B$ ορίζουμε ένα σύνολο $A_b \subset \mathbb{R}^{n+1}$ θέτοντας

$$A_b = \{(y, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : y\langle b, y\rangle > \alpha\}. \tag{2.4.2}$$

Από τον ορισμό προκύπτει εύκολα ότι τα σύνολα A_r και A_b είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Αφού τα σύνολα A_r και A_b είναι ανοικτά, για κάθε $S \subseteq R \cup B$ έχουμε ότι η τομή

$$\left(\bigcap_{r\in S\cap R} A_r\right) \bigcap \left(\bigcap_{b\in S\cap B} A_b\right) \tag{2.4.3}$$

είναι ανοικτό σύνολο, άρα είναι μη κενή αν και μόνο αν περιέχει σημείο (y, α) με $y \neq 0$. Δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια τα $S \cap R$ και $S \cap B$.

Από την υπόθεση, για κάθε $S \subseteq R \cup B$ με $|S| \leq n+2$ ισχύει

$$\left(\bigcap_{r \in S \cap R} A_r\right) \bigcap \left(\bigcap_{b \in S \cap B} A_b\right) \neq \emptyset. \tag{2.4.4}$$

[Πράγματι, η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει $(y, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $y \neq 0$ ώστε $\langle x, y \rangle < \alpha$ για κάθε $x \in R \cap S$ και $\langle x, y \rangle > \alpha$ για κάθε $x \in B \cap S$. Δηλαδή, ισχύει η (2.4.4).]

Τότε, το θεώρημα του Helly (παρατηρήστε ότι το εφαρμόζουμε στον $\mathbb{R}^{n+1}$) μας δίνει

$$\left(\bigcap_{r \in R} A_r\right) \bigcap \left(\bigcap_{b \in B} A_b\right) \neq \emptyset. \tag{2.4.5}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ακριβώς ότι τα R και B διαχωρίζονται γνήσια από κάποιο υπερεπίπεδο. $\square$

Το «κέντρο» μιας κατανομής σημείων. Αν $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = \alpha\}$ είναι ένα υπερεπίπεδο, θεωρούμε τους ανοικτούς ημιχώρους

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle > \alpha\} \quad \text{και} \quad H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle < \alpha\} \tag{2.4.6}$$

και τους κλειστούς ημιχώρους

$$\overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq \alpha\} \quad \text{και} \quad \overline{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \leq \alpha\} \tag{2.4.7}$$

που ορίζει το H.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ έχει ένα «κέντρο», με την εξής έννοια: υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα «κάθε ημίχωρος που περιέχει το y περιέχει ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό των σημείων του S».

Θεώρημα 2.4.2 (Rado, 1947)**.** *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει σημείο $y \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό ημίχωρο F που περιέχει το y έχουμε*

$$\frac{|F \cap S|}{|S|} \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2.4.8}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να βρούμε $y \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό ημίχωρο G που ικανοποιεί την

$$\frac{|G \cap S|}{|S|} > \frac{n}{n+1} \tag{2.4.9}$$

ισχύει $y \in G$. [Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει $y \in \mathbb{R}^n$ με αυτή την ιδιότητα. Έστω F κλειστός ημίχωρος με $y \in F$. Αν $\frac{|F \cap S|}{|S|} < \frac{1}{n+1}$ τότε ο ανοικτός ημίχωρος $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ ικανοποιεί την (2.4.9), άρα $y \in G$. Έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο, αφού $y \in F \cap G = \emptyset$. Συνεπώς, $\frac{|F \cap S|}{|S|} \geq \frac{1}{n+1}$.]

Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια $\mathcal{G}$ όλων των ανοικτών ημιχώρων G που ικανοποιούν την (2.4.9). Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι

$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \neq \emptyset. \tag{2.4.10}$$

Για κάθε $G\in\mathcal{G}$ θέτουμε $C_G = \mathrm{conv}(G\cap S)$. Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{C_G : G\in\mathcal{G}\}$ αποτελείται από συμπαγή κυρτά σύνολα. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $G_1,\ldots,G_{n+1}\in\mathcal{G}$ ισχύει

$$S\cap C_{G_1}\cap\cdots\cap C_{G_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.4.11}$$

Πράγματι, καθένα από τα C_{G_i} περιέχει περισσότερα από $\frac{n}{n+1}|S|$ σημεία του S, άρα

$$|(C_{G_1}^c\cup\cdots\cup C_{G_{n+1}}^c)\cap S| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |C_{G_i}^c\cap S| < \sum_{i=1}^{n+1}\frac{|S|}{n+1} = |S|. \tag{2.4.12}$$

Συνεπώς, οποιαδήποτε $n+1$ σύνολα της $\mathcal{C}$ έχουν μη κενή τομή. Από το θεώρημα του Helly έπεται ότι $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} C_G\neq\emptyset$.

Τότε, αν θεωρήσουμε τυχόν $y\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}} C_G$ έχουμε $y\in C_G\subseteq G$ για κάθε $G\in\mathcal{G}$. □

Το Θεώρημα 2.4.2 γενικεύεται χωρίς δυσκολία στο πλαίσιο των Borel μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Μπορείτε να σκεφτόσαστε τα εξής δύο παραδείγματα:

(i) *Το μέτρο αρίθμησης.* Έστω X ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πληθάριθμο $|S| = m$. Για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$\mu(A) = \frac{|A\cap S|}{m}.$$

Αυτό είναι το πλαίσιο του Θεωρήματος 2.4.2.

(ii) *Ολοκληρώσιμη πυκνότητα* Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$. Για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$\mu(A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει σημείο $y\in\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό ημίχωρο G που περιέχει το y έχουμε*

$$\mu(G) \geq \frac{1}{n+1}. \tag{2.4.8}$$

Απόδειξη. Αν G είναι ένας κλειστός ημίχωρος στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε G^c για τον συμπληρωματικό ανοικτό ημίχωρο. Έστω $\mathcal{S}$ η κλάση όλων των κλειστών ημιχώρων G για τους οποίους $\mu(G^c) < \frac{1}{n+1}$. Παρατηρούμε ότι αν $G_1,\ldots,G_{n+1}\in\mathcal{S}$, τότε

$$\mu(G_1^c\cup\cdots\cup G_{n+1}^c) < \frac{n+1}{n+1} = 1, \tag{2.4.9}$$

δηλαδή

$$G_1 \cap \cdots \cap G_{n+1} \neq \emptyset. \tag{2.4.10}$$

Από το θεώρημα του Helly έπεται ότι κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\{G_i : i \in I\} \subset \mathcal{S}$ έχει μη κενή τομή.

Μπορούμε να βρούμε πεπερασμένους το πλήθος κλειστούς ημιχώρους $G_1, \ldots, G_m \subset \mathbb{R}^n$ των οποίων η τομή $F = G_1 \cap \cdots \cap G_m$ είναι φραγμένη, άρα συμπαγής. Μεγαλώνοντας αυτούς τους ημιχώρους (με μεταφορές) μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέτρο μεγαλύτερο από $\frac{n}{n+1}$, δηλαδή ότι $G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{S}$. Τότε, η οικογένεια

$$\{F \cap G : G \in \mathcal{S}\} \tag{2.4.11}$$

αποτελείται από συμπαγή σύνολα, και κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της έχει μη κενή τομή. Από την Πρόταση 2.3.3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα: $y \in G$ για κάθε $G \in \mathcal{S}$.

Έστω H ένας ανοικτός ημίχωρος που περιέχει το y. Το συμπλήρωμα του H είναι ένας κλειστός ημίχωρος G που δεν περιέχει το y, άρα δεν ανήκει στην $\mathcal{S}$. Τότε, $\mu(H) \geq \frac{1}{n+1}$.

Αν G είναι ένας κλειστός ημίχωρος που περιέχει το y, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{H_m\}$ ανοικτών ημιχώρων με

$$G = \bigcap_{m=1}^{\infty} H_m. \tag{2.4.12}$$

Τότε, $y \in H_m$ για κάθε m, άρα $\mu(H_m) \geq \frac{1}{n+1}$ για κάθε m. Έπεται ότι

$$\mu(G) = \lim_{m\to\infty} \mu(H_m) \geq \frac{1}{n+1}, \tag{2.4.13}$$

κι αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

2.5 Γενικεύσεις των τριών θεωρημάτων

2.5α΄ Το έγχρωμο θεώρημα Καραθεοδωρή

Το θεώρημα αυτής της παραγράφου γενικεύει το θεώρημα του Καραθεοδωρή: παίρνοντας $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$ βλέπουμε ότι αν S είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $0 \in \mathrm{conv}(S)$ τότε υπάρχουν $v_1 \in S_1, \ldots, v_{n+1} \in S$ ώστε $0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\})$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το θεώρημα του Καραθεοδωρή (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 2.5.1 (Bárány, 1982)**.** *Έστω $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i = 1, 2, ..., n+1$,*

$$0 \in \mathrm{conv}(S_i). \tag{2.5.1}$$

Τότε, υπάρχουν $v_1 \in S_1, \ldots, v_{n+1} \in S_{n+1}$ ώστε

$$0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}). \tag{2.5.2}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο: από την υπόθεση έχουμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n+1$, $0 \in \mathrm{conv}(S_i)$. Από τον ορισμό της κυρτής θήκης, υπάρχουν πεπερασμένα $S_i' \subseteq S_i$ ώστε $0 \in \mathrm{conv}(S_i')$, $i = 1, \dots, n+1$. Αν δείξουμε ότι υπάρχουν $v_1 \in S_1', \dots, v_{n+1} \in S_{n+1}'$ ώστε $0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_{n+1}\})$, τότε έπεται το ζητούμενο, διότι $v_i \in S_i' \subseteq S_i$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο και ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, για κάθε επιλογή σημείων $a_i \in S_i$ ισχύει $d(0, \{a_1, ..., a_{n+1}\}) > 0$. Αφού τα S_i είναι πεπερασμένα σύνολα, υπάρχει επιλογή σημείων $z_i \in S_i$ ώστε η απόσταση $d(0, \{z_1, ..., z_{n+1}\})$ να είναι θετική και η μικρότερη δυνατή.

Θέτουμε $T = \mathrm{conv}\{z_1, ..., z_{n+1}\}$ και $d := d(0, T)$. Το T είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $y \in T$ ώστε

$$d(0, T) = \|y\|_2. \tag{2.5.3}$$

Λήμμα 2.5.2. *Αν θ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του y, τότε*

$$T \subset \overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq \|y\|_2\}. \tag{2.5.4}$$

Απόδειξη του λήμματος. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{z_1, ..., z_{n+1}\} \subset \overline{H}_+ \tag{2.5.5}$$

και το λήμμα έπεται από τον ορισμό της κυρτής θήκης. Έστω $z \in \{z_1, ..., z_{n+1}\}$. Για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει η ανισότητα

$$\|y\|_2^2 - 2t\langle y, y - z\rangle + t^2\|z - y\|_2^2 = \|y + t(z - y)\|_2^2 \geq \|y\|_2^2, \tag{2.5.6}$$

άρα

$$\frac{t}{2}\|z - y\|_2^2 \geq \langle y, y - z\rangle. \tag{2.5.7}$$

Αφήνοντας το $t \to 0^+$, παίρνουμε $\langle z, y\rangle \geq \langle y, y\rangle = \|y\|_2^2$, δηλαδή

$$\langle z, \theta\rangle \geq \|y\|_2. \tag{2.5.8}$$

□

Συνέχεια της απόδειξης. Θέτουμε $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = \|y\|_2\}$ και $J_H = \{z_1, \dots, z_{n+1}\} \cap H$. Τότε,

$$T \cap H = \mathrm{conv}(J_H) \subseteq H \tag{2.5.9}$$

(άσκηση). Αφού $\dim H = n - 1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή για το $y \in T \cap H$ έχουμε ότι γράφεται ως κυρτός συνδυασμός το πολύ n σημείων από τα z_i. Δηλαδή, υπάρχει $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$ ώστε

$$y \in \mathrm{conv}(\{z_i : i \neq j\}). \tag{2.5.10}$$

Όμως,

$$0 \in \mathrm{conv}(S_j) \tag{2.5.11}$$

και επιπλέον

$$0 \in H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle < \|y\|_2\}. \tag{2.5.12}$$

Άρα, υπάρχει $w_j \in S_j$ με $w_s \in H_-$ (πράγματι, αν είχαμε $S_j \subset \overline{H}_+$ τότε θα είχαμε $\mathrm{conv}(S_j) \subset \overline{H}_+$, άρα $0 \in \overline{H}_+$, άτοπο).

Τώρα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $T_1 = \mathrm{conv}\{w_j, z_i : i \neq j\}$, ισχύει

$$d(0, T_1) < d(0, T). \tag{2.5.13}$$

Πράγματι, για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει $d(0, T_1) \leq \|y + t(w_j - y)\|_2$, άρα

$$d^2(0, T_1) \leq d^2(0, T) - 2t\langle y, y - w_j \rangle + t^2\|y - w_j\|_2^2. \tag{2.5.14}$$

Θέτουμε

$$\alpha = \|y - w_j\|_2^2 > 0 \tag{2.5.15}$$

και

$$\beta = \langle y, y - w_j \rangle = \|y\|_2\big(\|y\|_2 - \langle w_j, \theta \rangle\big) > 0. \tag{2.5.16}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $w_j \in H_-$. Αν λοιπόν επιλέξουμε $0 < t < \min\{1, \frac{2\beta}{\alpha}\}$, από την (2.5.14) παίρνουμε

$$d^2(0, T_1) \leq d^2(0, T) - 2t\beta + t^2\alpha < d^2(0, T). \tag{2.5.17}$$

Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

2.5β′ Το κλασματικό θεώρημα Helly

Έστω $m \geq n + 1$ και $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Το θεώρημα του Helly μας εξασφαλίζει ότι αν κάθε υποοικογένεια $n+1$ συνόλων από την $\mathcal{C}$ έχει μη κενή τομή, τότε $C_1 \cap \cdots \cap C_m \neq \emptyset$. Στο επόμενο «κλασματικό θεώρημα Helly» εξετάζεται η περίπτωση όπου ένα ποσοστό των υποοικογενειών μεγέθους $n+1$ έχει μη κενή τομή.

Θεώρημα 2.5.3 (Katschalski–Liu, 1979)**.** *Για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει σταθερά $\beta = \beta(n, \alpha) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα.*

> *Έστω $m \geq n + 1$ και $C_1, \ldots, C_m$ κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$. Αν τουλάχιστον $\alpha\binom{m}{n+1}$ υποσύνολα $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ με $|I| = n+1$ ικανοποιούν την $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ με $|J| \geq \beta m$ ώστε $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$.*

Σημείωση. Η καλύτερη δυνατή εξάρτηση του β από τα n και α είναι $\beta = 1-(1-\alpha)^{1/(n+1)}$. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ δίνει την ασθενέστερη εκτίμηση $\beta \geq \frac{\alpha}{n+1}$.

Απόδειξη. Για κάθε $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ συμβολίζουμε με C_I το σύνολο $\bigcap_{i\in I} C_i$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι κάθε C_i είναι συμπαγές (και μάλιστα πολύτοπο). Πράγματι, αν μας δοθούν τυχόντα κυρτά σύνολα $C_1,\dots,C_m$ τότε, για κάθε I με $|I| = n+1$ και $C_I \neq \emptyset$, επιλέγουμε τυχόν σημείο $x_I \in C_I$ και, για κάθε $i = 1,\dots,m$, ορίζουμε $C_i' = \mathrm{conv}(\{x_I : C_I \neq \emptyset, i \in I\})$. Παρατηρήστε ότι κάθε C_i' είναι κυρτό, συμπαγές και περιέχεται στο C_i. Επίσης, αν για κάποιο σύνολο δεικτών I με $|I| = n+1$ ισχύει $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, τότε $x_I \in \bigcap_{i\in I} C_i'$ δηλαδή, $\bigcap_{i\in I} C_i' \neq \emptyset$. Συνεπώς, το πλήθος των $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ με $|I| = n+1$ που ικανοποιούν την $\bigcap_{i\in I} C_i' \neq \emptyset$ είναι ίσο με το πλήθος των $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ με $|I| = n+1$ που ικανοποιούν την $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. Παίρνοντας υπ' όψιν και το γεγονός ότι $C_i' \subseteq C_i$, βλεπουμε ότι, αν το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει για τα C_i', τότε ισχύει και για τα C_i.

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, υποθέτουμε ότι τα σύνολα C_i, καθώς και όλα τα μή κενά C_I, είναι κυρτά και συμπαγή. Θεωρούμε τη *λεξικογραφική διάταξη* $\leq$ στον $\mathbb{R}^n$: $(t_1,\dots,t_n) < (r_1,\dots,r_n)$ αν υπάρχει $1 \leq k \leq n$ ώστε $t_i = r_i$ για κάθε $i < k$ και $t_k < r_k$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μοναδικό «λεξικογραφικά ελάχιστο» σημείο (άσκηση).

Λήμμα 2.5.4. *Έστω $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ σύνολο δεικτών ώστε $|I| = n+1$ και $C_I \neq \emptyset$. Αν v_I είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_I, τότε υπάρχει $J \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε το v_I να είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_J.*

Απόδειξη του λήμματος. Ορίζουμε $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x < v_I\}$. Το σύνολο A είναι κυρτό και, από τον ορισμό του v_I, έχουμε $A \cap C_I = \emptyset$. Αφού η οικογένεια $A \cap \{C_i : i \in I\}$ έχει κενή τομή, το θεώρημα του Helly μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει υποοικογένεια $n+1$ συνόλων αυτής της οικογένειας που έχει κενή τομή. Το A πρέπει να ανήκει σε αυτή την υποοικογένεια, διότι όλα τα υπόλοιπα σύνολα έχουν κοινό σημείο, το v_I. Άρα, υπάρχει $J \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε η οικογένεια $A \cap \{C_j : j \in J\}$ να έχει κενή τομή. Τώρα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το v_I είναι το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο του C_J. Πράγματι, $v_J \leq v_I$ διότι $C_I \subseteq C_J$ και $v_I \leq v_J$ διότι $A \cap C_J = \emptyset$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $\mathcal{U}$ η οικογένεια όλων των $\alpha\binom{m}{n+1}$ συνόλων δεικτών I για τα οποία $|I| = n+1$ και $C_I \neq \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα, για κάθε $I \in \mathcal{U}$ σταθεροποιούμε $J = J(I) \subseteq I$ με $|J| = n$ ώστε το C_J να έχει το ίδιο λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο με το C_I.

Το πλήθος των διαφορετικών n-συνολων $J \subseteq \{1,\dots,m\}$ είναι ίσο με $\binom{m}{n}$. Υπάρχει λοιπόν κάποιο J_0 με $|J_0| = n$ ώστε $J_0 = J(I)$ για τουλάχιστον

$$\frac{\alpha\binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}} = \alpha\frac{m-n}{n+1} \tag{2.5.18}$$

διαφορετικά σύνολα δεικτών $I \in \mathcal{U}$. Τότε, το λεξικογραφικά ελάχιστο σημείο v_{J_0} του C_{J_0}

ανήκει σε όλα αυτά τα C_I, δηλαδή σε τουλάχιστον

$$n+\alpha\frac{m-n}{n+1}>\alpha\frac{m}{n+1} \tag{2.5.19}$$

από τα σύνολα C_i (ανήκει στα n σύνολα C_j, $j\in J_0$, και σε ένα επιπλέον C_i για κάθε I με $J_0=J(I)$, διαφορετικό κάθε φορά). Συνεπώς, το συμπέρασμα ισχύει με $\beta=\frac{\alpha}{n+1}$. $\square$

2.5γ′ Το θεώρημα του Tverberg

Το θεώρημα του Radon εξασφαλίζει ότι κάθε σύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^n$ με $n+2$ σημεία έχει δύο ξένα υποσύνολα που οι κυρτές τους θήκες έχουν κοινό σημείο. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν για σύνολα με περισσότερα στοιχεία μπορούμε πάντα να βρίσκουμε πολλά ξένα υποσύνολα που οι κυρτές τους θήκες έχουν κοινό σημείο.

Η ακριβής διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής. Έστω $T(n,r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθή ιδιότητα: αν $A\subset\mathbb{R}^n$ και $|A|=m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1,\dots,A_r\subset A$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{conv}(A_j)\neq\emptyset. \tag{2.5.20}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Radon έχουμε

$$T(n,2)=n+2. \tag{2.5.21}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$T(n,r_1r_2)\leq T(n,r_1)T(n,r_2) \tag{2.5.22}$$

για κάθε $r_1,r_2\geq 2$ (άσκηση). Συνεπώς, $T(n,r)<\infty$ για κάθε $r\geq 2$. Το φράγμα που προκύπτει είναι ασθενές: για παράδειγμα, με εφαρμογή αυτής της παρατήρησης παίρνουμε $T(n,2^k)\leq(n+2)^k$. Το θεώρημα του Tverberg δίνει τη βέλτιστη εκτίμηση για τον $T(n,r)$.

Θεώρημα 2.5.5 (Tverberg, 1966). *Έστω $n,r\geq 2$. Για κάθε $A\subset\mathbb{R}^n$ με $|A|=(r-1)(n+1)+1$ μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο $A_1,\dots,A_r\subset A$ ώστε $\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{conv}(A_j)\neq\emptyset$.*

Σημείωση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέλτιστο. Δηλαδή,

$$T(n,r)=(r-1)(n+1)+1. \tag{2.5.23}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την έννοια του *κυρτού κώνου* που παράγεται από ένα $X\subseteq\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 2.5.6 (κυρτός κώνος). Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Ο **κυρτός κώνος** που παράγεται από το X είναι το σύνολο $\mathrm{cone}(X)$ όλων των γραμμικών συνδυασμών σημείων του X με μη αρνητικούς συντελεστές. Δηλαδή,

$$\mathrm{cone}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i x_i : m \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, x_i \in X \right\}. \tag{2.5.24}$$

Παρατηρήστε ότι ο κώνος $\mathrm{cone}(X)$ είναι η ένωση όλων των ημιευθειών που ξεκινούν από το 0 και περνούν από κάποιο σημείο της κυρτής θήκης $\mathrm{conv}(X)$ του X.

Πρόταση 2.5.7 (θεώρημα του Tverberg για κώνους). *Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ με $|A| = (r-1)(n+1)+1$. Αν $0 \notin \mathrm{conv}(A)$ τότε υπάρχουν r μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα $A_1, \ldots, A_r$ του A ώστε*

$$\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{cone}(A_j) \neq \{0\}. \tag{2.5.25}$$

Απόδειξη της πρότασης. Θέτουμε $N = (r-1)(n+1)$. Ορίζουμε γραμμικές απεικονίσεις $\phi_j : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^N$ $(j = 1, \ldots, r)$ ως εξής: χωρίζουμε τις N συντεταγμένες του $\mathbb{R}^N$ σε $r-1$ ομάδες των $n+1$ συντεταγμένων – συμβολικά, $u = (* \mid * \mid * \mid \cdots \mid * \mid *)$ – και ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= (x \mid 0 \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \mid 0) \\
\phi_2(x) &= (0 \mid x \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \mid 0) \\
\cdots & \quad \cdots \\
\phi_{r-2}(x) &= (0 \mid 0 \mid 0 \mid \cdots \mid x \mid 0) \\
\phi_{r-1}(x) &= (0 \mid 0 \mid 0 \mid \cdots \mid 0 \mid x) \\
\phi_r(x) &= (-x \mid -x \mid -x \mid \cdots \mid -x \mid -x).
\end{aligned}$$

Η **βασική ιδιότητα** των ϕ_j είναι η εξής: αν $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^{n+1}$, τότε

$$\sum_{j=1}^{r} \phi_j(u_j) = 0 \text{ αν και μόνο αν } u_1 = u_2 = \cdots = u_r. \tag{2.5.26}$$

Αυτό είναι φανερό, αφού

$$\sum_{j=1}^{r} \phi_j(u_j) = (u_1 - u_r \mid u_2 - u_r \mid \cdots \mid u_{r-1} - u_r). \tag{2.5.27}$$

Γράφουμε $A = \{a_1, \ldots, a_{N+1}\}$ και ορίζουμε

$$M = \phi_1(A) \cup \phi_2(A) \cup \cdots \cup \phi_r(A). \tag{2.5.28}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, N+1$ θεωρούμε το σύνολο

$$M_i = \{\phi_1(a_i), \phi_2(a_i), \ldots, \phi_r(a_i)\}. \tag{2.5.29}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων του M_i είναι ίσο με

$$\sum_{j=1}^{r} \phi_j(a_i) = 0, \tag{2.5.30}$$

άρα

$$0 \in \mathrm{conv}(M_i), \qquad i = 1, \ldots, N+1. \tag{2.5.31}$$

Από το **έγχρωμο θεώρημα του Καραθεοδωρή**, υπάρχουν $v_i = \phi_{f(i)}(a_i) \in M_i$, $i = 1, \ldots, N+1$, ώστε $0 \in \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{N+1}\})$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1$, ώστε

$$\sum_{i=1}^{N+1} t_i \phi_{f(i)}(a_i) = 0. \tag{2.5.32}$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $f(i) \in \{1, \ldots, r\}$. Για κάθε $j = 1, \ldots, r$ ορίζουμε

$$I_j = \{1 \leq i \leq N+1 : f(i) = j\} \text{ και } A_j = \{a_j : j \in I_j\}. \tag{2.5.33}$$

Πρατηρήστε ότι τα $A_1, \ldots, A_r$ είναι ξένα. Τότε, η (2.5.32) γράφεται ως εξής:

$$0 = \sum_{i=1}^{N+1} t_i \phi_{f(i)}(a_i) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \in I_j} t_i \phi_j(a_i) = \sum_{j=1}^{r} \phi_j \left(\sum_{i \in I_j} t_i a_i \right). \tag{2.5.34}$$

Από την (2.5.26) συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i \in I_1} t_i a_i = \sum_{i \in I_2} t_i a_i = \cdots = \sum_{i \in I_r} t_i a_i =: x. \tag{2.5.35}$$

Μένει να δείξουμε ότι $x \neq 0$. Τότε,

$$0 \neq x \in \bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{cone}(A_j). \tag{2.5.36}$$

Ειδικότερα, $\bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{cone}(A_j) \neq \{0\}$ και, εκ των υστέρων, τα A_j είναι μη κενά.

Για την $x \neq 0$ υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι $0 \in \mathrm{conv}(A)$, το οποίο είναι άτοπο. Πράγματι, αφού $\sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1$, υπάρχουν $j_0 \leq r$ και $i \in I_{j_0}$ ώστε $t_i > 0$. Όμως, τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$0 = \sum_{i \in I_{j_0}} \frac{t_i}{\sum_{i \in I_{j_0}} t_i} a_i, \tag{2.5.37}$$

δηλαδή, $0 \in \operatorname{conv}(A_{j_0}) \subseteq \operatorname{conv}(A)$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ με $|A| = (r-1)(n+1)+1$. Ορίζουμε

$$\tilde{A} = A \times \{1\} = \{(a,1) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.5.38}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{conv}(\tilde{A}) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{1\}, \tag{2.5.39}$$

άρα

$$0 \notin \operatorname{conv}(\tilde{A}). \tag{2.5.40}$$

Από την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να βρούμε ξένα ανά δύο $B_1, \ldots, B_r \subseteq \tilde{A}$ ώστε $\bigcap_{j=1}^r \operatorname{cone}(B_j) \neq \{0\}$. Από τον ορισμό του $\tilde{A}$, τα $B_1, \ldots, B_r$ είναι σύνολα της μορφής $\tilde{A}_j = A_j \times \{1\}$, και τα $A_1, \ldots, A_r$ είναι ξένα υποσύνολα του A (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_r \subseteq A$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^r \operatorname{cone}(A_i \times \{1\}) \neq \{0\}. \tag{2.5.41}$$

Έστω $x \neq 0$ στην τομή των κώνων. Τότε, $x = (u,s)$ για κάποιο $u \in \mathbb{R}^n$ και κάποιο $s > 0$: πράγματι, αφού $x \in \operatorname{cone}(A_1)$, το x είναι της μορφής

$$x = \sum t_i(a_i, 1) = \Big(\sum t_i a_i, \sum t_i\Big)$$

για κάποια $a_i \in A_1$, και $s = \sum t_i > 0$ διότι όλα τα t_i είναι μη αρνητικά και αν είχαμε $\sum t_i = 0$ θα παίρναμε $u = \sum t_i a_i = 0$, δηλαδή $x = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με $1/s$ παίρνουμε σημείο $x' = (u', 1) \in \bigcap_{j=1}^r \operatorname{cone}(A_j)$. Τότε, $u' \in \bigcap_{j=1}^r \operatorname{conv}(A_j)$. Δηλαδή,

$$\bigcap_{j=1}^r \operatorname{conv}(A_j) \neq \emptyset. \tag{2.5.42}$$

□

2.6 Παράρτημα

2.6α′ Το θεώρημα του Καραθεοδωρή και το πρόβλημα του Waring

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή θα αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 2.6.1. *Έστω k και n δύο φυσικοί αριθμοί. Υπάρχουν $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_2^{2k} = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, x\rangle^{2k}. \tag{2.6.1}$$

Δηλαδή, η k-οστή δύναμη του αθροίσματος των τετραγώνων n πραγματικών μεταβλητών είναι ένα άθροισμα $(2k)$-δυνάμεων κατάλληλων γραμμικών μορφών των μεταβλητών.

Κλασικά παραδείγματα είναι η *ταυτότητα του Liouville*:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^2 = \frac{1}{6} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\xi_i + \xi_j)^4 + \frac{1}{6} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\xi_i - \xi_j)^4, \tag{2.6.2}$$

και η *ταυτότητα του Fleck*:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^3 = \frac{1}{60} \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} (\xi_i \pm \xi_j \pm \xi_k)^6 + \frac{1}{30} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\xi_i \pm \xi_j)^6 + \frac{3}{5} \sum_{i=1}^{4} \xi_i^6. \tag{2.6.3}$$

Θα δουλέψουμε στον $H_{2k,n}$, τον γραμμικό χώρο των ομογενών πολυωνύμων $p(x) = p(\xi_1, \dots, \xi_n)$ με n μεταβλητές, που έχουν βαθμό $2k$. Μια βάση του $H_{2k,n}$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων

$$e_\alpha(x) = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \tag{2.6.4}$$

όπου $\alpha = (\alpha_i)_{i \leq n}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 2k$. Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε τον $H_{2k,n}$ με τον $\mathbb{R}^d$, όπου $d = \binom{n+2k-1}{2k}$. Κάθε $p \in H_{2k,n}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$p(x) = \sum t_\alpha(p) e_\alpha(x),$$

οπότε ταυτίζουμε το p με την ακολουθία $t(p) = (t_\alpha(p)) \in \mathbb{R}^d$. Παρατηρήστε ότι αν $p_m, p \in H_{2k,n}$ τότε $t(p_m) \to t(p)$ στον $\mathbb{R}^d$ αν και μόνο αν $p_m \to p$ ομοιόμορφα στην S^{n-1}.

Ορισμός 2.6.2. Έστω $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Δηλαδή, $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ (ισοδύναμα, $U^t U = Id$ όπου U^t ο «ανάστροφος» του U). Για κάθε $p \in H_{2k,n}$ συμβολίζουμε με $U(p)$ το πολυώνυμο q που ορίζεται από την

$$q(x) = p(U^{-1}x) = p(U^t x). \tag{2.6.5}$$

Παρατηρούμε ότι:

(i) Το $q = U(p)$ είναι κι αυτό ομογενές πολυώνυμο: $U(p) \in H_{2k,n}$.

(ii) Αν U_1, U_2 είναι δύο ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, τότε

$$(U_1 U_2)(p) = U_1(U_2(p)).$$

(iii) Αν $p(x) = \|x\|_2^{2k} = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^k$, τότε $U(p) = p$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό U.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1 θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα πολυώνυμα της μορφής $c\|x\|_2^{2k}$ είναι τα μόνα ομογενή πολυώνυμα βαθμού $2k$ που είναι «αναλλοίωτα ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς».

Λήμμα 2.6.3. *Αν $p \in H_{2k,n}$ και $U(p) = p$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$p(x) = c\|x\|_2^{2k} = c(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^k \tag{2.6.6}$$

για κάθε $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε τυχόν $y \in S^{n-1}$ και θέτουμε $c = p(y)$. Θεωρούμε το πολυώνυνο

$$q(x) = p(x) - c\|x\|_2^{2k}. \tag{2.6.7}$$

Έχουμε $q \in H_{2k,n}$ και, από την υπόθεση που κάναμε για το p,

$$q(Ux) = q(x) \tag{2.6.8}$$

για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Έστω $x \in S^{n-1}$. Υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός U_x με την ιδιότητα $U_x(y) = x$. Τότε,

$$q(x) = q(U_x(y)) = q(y) = 0. \tag{2.6.9}$$

Αφού το q είναι ομογενές και $q(x) = 0$ για κάθε $x \in S^{n-1}$, συμπεραίνουμε ότι $q(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $p(x) = c\|x\|_2^{2k}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1. Για κάθε $y \in B_2^n$ ορίζουμε

$$p_y(x) = \langle y, x\rangle^{2k}. \tag{2.6.10}$$

Κάθε p_y είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $2k$. Θεωρούμε την κυρτή θήκη

$$K = \mathrm{conv}(\{p_y : y \in B_2^n\}) \tag{2.6.11}$$

των p_y στον $H_{2k,n}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η B_2^n είναι συμπαγής και η απεικόνιση $y \mapsto p_y$ είναι συνεχής, βλέπουμε ότι το σύνολο $\{p_y : y \in B_2^n\}$ είναι συμπαγές. Από την Πρόταση 2.2.2, το K είναι συμπαγές.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε το πολυώνυμο $c\|x\|_2^{2k}$ να ανήκει στο K. Ορίζουμε

$$p(x) = \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} p_y(x)\, dy = \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} \langle y, x\rangle^{2k} dy. \tag{2.6.12}$$

Παρατηρήστε ότι $p \in H_{2k,n}$ και $U(p) = p$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό U. Πράγματι,

$$\begin{aligned} p(U^t x) &= \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} \langle y, U^t x\rangle^{2k} dy = \frac{1}{|B_2^n|}\int_{B_2^n} \langle Uy, x\rangle^{2k} dy \\ &= |\det U| \cdot \frac{1}{|B_2^n|}\int_{U(B_2^n)} \langle z, x\rangle^{2k} dz = p(x), \end{aligned}$$

αφού $|\det U| = 1$ και $U(B_2^n) = B_2^n$. Από το Λήμμα 2.6.3 υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$p(x) = c\|x\|_2^{2k}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αφού $p_y(x) \geq 0$ για κάθε $y \in B_2^n$ και, αν $x \neq 0$ έχουμε $p_y(x) > 0$ για τα «σχεδόν όλα» τα $y \in B_2^n$, συμπεραίνουμε ότι $p(x) > 0$ για $x \neq 0$. Συνεπώς, $c > 0$.

Το ολοκλήρωμα στην (2.6.12) προσεγγίζεται (ομοιόμορφα ως προς $x \in S^{n-1}$) από πεπερασμένα αθροίσματα Riemann, δηλαδή κυρτούς συνδυασμούς της μορφής

$$\sum_{i=1}^{N} t_i p_{y_i}$$

για κάποια $y_i \in B_2^n$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Άρα, το p ανήκει στην κλειστή θήκη του K. Όμως, το K είναι συμπαγές. Άρα, $p \in K$. Δηλαδή, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_m \in B_2^n$ και $t_i \geq 0$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$c\|x\|_2^{2k} = \sum_{i=1}^{m} t_i \langle y_i, x\rangle^{2k}. \tag{2.6.13}$$

Έπεται το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Το πρόβλημα του Waring. Το 1770, ο Waring ισχυρίστηκε (χωρίς απόδειξη) ότι για κάθε $k \geq 2$ υπάρχει $g(k) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχουν $s \leq g(k)$ και $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n = m_1^k + \cdots + m_s^k. \tag{2.6.14}$$

Για την ακρίβεια, ο Waring απλώς ισχυρίστηκε ότι μπορούμε να πάρουμε $g(2) = 4$, $g(3) = 9$ και $g(4) = 19$. Ο Hilbert απέδειξε (το 1909) ότι ο ισχυρισμός του Waring είναι σωστός για κάθε $k \geq 2$.

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος ο Hilbert, για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών k και n, κατασκεύασε διανύσματα $u_1, \ldots, u_m$ με *ακέραιες συντεταγμένες* και *ρητούς αριθμούς* $c_1, \ldots, c_m$ με την ιδιότητα

$$\|x\|_2^{2k} = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i, x\rangle^{2k} \tag{2.6.15}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ (συγκρίνετε με το Θεώρημα 2.6.1).

Ας δούμε για παράδειγμα πώς χρησιμοποιείται η (2.6.15) στην περίπτωση $k = 4$. Γνωρίζουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός γράφεται σαν άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων φυσικών αριθμών (Lagrange). Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}^+$ ώστε $n = a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$. Εφαρμόζουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τους a_i. Υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{Z}^+$, $i, j = 1, \ldots, 4$, ώστε

$$n = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 + a_{i4}^2)^2. \tag{2.6.16}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (2.6.15) – ή, αν θέλετε, την ταυτότητα (2.6.12) του Liouville – με $n = 4$ και $k = 2$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι ο n γράφεται στη μορφή

$$n = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{s} m_j^4 \tag{2.6.17}$$

όπου $m_j \in \mathbb{N}$ και $s \leq 48$ (!). Θεωρήστε τώρα οποιονδήποτε $n \geq 6$. Αυτός γράφεται στη μορφή $n = 6n_1 + x$ για κάποιον $0 \leq x \leq 5$. Εφαρμόζοντας την (2.6.17) για τον n_1 και γράφοντας τον $x = 1^4 + \cdots + 1^4$ σαν άθροισμα το πολύ πέντε τετάρτων δυνάμεων, έχουμε γράψει τον n σαν άθροισμα το πολύ 53 τετάρτων δυνάμεων.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $g_*(k)$ το μικρότερο φυσικό αριθμό για τον οποίο: αν $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχουν $s \leq g_*(k)$ και $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η (2.6.14). Στη δεκαετία του 1920, οι Hardy και Littlewood ανέπτυξαν μια αναλυτική μέθοδο που οδήγησε (αρκετά αργότερα) στο κάτω φράγμα

$$g_*(k) \geq 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2. \tag{2.6.18}$$

Εικάζεται ότι το δεξιό μέλος δίνει την ακριβή τιμή της ποσότητας $g_*(k)$. Αυτό έχει επαληθευτεί για $k \leq 471\,600\,000$.

2.6β′ Το θεώρημα του Helly στη θεωρία προσέγγισης

Δίνουμε τώρα μια εφαρμογή του θεωρήματος του Helly σε ένα πρόβλημα της θεωρίας προσέγγισης. Έστω $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων $f_i : T \to \mathbb{R}$ που είναι ορισμένες σε κάποιο σύνολο T. Δίνονται $\varepsilon \geq 0$ και μια συνάρτηση $g : T \to \mathbb{R}$. Για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ θεωρούμε τον γραμμικό συνδυασμό $f_a : T \to \mathbb{R}$ των f_i που ορίζεται από την

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(t). \tag{2.6.19}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε $a \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T. \tag{2.6.20}$$

Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα της *ομοιόμορφης προσέγγισης* (ή *προσέγγισης κατά Chebyshev*). Το θεώρημα του Helly δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε μια ομοιόμορφη προσέγγιση f_a για την g στο T αν μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο σε κάθε «σχετικά μικρό» υποσύνολο του T.

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω T ένα πεπερασμένο σύνολο. Σταθεροποιούμε $\varepsilon \geq 0$. Υποθέτουμε ότι αν $t_1, \ldots, t_{m+1}$ είναι οποιαδήποτε $m+1$ σημεία του T τότε υπάρχει f_a – η οποία εξαρτάται από τα $t_1, \ldots, t_{m+1}$ – ώστε*

$$|g(t_i) - f_a(t_i)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, m+1. \tag{2.6.21}$$

Τότε, υπάρχει f_a με την ιδιότητα

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T. \tag{2.6.22}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε ένα σύνολο $A(t) \subset \mathbb{R}^m$ ως εξής:

$$A(t) = \big\{a = (a_1, \ldots, a_m) : |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon\big\}. \tag{2.6.23}$$

Με άλλα λόγια, $A(t)$ είναι το σύνολο των $a \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία η συνάρτηση f_a προσεγγίζει την g με ακρίβεια ε *στο σημείο* t.

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε σύνολο $A(t)$ είναι κυρτό σύνολο. Η υπόθεση του θεωρήματος εξασφαλίζει ότι αν $t_1, \ldots, t_{m+1} \in T$ τότε

$$A(t_1) \cap \cdots \cap A(t_{m+1}) \neq \emptyset. \tag{2.6.24}$$

Δηλαδή, η πεπερασμένη οικογένεια κυρτών συνόλων $\{A(t) : t \in T\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Έπεται ότι

$$\bigcap_{t \in T} A(t) \neq \emptyset. \tag{2.6.25}$$

Θεωρούμε τυχούσα f_a με $f_a \in A(t)$ για κάθε $t \in T$. Τότε, η f_a ικανοποιεί την (2.6.22). □

Στην περίπτωση που το T είναι άπειρο, μπορούμε να επεκτείνουμε το προηγούμενο θεώρημα αν υποθέσουμε κάποια «ανεξαρτησία» των συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_m$.

Θεώρημα 2.6.5. *Έστω $f_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: υπάρχουν $s_1, \ldots, s_n \in T$ ώστε αν για την $f_a = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$ έχουμε $f_a(s_1) = \cdots = f_a(s_n) = 0$ τότε $a_1 = \cdots = a_m = 0$.*

Υποθέτουμε ότι αν $t_1, \ldots, t_{m+1}$ είναι οποιαδήποτε $m+1$ σημεία του T τότε υπάρχει f_a – η οποία εξαρτάται από τα $t_1, \ldots, t_{m+1}$ – ώστε

$$|g(t_i) - f_a(t_i)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, m+1. \tag{2.6.26}$$

Τότε, υπάρχει f_a με την ιδιότητα

$$|g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in T. \tag{2.6.27}$$

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.4, για κάθε $t \in T$ θεωρούμε το σύνολο

$$A(t) = \big\{a = (a_1, \dots, a_m) : |g(t) - f_a(t)| \leq \varepsilon\big\}. \tag{2.6.28}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = A(s_1) \cap \cdots \cap A(s_n). \tag{2.6.29}$$

Θα δείξουμε ότι το A είναι συμπαγές σύνολο. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $A(t)$ είναι κλειστό, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένο. Ορίζουμε $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$G(a) = \max\{|f_a(s_i)| : i = 1, \dots, n\}. \tag{2.6.30}$$

Παρατηρούμε ότι

(i) $G(\lambda a) = |\lambda| \cdot G(a)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $G(a) = 0$ αν και μόνο αν $a = 0$ (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση για την ανεξαρτησία των f_i).

(iii) Η G είναι συνεχής.

Άρα,

$$\min\{G(a) : a \in S^{m-1}\} = \delta > 0, \tag{2.6.31}$$

οπότε

$$G(a) \geq \delta \|a\|_2 \quad \text{για κάθε}\, a \in \mathbb{R}^m. \tag{2.6.32}$$

Παρατηρούμε ότι αν $a \in A$ τότε $|g(s_i) - f_a(s_i)| \leq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $|f_a(s_i)| \leq |g(s_i)| + \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Άρα,

$$G(a) \leq R := \varepsilon + \max\{|g(s_i)| : i = 1, \dots, n\}, \tag{2.6.33}$$

και η (2.6.31) δίνει

$$\|a\|_2 \leq \frac{R}{\delta}. \tag{2.6.34}$$

Δηλαδή, $A \subset (R/\delta)B_2^n$. Συνεπώς, το A είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Για κάθε $t \in T$ θέτουμε $B(t) = A(t) \cap A$. Τότε, κάθε $B(t)$ είναι συμπαγές σύνολο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.4, συμπεραίνουμε ότι η τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας συνόλων $A(t)$ είναι μη κενή. Ειδικότερα, κάθε σύνολο της μορφής $B(t_1) \cap \cdots \cap B(t_{m+1})$ είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές. Από την Πρόταση 2.3.3,

$$\bigcap_{t \in T} B(t) \neq \emptyset \quad \text{άρα} \quad \bigcap_{t \in T} A(t) \neq \emptyset. \tag{2.6.35}$$

Αν $a \in \bigcap_{t \in T} A(t)$, τότε η συνάρτηση

$$f_a = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m \tag{2.6.36}$$

προσεγγίζει την g με σφάλμα το πολύ ίσο με ε ομοιόμορφα στο T. □

2.6γ′ Το θεώρημα του Krasnosselsky

Έστω S ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x, y \in S$ τότε λέμε ότι το y είναι *ορατό* από το x αν το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ περιέχεται στο S. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα του Krasnosselsky.

Θεώρημα 2.6.6 (Krasnosselsky, 1947)**.** *Έστω S μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $y_1, \ldots, y_{n+1} \in S$ τότε υπάρχει $x \in S$ ώστε κάθε y_i να είναι ορατό από το x. Τότε, υπάρχει $x \in S$ ώστε κάθε $y \in S$ να είναι ορατό από το x.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in S$ θεωρούμε το σύνολο S_x όλων των $y \in S$ τα οποία είναι ορατά από το x:

$$S_x = \{y \in S : [x, y] \subseteq S\}. \tag{2.6.37}$$

Για κάθε $x \in S$ το σύνολο S_x είναι κλειστό: έστω (y_n) ακολουθία στο S_x και έστω ότι $y_n \to y$. Κάθε $y_n \in S$ και το S είναι κλειστό, άρα $y \in S$. Θα δείξουμε ότι $y \in S_x$, δηλαδή ότι, για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει $(1 - t)x + ty \in S$. Αυτό είναι απλό: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(1 - t)x + ty_n \in S$ διότι $y_n \in S_x$. Αφού το S είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι

$$(1 - t)x + ty = \lim_{n\to\infty} [(1 - t)x + ty_n] \in S. \tag{2.6.38}$$

Το $t \in [0, 1]$ ήταν τυχόν, άρα $[x, y] \subseteq S$. Έπεται ότι $y \in S_x$.

Είδαμε ότι κάθε S_x είναι κλειστό υποσύνολο του S, άρα είναι συμπαγές σύνολο. Από την Πρόταση 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι: για κάθε $x \in S$, η κυρτή θήκη $C_x = \mathrm{conv}(S_x)$ του S_x είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{C}_S = \{C_x \mid x \in S\}. \tag{2.6.39}$$

Από την υπόθεση του θεωρήματος, για κάθε $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ υπάρχει $y \in S$ ώστε $[y, x_i] \subseteq S$ για κάθε $i = 1, \ldots, n + 1$. Δηλαδή,

$$y \in S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_1} \subseteq C_{x_1} \cap \cdots \cap C_{x_{n+1}}. \tag{2.6.40}$$

Ειδικότερα,

$$C_{x_1} \cap \cdots \cap C_{x_{n+1}} \neq \emptyset. \tag{2.6.41}$$

Αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{C}_S$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Συνεπώς,

$$\bigcap_{x\in S} C_x \neq \emptyset. \tag{2.6.42}$$

Θεωρούμε τυχόν $a \in \bigcap_{x\in S} C_x$. Θα δείξουμε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι $S = S_a$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα: κάθε $y \in S$ είναι ορατό από το a.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $b \in S$ και c στο ευθύγραμμο τμήμα (a, b) ώστε $c \notin S$. Αφού το S είναι κλειστό και $c \notin S$, υπάρχει κλειστή μπάλα $B = B(c, r)$ ώστε $S \cap B = \emptyset$. Μπορούμε να βρούμε $t > 0$ ώστε η κλειστή μπάλα $t(b-c) + B$ να «ακουμπήσει» το S. Πιο συγκεκριμένα, βρίσκουμε τον μικρότερο $t > 0$ για τον οποίο $[t(b-c) + B] \cap S \neq \emptyset$. Η μπάλα $D = B(c+t(b-c), r) = t(b-c) + B$ έχει κοινά σημεία με το S αλλά $\mathrm{int}(D) \cap S = \emptyset$. Θα δείξουμε ότι: *αν* $y \in D \cap S$, *τότε* $a \notin C_y$. Αφού $a \in \bigcap_{y \in S} C_y$, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Έστω $y \in D \cap S$. Γράφουμε $d = c + t(b-c)$, οπότε $D = B(d, r)$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} H &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y-d\rangle = \langle y, y-d\rangle\}. \\ H_- &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y-d\rangle < \langle y, y-d\rangle\}. \\ \overline{H}_+ &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y-d\rangle \geq \langle y, y-d\rangle\}. \end{aligned}$$

Ισχυρισμός 1. $C_y \subseteq \overline{H}_+$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $S_y \subseteq \overline{H}_+$. Έστω $z \in S_y$. Για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε $y - t(y-z) = (1-t)y + tz \in S$, άρα $\|d - y + t(y-z)\|_2 \geq \|y-d\|_2$. Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\|d-y\|_2^2 + 2t\langle d-y, y-z\rangle + t^2\|y-z\|_2^2 \geq \|y-d\|_2^2. \tag{2.6.43}$$

Απλοποιώντας, διαιρώντας με t και παίρνοντας όριο καθώς το $t \to 0^+$, καταλήγουμε στην $\langle d-y, y-z\rangle \geq 0$, δηλαδή

$$\langle z, y-d\rangle \geq \langle y, y-d\rangle. \tag{2.6.44}$$

Αυτό δείχνει ότι $z \in \overline{H}_+$. □

Ισχυρισμός 2. $a \in H_-$.

Από τον ορισμό του t, για μικρά $\theta > 0$ έχουμε $[-\theta(b-c) + D] \cap S = \emptyset$. Ξεκινώντας από την $\|y - d + \theta(b-c)\|_2 > \|y-d\|_2$ και δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού, καταλήγουμε στην

$$\langle b-c, d-y\rangle \leq 0. \tag{2.6.45}$$

Αφού το $a - d$ είναι αρνητικό πολλαπλάσιο του $b - c$, αυτό σημαίνει ότι

$$\langle a-d, d-y\rangle \geq 0. \tag{2.6.46}$$

Τότε,

$$\langle a-y, d-y\rangle = \langle a-d, d-y\rangle + \|d-y\|_2^2 > 0. \tag{2.6.47}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle a, y-d\rangle < \langle y, y-d\rangle, \tag{2.6.48}$$

δηλαδή, $a \in H_-$. □

Συνδυάζοντας τους δύο ισχυρισμούς βλέπουμε ότι *αν* $y \in D \cap S$, *τότε* $a \notin C_y$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

2.7 Ασκήσεις

1. Έστω A ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του A είναι ανοικτό σύνολο.

2. (α) Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι τα S και $\mathrm{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.
(β) Έστω S,T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{conv}(S+T)=\mathrm{conv}(S)+\mathrm{conv}(T).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S))\subseteq \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$. Ισχύει πάντα ισότητα;

3. Έστω $S\subset\mathbb{R}^n$ και έστω $x,y\in\mathbb{R}^n$ δύο σημεία που **δεν** ανήκουν στην κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S. Δείξτε ότι αν $x\in\mathrm{conv}(S\cup\{y\})$ και $y\in\mathrm{conv}(S\cup\{x\})$ τότε $x=y$.

4. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1,\dots,I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1,\dots,\ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1,i_2,i_3\in\{1,\dots,m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1}, I_{i_2} και I_{i_3}. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα διαστήματα $I_1,\dots,I_m$.

5. Δίνονται κυρτά σύνολα $A_1,\dots,A_m$ στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i,j\in\{1,\dots,m\}$ υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει τα A_i και A_j. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει όλα τα σύνολα $A_1,\dots,A_m$.

6. Έστω $m\geq n+1$, $d>0$ και $C_1,\dots,C_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $1\leq i_1<\cdots<i_{n+1}\leq m$ τότε υπάρχει $y\in\mathbb{R}^n$ ώστε $d(y,C_{i_j})\leq d$ για κάθε $j=1,\dots,n+1$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n$ ώστε $d(x,C_i)\leq d$ για κάθε $i=1,\dots,m$.

7. Δίνονται $\theta_1,\dots,\theta_k\in S^{n-1}$ και $t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το κυρτό πολύεδρο

$$P=\bigcap_{i=1}^{k}\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta_i\rangle\leq t_i\}$$

είναι μη κενό και φραγμένο. Δείξτε ότι: αν το υπερεπίπεδο $H=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta\rangle=t\}$ (όπου $\theta\in S^{n-1}$ και $t\in\mathbb{R}$) ικανοποιεί την $P\cap H=\emptyset$, τότε υπάρχουν $1\leq i_1<\cdots<i_n\leq k$ ώστε το $P'=\bigcap_{j=1}^{n}\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta_{i_j}\rangle\leq t_{i_j}\}$ να ικανοποιεί τις $P_1\supseteq P$ και $P'\cap H=\emptyset$.

8. Έστω $A_1,\dots,A_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k\leq n+1$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,m\}$, το σύνολο $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ είναι μη κενό.

Δείξτε ότι: αν F είναι ένας $(n-k+1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $u\in\mathbb{R}^n$ ώστε η μεταφορά $F+u$ του F να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1,\dots,A_m$.

9. Έστω $A_1,\dots,A_m$ και C κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.
(α) Δείξτε ότι για κάθε $i=1,\dots,m$, το σύνολο $B_i=\{u\in\mathbb{R}^n:\ A_i\cap(C+u)\neq\emptyset\}$ είναι κυρτό.

(β) Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C+u$ να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \ldots, A_m$.

10. Έστω $m \geq n+1$ και $K, C_1, \ldots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leq m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap \cdots \cap C_m$.

11. Δίνονται n σημεία $x_1, \ldots, x_n$ στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχει ζεύγος κάθετων ευθειών $\ell_1 \perp \ell_2$ ώστε καθένα από τα τέσσερα κλειστά τεταρτημόρια στα οποία χωρίζουν το επίπεδο να περιέχει τουλάχιστον $[n/4]$ από τα σημεία x_i.

12. Έστω $T(n,r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθή ιδιότητα: αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $|A| = m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_r \subset A$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{conv}(A_i) \neq \emptyset.$$

Δείξτε ότι

$$T(n, r_1 r_2) \leq T(n, r_1) T(n, r_2)$$

για κάθε $r_1, r_2 \geq 2$.

13. Σκοπός μας σε αυτή την άσκηση είναι να δείξουμε το εξής: αν K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$-\frac{1}{n} K + y \subseteq K.$$

(α) Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ με $u_1 + \cdots + u_{n+1} = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n} K \subseteq K.$$

(β) Εξετάστε τώρα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \ldots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Αν

$$y = \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n},$$

δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n} K + y \subseteq K.$$

(γ) Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση: K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ θεωρήστε το σύνολο

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n} x + y \in K \right\}$$

και δείξτε ότι η οικογένεια $\{A_x : x \in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly.

14*. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η *διάμετρος* του K ορίζεται από την

$$\mathrm{diam}(K) = \max\{\|x-y\|_2 : x, y \in K\}.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}(K) \leq 2$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το K να περιέχεται στην κλειστή μπάλα $B(u, r_n)$ με κέντρο u και ακτίνα

$$r_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *θεώρημα του Jung*.

15*. Δίνονται μη κενές οικογένειες $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n+1}$ συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε επιλογή $C_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, C_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$ ισχύει $C_1 \cap \cdots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε όλα τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{C}_i$ να έχουν κάποιο κοινό σημείο.

16* Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S έχει μη κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι: αν $x \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$ τότε υπάρχουν $v_1, \ldots, v_{2n} \in S$ ώστε $x \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{2n}\}))$.

Κεφάλαιο 3

Γεωμετρία των αριθμών

3.1 Το θεώρημα του Minkowski

Πολλά από τα προβλήματα της γεωμετρίας των αριθμών διατυπώνονται στην εξής μορφή: Δίνονται μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $F(0, \dots, 0) = 0$ και ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μη τετριμμένη n-άδα ακεραίων $a_1, \dots, a_n$ που ικανοποιούν την

$$|F(a_1, \dots, a_n)| \leq \lambda. \tag{3.1.1}$$

Θεωρούμε την τυχούσα n-άδα $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ σαν σημείο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με K το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την

$$|F(x)| = |F(x_1, \dots, x_n)| \leq \lambda. \tag{3.1.2}$$

Τότε, το αρχικό μας πρόβλημα διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: Κάτω από ποιές προϋποθέσεις το σύνολο K περιέχει σημείο $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$; Υπάρχουν δύο σημαντικές ιδέες πίσω από αυτή τη μετάφραση του προβλήματος. Πρώτον, παίρνουμε υπ' όψιν μας τις τιμές της F σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και όχι μόνο τις τιμές της στα $u \in \mathbb{Z}^n$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές μεθόδους για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Δεύτερον, η ερμηνεία που δίνουμε στο πρόβλημα είναι γεωμετρική, κάτι που ευνοεί την εισαγωγή νέων εννοιών και μεθόδων οι οποίες βασίζονται στη γεωμετρική μας διαίσθηση.

Γεωμετρικές μέθοδοι αυτού του τύπου είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον Gauss και τον Dirichlet, οι οποίοι εργάζονταν σε προβλήματα σχετικά με τις θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές. Πρώτος όμως ο Minkowski ανέπτυξε μια συστηματική θεωρία, απέδειξε ένα γενικό θεώρημα για n-διάστατα κυρτά σώματα K, και το εφάρμοσε σε μεγάλο πλήθος σημαντικών προβλημάτων. Η νέα θεωρία ονομάστηκε «γεωμετρία των αριθμών» από τον ίδιο τον Minkowski.

Ο Hermite (1850) απέδειξε ότι, αν F είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή n μεταβλητών, τότε η (3.1.1) έχει μη τετριμμένη ακέραια λύση αν το λ ξεπερνάει μια τιμή που εξαρτάται μόνο από το n και από τη διακρίνουσα της F. Η φύση της απόδειξής του ήταν αριθμητική. Ο Minkowski μετέφρασε το αποτέλεσμα του Hermite σε ένα θεώρημα για ελλειψοειδή, και έδωσε μια νέα γεωμετρική απόδειξή του. Στη συνέχεια παρατήρησε ότι, οι μόνες ιδιότητες του ελλειψοειδούς που απαιτούνταν για την απόδειξη, ήταν η κυρτότητα και η συμμετρία του ως προς το 0. Κατέληξε έτσι στο εξής θεώρημα (*πρώτο θεώρημα του Minkowski*):

Θεώρημα 3.1.1 (Minkowski)**.** *Έστω K ανοικτό και φραγμένο, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $|K| > 2^n$, τότε το K περιέχει τουλάχιστον ένα $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.*

Το αποτέλεσμα αυτό δεν επιδέχεται βελτίωση. Αν θεωρήσουμε τον κύβο $Q = \{x : |x_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$, τότε $|Q| = 2^n$, αλλά $Q \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$.

Θα δώσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 η οποία βασίζεται στο εξής Λήμμα του Blichfeldt:

Θεώρημα 3.1.2 (Blichfeldt)**.** *Έστω M ένα Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με $|M| > 1$. Υπάρχουν $x \neq y$ στο M ώστε $x - y \in \mathbb{Z}^n$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον Hajos. Υποθέτουμε ότι $|M| > 1$. Αν το M δεν είναι φραγμένο, παρατηρούμε ότι η τομή του M με μπάλα κατάλληλα μεγάλης ακτίνας εξακολουθεί να έχει όγκο μεγαλύτερο από 1. Υποθέτουμε λοιπόν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το M είναι φραγμένο. Θεωρούμε το θεμελιώδες παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{Z}^n$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \dots, n\}. \tag{3.1.3}$$

Το σύνολο U των $u \in \mathbb{Z}^n$ για τα οποία $(u+P)\cap M \neq \emptyset$ είναι πεπερασμένο: αν $(u+P)\cap M \neq \emptyset$ τότε $u \in M - P$ και το $M - P$ είναι φραγμένο, άρα έχουμε πεπερασμένες το πλήθος επιλογές για το u. Γράφουμε

$$U = \{u_1, \dots, u_r\}. \tag{3.1.4}$$

Για κάθε $j = 1, \dots, r$, ορίζουμε $M_j = (u_j + P) \cap M$. Τα σύνολα M_j είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το M. Για κάθε $j = 1, \dots, r$ θεωρούμε τη μεταφορά $M_j' = M_j - u_j = P \cap (M - u_j) \subseteq P$. Παρατηρούμε ότι $|M_j'| = |M_j|$ για κάθε $j = 1, \dots, r$. Συνδυάζοντας αυτές τις παρατηρήσεις βλέπουμε ότι αν τα M_j' ήταν ξένα, τότε θα είχαμε

$$\begin{aligned} |P| &\geq |M_1' \cup \cdots \cup M_r'| = \sum_{j=1}^r |M_j'| = \sum_{j=1}^r |M_j| = \sum_{j=1}^r |(u_j + P) \cap M| \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} |(u + P) \cap M| = |M| > 1, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υπάρχουν $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$ και $z \in M_i' \cap M_j'$. Τότε, τα $x = z + u_i$ και $y = z + u_j$ ανήκουν στο M, και $x - y = u_i - u_j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. □

Παρατήρηση. Το ίδιο ισχύει αν υποθέσουμε ότι το M είναι φραγμένο, κλειστό, και $|M| \geq 1$. Γιατί αν πάρουμε μια φθίνουσα ακολουθία $\lambda_r \to 1$, έχουμε $|\lambda_r M| > 1$, άρα υπάρχουν $x_r, y_r \in \lambda_r M$ ώστε $0 \neq x_r - y_r \in \mathbb{Z}^n$. Τότε, οι (x_r), (y_r) έχουν υπακολουθίες $x_{k_r} \to x \in M$, $y_{k_r} \to y \in M$, και εύκολα ελέγχουμε ότι $x - y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1. Θεωρούμε το $M = K/2$. Το M είναι Jordan μετρήσιμο και, από την υπόθεσή μας, $|M| > 1$. Από το Λήμμα του Blichfeldt, υπάρχουν $x, y \in M$ ώστε $0 \neq x - y \in \mathbb{Z}^n$. Όμως, από τον ορισμό του M, υπάρχουν $w_1, w_2 \in K$ με $x = w_1/2$ και $y = w_2/2$. Το K είναι συμμετρικό ως προς το 0, άρα $-w_2 \in K$. Από την κυρτότητα του K συμπεραίνουμε ότι

$$x - y = \frac{w_1 + (-w_2)}{2} \in K. \tag{3.1.5}$$

Δηλαδή, $0 \neq x - y \in K \cap \mathbb{Z}^n$. □

3.1α′ Το επιχείρημα του Minkowski

Περιγράφουμε τώρα το αρχικό επιχείρημα του Minkowski. Θεωρούμε ένα κλειστό, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό σώμα K. Για κάθε $\lambda > 0$, θεωρούμε το σώμα λK. Αφού το K είναι φραγμένο, για μικρά λ έχουμε $\lambda K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, και αφού το K περιέχει μια μπάλα με κέντρο το 0, για μεγάλα λ θα έχουμε $\lambda K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Αφού $0 \in \lambda K$, από την κυρτότητα του K έπεται ότι: αν $0 < \lambda < \lambda'$, τότε $\lambda K \subset \lambda' K$. Αφού το K είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda K = \bigcap \{\lambda' K : \lambda' > \lambda\}. \tag{3.1.6}$$

για κάθε $\lambda > 0$. Ειδικότερα, αν ορίσουμε

$$\lambda_1 = \inf\{\lambda > 0 : \lambda K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset\}, \tag{3.1.7}$$

τότε

$$\lambda_1 K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset. \tag{3.1.8}$$

Δηλαδή, υπάρχει ελάχιστος $\lambda_1 > 0$ για τον οποίο το $\lambda_1 K$ περιέχει μη μηδενικό ακέραιο σημείο (το οποίο, βέβαια, θα βρίσκεται στο σύνορό του). Για την απόδειξη της (3.1.8), σταθεροποιούμε $\lambda_* > \lambda_1$ και θεωρούμε φθίνουσα ακολουθία $\lambda_* > \mu_n \to \lambda_1$. Το $\lambda_* K$ περιέχει πεπερασμένα το πλήθος μη μηδενικά ακέραια σημεία, και, για κάθε n, κάποιο από αυτά ανήκει στο $\mu_n K$. Υπάρχουν λοιπόν μη μηδενικό $u \in \mathbb{Z}^n$ και υπακολουθία μ_{k_n} ώστε $u \in \mu_{k_n} K$ για κάθε n. Τότε,

$$u \in \bigcap_n \mu_{k_n} K = \lambda_1 K. \tag{3.1.9}$$

Για κάθε $\lambda > 0$ θεωρούμε τα σύνολα $\lambda K + u$, $u \in \mathbb{Z}^n$. Για μικρά λ, τα σύνολα $\lambda K + u$ είναι ξένα ανά δύο. Με ένα επιχείρημα ανάλογο προς το προηγούμενο, δείχνουμε ότι υπάρχει ελάχιστος $\lambda_0 > 0$ για τον οποίο υπάρχει $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε $\lambda_0 K \cap (\lambda_0 K + u) \neq \emptyset$.

Λήμμα 3.1.3. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K ισχύει η ισότητα $\lambda_1 = 2\lambda_0$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \lambda_0 K \cap (\lambda_0 K + u)$, όπου $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Τότε, λόγω της συμμετρίας του K, έχουμε $u - x \in \lambda_0 K$ και $x \in \lambda_0 K$, άρα $u \in 2\lambda_0 K$. Επομένως,

$$\lambda_1 \leq 2\lambda_0. \tag{3.1.10}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $u \in \lambda_1 K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$, τότε, παρατηρώντας ότι $-u/2 \in (\lambda_1/2)K$ και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του K, γράφουμε

$$\frac{u}{2} = -\frac{u}{2} + u \in \frac{\lambda_1}{2} K \cap \left(\frac{\lambda_1}{2} K + u \right). \tag{3.1.11}$$

Έπεται ότι $\lambda_0 \leq \lambda_1/2$. □

Ο Minkowski ολοκλήρωνε το επιχείρημά του ως εξής: τα σύνολα $\lambda_0 K + u$, $u \in \mathbb{Z}^n$, έχουν ξένα εσωτερικά. Αυτό έχει σαν συνέπεια την ανισότητα $|\lambda_0 K| \leq 1$ (αλλιώς, το Λήμμα του Blichfeldt θα μας οδηγούσε σε άτοπο, εξηγήστε γιατί). Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.3,

$$\lambda_1^n |K| = |\lambda_1 K| = |(2\lambda_0)K| = 2^n |\lambda_0 K| \leq 2^n. \tag{3.1.12}$$

Αν υποθέσουμε ότι το K δεν περιέχει μη μηδενικό ακέραιο σημείο, τότε $\lambda_1 > 1$, δηλαδή $|K| < 2^n$. Επομένως, κάθε κλειστό, συμμετρικό ως προς το 0 κυρτό σώμα K με όγκο $|K| \geq 2^n$, περιέχει μη μηδενικό $u \in \mathbb{Z}^n$.

Για την περίπτωση του ανοικτού K, υποθέτοντας ότι $|K| > 2^n$, βρίσκουμε $\lambda < 1$ ώστε $\lambda^n |K| > 2^n$, οπότε $|\lambda \overline{K}| = \lambda^n |K| > 2^n$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, βρίσκουμε μη μηδενικό ακέραιο σημείο $u \in \lambda \overline{K} \subset K$. □

Παρατηρήσεις. Το επιχείρημα του Minkowski (ειδικότερα η εισαγωγή των παραμέτρων λ_0, λ_1 και το Λήμμα 3.1.3) είναι σημαντικό για ιστορικούς λόγους. Τον οδήγησε στον ορισμό της **νόρμας που επάγεται από το** K και στον ορισμό των **διαδοχικών ελαχίστων** του K:

(i) Έστω K κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Η *συνάρτηση στάθμης* (ή *συναρτησοειδές Miknowski*) του K είναι η συνάρτηση $g_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}. \tag{3.1.13}$$

Αν το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα, τότε η g_K είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $K = \{x : g_K(x) \leq 1\}$.

(ii) Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχουν $\lambda > 0$ ώστε το λK να περιέχει τουλάχιστον i γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{Z}^n$. Ορίζουμε

$$\lambda_i = \inf\{\lambda > 0 : \dim(\lambda K \cap \mathbb{Z}^n) \geq i\}, \tag{3.1.14}$$

όπου $\dim(\lambda K \cap \mathbb{Z}^n)$ είναι η διάσταση του υποχώρου που παράγεται από τα ακέραια σημεία του λK. Οι αριθμοί $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ είναι τα *διαδοχικά ελάχιστα* του K. Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα του Minkowski, αφού $\lambda_1 K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, το $\lambda_1 K$ πρέπει να έχει όγκο το πολύ ίσο με 2^n:

$$\lambda_1^n |K| \leq 2^n. \tag{3.1.15}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν του όλα τα διαδοχικά ελάχιστα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του K, ο Minkowski απέδειξε κάτι ισχυρότερο (το *δεύτερο θεώρημα του Minkowski*):

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n |K| \leq 2^n. \tag{3.1.16}$$

3.2 Εφαρμογές στη θεωρία των αριθμών

3.2α΄ Ομογενείς γραμμικές μορφές

Η πιο γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος του Minkowski αφορά συστήματα ομογενών γραμμικών μορφών:

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $\xi_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, $i = 1, \ldots, n$, ομογενείς γραμμικές μορφές με πραγματικούς συντελεστές a_{ij} και μη μηδενική ορίζουσα Δ. Αν $t_1, \ldots, t_n > 0$ και $t_1 t_2 \cdots t_n \geq |\Delta|$, τότε υπάρχει $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε*

$$|\xi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leq t_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο

$$P = \{x : |\xi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leq t_i, i = 1, \ldots, n\}. \tag{3.2.2}$$

Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τον πίνακα (a_{ij}), τότε $P = T^{-1}(P_1)$, όπου

$$P_1 = \{y : |y_i| \leq t_i, i = 1, \ldots, n\}. \tag{3.2.3}$$

Άρα,

$$|P| = |T^{-1}(P_1)| = \frac{|P_1|}{|\Delta|} = 2^n \frac{t_1 t_2 \cdots t_n}{|\Delta|} \geq 2^n. \tag{3.2.4}$$

Από το θεώρημα του Minkowski, υπάρχει $x \in P \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$. $\square$

Εφαρμογή. *Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν ακέραιοι $u_1, \ldots, u_{n+1}$ ώστε*

$$|u_{n+1} a_i - u_i| \leq \frac{1}{u_{n+1}^{1/n}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2.5}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\xi_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ και

$$\xi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}a_i - x_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.2.6}$$

Τότε $|\Delta| = 1$, άρα για κάθε $t > 1$ υπάρχει $(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ που ικανοποιεί τις

$$|u_{n+1}| \leq t \quad \text{και} \quad |u_{n+1}a_i - u_i| \leq t^{-1/n}. \tag{3.2.7}$$

Το u_{n+1} δεν μπορεί να είναι ίσο με μηδέν, γιατί τότε όλοι οι u_i, $i \leq n$ θα ήταν απολύτως μικρότεροι του 1, δηλαδή επίσης ίσοι με μηδέν. Επίσης, αντικαθιστώντας αν χρειαστεί όλους τους u_i με τους $-u_i$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_{n+1} > 0$. Έπεται ότι

$$|u_{n+1}a_i - u_i| \leq \frac{1}{t^{1/n}} \leq \frac{1}{u_{n+1}^{1/n}} \tag{3.2.8}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. □

3.2β΄ Το θεώρημα προσέγγισης του Dirichlet

Εφαρμόζουμε τώρα πιο προσεκτικά το θεώρημα του Minkowski στο πρόβλημα της προσέγγισης πραγματικών αριθμών από ρητούς (θεώρημα του Dirichlet):

Θεώρημα 3.2.2. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει οσοδήποτε μεγάλος $q \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $p \in \mathbb{Z}$, ώστε*

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^2}. \tag{3.2.9}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο a είναι άρρητος (αν ο a είναι ρητός, τότε το πρόβλημα δεν έχει καμιά δυσκολία). Έστω $M > 0$. Αφού $a \notin \mathbb{Q}$, υπάρχει $Q > 1$ ώστε

$$t_M := \min\{|aq - p| : q \leq M, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\} > \frac{1}{Q}. \tag{3.2.10}$$

Ορίζουμε

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |ax - y| \leq \frac{1}{Q}, |x| \leq Q \right\}. \tag{3.2.11}$$

Το K είναι παραλληλόγραμμο, με εμβαδόν $|K| = (2Q)(2/Q) = 4$. Από το θεώρημα του Minkowski, υπάρχει $(q, p) \in K \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$. Έχουμε $q \neq 0$, γιατί αλλιώς θα είχαμε $|p| \leq 1/Q < 1$, δηλαδή $p = 0$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας του K, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q > 0$ (δηλαδή, $q \in \mathbb{N}$). Αυτό σημαίνει ότι $0 < q \leq Q$ και $|aq - p| \leq 1/Q$, άρα

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}. \tag{3.2.12}$$

Τέλος, από τον ορισμό του t_M, έχουμε

$$|aq - p| \leq \frac{1}{Q} < t_M, \tag{3.2.13}$$

άρα $q > M$. $\square$

Το Θεώρημα 3.2.2 γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 3.2.3. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την ιδιότητα: αν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, υπάρχει οσοδήποτε μεγάλος $q \in \mathbb{N}$ και υπάρχουν $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$, ώστε*

$$\left| a_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}. \tag{3.2.14}$$

Απόδειξη. Έστω $M > 0$. Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 3.2.2: μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $a_1, \ldots, a_n$ δεν είναι όλοι ρητοί. Το παραλληλεπίπεδο στο οποίο εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Minkowski, είναι το

$$K = \left\{ (x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |a_i x - y_i| \leq \frac{1}{Q^{1/n}}, |x| \leq Q \right\}, \tag{3.2.15}$$

όπου $Q > 1$ αρκετά μεγάλος ώστε να ικανοποιείται η

$$t_M := \min \left\{ \max_{i \leq n} |a_i q - p_i| : q \leq M, q \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{Z} \right\} > \frac{1}{Q^{1/n}}. \tag{3.2.16}$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. $\square$

3.2γ΄ Γινόμενο γραμμικών μορφών

Έστω $\xi_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, $i = 1, \ldots, n$, ομογενείς γραμμικές μορφές με πραγματικούς συντελεστές a_{ij} και μη μηδενική ορίζουσα Δ. Παίρνοντας $t_1 = \cdots = t_n = |\Delta|^{1/n}$ στο Θεώρημα 3.2.1, βλέπουμε ότι υπάρχει $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$\prod_{i=1}^{n} |\xi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leq |\Delta|. \tag{3.2.17}$$

Θα δώσουμε ένα καλύτερο άνω φράγμα για το γινόμενο των ξ_i:

Θεώρημα 3.2.4. *Αν ξ_i και Δ όπως παραπάνω, υπάρχει $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε*

$$\prod_{i=1}^{n} |\xi_i(x_1, \ldots, x_n)| \leq \frac{n!}{n^n} |\Delta|. \tag{3.2.18}$$

Απόδειξη. Το χωρίο $\{x : \prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq r\}$, $r > 0$, δεν είναι κυρτό, περιέχει όμως το

$$K_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq nr^{1/n} \right\}, \tag{3.2.19}$$

γιατί, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| \right)^n. \tag{3.2.20}$$

Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τις ξ_i, τότε $K_r = T^{-1}(K_r^1)$, όπου

$$K_r^1 = \left\{ y : \sum_{i=1}^n |y_i| \leq nr^{1/n} \right\}. \tag{3.2.21}$$

Άρα,

$$|K_r| = \frac{|K_r^1|}{|\mathrm{det} T|} = \frac{2^n n^n r}{n!|\Delta|}. \tag{3.2.22}$$

Ο όγκος του K_r θα είναι ίσος με 2^n αν $r = r_0 = n!|\Delta|/n^n$, και τότε, το θεώρημα του Minkowski μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει $x \in K_{r_0} \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ για το οποίο

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi_i(x)| \right)^n \leq r_0 = \frac{n!}{n^n}|\Delta|. \tag{3.2.23}$$

3.2δ΄ Τετραγωνικές μορφές

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω $A = (a_{ij})$ συμμετρικός, θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T(x) = \langle Ax, x \rangle. \tag{3.2.24}$$

Αν $D = \det(a_{ij})$ είναι η διακρίνουσα της T, μπορούμε να βρούμε $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$T(u_1, \ldots, u_n) \leq \frac{4}{\pi} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 D \right)^{1/n}. \tag{3.2.25}$$

Απόδειξη. Υπάρχει συμμετρικός, θετικά ορισμένος S ώστε $S^2 = A$. Για κάθε $r > 0$ ορίζουμε

$$K_r = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) \leq r\}. \tag{3.2.26}$$

Έχουμε $T(x) \leq r$ αν και μόνο αν $\|Sx\|_2^2 \leq r$. Δηλαδή, $K_r = \sqrt{r}S^{-1}(B_2^n)$. Επομένως,

$$|K_r| = \frac{r^{n/2}}{\det(S)}\omega_n = \frac{r^{n/2}}{\sqrt{D}}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \tag{3.2.27}$$

Επιλέγουμε $r_0 > 0$ έτσι ώστε να έχουμε $|K_{r_0}| = 2^n$. Τότε, από το Θεώρημα του Minkowski, μπορούμε να βρούμε $(u_1, \ldots, u_n) \in K_{r_0} \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$, δηλαδή,

$$T(u_1, \ldots, u_n) \leq r_0 = \frac{4}{\pi}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 D\right)^{1/n}. \tag{3.2.28}$$

3.2ε′ Το θεώρημα του Lagrange

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Minkowski, θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα του Lagrange:

Θεώρημα 3.2.6. *Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται στη μορφή $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, όπου $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων, δηλαδή, $n = p_1 \ldots p_r$, όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι. Παρατηρήστε ότι κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται στη μορφή $n = s^2 m$, όπου ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων ή $m = 1$. Πράγματι, ο n αναλύεται στη μορφή $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$. Αν $a_j = 2t_j + v_j$ με $v_j \in \{0, 1\}$, αρκεί να θέσουμε $s = p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}$ και $m = p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r}$.

Αν ο ισχυρισμός του θεωρήματος αληθεύει για τους φυσικούς που είναι ελεύθεροι τετραγώνων, και αν μας δοθεί τυχών φυσικός αριθμός n, γράφουμε τον n στη μορφή $n = s^2 m$ όπου ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων και, γνωρίζοντας ότι μπορούμε να γράψουμε τον m στη μορφή $m = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ όπου $y_i \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε

$$n = (ly_1)^2 + (ly_2)^2 + (ly_3)^2 + (ly_4)^2.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n = p_1 \ldots p_r$, όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι.

Λήμμα 3.2.7. *Έστω p πρώτος. Υπάρχουν $a_p, b_p \in \mathbb{Z}$ ώστε*

$$a_p^2 + b_p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3.2.29}$$

Απόδειξη. Αν $p = 2$, παίρνουμε $a_2 = 1$ και $b_2 = 0$. Αν ο p είναι περιττός πρώτος, ελέγχουμε ότι οι αριθμοί a^2, $a = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$, είναι ανισοϋπόλοιποι mod p, και το ίδιο ισχύει για τους $-1 - b^2$, $b = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Αφού το πλήθος των a και b είναι $p + 1$, υπάρχουν δύο από αυτούς που ανήκουν στην ίδια κλάση $\bmod p$. Αυτό σημαίνει υποχρεωτικά ότι υπάρχουν $0 \leq a_p, b_p \leq \frac{p-1}{2}$ με την ιδιότητα

$$a_p^2 \equiv -1 - b_p^2 \pmod{p}, \tag{3.2.30}$$

δηλαδή, $a_p^2 + b_p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. □

Λήμμα 3.2.8. *Έστω $n = p_1 \dots p_r$, όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι. Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ ώστε*

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}. \tag{3.2.31}$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, για κάθε $j = 1, \dots, r$ υπάρχουν $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$a_j^2 + b_j^2 + 1 \equiv \pmod{p_j}. \tag{3.2.31}$$

Από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων, τα συστήματα

$$x \equiv a_j \pmod{p_j}, \qquad j = 1, \dots, r$$

και

$$x \equiv b_j \pmod{p_j}, \qquad j = 1, \dots, r$$

έχουν λύσεις a και b αντίστοιχα. Τότε,

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv a_j^2 + b_j^2 + 1 \equiv \pmod{p_j} \tag{3.2.32}$$

για κάθε $j = 1, \dots, r$. Αφού οι p_j είναι διακεκριμένοι πρώτοι, έπεται ότι $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. □

Συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος. Θα λέμε **πλέγμα** κάθε σύνολο της μορφής $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, όπου $T \in GL(n)$ (ο T είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$). Αν για κάποιο πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ και κάποιο συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|K| \geq 2^n |\det T|, \tag{3.2.33}$$

τότε υπάρχει $v \neq 0$ ώστε $v \in K \cap \Lambda$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σώμα $K_1 = T^{-1}(K)$, τότε $|K_1| = |K|/|\det T| \geq 2^n$. Από το θεώρημα του Minkowski υπάρχει $u \neq 0$ ώστε $u \in K_1 \cap \mathbb{Z}^n$. Θέτοντας $v = T(u)$ έχουμε $v \neq 0$, $v \in T(K_1) = K$ και $v \in T(\mathbb{Z}^n) = \Lambda$.

Από το Λήμμα 3.2.8 υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ ώστε $n \mid (a^2 + b^2 + 1)$. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ που ορίζεται από τις

$$T(e_1) = (1, 0, a, -b),\ T(e_2) = (0, 1, b, a),\ T(e_3) = (0, 0, n, 0),\ T(e_4) = (0, 0, 0, n).$$

Ο T είναι αντιστρέψιμος και $|\det T| = n^2$. Αν $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{Z}^n$ τότε

$$T(u) = (u_1, u_2, au_1 + bu_2 + nu_3, -bu_1 + au_2 + nu_4). \tag{3.2.34}$$

Θεωρούμε το πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ και τη μπάλα $B = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2n\}$. Ο όγκος της είναι ίσος με

$$|B| = 2n^2\pi^2 > 16n^2 = 2^4 |\det T|. \tag{3.2.35}$$

Από το θεώρημα του Minkowski, υπάρχει $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Lambda \setminus \{0\}$ ώστε

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2n. \tag{3.2.36}$$

Δηλαδή, υπάρχει $u \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$0 < u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2 + nu_3)^2 + (-bu_1 + au_2 + nu_4)^2 < 2n. \tag{3.2.37}$$

Όμως, αν θέσουμε $U = u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2 + nu_3)^2 + (-bu_1 + au_2 + nu_4)^2$, έχουμε

$$\begin{aligned} U &\equiv u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2)^2 + (-bu_1 + au_2)^2 \pmod n \\ &\equiv u_1^2 + u_2^2 + (a^2 + b^2)(u_1^2 + u_2^2) \pmod n \\ &\equiv (a^2 + b^2 + 1)(u_1^2 + u_2^2) \pmod n \\ &\equiv 0 \pmod n \end{aligned}$$

Άρα, $n \mid U$. Από την (3.2.37) συμπεραίνουμε ότι $n = U = u_1^2 + u_2^2 + (au_1 + bu_2 + nu_3)^2 + (-bu_1 + au_2 + nu_4)^2$. □

3.3 Ακέραια σημεία σε ελλειψοειδή

Ένα συμμετρικό κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ελλειψοειδές** αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $E = T(B_2^n)$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_n$ την κλάση όλων των ελλειψοειδών του $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανένα σημείο του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Το πρόβλημα που θα μάς απασχολήσει σε αυτή την Παράγραφο είναι να δοθούν εκτιμήσεις για την ποσότητα

$$\alpha_n = \sup\{|E| : E \in \mathcal{E}_n\}. \tag{3.3.1}$$

3.3α′ Η μέθοδος του Blichfeldt

Ο Blichfeldt έδωσε το ακόλουθο άνω φράγμα για την α_n.

Θεώρημα 3.3.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει η ανισότητα*

$$\alpha_n \leq \frac{n+2}{2} 2^{n/2}. \tag{3.3.2}$$

Για την απόδειξη της ανισότητας κάνουμε πρώτα την εξής αναγωγή. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

> *Για κάθε ελλειψοειδές E με όγκο $|E| > \frac{n+2}{2} 2^{n/2}$ ισχύει $E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.*

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι:

> *Για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.*

Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο προτάσεων αφήνεται ως άσκηση.

Θεωρούμε λοιπόν ένα πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την

$$|B_2^n| > \frac{n+2}{2}|\det T|. \tag{3.3.3}$$

Αν $v_i = T(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i : 0 \leq t_i < 1 \right\}. \tag{3.3.4}$$

Παρατηρήστε ότι $Q = T(P)$, όπου $P = \{x : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \ldots n\}$ είναι το θεμελιώδες παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{Z}^n$. Συνεπώς,

$$|Q| = |T(P)| = |\det T|\,|P| = |\det T|. \tag{3.3.5}$$

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \sum_{u\in\Lambda} \int_{u+Q} f(x)\,dx = \sum_{u\in\Lambda} \int_Q f(u+y)\,dy \\ &= \int_Q \left(\sum_{u\in\Lambda} f(u+y) \right) dy. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν η f ικανοποιεί την

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx > |Q|, \tag{3.3.6}$$

τότε

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\sum_{u\in\Lambda} f(u+y) \right) dy > 1, \tag{3.3.7}$$

και αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\sum_{u\in\Lambda} f(u+y) > 1. \tag{3.3.8}$$

Λήμμα 3.3.2. *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2\|x\|_2^2 & , \ 0 \leq \|x\|_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \ \|x\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ικανοποιεί την

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx > |Q|.$$

Απόδειξη. Θέτοντας $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{rB_2^n}\left(1-\frac{\|x\|_2^2}{r^2}\right)dx \\
&= |rB_2^n| - \frac{1}{r^2}\int_{rB_2^n}\int_0^{\|x\|_2} 2t\,dt\,dx \\
&= |rB_2^n| - \frac{1}{r^2}\int_0^r 2t\int_{t\le\|x\|_2\le r} dx\,dt \\
&= |rB_2^n| - \frac{1}{r^2}\int_0^r 2t\,(|rB_2^n| - |tB_2^n|)\;dt \\
&= |rB_2^n| - |rB_2^n|\frac{1}{r^2}\int_0^r 2t\left(1-\frac{t^n}{r^n}\right)dt \\
&= |rB_2^n| - |rB_2^n|\frac{1}{r^2}\int_0^r \left(2t-\frac{2t^{n+1}}{r^n}\right)dt \\
&= |rB_2^n| - |rB_2^n|\left(1-\frac{2}{n+2}\right) = \frac{2}{n+2}|rB_2^n| \\
&= \frac{2}{n+2}\frac{1}{2^{n/2}}|B_2^n| \\
&> |\det T| = |Q|,
\end{aligned}$$

όπου στο τέλος αντικαταστήσαμε $r = 1/\sqrt{2}$ και χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι $|B_2^n| > \frac{n+2}{2}|\det T|$ που κάναμε για το Λ στην (3.3.3). □

Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (3.3.8) για τη συγκεκριμένη συνάρτηση f: υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\sum_{u\in\Lambda\cap B(-y,1/\sqrt{2})} (1 - 2\|u+y\|_2^2 > 1. \tag{3.3.9}$$

Το σύνολο U των $u \in \Lambda$ που ικανοποιούν την $\|u+y\|_2 < 1/\sqrt{2}$ είναι πεπερασμένο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ και τότε η (3.3.9) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^m (1 - 2\|u_i+y\|_2^2) > 1,$$

δηλαδή

$$\sum_{i=1}^m \|u_i+y\|_2^2 < \frac{m-1}{2}. \tag{3.3.10}$$

Ο Blichfeldt ολοκλήρωνε την απόδειξη του θεωρήματος μέσω της ακόλουθης ανισότητας:

Λήμμα 3.3.3. *Αν* $y, u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$, *τότε*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 \leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i + y\|_2^2. \tag{3.3.11}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση $y = 0$:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 \leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2. \tag{3.3.12}$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε αυτή την ειδική περίπτωση για τα $u_1 + y, \ldots, u_m + y$.

Για την απόδειξη της (3.3.12), γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\|u_i\|_2^2 - 2\langle u_i, u_j\rangle + \|u_j\|_2^2\right) \\ &= 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2 - 2\Big\langle \sum_{i=1}^m u_i, \sum_{j=1}^m u_j \Big\rangle \\ &= 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2 - 2\left\| \sum_{i=1}^m u_i \right\|_2^2 \\ &\leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2. \qquad \square \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην (3.3.10): χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.3 παίρνουμε

$$\sum_{i,j=1}^m \|u_i - u_j\|_2^2 \leq 2m \sum_{i=1}^m \|u_i + y\|_2^2 < 2m \frac{m-1}{2} = m(m-1). \tag{3.3.13}$$

Όμως, το πλήθος των μη μηδενικών όρων $\|u_i - u_j\|_2^2$ (με $i \neq j$) στο αριστερό μέλος της (3.3.13) είναι ίσο με $m(m-1)$. Συνεπώς, υπάρχουν $i \neq j$ ώστε $\|u_i - u_j\|_2^2 < 1$. Δηλαδή, το $v = u_i - u_j$ ανήκει στο Λ, είναι μη μηδενικό, και

$$\|v\|_2 = \|u_i - u_j\|_2 < 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι $v \in B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\})$. Δηλαδή, δείξαμε ότι για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2} |\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. $\square$

3.3β′ Ελλειψοειδή χωρίς ακέραια σημεία

Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε το αντίστροφο πρόβλημα: να βρεθεί ελλειψοειδές με όσο γίνεται μεγαλύτερο όγκο, το οποίο δεν περιέχει ακέραια σημεία στο εσωτερικό του. Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα οφείλεται στον K. Ball και χρησιμοποιεί το Λήμμα του Bang:

Λήμμα 3.3.4. *Έστω $x_1,\dots,x_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, και $w_1,\dots,w_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχει επιλογή προσήμων $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\in\{-1,1\}$ ώστε το $u=\sum_{i=1}^m \varepsilon_i w_i x_i$ να ικανοποιεί τις*

$$|\langle u,x_i\rangle|\geq w_i,\quad i=1,\dots,m. \tag{3.3.14}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)\in\{-1,1\}^m$, θέτουμε $u(\varepsilon)=\sum_{i=1}^m\varepsilon_i w_i x_i$. Επιλέγουμε εκείνο το $u=u(\varepsilon^*)$ που έχει το μεγαλύτερο μήκος (αν υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια $u(\varepsilon)$, επιλέγουμε οποιοδήποτε από αυτά).

Για κάθε $j=1,\dots,m$, ορίζουμε

$$u_j=u(\varepsilon^*)-2\varepsilon_j^* w_j x_j. \tag{3.3.15}$$

Κάθε u_j είναι της μορφής $u(\varepsilon)$, με $\varepsilon_i=\varepsilon_i^*$ αν $i\neq j$, και $\varepsilon_j=-\varepsilon_j^*$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|u(\varepsilon^*)\|_2^2 &\geq \|u_j\|_2^2=\|u(\varepsilon^*)-2\varepsilon_j^*w_jx_j\|_2^2\\ &= \|u(\varepsilon^*)\|_2^2-4w_j\varepsilon_j^*\langle u(\varepsilon^*),x_j\rangle+4w_j^2\|x_j\|_2^2.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|\langle u(\varepsilon^*),x_j\rangle|\geq \varepsilon_j^*\langle u(\varepsilon^*),x_j\rangle\geq\frac{4w_j^2\|x_j\|_2^2}{4w_j}=w_j, \tag{3.3.16}$$

για κάθε $j=1,\dots,m$. □

Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος του Ball είναι η εξής:

Θεώρημα 3.3.5. *Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ελλειψοειδές E στον $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχει σημεία του $\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$, και έχει όγκο*

$$|E|>2(n-1)-\varepsilon. \tag{3.3.17}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλάση όλων των ελλειψοειδών της μορφής

$$E_R=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle u,x\rangle^2+\|x\|_2^2<R^2\},\ \ u\in\mathbb{R}^n, R>0. \tag{3.3.18}$$

Για κάθε $R>0$, προσπαθούμε αρχικά να βρούμε $u=u_R\in\mathbb{R}^n$, ώστε το E_R να μην περιέχει ακέραια σημεία εκτός από το 0. Δηλαδή, ζητάμε για κάθε $z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ να ισχύει

$$\langle u,z\rangle^2+\|z\|_2^2\geq R^2. \tag{3.3.19}$$

Η ανισότητα αυτή ικανοποιείται προφανώς αν $\|z\|_2 \geq R$. Περιοριζόμαστε λοιπόν στα $0 < \|z\|_2 < R$, και ζητάμε

$$\left|\left\langle u, \frac{z}{\|z\|_2}\right\rangle\right| \geq \sqrt{\frac{R^2}{\|z\|_2^2} - 1}. \tag{3.3.20}$$

Θέτουμε $w_z = \sqrt{(R/\|z\|_2)^2 - 1}$, κρατάμε ένα μόνο $\tilde{z}$ από τα $\pm z$ για κάθε $0 < \|z\|_2 < R$, και εφαρμόζουμε το Λήμμα του Bang: υπάρχουν $\varepsilon_{\tilde{z}} \in \{-1, 1\}$, ώστε

$$\left|\left\langle \sum_{\tilde{z}} \varepsilon_{\tilde{z}} w_{\tilde{z}} \frac{\tilde{z}}{\|\tilde{z}\|_2}, \frac{\tilde{z}}{\|\tilde{z}\|_2}\right\rangle\right| \geq w_{\tilde{z}}, \quad 0 < \|z\|_2 < R. \tag{3.3.21}$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν $\varepsilon_z \in \{-1, 1\}$ ώστε το διάνυσμα

$$u = u(R) = \frac{1}{2} \sum_{0 < \|z\|_2 < R} \varepsilon_z w_z \frac{z}{\|z\|_2} \tag{3.3.22}$$

να ικανοποιεί τις

$$\left|\left\langle u, \frac{z}{\|z\|_2}\right\rangle\right| \geq w_z, \quad 0 < \|z\|_2 < R. \tag{3.3.23}$$

Γι' αυτήν την επιλογή του u έχουμε εξασφαλίσει ότι $E_R \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$. Για τον υπολογισμό του όγκου του E_R, χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για το μήκος του u. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα θ στη διεύθυνση του u. Αν $K(R)$ είναι το μήκος του u, έχουμε

$$\begin{aligned} K(R) = \|u\|_2 = \langle u, \theta\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{0 < \|z\|_2 < R} \varepsilon_z \frac{\langle z, \theta\rangle}{\|z\|_2} w_z \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{0 < \|z\|_2 < R} \frac{|\langle z, \theta\rangle|}{\|z\|_2} \sqrt{\frac{R^2}{\|z\|_2^2} - 1} =: \tilde{K}(R). \end{aligned}$$

Θέτουμε $v = z/R$. Τότε,

$$\tilde{K}(R) = \frac{1}{2} \sum_{v \in \frac{1}{R}\mathbb{Z}^n \cap B_2^n \setminus \{0\}} \frac{|\langle v, \theta\rangle|}{\|v\|_2} \sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2} - 1}. \tag{3.3.24}$$

Καθώς το $R \to \infty$, το παραπάνω άθροισμα (πολλαπλασιασμένο επί R^{-n}) είναι ένα άθροισμα Riemann για το

$$\frac{1}{2} \int_{B_2^n} \frac{|\langle v, \theta\rangle|}{\|v\|_2} \sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2} - 1}\, dv. \tag{3.3.25}$$

Δηλαδή,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n}=\frac{1}{2\omega_n}\int_{B_2^n}\frac{|\langle v,\theta\rangle|}{\|v\|_2}\sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2}-1}\,dv. \tag{3.3.26}$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος, παίρνουμε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} &= \frac{n\omega_n}{2\omega_n}\int_{S^{n-1}}\int_0^1|\langle\phi,\theta\rangle|\rho^{n-1}\sqrt{\frac{1}{\rho^2}-1}d\rho\sigma(d\phi)\\ &= \frac{n}{2}\int_{S^{n-1}}|\langle\phi,\theta\rangle|\sigma(d\phi)\cdot\int_0^1\rho^{n-2}\sqrt{1-\rho^2}d\rho.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του $\theta\in S^{n-1}$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\theta=e_1$. Γράφουμε

$$\int_{B_2^n}|z_1|dz=n\omega_n\int_{S^{n-1}}|\langle\phi,e_1\rangle|\sigma(d\phi)\cdot\int_0^1\rho^n d\rho=\frac{n\omega_n}{n+1}\int_{S^{n-1}}|\langle\phi,e_1\rangle|\sigma(d\phi), \tag{3.3.27}$$

και

$$\int_{B_2^n}|z_1|dz=2\int_0^1\omega_{n-1}t(1-t^2)^{(n-1)/2}dt, \tag{3.3.28}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}}|\langle\phi,\theta\rangle|\sigma(d\phi) &= \frac{2\omega_{n-1}\int_0^1 t(1-t^2)^{(n-1)/2}dt}{(n\omega_n)/(n+1)}\\ &= \frac{2(n+1)\omega_{n-1}}{n\omega_n}\left[-\frac{1}{n+1}(1-t^2)^{(n+1)/2}\right]_0^1\\ &= \frac{2\omega_{n-1}}{n\omega_n}.\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\int_0^1\rho^{n-2}\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt=\frac{\Gamma((n-1)/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma((n+2)/2)}.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν μας την $\omega_k=\pi^{k/2}/\Gamma((k/2)+1)$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} &= \frac{2\omega_{n-1}}{n\omega_n}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\\ &= \frac{2}{n}\frac{\pi^{(n-1)/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2}\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{2\Gamma(\frac{n}{2})}\\ &= \frac{1}{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για μεγάλα R,

$$\frac{\omega_n R^n}{\tilde{K}(R)} > 2(n-1) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.29}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\lim \tilde{K}(R) = +\infty$, αλλιώς θα είχαμε

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\tilde{K}(R)}{\omega_n R^n} = 0. \tag{3.3.30}$$

Από την άλλη πλευρά, ο όγκος του E_R είναι ίσος με τον όγκο του

$$E_R' = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle K(R)e_1, x\rangle^2 + \|x\|_2^2 < R^2\}, \tag{3.3.31}$$

ο οποίος υπολογίζεται εύκολα: το E_R' έχει $(n-1)$ ημιάξονες ίσους με R, και έναν ίσο με $R/\sqrt{1+K^2(R)}$. Άρα,

$$|E_R| = \frac{\omega_n R^n}{\sqrt{1+K^2(R)}} \geq \frac{\omega_n R^n}{\sqrt{1+\tilde{K}^2(R)}}, \tag{3.3.32}$$

το οποίο για μεγάλα R είναι μεγαλύτερο από

$$\frac{\omega_n R^n}{\tilde{K}(R)} - \frac{\varepsilon}{2} > 2(n-1) - \varepsilon. \tag{3.3.33}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν ελλειψοειδή χωρίς μη τετριμμένα ακέραια σημεία, τα οποία έχουν όγκο οσοδήποτε κοντά στο $2(n-1)$. □

Άμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο κάτω φράγμα για την α_n:

Θεώρημα 3.3.6. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 2(n-1)$.* □

Σημείωση. Στην κατεύθυνση του Θεωρήματος του Blichfeldt, το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα είναι αυτό των Kabatjanskii και Levenstein [KL]:

$$\alpha_n \leq (1.32)^n \simeq 2^{[0.401+o_n(1)]n}. \tag{3.3.34}$$

3.4 Παράρτημα: εφαρμογές της ανάλυσης Fourier στην κυρτή γεωμετρία

3.4α΄ Η απόδειξη του Siegel για το πρώτο θεώρημα του Minkowski

Ο Siegel απέδειξε έναν γενικό τύπο από τον οποίο προκύπτει ως πόρισμα το πρώτο θεώρημα του Minkowski. Η απόδειξη αυτού του τύπου χρησιμοποιεί την ταυτότητα του Parseval. Η ιδέα είναι η εξής:

Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $K/2$, και

$$\phi(x) = \sum_{u\in\mathbb{Z}^n} \chi(u+x). \tag{3.4.1}$$

Τότε, η $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ είναι περιοδική ως προς κάθε μεταβλητή, με περίοδο 1. Αν $P = \{x : 0 \leq x_i < 1, i = 1,\ldots,n\}$ είναι το σύνηθες θεμελιώδες παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{Z}^n$, η ταυτότητα του Parseval μας δίνει

$$\int_P \phi^2(x)dx = \sum_{u\in\mathbb{Z}^n} |\alpha(u)|^2, \tag{3.4.2}$$

όπου

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \int_P \phi(x)e^{-2\pi i\langle u,x\rangle}dx = \sum_{u\in\mathbb{Z}^n}\int_P \chi(u+x)e^{-2\pi i\langle u,x\rangle}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)e^{-2\pi i\langle u,x\rangle}dx,\end{aligned}$$

είναι οι συντελεστές Fourier της ϕ.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχει μη μηδενικό ακέραιο σημείο. Αν ορίσουμε ϕ και α όπως παραπάνω, τότε*

$$2^n = |K| + \frac{4^n}{|K|}\sum_{u\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |\alpha(u)|^2. \tag{3.4.3}$$

Απόδειξη. Αφού $K\cap\mathbb{Z}^n = \{0\}$, τα σύνολα $u + \frac{1}{2}K$, $u\in\mathbb{Z}^n$, είναι ξένα, επομένως

$$u \neq u' \Longrightarrow \chi(x+u)\chi(x+u') = 0. \tag{3.4.4}$$

Έπεται ότι $\phi^2 = \phi$ στον $\mathbb{R}^n$, άρα

$$\alpha(0) = \int_P \phi(x)dx = \int_P \phi^2(x)dx = |\alpha(0)|^2 + \sum_{u\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |\alpha(u)|^2. \tag{3.4.5}$$

Όμως,

$$\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)dx = \frac{|K|}{2^n}, \tag{3.4.6}$$

άρα

$$\frac{|K|}{2^n} = \frac{|K|^2}{4^n} + \sum_{u\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |\alpha(u)|^2, \tag{3.4.7}$$

και το ζητούμενο προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με $4^n/|K|$. □

Πόρισμα 3.4.2. *Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $K \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, τότε $|K| \leq 2^n$.* □

3.4β′ Η απόδειξη του Hurwitz για την ισοπεριμετρική ανισότητα στο επίπεδο

Χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλυσης Fourier, ο Hurwitz απέδειξε την ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα:

Θεώρημα 3.4.3. *Εστω K χωρίο στο επίπεδο του οποίου το σύνορο είναι μιά απλή κλειστή και λεία καμπύλη. Τότε,*

$$4\pi A(K) \leq P^2(K),$$

όπου $A(K)$ είναι το εμβαδόν του K και $P(K)$ είναι η περίμετρος του K. Ισότητα ισχύει μόνο αν το K είναι δίσκος.

Αρχικές παρατηρήσεις. Υποθέτουμε ότι το χωρίο K έχει σαν σύνορό του μια λεία απλή κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Με αυτό εννοούμε ότι αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, τότε οι x' και y' είναι συνεχείς και επιπλέον $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ γιά κάθε t, το οποίο εξασφαλίζει ότι η καμπύλη έχει σε κάθε σημείο εφαπτόμενο διάνυσμα το οποίο μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο.

Το μήκος της καμπύλης γ δίνεται από την

$$P = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{3.4.8}$$

Θα ορίσουμε πρώτα μια νέα παραμετρικοποίηση της καμπύλης γ: Θεωρούμε την απεικόνιση $s : [a, b] \to [0, P]$ με

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2} du. \tag{3.4.9}$$

Η s είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του t, συνεπώς ορίζεται η αντίστροφή της s^{-1} στο $[0, P]$ και μπορούμε να θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma_1 : [0, P] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma_1(s) = \gamma(t)$ όπου $s = s(t)$. Τότε, αν $x_1(s) = x(t)$ και $y_1(s) = y(t)$ έχουμε

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \tag{3.4.10}$$

και

$$\frac{dy_1}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}. \tag{3.4.11}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι η γ_1 έχει την ιδιότητα

$$(dx_1/ds)^2 + (dy_1/ds)^2 = 1$$

γιά κάθε t. Εχουμε δηλαδή παραμετρικοποιήσει την καμπύλη ως *προς μήκος τόξου*.

Το εμβαδόν του χωρίου K υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Green: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $Q(x,y) = x$ και $P(x,y) = -y$. Αν με γ_1 συμβολίσουμε και την εικόνα της καμπύλης γ_1 (το σύνορο δηλαδή του K), τότε

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy \;=\; \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{3.4.12}$$

και για τις συγκεκριμένες P και Q παίρνουμε

$$A(K) = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} xdy - ydx. \tag{3.4.13}$$

Έπεται ότι

$$A(K) = \frac{1}{2}\int_0^P [x_1(s)y_1'(s) - y_1(s)x_1'(s)]ds \tag{3.4.14}$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$A(K) = \int_0^P x_1(s)y_1'(s)ds. \tag{3.4.15}$$

Θα κάνουμε ακόμα μια αλλαγή μεταβλητής: θέτουμε $2\pi s = P\theta$, οπότε $\theta \in [0, 2\pi]$ και αν $\gamma_2(\theta) = \gamma_1(s) = (x_2(\theta), y_2(\theta))$, έχουμε

$$[x_2'(\theta)]^2 + [y_2'(\theta)]^2 = \frac{P^2}{4\pi^2} \tag{3.4.16}$$

για κάθε θ, και

$$A(K) = \int_0^{2\pi} x_2(\theta)y_2'(\theta)d\theta. \tag{3.4.17}$$

Απόδειξη του θεωρήματος. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνορο του K είναι η εικόνα μιας καμπύλης $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ η οποία ικανοποιεί τις (3.9) και (3.10).

Οι συναρτήσεις $x_2(\theta)$ και $y_2(\theta)$ είναι συνεχείς άρα έχουν σειρές Fourier, και επειδή είναι και παραγωγίσιμες οι σειρές Fourier τους συγκλίνουν σε αυτές:

$$x_2(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{3.4.18}$$

και

$$y_2(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta)\,. \tag{3.4.19}$$

Επειδή οι x_2' και y_2' είναι συνεχείς, έχουν σειρές Fourier

$$x_2'(\theta) \;\sim\; \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos k\theta - ka_k \sin k\theta) \tag{3.4.20}$$

και

$$y_2'(\theta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kd_k \cos k\theta - kc_k \sin k\theta)\,. \tag{3.4.21}$$

Η ταυτότητα του Parseval μας δίνει

$$\int_0^{2\pi} [x_2'(\theta)]^2 d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) \tag{3.4.22}$$

και

$$\int_0^{2\pi} [y_2'(\theta)]^2 d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(c_k^2 + d_k^2). \tag{3.4.23}$$

Συνδυάζοντας με την (3.9) παίρνουμε

$$P^2(K) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2). \tag{3.4.24}$$

Από την άλλη πλευρά, η (3.10) μας δίνει

$$A(K) = \int_0^{2\pi} x_2(\theta) y_2'(\theta) d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k). \tag{3.4.25}$$

Αφαιρώντας παίρνουμε:

$$P^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \big(k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) - 2k(a_k d_k - b_k c_k)\big) \tag{3.4.26}$$

$$= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k[(a_k - d_k)^2 + (b_k + c_k)^2] + 2\pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - k)\left(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2\right) \geq 0.$$

Η ανισότητα λοιπόν ισχύει και μένει να εξετάσουμε πότε μπορεί να ισχύει ισότητα. Από την (3.4.26) είναι φανερό ότι γιά $k \geq 2$ πρέπει να έχουμε $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$ (αφού $k^2 - k > 0$ αν $k \geq 2$). Επιπλέον, το πρώτο από τα δύο αθροίσματα πρέπει να μηδενίζεται κι αυτό, άρα $a_1 = d_1$ και $b_1 = -c_1$. Δηλαδή,

$$x_2(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta$$

και

$$y_2(\theta) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos\theta + a_1 \sin\theta.$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\Big(x_2(\theta) - \frac{a_0}{2}\Big)^2 + \Big(y_2(\theta) - \frac{c_0}{2}\Big)^2 = a_1^2 + b_1^2, \tag{3.4.27}$$

δηλαδή η καμπύλη γ_2 περιγράφει κύκλο, και το K είναι δίσκος. □

3.5 Ασκήσεις

1. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το πλέγμα $(1/r)\mathbb{Z}^n$. Συμβολίζουμε με N_r τον πληθάριθμο του συνόλου $K \cap (1/r)\mathbb{Z}^n$. Δείξτε ότι

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|K|}{N_r(1/r)^n} = 1.$$

2. (Mordell) Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| > m$. Τότε, υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $K + z$ να περιέχει τουλάχιστον $m+1$ διακεκριμένα ακέραια σημεία.

3. (van der Corput) Έστω $m \in \mathbb{N}$, και K ένα ανοικτό και φραγμένο, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με όγκο $|K| > 2^n m$. Τότε, το K περιέχει τουλάχιστον m ζευγάρια ακεραίων σημείων $\pm u_j \neq 0$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Mordell.

4. (Mahler) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Ο *συντελεστής ασυμμετρίας* του K ως προς το 0 είναι ο μικρότερος $\sigma = \sigma(K) > 0$ για τον οποίο

$$x \in K \Longrightarrow -x \in \sigma K.$$

Δείξτε ότι: αν $|K| > (1+\sigma(K))^n$, τότε $K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

5. Αποδείξτε λεπτομερώς το Θεώρημα 3.2.3.

6. Δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Για κάθε ελλειψοειδές E με όγκο $|E| > \frac{n+2}{2}2^{n/2}$ ισχύει $E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$

(ii) Για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ (όπου $T \in GL(n)$) με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2}|\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

7* (Pick) Έστω K κυρτό πολύγωνο με κορυφές σημεία του $\mathbb{Z}^2$. Δείξτε ότι το πλήθος των σημείων του $K \cap \mathbb{Z}^2$ είναι ίσο με

$$A(K) + \frac{|\mathbb{Z}^2 \cap \mathrm{bd}(K)|}{2} + 1,$$

όπου $A(K)$ το εμβαδόν του K και $\mathrm{bd}(K)$ το σύνορο του K.

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, όπου $T \in GL(n)$, λέγεται για το K, αν το μόνο σημείο του Λ που ανήκει στο εσωτερικό του K είναι το 0.

Αν $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ όπου $T \in GL(n)$, ορίζουμε $\det\Lambda = |\det T|$. Η $\Delta(K)$ του K είναι το $\inf(\det\Lambda)$, όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα πλέγματα Λ που είναι αποδεκτά για το K.

8. Δείξτε ότι:

(i) Αν $K \subseteq W$, τότε $\Delta(K) \leq \Delta(W)$.

(ii) Για κάθε $t > 0$, $\Delta(tK) = t^n\Delta(K)$.

(iii) Αν $T \in GL(n)$, τότε $\Delta(T(K)) = |\det T|\Delta(K)$.

9. Δείξτε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\Delta(K) \geq 2^{-n}|K|.$$

10. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_n$ την κλάση όλων των ελλειψοειδών του $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανένα σημείο του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ και ορίζουμε

$$\alpha_n = \sup\{|E| : E \in \mathcal{E}_n\}.$$

Δείξτε ότι

$$\Delta(B_2^n)\alpha_n = \omega_n.$$

*Μια οικογένεια $P = \{x_i + rB_2^n : i \in I\}$ από μπάλες ακτίνας $r > 0$, λέγεται **packing** αν οι $x_i + rB_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά. Ορίζουμε άνω και κάτω του P ως εξής: για κάθε $R > 0$, θεωρούμε την RB_2^n, και τις $x_i + rB_2^n$ οι οποίες τέμνουν την RB_2^n. Αν $N(R)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του $\{i \in I : (x_i + rB_2^n) \cap (RB_2^n) \neq \emptyset\}$, ορίζουμε*

$$\overline{\delta}(P) = \limsup_{R\to\infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}$$

και

$$\underline{\delta}(P) = \liminf_{R\to\infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}.$$

Οι αριθμοί $\overline{\delta}(P)$ και $\underline{\delta}(P)$ είναι η άνω και κάτω πυκνότητα του P, αντίστοιχα. Αν $\overline{\delta}(P) = \underline{\delta}(P)$, τότε αυτή η κοινή τιμή είναι η πυκνότητα $\delta(P)$ του P.

*Έστω Λ ένα πλέγμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα **packing**Λ είναι ένα packing της μορφής*

$$P = \{x + rB_2^n : x \in \Lambda\}.$$

11. Έστω $P = \{x + rB_2^n : x \in \Lambda\}$ ένα packing με κέντρα στο πλέγμα Λ. Δείξτε ότι

$$\delta(P) = \frac{\omega_n r^n}{\det \Lambda}.$$

12. Ορίζουμε δ_n το supremum των $\delta(P)$, όπου P packing με μπάλες ακτίνας 1 και κέντρα σε κάποιο πλέγμα Λ του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\alpha_n = 2^n\delta_n$.

Κεφάλαιο 4

Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα

4.1 Αφινική θήκη και αφινική διάσταση

Ορισμός 4.1.1 (αφινικός συνδυασμός)**.** Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Το $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται αφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$ αν

$$x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k \tag{4.1.1}$$

για κάποιους $t_i \in \mathbb{R}$ με $t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1$.

Ορισμός 4.1.2 (αφινική θήκη)**.** Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *αφινική θήκη* $\mathrm{aff}(S)$ του S είναι το σύνολο όλων των αφινικών συνδυασμών σημείων του S. Δηλαδή,

$$\mathrm{aff}(S) = \{x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k : k \geq 0, t_i \in \mathbb{R}, t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\}.$$

Λήμμα 4.1.3. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in S$. Τότε, η $\mathrm{aff}(S)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathrm{aff}(S)$. Τότε, υπάρχουν $x_0, x_1, \dots, x_k \in S$ και $t_0, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ με $t_1 + \cdots + t_k = 1$ ώστε

$$x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k. \tag{4.1.2}$$

Ομοίως,

$$y = s_0y_0 + s_1y_1 + \cdots + s_my_m, \tag{4.1.3}$$

όπου $y_i \in S$ και $s_i \in \mathbb{R}$ με $s_0 + s_1 + \cdots + s_m = 1$. Μπορούμε να γράψουμε

$$x + y = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k + s_0y_0 + s_1y_1 + \cdots + s_my_m + (-1)0, \tag{4.1.4}$$

όπου $0, x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_m \in S$ και $-1+\sum_i t_i+\sum_j y_j = 1$. Άρα, $x+y \in \mathrm{aff}(S)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathrm{aff}(S)$ τότε $x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$ με $t_i \in \mathbb{R}$, $t_0 + t_1 + \ldots + t_k = 1$ και $x_i \in S$, οπότε

$$\lambda x = (\lambda t_0)x_0 + (\lambda t_1)x_1 + \cdots + (\lambda t_k)x_k + (1-\lambda)0, \tag{4.1.5}$$

όπου $0, x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ και $(1-\lambda) + \sum_i \lambda t_i = 1$. Δηλαδή, $\lambda x \in \mathrm{aff}(S)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $\mathrm{aff}(S)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. □

Λήμμα 4.1.4. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $z \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{aff}(S) - z = \mathrm{aff}(S-z). \tag{4.1.6}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{aff}(S)$. Τότε, το x γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=0}^k t_ix_i$ με $\sum_{i=0}^k t_i = 1$. Άρα,

$$x - z = \sum_{i=0}^k t_ix_i - z = \sum_{i=0}^k t_ix_i - \sum_{i=0}^k t_iz = \sum_{i=0}^k t_i(x_i - z) \in \mathrm{aff}(S-z). \tag{4.1.7}$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\mathrm{aff}(S) - z \subseteq \mathrm{aff}(S-z). \tag{4.1.8}$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται παρόμοια. □

Λήμμα 4.1.5. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $x \in S$ υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ ώστε $\mathrm{aff}(S) = x + F$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in S$. Τότε $\mathrm{aff}(S) - x = \mathrm{aff}(S-x)$, άρα

$$\mathrm{aff}(S) = x + \mathrm{aff}(S-x) \tag{4.1.9}$$

και ο $F = \mathrm{aff}(S-x)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ από το Λήμμα 4.1.3, διότι $0 \in S - x$. □

Πρόταση 4.1.6. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει μοναδικός υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*

$$\mathrm{aff}(S) = x + F \tag{4.1.10}$$

για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, αν θεωρήσουμε τυχόν $x \in S$ τότε $\mathrm{aff}(S) = x + \mathrm{aff}(S-x)$ και ο $F = \mathrm{aff}(S-x)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρούμε επίσης ότι: αν $\mathrm{aff}(S) = x + F$ για κάποιον υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ τότε $x \in x + F = \mathrm{aff}(S)$.

Υποθέτουμε λοιπον ότι

$$\text{aff}(S) = x_1 + F_1 = x_2 + F_2 \tag{4.1.11}$$

για κάποιους υπόχωρους F_1, F_2 του $\mathbb{R}^n$ και κάποια $x_1, x_2 \in \text{aff}(S)$ και θα δείξουμε ότι $F_1 = F_2$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{aff}(S - x_1) = \text{aff}(S - x_2). \tag{4.1.12}$$

Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε τον εγκλεισμό $\text{aff}(S - x_1) \subseteq \text{aff}(S - x_2)$. Έστω $z \in \text{aff}(S - x_1)$. Τότε,

$$z = \sum_{i=0}^{k} t_i(s_i - x_1) = \sum_{i=0}^{k} t_i(s_i - x_2) + (-1)(x_1 - x_2) \in \text{aff}(S - x_2), \tag{4.1.13}$$

διότι ο $\text{aff}(S - x_2)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $x_1 - x_2 \in \text{aff}(S - x_2)$. Άρα, $\text{aff}(S - x_1) \subseteq \text{aff}(S - x_2)$. □

Ορισμός 4.1.7 (αφινική διάσταση)**.** Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Είδαμε ότι $\text{aff}(S) = x + F$ για κάποιον μονοσήμαντα ορισμένο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$. Η διάσταση του F λέγεται *αφινική διάσταση* του S.

Ορισμός 4.1.8 (αφινική ανεξαρτησία)**.** Τα $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ λέγονται *αφινικά εξαρτημένα* αν κάποιο από αυτά είναι αφινικός συνδυασμός των υπολοίπων. Σε αντίθετη περίπτωση, λέγονται *αφινικά ανεξάρτητα*.

Λήμμα 4.1.9. *Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά εξαρτημένα.*

(ii) *Υπάρχουν $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$, όχι όλοι ίσοι με μηδέν, ώστε*

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 0 \ \text{ και } \ t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k = 0.$$

(iii) *Υπάρχει $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ ώστε τα $x_j - x_i$, $j \neq i$, να είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα το (i). Κάποιο από τα x_i είναι αφινικός συνδυασμός των υπολοίπων. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_0 = t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$ για κάποιους $t_i \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Θέτοντας $t_0 = -1$ έχουμε

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 0 \ \text{ και } \ t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k = 0.$$

Αφού $t_0 \neq 0$, ισχύει το (ii).

Υποθέτουμε τώρα το (ii). Αν υποθέσουμε ότι $t_i \neq 0$, τότε $t_i = -\sum_{j\neq i} t_j$ και αυτό δείχνει ότι $t_j \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $j_0 \neq i$. Γράφουμε

$$\sum_{j\neq i} t_j(x_j - x_i) = \sum_{j\neq i} t_j x_j + \left(-\sum_{j\neq i} t_j\right) x_i = \sum_{j\neq i} t_j x_j + t_i x_i = \sum_{j=0}^{k} t_j x_j = 0.$$

Αφού $t_{j_0} \neq 0$, τα $x_j - x_i$, $j \neq i$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή ισχύει το (iii).

Τέλος, υποθέτουμε ότι ισχύει το (iii). Υπάρχουν $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ και t_j, $j \neq i$, όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{j\neq i} t_j(x_j - x_i) = 0$. Τότε,

$$\sum_{j\neq i} t_j x_j + \left(-\sum_{j\neq i} t_j\right) x_i = 0, \tag{4.1.14}$$

δηλαδή υπάρχουν $s_0, s_1, \ldots, s_k$ όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{j=0}^{k} s_j = 0$ και $\sum_{j=0}^{k} s_j x_j = 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $s_0 \neq 0$, και τότε,

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} \left(-\frac{s_j}{s_0}\right) x_j. \tag{4.1.15}$$

Αφού $\sum_{j=1}^{k} s_j = -s_0$, έπεται ότι το x_0 είναι αφινικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_k$. Δηλαδή, τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά εξαρτημένα. □

Πρόταση 4.1.10. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \geq 0$. Το S έχει αφινική διάσταση $m \geq k$ αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το S έχει αφινική διάσταση $m \geq k$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in S$ και υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = m$ ώστε $\mathrm{aff}(S) = x_0 + F$, όπου $F = \mathrm{aff}(S - x_0)$. Παρατηρούμε ότι $F = \mathrm{aff}(S - x_0) = \mathrm{span}(S - x_0)$. Ο F είναι υπόχωρος και περιέχει το $S - x_0$, άρα $F \supseteq \mathrm{span}(S - x_0)$. Από την άλλη πλευρά, κάθε στοιχείο του F είναι αφινικός συνδυασμός στοιχείων του $S - x_0$, δηλαδή γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $S - x_0$.

Συνεπώς, $\dim(\mathrm{span}(S - x_0)) = m$. Έπεται ότι το $S - x_0$ περιέχει $m \geq k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αλλά τότε, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_0, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αφού ο $F = \mathrm{aff}(S - x_0)$ περιέχει τα $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$, ισχύει $\dim F \geq k$. Δηλαδή η αφινική διάσταση του S είναι $\dim F \geq k$. □

Πόρισμα 4.1.11. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \geq 0$. Το S έχει αφινική διάσταση k αν και μόνον αν υπάρχουν $k + 1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του S και οποιαδήποτε $k + 2$ σημεία του S είναι αφινικά εξαρτημένα.* □

Πόρισμα 4.1.12. *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \geq 0$. Αν το S έχει αφινική διάσταση k και $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα σημεία του S, τότε κάθε $x \in \mathrm{aff}(S)$ γράφεται μονοσήμαντα ως αφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$.*

Απόδειξη. Από τα προηγούμενα, αν $x_0 \in S$ τότε ο $F = \mathrm{aff}(S - x_0)$ είναι υπόχωρος διάστασης k και έχει βάση $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$, όπου $x_1, \ldots, x_k \in S$. Τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα. Έστω $x \in \mathrm{aff}(S)$. Τότε, $x - x_0 = t_1(x_1 - x_0) + \cdots + t_k(x_k - x_0)$ άρα

$$x = (1 - t_1 - \cdots - t_k)x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k, \tag{4.1.16}$$

δηλαδή το x γράφεται ως αφινικός συνδυασμός των $x_0, \ldots, x_k$.

Για το μονοσήμαντο υποθέτουμε ότι

$$t_0x_0 + \cdots + t_kx_k = s_0x_0 + \cdots + s_kx_k, \tag{4.1.17}$$

όπου $s_0 + \cdots + s_k = t_0 + \cdots + t_k = 1$. Τότε,

$$(t_0 - s_0)x_0 + \cdots + (t_k - s_k)x_k = 0 \ \text{ και } \ \sum_{i=0}^{k}(t_i - s_i) = 0. \tag{4.1.18}$$

Αφού τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα, το Λήμμα 4.1.9(ii) δείχνει ότι $t_i = s_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$. □

Ορισμός 4.1.13 (βαρυκεντρικές συντεταγμένες)**.** Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αφινική διάσταση k και έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία του S. Αν $x = t_0x_1 + \cdots + t_kx_k \in \mathrm{aff}(S)$, τότε οι μονοσήμαντα ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί $t_0, t_1, \ldots, t_k$ είναι οι *βαρυκεντρικές συντεταγμένες* του x ως προς το $\{x_0, \ldots, x_k\}$.

4.2 Τοπολογικές ιδιότητες κυρτών συνόλων

Ορισμός 4.2.1 (σχετικό εσωτερικό και σύνορο)**.** Έστω C μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το *σχετικό εσωτερικό* $\mathrm{ri}(C)$ του C είναι το εσωτερικό του C ως προς την αφινική του θήκη $\mathrm{aff}(C)$. Δηλαδή, $x \in \mathrm{ri}(C)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$B(x, \delta) \cap \mathrm{aff}(C) \subseteq C. \tag{4.2.1}$$

Το *σχετικό σύνορο* του C είναι το σύνολο

$$\mathrm{rb}(C) = \overline{C} \setminus \mathrm{ri}(C). \tag{4.2.2}$$

Δηλαδή, το σύνορο του C ως προς την αφινική του θήκη $\mathrm{aff}(C)$ (παρατηρήστε ότι η κλειστή θήκη του C ως προς την $\mathrm{aff}(C)$ συμπίπτει με το $\overline{C}$, διότι η $\mathrm{aff}(C)$ είναι κλειστό σύνολο).

Ορισμός 4.2.2 (simplex)**.** Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Η κυρτή τους θήκη

$$\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}) \tag{4.2.3}$$

λέγεται k–simplex.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $1 \leq k \leq n$ και $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ ένα k–simplex στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{ri}(S) = \{t_0x_1 + t_1x_1 + \cdots + t_kx_k : 0 < t_i < 1, t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\}. \tag{4.2.4}$$

Ειδικότερα, $\mathrm{ri}(S) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Μεταφέροντας αν χρειαστεί το S, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ και, αφού εξετάζουμε το σχετικό εσωτερικό του S, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $k = n$. Με αυτές τις υποθέσεις, έχουμε

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_ix_i : 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \right\} \tag{4.2.5}$$

και θα δείξουμε ότι

$$\mathrm{int}(S) \supseteq V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_ix_i : 0 < t_i < 1, \sum_{i=1}^{n} t_i < 1 \right\}, \tag{4.2.6}$$

οπότε, ειδικότερα, $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής: τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα, κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^n t_ix_i$, και τότε ορίζουμε

$$f(x) = f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) = (t_1, \ldots, t_n). \tag{4.2.7}$$

Αφού κάθε t_i εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων των x_i, x (λύνουμε το σύστημα $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n = x$ ως προς t_i), εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$B = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) : 0 < t_i < 1, \sum_{i=1}^{n} t_i < 1 \right\} \tag{4.2.8}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από τον ορισμό της f έχουμε $f^{-1}(B) \subseteq S$. Το σύνολο $V = f^{-1}(B)$ είναι μη κενό και ανοικτό, διότι η f είναι συνεχής. Άρα, $\mathrm{int}(S) \supseteq V$. □

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω C μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,* $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω k η αφινική διάσταση του C. Τότε, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in C$ ώστε το $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ να είναι k–simplex. Από την Πρόταση 4.2.3 υπάρχει $x \in \mathrm{ri}(S)$. Όμως, $S \subseteq C$ και $\mathrm{aff}(S) = \mathrm{aff}(C)$. Άρα, $x \in \mathrm{ri}(C)$. Δηλαδή, $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$. □

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\overline{C} = A_C := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \textit{υπάρχει}\ y \in C\ \textit{ώστε}\ (x,y] \subseteq C\} \tag{4.2.9}$$

και

$$\mathrm{int}(C) = B_C := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \textit{για κάθε}\ y \in \mathbb{R}^n\ \textit{με}\ y \neq x,\ \textit{υπάρχει}\ z \in (x,y)\ \textit{ώστε}\ [x,z] \subseteq C\}. \tag{4.2.10}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 4.2.6. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x \in \overline{C}$ και $y \in \mathrm{int}(C)$, τότε $[y,x) \subseteq \mathrm{ri}(C)$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\dim(C) = n$. Έστω $x \in \overline{C}$ και $y \in \mathrm{ri}(C)$. Θεωρούμε τυχόν $z \in (y,x)$. Δηλαδή, $z = (1-t)x + ty$ για κάποιο $t \in (0,1)$. Γράφουμε

$$y = \frac{1}{t}\big(z - (1-t)x\big). \tag{4.2.11}$$

Αφού $x \in \overline{C}$, υπάρχει ακολουθία (x_k) στο C ώστε $x_k \to x$. Ορίζουμε

$$y_k = \frac{1}{t}\big(z - (1-t)x_k\big). \tag{4.2.12}$$

Τότε, $y_k \to y$. Αφού $y \in \mathrm{int}(C)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq C$. Τότε, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_k \in B(y,\delta)$ για κάθε $k \geq k_0$. Σταθεροποιούμε ένα $k \geq k_0$ και βρίσκουμε $\delta_1 > 0$ ώστε $B(y_k,\delta_1) \subseteq B(y,\delta) \subseteq C$. Τότε, το σύνολο $tB(y_k,\delta_1) + (1-t)x_k$ είναι ανοικτό και, από την κυρτότητα του C και το γεγονός ότι $x_k \in C$,

$$tB(y_k,\delta_1) + (1-t)x_k \subseteq tC + (1-t)C = C. \tag{4.2.13}$$

Συνεπώς, $z = ty_k + (1-t)x_k \in C$. Έπεται ότι $[y,x) \subseteq C$. □

Απόδειξη του θεωρήματος 4.2.5. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $C \neq \emptyset$ και, στη συνέχεια, να υποθέσουμε ότι $\dim(C) = n$.

Αν $x \in A_C$ τότε είναι φανερό ότι $x \in \overline{C}$: αφού $(x,y] \subseteq C$ για κάποιο $y \in C$, η ακολουθία $y_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x + \frac{1}{k}y$ περιέχεται στο C και συγκλίνει στο x. Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{C}$. Από το Θεώρημα 4.2.4 υπάρχει $y \in \mathrm{int}(C)$ και από το Λήμμα 4.2.6 έχουμε $[y,x) \subseteq C$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα αν $\dim(C) < n$, αφού σε αυτή την περίπτωση τα δύο σύνολα της ισότητας είναι κενά (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\dim(C) = n$. Αν $x \in \mathrm{int}(C)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq C$. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ με $y \neq x$ έχουμε $[x,z] \subseteq C$, όπου

$$z = x + \frac{\delta}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|_2}. \tag{4.2.14}$$

Συνεπώς, $x \in B_C$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathrm{int}(C) \subseteq B_C$. Αντίστροφα, έστω $x \in B_C$. Θεωρούμε $y \in \mathrm{int}(C)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq x$ (αλλιώς, αμέσως έχουμε $x = y \in \mathrm{int}(C)$). Εφαρμόζοντας τον ορισμό του B_C για το $y' = x + (x - y)$ βρίσκουμε $z \in (x, y')$ ώστε $[x, z] \subseteq C$. Από το Λήμμα 4.2.6 έχουμε $[y, z) \subseteq \mathrm{int}(C)$. Όμως, $x \in (y, z)$. Συνεπώς, $x \in \mathrm{int}(C)$. Δηλαδή, $B_C \subseteq \mathrm{int}(C)$. □

Πρόταση 4.2.7. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τα σύνολα $\mathrm{ri}(C)$ και $\overline{C}$ είναι κυρτά.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathrm{ri}(C)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.6 για τα $x \in \mathrm{ri}(C) \subseteq \overline{C}$ και $y \in \mathrm{ri}(C)$, συμπεραίνουμε ότι $(x, y) \subseteq \mathrm{ri}(C)$. Έπεται ότι $[x, y] \subseteq \mathrm{ri}(C)$ και αυτό αποδεικνύει ότι το $\mathrm{ri}(C)$ είναι κυρτό.

(β) Έστω $x, y \in \overline{C}$ και $t \in (0, 1)$. Υπάρχουν ακολουθίες (x_m), (y_m) στο C ώστε $x_m \to x$ και $y_m \to y$. Τότε, $z_m := (1 - t)x_m + t y_m \to (1 - t)x + ty$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $z_m \in C$ για κάθε m, άρα $(1 - t)x + ty \in \overline{C}$. □

Πρόταση 4.2.8. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\overline{C} = \overline{\mathrm{ri}(C)} \tag{4.2.15}$$

και

$$\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(\overline{C}). \tag{4.2.16}$$

Απόδειξη. (α) Από την $\mathrm{ri}(C) \subseteq C$ παίρνουμε $\overline{\mathrm{ri}(C)} \subseteq \overline{C}$. Έστω $x \in \overline{C}$. Θεωρούμε κάποιο $y \in \mathrm{ri}(C)$. Από το Λήμμα 4.2.6 έχουμε $[y, x) \subseteq \mathrm{ri}(C)$. Τότε, είναι φανερό ότι $x \in \overline{[y, x)} \subseteq \overline{\mathrm{ri}(C)}$. Αυτό αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό.

(β) Αφού $C \subseteq \overline{C}$ και $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C})$, έχουμε $\mathrm{ri}(C) \subseteq \mathrm{ri}(\overline{C})$. Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{ri}(\overline{C})$. Θεωρούμε κάποιο $y \in \mathrm{ri}(C)$. Αν $y = x$ έχουμε $x = y \in \mathrm{ri}(C)$. Έστω ότι $y \neq x$. Τότε, παίρνοντας $y_1 = 2x - y \neq y$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2.5 για το $\overline{C}$, βρίσκουμε $z \in \overline{C}$ ώστε $x \in (y, z)$. Όμως, $[y, z) \subseteq \mathrm{ri}(C)$ από το Λήμμα 4.2.6. Άρα, $x \in \mathrm{ri}(C)$. Δηλάδή, αν $x \in \mathrm{ri}(\overline{C})$ τότε $x \in \mathrm{ri}(C)$. □

4.3 Μετρική προβολή

Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *μετρική προβολή* p_C απεικονίζει κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ στο πλησιέστερο προς το x σημείο $p_C(x)$ του C. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα αυτού του σημείου αποδεικνύονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό $p_C(x) \in C$ ώστε*

$$\|x - p_C(x)\|_2 \leq \|x - y\|_2 \tag{4.3.1}$$

για κάθε $y \in C$: δηλαδή, $\|x - p_C(x)\|_2 = d(x, C)$. Η απεικόνιση $x \mapsto p_C(x)$ λέγεται μετρική προβολή του C.

Απόδειξη. Αν $x \in C$ θέτουμε $p_C(x) = x$: είναι φανερό ότι είναι το μοναδικό σημείο του C που ικανοποιεί την (4.3.1) για κάθε $y \in C$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $x \notin C$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_m \in C$ με την ιδιότητα

$$d(x,C) \leq \|x - y_m\|_2 < d(x,C) + \frac{1}{m}. \tag{4.3.2}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (y_m) περιέχεται στην κλειστή μπάλα $\overline{B}(x, d(x,C)+1)$ η οποία είναι συμπαγής. Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία (y_{k_m}) της (y_m) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Αφού $y_{k_m} \in C$ και το C είναι κλειστό, έχουμε $y_0 \in C$. Επιπλέον, η (4.3.2) δείχνει ότι

$$\|x - y_0\|_2 = \lim_{m\to\infty} \|x - y_{k_m}\|_2 = d(x,C). \tag{4.3.3}$$

Για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι

$$\|x - y\|_2 = \|x - y_0\|_2 = d(x,C) \tag{4.3.4}$$

για κάποιο $y \in C$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $\frac{y+y_0}{2} \in C$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου γράφουμε

$$\begin{aligned} 4d^2(x,C) &= 2\|x-y\|_2^2 + 2\|x-y_0\|_2^2 \\ &= \|2x - (y+y_0)\|_2^2 + \|y-y_0\|_2^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{y+y_0}{2}\right\|_2^2 + \|y-y_0\|_2^2 \\ &\geq 4d^2(x,C) + \|y-y_0\|_2^2, \end{aligned}$$

οπότε $\|y-y_0\|_2^2 \leq 0$. Αναγκαστικά, $y = y_0$. □

Το επόμενο Λήμμα περιγράφει μια χρήσιμη ιδιότητα του πλησιέστερου σημείου.

Λήμμα 4.3.2. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \in C$ έχουμε*

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0. \tag{4.3.5}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq p_C(x)$. Για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε $p_C(x) + t(y - p_C(x)) \in C$, άρα

$$\|x - p_C(x)\|_2^2 \leq \|x - p_C(x) - t(y - p_C(x))\|_2^2. \tag{4.3.6}$$

Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι

$$2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq t^2\|y - p_C(x)\|_2^2. \tag{4.3.7}$$

Διαιρώντας με t και αφήνοντας το $t \to 0^+$ παίρνουμε την (4.3.5). □

Θεώρημα 4.3.3 (Busemann-Feller, 1935)**.** *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η μετρική προβολή $p_C : \mathbb{R}^n \to C$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1. Δηλαδή, αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ τότε*

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2. \tag{4.3.8}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u = p_C(x) \neq p_C(y) = v$. Από το Λήμμα 4.3.2 έχουμε

$$\langle x - u, v - u\rangle \leq 0 \quad \text{και} \quad -\langle y - v, v - u\rangle \leq 0. \tag{4.3.9}$$

Άρα,

$$\langle x - y + v - u, v - u\rangle \leq 0. \tag{4.3.10}$$

Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\|v - u\|_2^2 \leq \langle y - x, v - u\rangle \leq \|y - x\|_2 \|v - u\|_2. \tag{4.3.11}$$

Αφού $u \neq v$, έπεται ότι $\|p_C(y) - p_C(x)\|_2 = \|v - u\|_2 \leq \|y - x\|_2$. □

Ορισμός 4.3.4. Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Τότε, $d(x, C) > 0$. Ορίζουμε

$$u_C(x) = \frac{x - p_C(x)}{d(x, C)}. \tag{4.3.12}$$

Από την $\|x - p_C(x)\|_2 = d(x, C)$ βλέπουμε ότι $\|u_C(x)\|_2 = 1$. Δηλαδή, $u_C(x) \in S^{n-1}$: το $u_C(x)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το $p_C(x)$ προς το x. Συμβολίζουμε με $R_C(x)$ την ημιευθεία που ξεκινάει από το $p_C(x)$ και διέρχεται από το x:

$$R_C(x) = \{p_C(x) + t u_C(x) : t \geq 0\}. \tag{4.3.13}$$

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι αν $x \notin C$ τότε όλα τα σημεία που ανήκουν στην ημιευθεία που ξεκινάει από το $p_C(x)$ και διέρχεται από το x έχουν το ίδιο πλησιέστερο σημείο.

Λήμμα 4.3.5. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Αν $y \in R_C(x)$ τότε $p_C(y) = p_C(x)$.*

Απόδειξη. Αφού $y \in R_C(x)$, έχουμε $y = p_C(x) + t(x - p_C(x))$ για κάποιον $t > 0$. Από το Λήμμα 4.3.2 έχουμε

$$\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0 \tag{4.3.14}$$

και

$$\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq 0. \tag{4.3.15}$$

Αντικαθιστώντας το $y = p_C(x) + t(x - p_C(x))$ στην (4.3.15) έχουμε

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|_2^2 + t\langle x - p_C(x), p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq 0. \tag{4.3.16}$$

Από την (4.3.14) έπεται ότι $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2^2 \leq 0$. Συνεπώς, $p_C(x) = p_C(y)$. □

Έστω C ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{bd}(C)$ το σύνορο του C. Η επόμενη Πρόταση έχει σαν συνέπεια ότι η μετρική προβολή $p_C : \mathbb{R}^n \setminus C \to \mathrm{bd}(C)$ είναι επί.

Πρόταση 4.3.6. *Έστω C ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το C περιέχεται στην ανοικτή μπάλα $B(0,r)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα r. Τότε,*

$$p_C(rS^{n-1}) = \mathrm{bd}(C). \tag{4.3.17}$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $p_C(rS^{n-1}) \subseteq \mathrm{bd}(C)$ είναι φανερός: γενικά, αν $x \notin C$ τότε $p_C(x) \in \mathrm{bd}(C)$ (εξηγήστε γιατί).

Έστω $z \in \mathrm{bd}(C)$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $x_m \in B^\circ(0,r) \setminus C$ με

$$\|z - x_m\|_2 < \frac{1}{m}. \tag{4.3.18}$$

Από το Θεώρημα 4.3.3 έχουμε

$$\|z - p_C(x_m)\|_2 = \|p_C(z) - p_C(x_m)\|_2 \leq \|z - x_m\|_2 < \frac{1}{m}. \tag{4.3.19}$$

Θεωρούμε την ημιευθεία $R_C(x_m)$. Αυτή τέμνει την rS^{n-1} σε κάποιο σημείο y_m. Από το Λήμμα 4.3.5 έχουμε $p_C(y_m) = p_C(x_m)$, άρα

$$\|z - p_C(y_m)\|_2 < \frac{1}{m}. \tag{4.3.20}$$

Η rS^{n-1} είναι συμπαγής, άρα υπάρχουν $y \in rS^{n-1}$ και υπακολουθία (y_{k_m}) της (y_m) ώστε $y_{k_m} \to y$. Από τη συνέχεια της μετρικής προβολής έχουμε $p_C(y) = \lim_{m\to\infty} p_C(y_{k_m})$. Όμως, η (4.3.20) δείχνει ότι $p_C(y_{k_m}) \to z$.

Συνεπώς, $z = p_C(y) \in p_C(rS^{n-1})$. □

4.4 Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα

4.4α΄ Υπερεπίπεδα στήριξης

Ορισμός 4.4.1. Έστω $H = H(u,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle = \alpha\}$, όπου $u \neq 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, ένα υπερεπίπεδο. Θεωρούμε τους κλειστούς ημιχώρους

$$\overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle \geq \alpha\} \quad \text{και} \quad \overline{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle \leq \alpha\} \tag{4.4.1}$$

που ορίζει το H. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το H *στηρίζει το A στο x* (*ή φέρει το A στο x*) αν

(i) $x \in A \cap H$,

(ii) Είτε $A \subseteq \overline{H}_+$ ή $A \subseteq \overline{H}_-$.

Αν G είναι ένας κλειστός ημίχωρος, λέμε ότι ο G στηρίζει το A αν $A \cap \mathrm{bd}(G) \neq \emptyset$ και $A \subseteq G$. Αν ο $G = \overline{H}_-$ ορίζεται από το υπερεπίπεδο $H = H(u, \alpha)$ και στηρίζει το A σε κάποιο σημείο x, τότε λέμε ότι το u είναι ένα *εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του A στο x*.

Η μελέτη των ιδιοτήτων της μετρικής προβολής στην §4.3 μας επιτρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη υπερεπιπέδων που στηρίζουν ένα κλειστό κυρτό γνήσιο υποσύνολο του χώρου.

Λήμμα 4.4.2. *Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ τότε το υπερεπίπεδο που περνάει από το $p_C(x)$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$ στηρίζει το C στο σημείο $p_C(x)$.*

Απόδειξη. Το υπερεπίπεδο που περνάει από το $p_C(x)$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$ είναι το

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u_C(x)\rangle = \langle p_C(x), u_C(x)\rangle\}. \tag{4.4.2}$$

Είναι φανερό ότι

$$p_C(x) \in C \cap H. \tag{4.4.3}$$

Επιπλέον, αν $y \in C$ τότε το Λήμμα 4.3.2 δείχνει ότι

$$\langle u_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \langle y, u_C(x)\rangle \leq \langle p_C(x), u_C(x)\rangle. \tag{4.4.4}$$

Αυτό σημαίνει ότι $C \subseteq \overline{H}_-$. Από τον Ορισμό 4.4.1, το $\overline{H}_-$ στηρίζει το C στο σημείο $p_C(x)$. □

Θεώρημα 4.4.3. (α) *Έστω C ένα μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $y \in \mathrm{bd}(C)$ τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο σημείο y.*

(β) *Έστω C ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u \in S^{n-1}$ υπάρχει υπερεπίπεδο $H(u)$ που στηρίζει το C και έχει εξωτερικό κάθετο διάνυσμα το u.*

Απόδειξη. (α) Έστω $y \in \mathrm{bd}(C)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι το C είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχει $r > 0$ ώστε το C να περιέχεται στην ανοικτή μπάλα $B(0, r)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα r. Από το Λήμμα 4.3.6, υπάρχει $x \in rS^{n-1}$ με την ιδιότητα $p_C(x) = y$. Από το Λήμμα 4.4.2 υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο σημείο y.

Έστω τώρα ότι το C δεν είναι φραγμένο. Το σύνολο $C \cap B(y, 1)$ (όπου $B(y, 1)$ είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο το y και ακτίνα 1) είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό. Αφού $y \in \mathrm{bd}(C)$ έχουμε $y \in \mathrm{bd}(C \cap B(y, 1))$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, υπάρχει υπερεπίπεδο H το οποίο στηρίζει το $C \cap B(y, 1)$ στο σημείο y. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$C \cap B(y, 1) \subseteq \overline{H}_-. \tag{4.4.5}$$

Αν δεν ισχύει η $C \subseteq \overline{H}_-$, τότε υπάρχει $z \in C \setminus \overline{H}_-$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $[y,z] \subseteq C$. Όμως, το z ανήκει στο συμπλήρωμα του $\overline{H}_-$, άρα το $(y,z] \cap B(y,1)$ δεν μπορεί να περιέχεται στο $\overline{H}_-$, άτοπο.

(β) Έστω $u \in S^{n-1}$. Η συνάρτηση $y \mapsto \langle y, u\rangle$ είναι συνεχής. Αφού το C είναι συμπαγές, υπάρχει $y_0 \in C$ ώστε

$$\langle y_0, u\rangle = \max\{\langle y, u\rangle : y \in C\}. \tag{4.4.6}$$

Θέτουμε

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u\rangle = \langle y_0, u\rangle\}. \tag{4.4.7}$$

Τότε, $C \subseteq \overline{H}_-$ και $y_0 \in C \cap H$. Άρα, το H στηρίζει το C στο σημείο y_0 και έχει εξωτερικό κάθετο διάνυσμα το u. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ιδιότητα (α) του Θεωρήματος 4.4.3 χαρακτηρίζει τα κλειστά κυρτά σύνολα που έχουν μη κενό εσωτερικό.

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω C ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in \mathrm{bd}(C)$ υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο y. Τότε, το C είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το C δεν είναι κυρτό. Τότε, υπάρχουν $x, y \in C$ και $z \in [x,y]$ με $z \notin C$. Αφού το C έχει μη κενό εσωτερικό, υπάρχει $w \in \mathrm{int}(C)$ ώστε τα x, y και w να μην είναι συνευθειακά.

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[w,z]$. Αφού $z \notin C$, υπάρχει $u \in [w,z)$ το οποίο ανήκει στο σύνορο του C. Από την υπόθεση, υπάρχει υπερεπίπεδο H που στηρίζει το C στο u. Έχουμε $w \notin H$, άρα η τομή του H με το επίπεδο E που ορίζουν τα x, y και w είναι μια ευθεία ℓ που περνάει από το u. Αφού το C περιέχεται στον έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους που ορίζει το H, τα x, y και w είναι στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα του E που ορίζει η ℓ. Αυτό είναι άτοπο, αφού η ℓ περνάει από το u το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου xyw. □

4.4β΄ Διαχωριστικά θεωρήματα

Ορισμός 4.4.5. (α) Έστω $H = H(u,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = \alpha\}$, όπου $u \neq 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, ένα υπερεπίπεδο. Αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι *το H διαχωρίζει τα A και B* αν $A \subseteq \overline{H}_+$ και $B \subseteq \overline{H}_-$ ή $A \subseteq \overline{H}_-$ και $B \subseteq \overline{H}_+$.

(β) Λέμε ότι *τα A και B διαχωρίζονται γνήσια από το H* αν $A \subseteq H_+$ και $B \subseteq H_-$ ή $A \subseteq H_-$ και $B \subseteq H_+$, όπου H_+ και H_- οι ανοικτοί ημίχωροι που ορίζονται από το H.

(γ) Τέλος, λέμε ότι *τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά από το H* αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε τα A και B να διαχωρίζονται τόσο από το $H(u, \alpha - \varepsilon)$ όσο και από το $H(u, \alpha + \varepsilon)$.

(δ) Λέγοντας ότι το A διαχωρίζεται από το σημείο x εννοούμε ότι τα σύνολα A και $\{x\}$ διαχωρίζονται.

Θεώρημα 4.4.6. *Έστω C μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \notin C$. Τότε, τα C και x και διαχωρίζονται.*

Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι το C είναι κλειστό, τότε τα C και x διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το C είναι κλειστό. Το υπερεπίπεδο H που περνάει από το $p_C(x)$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$ στηρίζει το C, άρα διαχωρίζει τα C και x. Αν θεωρήσουμε το υπερεπίπεδο H_1 που περνάει από το $\frac{p_C(x)+x}{2}$ και είναι κάθετο στο $u_C(x)$, αυτό διαχωρίζει αυστηρά τα C και x.

Έστω τώρα ότι το C δεν είναι κλειστό. Αν το x δεν ανήκει στην κλειστή θήκη $\overline{C}$ του C, από τον προηγούμενο ισχυρισμό υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει το κλειστό κυρτό σύνολο $\overline{C}$ από το x. Αυτό το υπερεπίπεδο διαχωρίζει τα C και x. Αν $x \in \overline{C} \setminus C$, τότε $x \in \mathrm{bd}(\overline{C})$. Τότε, το Θεώρημα 4.4.3(α) δείχνει ότι υπάρχει υπερεπίπεδο H που στηρίζει το $\overline{C}$ στο σημείο x. Αυτό το υπερεπίπεδο διαχωρίζει τα C και x. □

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 4.4.6 είναι το εξής βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.7. *Κάθε μη κενό, κλειστό και κυρτό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι η τομή των κλειστών ημιχώρων που το στηρίζουν.*

Απόδειξη. Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από τον ορισμό του «ημιχώρου στήριξης» είναι φανερό ότι

$$C \subseteq \cap\{G : \text{ο } G \text{ είναι κλειστός ημίχωρος που στηρίζει το } C\}.$$

Έστω $x \notin C$. Από το Θεώρημα 4.4.6 το x διαχωρίζεται αυστηρά από το C, δηλαδή υπάρχει κλειστός ημίχωρος G ο οποίος στηρίζει το C και δεν περιέχει το x. □

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι το να διαχωρίσουμε δύο υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου ανάγεται στο πρόβλημα του να διαχωρίσουμε σημείο από σύνολο.

Λήμμα 4.4.8. *Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τα A και B διαχωρίζονται (διαχωρίζονται αυστηρά) αν και μόνο αν τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται (διαχωρίζονται αυστηρά).*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά από το H: υπάρχουν $u \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε τα A και B να διαχωρίζονται τόσο από το $H(u, \alpha - \varepsilon)$ όσο και από το $H(u, \alpha + \varepsilon)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$A \subseteq \{x : \langle x, u\rangle \geq \alpha + \varepsilon\} \quad \text{και} \quad B \subseteq \{x : \langle x, u\rangle \leq \alpha - \varepsilon\}. \tag{4.4.8}$$

Έστω $x \in A - B$. Μπορούμε να γράψουμε $x = a - b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$. Από την (4.4.8) παίρνουμε

$$\langle x, u\rangle = \langle a, u\rangle - \langle b, u\rangle \geq (\alpha + \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon) = 2\varepsilon. \tag{4.4.9}$$

Συνεπώς, τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά από το υπερεπίπεδο

$$H(u, \varepsilon) = \{x : \langle x, u\rangle = \varepsilon\}. \tag{4.4.10}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα $A-B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά. Τότε, υπάρχουν $u \neq 0$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\langle x, u\rangle \geq 2\varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in A - B. \tag{4.4.11}$$

Ορίζουμε

$$s = \inf\{\langle a, u\rangle : a \in A\} \quad \text{και} \quad t = \sup\{\langle b, u\rangle : b \in B\}. \tag{4.4.12}$$

Από την (4.4.11) έχουμε $\langle b, u\rangle + 2\varepsilon \leq \langle a, u\rangle$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Άρα, $t + 2\varepsilon \leq s$. Έπεται ότι το

$$H\left(u, \frac{s+t}{2}\right) = \left\{x : \langle x, u\rangle = \frac{s+t}{2}\right\} \tag{4.4.13}$$

διαχωρίζει αυστηρά τα A και B.

Στην περίπτωση που ζητάμε τα A και B να διαχωρίζονται (απλώς), η απόδειξη είναι εντελώς όμοια. □

Με την υπόθεση ότι τα A και B είναι κυρτά έχουμε σαν άμεσο πόρισμα το εξής διαχωριστικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.9. *Έστω A και B μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $A \cap B = \emptyset$. Τότε, τα A και B διαχωρίζονται.*

Αν, επιπλέον, το A είναι συμπαγές και το B είναι κλειστό, τότε τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη. Αφού τα A και B είναι κυρτά, εύκολα ελέγχουμε ότι το $A - B$ είναι κυρτό σύνολο. Από την υπόθεση ότι $A \cap B = \emptyset$ έπεται ότι $0 \notin A - B$. Από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 4.4.6, τα $A - B$ και 0 και διαχωρίζονται. Από το Λήμμα 4.4.8, τα A και B διαχωρίζονται.

Αν υποθέσουμε ότι το A είναι συμπαγές και το B είναι κλειστό, τότε το $A - B$ είναι κλειστό: θεωρήστε ακολουθία $x_m = a_m - b_m$ στο $A - B$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in \mathbb{R}^n$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_m) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $a \in A$. Τότε,

$$b_{k_m} = a_{k_m} - (a_{k_m} - b_{k_m}) \to a - z \tag{4.4.14}$$

και $a - z = b \in B$ αφού το B είναι κλειστό. Συνεπώς, $z = a - b \in A - B$. Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 4.4.6, τα $A - B$ και 0 διαχωρίζονται αυστηρά. Από το Λήμμα 4.4.8, τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά. □

4.5 Πολικό συνόλου

Ορισμός 4.5.1. Έστω C ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το *πολικό* του C είναι το σύνολο

$$C^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1 \text{ για κάθε } x \in C\}. \tag{4.5.1}$$

Παρατηρήσεις 4.5.2. (α) Το C° είναι μη κενό: παρατηρήστε ότι $0 \in C^\circ$.
(β) Το C° είναι κυρτό και κλειστό: αν $y_1, y_2 \in C^\circ$ και $t \in [0,1]$, τότε για κάθε $x \in C$ έχουμε

$$\langle x, (1-t)y_1 + ty_2\rangle = (1-t)\langle x, y_1\rangle + t\langle x, y_2\rangle \leq (1-t)\cdot 1 + t\cdot 1 = 1. \tag{4.5.2}$$

Άρα, $(1-t)y_1 + ty_2 \in C^\circ$. Για να δείξουμε ότι το C° είναι κλειστό, θεωρούμε $y_m \in C^\circ$ με $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in C$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $\langle x, y_m\rangle \leq 1$, άρα

$$\langle x, y\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle x, y_m\rangle \leq 1. \tag{4.5.3}$$

Έπεται ότι $y \in C^\circ$.
(γ) Αν το C είναι φραγμένο, τότε το C° περιέχει μια μπάλα με κέντρο το 0 (άρα, έχει μη κενό εσωτερικό). Πράγματι, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\|_2 \leq M$ για κάθε $x \in C$. Αν $\|y\|_2 \leq 1/M$, τότε

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_2\|y\|_2 \leq M \cdot \frac{1}{M} = 1. \tag{4.5.4}$$

Δηλαδή, η μπάλα $B(0, 1/M)$ περιέχεται στο C°.
(δ) Αν το C περιέχει μια μπάλα με κέντρο το 0 τότε το C° είναι φραγμένο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $B(0,r) \subseteq C$. Εστω $0 \neq y \in C^\circ$. Τότε, το σημείο $x = ry/\|y\|_2$ ανήκει στην $B(0,r)$, άρα ανήκει στο C. Έπεται ότι

$$1 \geq \langle x, y\rangle = \left\langle \frac{ry}{\|y\|_2}, y \right\rangle = r\|y\|_2. \tag{4.5.5}$$

Με άλλα λόγια, $C^\circ \subseteq B(0, 1/r)$.

Συμβολίζουμε με $C^{\circ\circ}$ το πολικό του πολικού του C. Δηλαδή, $C^{\circ\circ} := (C^\circ)^\circ$.

Πρόταση 4.5.3. *Έστω C μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$C^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\}). \tag{4.5.6}$$

Δηλαδή, το $C^{\circ\circ}$ είναι το μικρότερο κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει το C και το 0.

Απόδειξη. Από τον ορισμό βλέπουμε εύκολα ότι $C^{\circ\circ} \supseteq C$. Από τις Παρατηρήσεις (α) και (β) το $C^{\circ\circ}$ είναι κλειστό, κυρτό και περιέχει το 0. Έπεται ότι

$$C^{\circ\circ} \supseteq \overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\}). \tag{4.5.7}$$

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει ισότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in C^{\circ\circ}$ το οποίο δεν ανήκει στο $\overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\})$. Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 4.4.6, υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει αυστηρά το x από το $\overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{0\})$. Ειδικότερα, μπορούμε να βρούμε $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle z, y\rangle < \alpha \text{ για κάθε } z \in C \cup \{0\} \tag{4.5.8}$$

και

$$\langle x, y\rangle > \alpha. \tag{4.5.9}$$

Αφού $0 \in C \cup \{0\}$, έχουμε $\alpha > 0$. Από την (4.5.8) έπεται ότι $\langle z, y/\alpha\rangle < 1$ για κάθε $z \in C$, άρα $y/\alpha \in C^\circ$. Όμως, η (4.5.9) δίνει $\langle x, y/\alpha\rangle > 1$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \in C^{\circ\circ}$. □

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το C είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.5.3 είναι η εξής.

Πρόταση 4.5.4. *Έστω C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in C$. Τότε, $C^{\circ\circ} = \overline{C}$. Ειδικότερα, αν το C είναι κλειστό τότε $C^{\circ\circ} = C$.* □

Αν υποθέσουμε ότι το C είναι κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, τότε η Πρόταση 4.5.4 και οι Παρατηρήσεις (γ) και (δ) δείχνουν το εξής.

Πρόταση 4.5.5. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε:*

(i) *Το K° είναι κυρτό σώμα και $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$.*

(ii) *$K^{\circ\circ} = K$.* □

Η επόμενη Πρόταση χαρακτηρίζει τα σημεία του συνόρου του πολικού ενός κυρτού σώματος. Η στενή σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε ένα κυρτό σώμα και στο πολικό του θα μελετηθεί στο επόμενο Κεφάλαιο.

Πρόταση 4.5.6. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, και έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Τότε, $y \in \mathrm{bd}(K^\circ)$ αν και μόνο αν το K στηρίζεται από τον ημίχωρο*

$$G(y,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1\}. \tag{4.5.10}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $G(y,1)$ στηρίζει το K. Αφού $K \subseteq G(y,1)$, έχουμε $y \in K^\circ$. Αν $y \in \mathrm{int}(K^\circ)$, τότε υπάρχει $t > 1$ ώστε $ty \in K^\circ$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό σημαίνει ότι

$$\max\{\langle x, y\rangle : x \in K\} = \frac{1}{t}\max\{\langle x, ty\rangle : x \in K\} \leq \frac{1}{t} < 1, \tag{4.5.11}$$

το οποίο είναι άτοπο: αφού ο $G(y,1)$ στηρίζει το K, υπάρχει $x_0 \in K \cap H(y,1)$. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $\langle x_0, y\rangle = 1$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $y \in \mathrm{bd}(K^\circ)$. Αφού $0 \in \mathrm{int}(K)$, έχουμε $y \neq 0$ και

$$0 < \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\} \leq 1. \tag{4.5.12}$$

Μένει να δείξουμε ότι στη δεξιά ανισότητα έχουμε ισότητα. Αν όχι, τότε υπάρχει $t > 1$ ώστε $\max\{\langle x, ty\rangle : x \in K\} = 1$. Έπεται ότι $ty \in K^\circ$. Αφού το K° είναι κυρτό σώμα και περιέχει το 0, συμπεραίνουμε ότι $[0, ty] \subset K^\circ$, και αφού το y είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[0, ty]$ συμπεραίνουμε ότι $y \in \mathrm{int}(K^\circ)$ (χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.2.6). Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα

$$\max\{\langle x, y\rangle : x \in K\} = 1. \tag{4.5.13}$$

Τότε, ο $G(y, 1)$ στηρίζει το K. □

4.6 Ασκήσεις

1. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Δείξτε ότι τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα.

2. Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι:

(i) $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C))$.

(ii) $\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(\overline{C}) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C))$.

(iii) $\mathrm{rb}(C) = \mathrm{rb}(\overline{C}) = \mathrm{rb}(\mathrm{ri}(C))$.

3. Έστω C_1, C_2 μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ri}(C_1 + C_2) = \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2).$$

4. Έστω C_1, C_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2).$$

Ισχύει το ίδιο για τυχόντα μη κενά κυρτά $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$;

5. Έστω $\{C_i : i \in I\}$ οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $\bigcap_{i\in I} \mathrm{ri}(C_i) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι

$$\overline{\bigcap_{i\in I} C_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{C_i}.$$

6. Έστω $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$ ένα n–simplex στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $y \in \mathrm{int}(S)$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n\}), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

είναι n–simplices, ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά, και

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

7. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\overline{\mathrm{conv}(A)} = \bigcap\{B \subseteq \mathbb{R}^n : B \supseteq A,\, B \text{ κλειστό και κυρτό}\}.$$

8. Δώστε παράδειγμα κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο. Μπορείτε να βρείτε αντίστοιχο παράδειγμα στο $\mathbb{R}$;

9. Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$, τότε $x - p_C(x) = y - P_C(y)$.

Αν $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, τι συμπεραίνετε για το C;

10*. Έστω A μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό $p_A(x) \in A$ ώστε $\|x - p_A(x)\|_2 = d(x, A)$. Δείξτε ότι το A είναι κυρτό.

11. Έστω K ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ από κλειστές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$K = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

12. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το *κέντρο βάρους* του K είναι το σημείο $y = (y_1, \ldots, y_n)$ με συντεταγμένες

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle \, dx, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι $y \in K$.

13. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.

(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.

14. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν διαχωρίζονται γνήσια;

(β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία να διαχωρίζονται γνήσια αλλά να μην διαχωρίζονται αυστηρά;

15. Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το C είναι κλειστό αν και μόνο αν το $C \cap \ell$ είναι κλειστό σύνολο για κάθε ευθεία ℓ στον $\mathbb{R}^n$.

16. (α) Έστω $T = \mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_m\})$. Δείξτε ότι

$$T^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}.$$

(β) Έστω $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}.$$

Δείξτε ότι $P^\circ = \mathrm{conv}(\{0, v_1, \ldots, v_m\})$.

17. Έστω A και B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι

$$(A \cap B)^\circ = \overline{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$

Κεφάλαιο 5

Κυρτές συναρτήσεις

5.1 Κυρτές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Σε αυτή την παράγραφο υπενθυμίζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για κυρτές συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I είναι ένα (κλειστό, ανοικτό ή ημιανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο) διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 5.1.1. Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.
(α) Η f λέγεται *κυρτή* αν

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \tag{5.1.1}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$. Η γεωμετρική σημασία του ορισμού είναι η εξής: η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f.
(β) Η f λέγεται *γνησίως κυρτή* αν

$$f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b) \tag{5.1.2}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$.
(γ) Η $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, γνησίως κοίλη) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Παρατήρηση 5.1.2. Ισοδύναμοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κυρτότητα της $f : I \to \mathbb{R}$ είναι οι εξής:
(α) Αν $a, b, x \in I$ και $a < x < b$, τότε

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{5.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{5.1.4}$$

(β) Αν $a, b \in I$ και αν $t, s > 0$ με $t + s = 1$, τότε

$$f(ta + sb) \leq tf(a) + sf(b). \tag{5.1.5}$$

Ορισμός 5.1.3 (επιγράφημα)**.** Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Το επιγράφημα της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Η επόμενη πρόταση μας επιτρέπει να μελετάμε κυρτές συναρτήσεις μέσω κυρτών συνόλων και αντίστροφα (η απόδειξη είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση):

Πρόταση 5.1.4. *Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

Πρόταση 5.1.5 (το λήμμα των τριών χορδών)**.** *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z$ στο I, τότε*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \tag{5.1.6}$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f(x) \leq \frac{z - x}{z - y}f(y) + \frac{x - y}{z - y}f(z). \tag{5.1.7}$$

Από αυτή την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$f(x) - f(y) \leq \frac{y - x}{z - y}f(y) + \frac{x - y}{z - y}f(z) = \frac{x - y}{z - y}[f(z) - f(y)], \tag{5.1.8}$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα στην (5.1.6). Ξεκινώντας πάλι από την (5.1.7), γράφουμε

$$f(x) - f(z) \leq \frac{z - x}{z - y}f(y) + \frac{x - z}{z - y}f(z) = -\frac{z - x}{z - y}[f(z) - f(y)], \tag{5.1.9}$$

απ' όπου προκύπτει η δεξιά ανισότητα στην (5.1.6). □

Άμεση συνέπεια του λήμματος των τριών χορδών είναι η εξής.

Πόρισμα 5.1.6. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z < w$ στο I, τότε*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w - z}. \tag{5.1.10}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.5 για τα σημεία $y < x < z$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{5.1.11}$$

Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 5.1.5 για τα σημεία $x < z < w$, παίρνουμε

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{5.1.12}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 5.1.7. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x \in (a,b)$, τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \textit{και} \quad f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{5.1.13}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$ (με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε για την αριστερή πλευρική παράγωγο $f'_-(x)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_x : (x,b) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_x(z) := \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{5.1.14}$$

Η g_x είναι αύξουσα: αν $x < z_1 < z_2 < b$, το λήμμα των τριών χορδών δείχνει ότι

$$g_x(z_1) = \frac{f(z_1)-f(x)}{z_1-x} \leq \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} = g_x(z_2). \tag{5.1.15}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε τυχόν $y \in (a,x)$, το λήμμα των τριών χορδών (για τα $y < x < z$) δείχνει ότι

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = g_x(z) \tag{5.1.16}$$

για κάθε $z \in (x,b)$, δηλαδή η g_x είναι κάτω φραγμένη. Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{z\to x^+} g_x(z) = \lim_{z\to x^+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{5.1.17}$$

Δηλαδή, υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$. □

Θεώρημα 5.1.8. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Οι πλευρικές παράγωγοι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b) και $f'_- \leq f'_+$ στο (a,b).*

Απόδειξη. Έστω $x < y$ στο (a,b). Για αρκετά μικρό θετικό h έχουμε $x \pm h, y \pm h \in (a,b)$ και $x + h < y - h$. Από την Πρόταση 5.1.5 και από το Λήμμα 5.1.6 βλέπουμε ότι

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(y-h)}{h} \leq \frac{f(y+h)-f(y)}{h}. \tag{5.1.18}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $h \to 0^+$, συμπεραίνουμε ότι

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y). \tag{5.1.19}$$

Οι ανισότητες $f'_-(x) \leq f'_-(y)$ και $f'_+(x) \leq f'_+(y)$ δείχνουν ότι οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b). Η αριστερή ανισότητα στην (5.1.20) δείχνει ότι $f'_- \leq f'_+$ στο (a,b). □

Η ύπαρξη των πλευρικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο εσωτερικό του I:

Θεώρημα 5.1.9. *Κάθε κυρτή συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x \in (a,b)$. Τότε, για μικρά $h > 0$ έχουμε $x + h, x - h \in (a,b)$ και

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h \to f(x) + f'_+(x) \cdot 0 = f(x) \tag{5.1.21}$$

όταν $h \to 0^+$, ενώ, τελείως ανάλογα,

$$f(x-h) = f(x) + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \cdot (-h) \to f(x) + f'_-(x) \cdot 0 = f(x) \tag{5.1.22}$$

όταν $h \to 0^+$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x. □

Στον Απειροστικό Λογισμό δίνεται συχνά ένας διαφορετικός ορισμός της κυρτότητας για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in (a,b)$, θεωρούμε την εφαπτομένη

$$u = f(x) + f'(x)(u - x) \tag{5.1.23}$$

του γραφήματος της f στο $(x, f(x))$ και λέμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x \in (a,b)$ και για κάθε $y \in (a,b)$ έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{5.1.24}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(y, f(y)) : a < y < b\}$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, αν περιοριστούμε στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οι «δύο ορισμοί» συμφωνούν.

Θεώρημα 5.1.10. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι κυρτή.*

(β) *Η f' είναι αύξουσα.*

(γ) *Για κάθε $x, y \in (a, b)$ ισχύει η*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{5.1.25}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f' = f'_- = f'_+$ στο (a, b). Από το Θεώρημα 5.1.8 οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες, άρα η f' είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f' είναι αύξουσα. Έστω $x, y \in (a, b)$. Αν $x < y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x, y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x, y)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x)$. Αφού $\xi > x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \geq f'(x)$. Αφού $y - x > 0$, έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{5.1.26}$$

Αν $x > y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y, x]$, βρίσκουμε $\xi \in (y, x)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x)$. Αφού $\xi < x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \leq f'(x)$. Αφού $y - x < 0$, έπεται πάλι ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{5.1.27}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι η (5.1.25) ισχύει για κάθε $x, y \in (a, b)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a, b) και έστω $0 < t < 1$. Θέτουμε $z = (1 - t)x + ty$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα ζευγάρια x, z και y, z, παίρνουμε

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z) \quad \text{και} \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z). \tag{5.1.28}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (1 - t)f(x) + tf(y) &\geq (1 - t)f(z) + tf(z) + f'(z)[(1 - t)(x - z) + t(y - z)] \\ &= f(z) + f'(z)[(1 - t)x + ty - z] \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $(1 - t)f(x) + tf(y) \geq f((1 - t)x + ty)$. □

Στην περίπτωση που η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b), η ισοδυναμία των (α) και (β) στο Θεώρημα 5.1.10 δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό της κυρτότητας μέσω της δεύτερης παραγώγου.

Θεώρημα 5.1.11. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Απόδειξη. Η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f'' \geq 0$ στο (a, b). Όμως, στο Θεώρημα 5.1.10 είδαμε ότι η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν η f είναι κυρτή. □

5.2 Κυρτές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Έστω C ένα μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* αν για κάθε $x_1, x_2 \in C$ και για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{5.2.1}$$

Παρατηρήστε ότι $(1-t)x_1 + tx_2 \in C$ από την κυρτότητα του C. Με επαγωγή αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 5.2.1 (ανισότητα του Jensen). *Έστω C ένα μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in C$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{5.2.2}$$

5.2α′ Συνέχεια κυρτών συναρτήσεων

Ορισμός 5.2.2. Έστω $f : C \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι *Lipschitz συνεχής* στο $D \subseteq C$ αν υπάρχει σταθερά $L > 0$ ώστε, για κάθε $y, z \in D$,

$$|f(y) - f(z)| \leq L\|y - z\|_2. \tag{5.2.3}$$

Κάθε σταθερά $L > 0$ που ικανοποιεί την (5.2.3) λέγεται *σταθερά Lipschitz* για την f στο D.

Η f λέγεται *τοπικά Lipschitz* στο $x \in C$ αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι Lipschitz συνεχής στο $B(x,r) \cap C$. Σε αυτό τον ορισμό, η σταθερά Lipschitz μπορεί να εξαρτάται από το x και από το r.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε, η f είναι τοπικά Lipschitz σε κάθε $x \in \mathrm{int}(C)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Θεωρούμε πρώτα $\delta > 0$ ώστε $\overline{B}(x,\delta) \subseteq C$ και βρίσκουμε αφινικά ανεξάρτητα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ στη σφαίρα $S(x,\delta) = \{y : \|y - x\|_2 = \delta\}$ ώστε το x να ανήκει στο εσωτερικό του simplex $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$. Αφού κάθε $y \in S$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_1, \ldots, x_n$, από την ανισότητα του Jensen έχουμε

$$f(y) \leq \alpha := \max\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \tag{5.2.4}$$

για κάθε $y \in S$. Ειδικότερα, $f(x) \leq \alpha$.

Επιλέγουμε $r > 0$ ώστε $B(x,2r) \subseteq \mathrm{int}(S)$. Για κάθε $y \in B(x,2r)$ έχουμε $2x - y \in B(x,2r)$ και $x = \frac{y+(2x-y)}{2}$. Από την κυρτότητα της f και από την (5.2.4) βλέπουμε ότι

$$f(x) \leq \frac{f(y) + f(2x-y)}{2} \leq \frac{f(y) + \alpha}{2}, \tag{5.2.5}$$

άρα

$$f(y) \geq 2f(x) - \alpha. \tag{5.2.6}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$|f(y)| \leq \gamma = \max\{\alpha, |2f(x) - \alpha|\} \tag{5.2.7}$$

για κάθε $y \in B(x, 2r)$.

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι Lipschitz με σταθερά $2\gamma/r$ στο x: θεωρούμε την ανοικτή μπάλα $B(x,r)$ και τυχόντα $y \neq z$ στην $B(x,r)$. Υπάρχει $w \in B(x,2r)$ ώστε $z \in (y,w)$ και $\|w - z\|_2 = r$. Θεωρώντας την f ως κυρτή συνάρτηση στην ευθεία των y, z, w και εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών, παίρνουμε

$$\frac{f(z) - f(y)}{\|y - z\|_2} \leq \frac{f(w) - f(z)}{\|w - z\|_2} \leq \frac{|f(w)| + |f(z)|}{r} \leq \frac{2\gamma}{r}. \tag{5.2.8}$$

Δηλαδή,

$$f(z) - f(y) \leq \frac{2\gamma}{r}\, \|y - z\|_2. \tag{5.2.9}$$

Λόγω συμμετρίας, έχουμε και την $f(y) - f(z) \leq \frac{2\gamma}{r}\, \|y - z\|_2$. Δηλαδή,

$$|f(z) - f(y)| \leq \frac{2\gamma}{r}\, \|y - z\|_2 \tag{5.2.10}$$

για κάθε $y, z \in B(x, r)$. □

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω C ένα μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Κάθε κυρτή συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο* $\mathrm{int}(C)$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν $r, M > 0$ ώστε

$$|f(y) - f(x)| \leq M\|y - x\|_2 \tag{5.2.11}$$

για κάθε $y \in B(x,r)$. Από την (5.2.11) ελέγχουμε εύκολα ότι αν $x_n \in C$ και $x_n \to x$ έχουμε τελικά $|f(x_n) - f(x)| \leq M\|x_n - x\|_2 \to 0$, δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x. □

5.2β΄ Χαρακτηρισμός μέσω υπερεπιπέδων στήριξης

Ορισμός 5.2.5 (υπερεπίπεδο στήριξης)**.** Έστω $f : C \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει *υπερεπίπεδο στήριξης* στο $x \in C$ αν υπάρχει αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$\alpha(y) = f(x) + \langle u, y - x \rangle, \tag{5.2.12}$$

όπου $u \in \mathbb{R}^n$, ώστε

$$f(y) \geq \alpha(y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle \tag{5.2.13}$$

για κάθε $y \in C$. Παρατηρήστε ότι $\alpha(x) = f(x)$. Θα λέμε επίσης ότι *η α στηρίζει την f στο x*.

Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό για κυρτές συναρτήσεις $f : C \to \mathbb{R}$, στην περίπτωση που το C είναι ανοικτό.

Θεώρημα 5.2.6. *Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η $f : C \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνο αν έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $x \in C$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο λήμματα. Το πρώτο είναι ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Λήμμα 5.2.7. *Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνο αν έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή και θεωρούμε τυχόν $x \in I$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$ και $f(x) = f(0) = 0$. Για τυχόν $y \neq 0$ έχουμε ότι $ty, -sy \in I$ αν τα $t, s > 0$ είναι αρκετά μικρά. Από την κυρτότητα της f έπεται ότι

$$0 = f(0) = (t+s) f\left(\frac{s}{t+s}(ty) + \frac{t}{t+s}(-sy)\right) \leq sf(ty) + tf(-sy). \tag{5.2.14}$$

Δηλαδή,

$$\frac{f(ty)}{t} \geq -\frac{f(-sy)}{s}. \tag{5.2.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ ώστε $f(ty) \geq ut$ για κάθε $t > 0$ με $ty \in I$ και $f(-sy) \geq u(-s)$ για κάθε $s > 0$ με $-sy \in I$. Αν ορίσουμε $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\alpha(r) = \frac{ur}{y}$, τότε η α είναι γραμμική και

$$f(z) \geq \alpha(z)$$

για κάθε $z \in I$. Αφού $\alpha(0) = 0 = f(0)$, η α ορίζει υπερεπίπεδο στήριξης για την f στο $x = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι: για κάθε $x \in I$ υπάρχει αφινική συνάρτηση $\alpha_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$\alpha_x(y) = f(x) + u_x(y - x), \tag{5.2.16}$$

όπου $u_x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$f(y) \geq \alpha_x(y) \tag{5.2.17}$$

για κάθε $y \in I$. Παρατηρήστε ότι

$$f(y) = g(y) := \max\{\alpha_x(y) : x \in I\} \tag{5.2.18}$$

για κάθε $y \in I$. Η (5.2.18) ισχύει διότι $f(y) \geq \alpha_x(y)$ για κάθε $x \in I$ από την (5.2.17), και $\alpha_y(y) = f(y)$. Έτσι, η $f \equiv g$ έχει τώρα γραφτεί στη μορφή supremum μιας οικογένειας αφινικών συναρτήσεων, απ' όπου έπεται εύκολα ότι είναι κυρτή (γενικότερα, το κατά σημείο supremum μιας οικογένειας κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση). □

Λήμμα 5.2.8. *Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Έστω $x \in \mathrm{int}(C)$ και έστω H αφινικός υπόχωρος με $x \in H$. Αν η $f|_H$ έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x που ορίζεται από την αφινική συνάρτηση $\alpha_H : H \to \mathbb{R}$, τότε η f έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x που ορίζεται από μια αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\alpha|_H = \alpha_H$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$ και $f(x) = f(0) = 0$. Τότε, ο H είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\dim(H) = k < n$. Θα δείξουμε ότι για $p = k+1, \ldots, n$ υπάρχουν υπόχωρος $H_p \supseteq H_{p-1}$ με $\dim(H_p) = p$ και γραμμική συνάρτηση $\alpha_p : H_p \to \mathbb{R}$ ώστε $\alpha_p|_H = \alpha_H$ και η α_p να «στηρίζει την f στο x». Στο βήμα $p = n$ εξασφαλίζουμε το ζητούμενο.

Έστω ότι έχουν οριστεί ο H_p και η α_p. Αν $p < n$ τότε μπορούμε να βρούμε $w \in C \setminus H_p$. Θέτουμε $H_{p+1} = \mathrm{span}(\{H_p, w\})$. Κάθε $u \in H_{p+1}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $u = v + tw$, όπου $v \in H_p$ και $t \in \mathbb{R}$. Θα επιλέξουμε $\rho \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε τη γραμμική συνάρτηση $\alpha_{p+1} : H_{p+1} \to \mathbb{R}$ με

$$\alpha_{p+1}(u) = \alpha_{p+1}(v + tw) = \alpha_p(v) + t\rho, \tag{5.2.19}$$

τότε η α_{p+1} στηρίζει την $f|_{C \cap H_{p+1}}$ στο x.

Ο περιορισμός για το ρ είναι ο εξής: αν το $v \in H_p$ και ο $t \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την $v + tw \in C$, τότε

$$\alpha_p(v) + t\rho \leq f(v + tw). \tag{5.2.20}$$

Ισοδύναμα, ζητάμε: αν $t > 0$, $v_1 \in H_p$ και $v_1 + tw \in C$ τότε

$$\rho \leq \frac{f(v_1 + tw) - \alpha_p(v_1)}{t}, \tag{5.2.21}$$

ενώ αν $s > 0$, $v_2 \in H_p$ και $v_2 - sw \in C$ τότε $\alpha_p(v_2) - s\rho \leq f(v_2 - sw)$, δηλαδή

$$\rho \geq \frac{\alpha_p(v_2) - f(v_2 - sw)}{s}. \tag{5.2.22}$$

Η επιλογή του ρ είναι δυνατή αν δείξουμε το εξής: αν $t, s > 0$, $v_1, v_2 \in H_p$ και $v_1 + tw, v_2 - sw \in C$, τότε

$$\frac{\alpha_p(v_2) - f(v_2 - sw)}{s} \leq \frac{f(v_1 + tw) - \alpha_p(v_1)}{t}. \tag{5.2.23}$$

Όμως, από την κυρτότητα της f και την γραμμικότητα της α_p έχουμε

$$\begin{aligned} sf(v_1+tw)+tf(v_2-sw) &\geq (t+s)f\left(\frac{sv_1+stw}{t+s}+\frac{tv_2-tsw}{t+s}\right) \\ &= (t+s)f\left(\frac{sv_1+tv_2}{t+s}\right)\geq (t+s)\alpha_p\left(\frac{sv_1+tv_2}{t+s}\right) \\ &= s\alpha_p(v_1)+t\alpha_p(v_2), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$s(f(v_1+tw)-\alpha_p(v_1))\geq t(\alpha_p(v_2)-f(v_2-sw)). \tag{5.2.24}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{v_2-sw\in C}\frac{\alpha_p(v_2)-f(v_2-sw)}{s}\leq\rho\leq\inf_{v_1+tw\in C}\frac{f(v_1+tw)-\alpha_p(v_1)}{t}, \tag{5.2.25}$$

και επιτρέπει το επαγωγικό βήμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.6. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή και θεωρούμε τυχόν $x\in C$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x=0$ και $f(x)=f(0)=0$.

Παίρνουμε τυχούσα ευθεία H_1 που περνάει από το 0. Ο περιορισμός της f στο $C\cap H_1$ είναι κυρτή συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.7 βρίσκουμε γραμμική συνάρτηση $\alpha_1 : H_1\to\mathbb{R}$ η οποία στηρίζει την $f|_{C\cap H_1}$ στο x. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.8 επεκτείνουμε την α_1 σε γραμμική συνάρτηση $\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ η οποία στηρίζει την f στο x.

Ο αντίστροφος ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί ακριβώς όπως αποδείχτηκε στη μονοδιάστατη περίπτωση (συμβουλευτείτε το δεύτερο μέρος της απόδειξης του Λήμματος 5.2.7). □

5.2γ΄ Διαφορισιμότητα κυρτών συναρτήσεων

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με την «ιδιαίτερη συμπεριφορά» των κυρτών συναρτήσεων ως προς την διαφορισιμότητα.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $f:C\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και έστω $x\in\mathrm{int}(C)$. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i=1,\dots,n$.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x αν υπάρχει $u\in\mathbb{R}^n$ ώστε

$$f(y)=f(x)+\langle u,y-x\rangle+o(\|y-x\|_2)$$

καθώς το $y\to x$: ο συμβολισμός $o(\|y-x\|_2)$ σημαίνει ότι

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)-\langle u,y-x\rangle}{\|y-x\|_2}=0. \tag{5.2.26}$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x, παίρνοντας $y = x + te_i$ και $t \to 0$, βλέπουμε ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχει η

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = u_i. \tag{5.2.27}$$

Με άλλα λόγια, $u = \nabla f(x)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Θέτουμε

$$u_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.2.28}$$

Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων έχουμε

$$f(x + te_i) = f(x) + u_i t + o(|t|), \quad t \to 0. \tag{5.2.29}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f(y) = f(x + y - x) &= f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x + n(y_i - x_i)e_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x + n(y_i - x_i)e_i) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i - x_i) + o(\|y - x\|_2) \\ &= f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2) \end{aligned}$$

όταν $y \to x$. Όμοια, αν το $y \in C$ είναι αρκετά κοντά στο x, έχουμε $2x - y \in C$ και $2x - y = x - (y - x)$, άρα

$$f(2x - y) \leq f(x) - \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2) \tag{5.2.30}$$

όταν $y \to x$. Αφού $2f(x) \leq f(2x - y) + f(y)$ από την κυρτότητα της f, παίρνουμε

$$f(y) \geq 2f(x) - f(2x - y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2) \tag{5.2.31}$$

όταν $y \to x$. Έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle + o(\|y - x\|_2), \tag{5.2.32}$$

δηλαδή η f είναι διαφορίσιμη στο x. □

Παρατήρηση 5.2.10. Αποδεικνύεται ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη (θεώρημα Reidemeister). Ακόμα ισχυρότερα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σχεδόν παντού (θεώρημα Alexandrov): για σχεδόν κάθε $x \in C$ (με την έννοια του Lebesgue) υπάρχει $n \times n$ πίνακας H, η Εσσιανή της f στο x, ώστε

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle H(y-x), y-x\rangle + o(\|y-x\|_2^2) \tag{5.2.33}$$

όταν $y \to x$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η διαφορισιμότητα μιας κυρτής συνάρτησης $f : C \to \mathbb{R}$ στο $x \in \mathrm{int}(C)$ είναι ισοδύναμη με τη μοναδικότητα του υπερεπιπέδου στήριξης της f στο x.

Θεώρημα 5.2.11. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και έστω $x \in \mathrm{int}(C)$. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν υπάρχει μοναδική αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $\alpha(x) = f(x)$ και $f(y) \geq \alpha(y)$ για κάθε $y \in C$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x. Έχουμε δει ότι υπάρχουν αφινικές συναρτήσεις οι οποίες στηρίζουν την f στο x. Έστω

$$\alpha(y) = f(x) + \langle u, y - x\rangle \tag{5.2.34}$$

κάποια από αυτές. Σταθεροποιούμε $i \leq n$ και παίρνουμε $y = x \pm te_i \in C$, $t > 0$. Έχουμε

$$f(x + te_i) \geq f(x) + tu_i, \tag{5.2.35}$$

οπότε αφαιρώντας το $f(x)$, διαιρώντας με t και αφήνοντας το $t \to 0^+$, βλέπουμε ότι

$$u_i \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \tag{5.2.36}$$

Με τον ίδιο τρόπο, θεωρώντας $y = x - te_i$, παίρνουμε

$$u_i \geq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-te_i) - f(x)}{-t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \tag{5.2.37}$$

Έπεται ότι $u = \nabla f(x)$, δηλαδή η α είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο x. Από το Θεώρημα 5.2.9 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε να μην υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Η συνάρτηση $g_i(t) = f(x + te_i)$ είναι κυρτή, άρα υπάρχουν οι «πλευρικές μερικές παράγωγοι» $\frac{\partial f}{\partial x_i}^-(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}^+(x)$ και ισχύει

$$b_i^- := \frac{\partial f}{\partial x_i}^-(x) < b_i^+ := \frac{\partial f}{\partial x_i}^+(x). \tag{5.2.38}$$

Αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $r \in \mathbb{R}$ με $b_i^- < r < b_i^+$, η αφινική συνάρτηση $\alpha_{i,r}(x + te_i) = f(x) + rt$ στηρίζει τον περιορισμό της f στο $C \cap \{x + te_i : t \in \mathbb{R}\}$ στο σημείο x. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.8 μπορούμε να επεκτείνουμε την $\alpha_{i,r}$ σε μια αφινική συνάρτηση $\alpha_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία στηρίζει την f στο x. Έτσι, η f έχει περισσότερα από ένα υπερεπίπεδα στήριξης στο x (τουλάχιστον ένα για κάθε $r \in (b_i^-, b_i^+)$). □

Τέλος, δείχνουμε ότι μια κυρτή συνάρτηση που είναι ορισμένη σε ανοικτό κυρτό σύνολο και είναι παντού διαφορίσιμη είναι αναγκαστικά C^1 (έχει συνεχείς μερικές παραγώγους).

Θεώρημα 5.2.12. *Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $f : C \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση διαφορίσιμη παντού στο C, τότε οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο C, δηλαδή η f ανήκει στην κλάση C^1.*

Απόδειξη. Έστω $x \in C$. Υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύουν τα εξής: $B(x, r) \subseteq C$ και υπάρχει $L > 0$ ώστε

$$|f(y) - f(z)| \leq L\|y - z\|_2 \tag{5.2.39}$$

για κάθε $y, z \in B(x, r)$.

Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_m) στο C με $x_m \to x$ και δείχνουμε ότι $\nabla f(x_m) \to \nabla f(x)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_m \in B(x, r)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $u_m = \nabla f(x_m)$ και $u = \nabla f(x)$. Δείχνουμε πρώτα ότι η (u_m) είναι φραγμένη: για κάθε m έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + \langle u_m, y - x \rangle, \quad y \in C. \tag{5.2.40}$$

Για τυχόν m θεωρούμε $y_m \in B(x, r)$ ώστε το $y_m - x_m$ να είναι ομόρροπο με το u_m. Χρησιμοποιώντας τις (5.2.39) και (5.2.40) βλέπουμε ότι

$$\|u_m\|_2 \|y_m - x_m\|_2 = \langle u_m, y_m - x_m \rangle \leq f(y_m) - f(x_m) \leq L\|y_m - x_m\|_2, \tag{5.2.41}$$

άρα

$$\|u_m\|_2 \leq L. \tag{5.2.42}$$

Θεωρούμε τώρα τυχούσα συγκλίνουσα υπακολουθία της (u_m): ας υποθέσουμε ότι $u_{k_m} \to v$. Για κάθε $y \in C$ και για κάθε m έχουμε

$$f(y) \geq f(x_{k_m}) + \langle u_{k_m}, y - x_{k_m} \rangle. \tag{5.2.43}$$

Παίρνοντας όριο, βλέπουμε ότι

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle. \tag{5.2.44}$$

Αφού το $y \in C$ ήταν τυχόν, η $\alpha(y) = f(x) + \langle v, y - x \rangle$ στηρίζει την f στο x. Όμως, η f είναι διαφορίσιμη στο x. Από το Θεώρημα 5.2.11 έπεται ότι

$$v = u = \nabla f(x). \tag{5.2.45}$$

Είδαμε ότι κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της φραγμένης ακολουθίας $(\nabla f(x_m))$ συγκλίνει στο $\nabla f(x)$. Έπεται ότι $\nabla f(x_m) \to \nabla f(x)$. □

5.2δ′ Επιγράφημα κυρτής συνάρτησης

Ορισμός 5.2.13. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το *επιγράφημα* της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{epi}(f) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \, t \geq f(y)\}. \tag{5.2.45}$$

Από τους ορισμούς της κυρτής συνάρτησης και του επιγραφήματος ελέγχουμε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το επιγράφημα $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό σύνολο. Παίρνοντας υπ′ όψιν και το Θεώρημα 5.2.4 έχουμε το εξής.

Θεώρημα 5.2.14. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το επιγράφημα $\mathrm{epi}(f)$ της f είναι κυρτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$.* □

Θεωρούμε τώρα μια κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι $(y, f(y)) \in \mathrm{bd}(\mathrm{epi}(f))$. Από το Θεώρημα 5.2.14, το $\mathrm{epi}(f)$ είναι κλειστό και κυρτό. Συνεπώς, υπάρχει υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$ το οποίο στηρίζει το $\mathrm{epi}(f)$ στο σημείο $(y, f(y))$. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $x \in \mathbb{R}^n$ και $b, \alpha \in \mathbb{R}$ με $(x, b) \neq (0, 0)$, ώστε

$$\langle x, z\rangle + bt \geq \alpha \tag{5.2.46}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \geq f(z)$, ενώ

$$\langle x, y\rangle + bf(y) = \alpha. \tag{5.2.47}$$

Παρατηρούμε ότι $b > 0$. Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $b < 0$: τότε, αφήνοντας το $t \to +\infty$ στην (5.2.46) καταλήγουμε σε άτοπο. Αν πάλι $b = 0$, τότε έχουμε $\langle x, z\rangle \geq \alpha$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $x = 0$, το οποίο επίσης οδηγεί σε άτοπο: τότε, θα είχαμε $(x, b) = (0, 0)$.

Αντικαθιστώντας τα x και α με τα x/b και α/b αντίστοιχα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b = 1$ στις (5.2.46) και (5.2.47). Αντικαθιστώντας εκ νέου το x με το $-x$, έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.2.15. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Υπάρχουν $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$\langle x, y\rangle + \alpha = f(y) \tag{5.2.48}$$

και

$$\langle x, z\rangle + \alpha \leq f(z) \tag{5.2.49}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. □

5.3 Συνάρτηση στήριξης και συνάρτηση στάθμης

5.3α΄ Συνάρτηση στήριξης

Έστω K μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μη μηδενικό $y \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε την απεικόνιση $x \to \langle x, y\rangle$. Αφού το K είναι συμπαγές, ορίζονται οι $\alpha_y = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\}$ και $\beta_y = \min\{\langle x, y\rangle : x \in K\}$. Τα υπερεπίπεδα

$$H(y, \alpha_y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \alpha_y\} \tag{5.3.1}$$

και

$$H(y, \beta_y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \beta_y\} \tag{5.3.2}$$

στηρίζουν το K. Ορίζουμε μια συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ απεικονίζοντας κάθε y στον α_y.

Ορισμός 5.3.1 (συνάρτηση στήριξης)**.** Έστω K μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *συνάρτηση στήριξης* (support function) $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\}. \tag{5.3.3}$$

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τον κύβο $Q_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1 \text{ για κάθε } i \leq n\}$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in Q_n$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \max_{i\leq n} |x_i| \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|, \tag{5.3.4}$$

άρα $h_{Q_n}(y) \leq \sum_{i=1}^n |y_i|$. Επιπλέον, αν $x_i = \mathrm{sgn}(y_i)$, τότε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q_n$ και

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(y_i) y_i = \sum_{i=1}^n |y_i|. \tag{5.3.5}$$

Συνεπώς,

$$h_{Q_n}(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|. \tag{5.3.6}$$

(β) Θεωρούμε το $K = B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$. (Το K είναι πολύτοπο με κορυφές τα $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Για $n = 2$ είναι ρόμβος, για $n = 3$ οκτάεδρο). Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \max_{i\leq n} |y_i| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{5.3.7}$$

άρα $h_K(y) \leq \max_{i\leq n} |y_i|$. Επιπλέον, αν $\max |y_i| = |y_{i_0}|$ και $x = (\mathrm{sgn} y_{i_0}) e_{i_0}$, τότε $x \in K$ και $\langle y, x\rangle = |y_{i_0}|$. Άρα,

$$h_K(y) = \max_{i\leq n} |y_i|. \tag{5.3.8}$$

(γ) Έστω $1 < p < \infty$ και έστω q ο *συζυγής εκθέτης* του p, ο οποίος ορίζεται από την $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (παρατηρήστε ότι $1 < q < \infty$ και $p(q-1) = q$). Θεωρούμε το $K = B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1\}$. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ και έστω $\|y\|_q^q := \sum_{i=1}^n |y_i|^q$. Για κάθε $x \in K$, η ανισότητα του Hölder δείχνει ότι

$$\langle x, y\rangle \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \|y\|_q, \tag{5.3.9}$$

άρα $h_K(y) \leq \|y\|_q$. Αν $y \neq 0$ και αν ορίσουμε $x = (x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_i = |y_i|^{q-1}\mathrm{sgn}(y_i)/\|y\|_q^{q/p}$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\|y\|_q^{q/p}} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q \tag{5.3.10}$$

και

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^{p(q-1)} = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1, \tag{5.3.11}$$

δηλαδή, $x \in K$. Άρα,

$$h_K(y) = \max_{x\in K} \langle x, y\rangle = \|y\|_q. \tag{5.3.12}$$

Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στήριξης περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.3.2. (α) *Έστω K μη κενό κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η h_K είναι κυρτή και θετικά ομογενής.*
(β) *$h_{\lambda K} = \lambda h_K$ για κάθε $\lambda > 0$.*
(γ) *Αν K_1 και K_2 είναι μη κενά κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε $h_{K_1+K_2} = h_{K_1} + h_{K_2}$.*

Απόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι η h_K είναι υπογραμμική. Έστω $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle \leq h_K(y_1) + h_K(y_2). \tag{5.3.13}$$

Άρα,

$$h_K(y_1 + y_2) = \max_{x\in K} \langle x, y_1 + y_2\rangle \leq h_K(y_1) + h_K(y_2). \tag{5.3.14}$$

Αν $y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda > 0$, τότε

$$h_K(\lambda y) = \max_{x\in K}\langle x, \lambda y\rangle = \max_{x\in K}\lambda\langle x, y\rangle = \lambda\max_{x\in K}\langle x, y\rangle = \lambda h_K(y), \tag{5.3.15}$$

άρα η h_K είναι θετικά ομογενής. Αφού η h_K είναι υπογραμμική και θετικά ομογενής, συμπεραίνουμε ότι η h_K είναι κυρτή.

(β) Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$h_{\lambda K}(y) = \max_{x\in \lambda K}\langle x, y\rangle = \max_{x\in K}\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\max_{x\in K}\langle x, y\rangle = \lambda h_K(y), \tag{5.3.16}$$

άρα $h_{\lambda K} = \lambda h_K$.

(γ) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} h_{K_1+K_2}(y) &= \max\{\langle y, x_1 + x_2\rangle : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\} \\ &= \max\{\langle y, x_1\rangle + \langle y, x_2\rangle : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\} \\ &= \max\{\langle y, x_1\rangle : x_1 \in K_1\} + \max\{\langle y, x_2\rangle : x_2 \in K_2\} \\ &= h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y). \end{aligned}$$

Άρα, $h_{K_1+K_2} = h_{K_1} + h_{K_2}$. □

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η συνάρτηση στήριξης του K προσδιορίζει το K. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.3.3. *Αν K_1, K_2 είναι μη κενά, κυρτά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε $K_1 \subseteq K_2$ αν και μόνο αν $h_{K_1} \leq h_{K_2}$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης βλέπουμε εύκολα ότι αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε

$$h_{K_1}(y) = \max_{x\in K_1}\langle x, y\rangle \leq \max_{x\in K_2}\langle x, y\rangle = h_{K_2}(y) \tag{5.3.17}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $h_{K_1} \leq h_{K_2}$ αλλά υπάρχει $x \in K_1$ με $x \notin K_2$. Τότε τα x, K_2 χωρίζονται αυστηρά, δηλαδή υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\langle z, y\rangle < \langle x, y\rangle$ για κάθε $z \in K_2$. Τότε,

$$h_{K_2}(y) = \max\{\langle z, y\rangle : z \in K_2\} < \langle x, y\rangle \leq h_{K_1}(y), \tag{5.3.18}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πόρισμα 5.3.4. *Αν K είναι μη κενό κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε $0 \in K$ αν και μόνο αν $h_K \geq 0$.*

Απόδειξη. $h_{\{0\}} = 0$. □

Πόρισμα 5.3.5. *Η συνάρτηση στήριξης καθορίζει το σύνολο K. Δηλαδή, αν K_1, K_2 είναι μη κενά κυρτά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $h_{K_1} = h_{K_2}$, τότε $K_1 = K_2$.* □

Στην ειδική περίπτωση που το K είναι συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στήριξης αποδεικνύουν το εξής.

Πρόταση 5.3.6. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση στήριξης h_K είναι νόρμα, και δίνεται από την*

$$h_K(y) = \max_{x\in K} |\langle x, y\rangle| \tag{5.3.19}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Αφού $0 \in K$ έχουμε $h_K(y) \geq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Από τη συμμετρία του K και το γεγονός ότι έχει μη κενό εσωτερικό, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(0, r) \subset K$ (άσκηση). Έπεται ότι: αν $y \neq 0$ τότε

$$h_K(y) \geq \max_{x\in B(0,r)} \langle x, y\rangle = r\|y\|_2 > 0. \tag{5.3.20}$$

Επίσης,

$$h_K(-y) = \max_{x\in K}\langle x, -y\rangle = \max_{x\in K}\langle -x, -y\rangle = \max_{x\in K}\langle x, y\rangle = h_K(y). \tag{5.3.21}$$

Αφού η h_K είναι θετικά ομογενής, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$h_K(ty) = |t|h_K(y) \tag{5.3.22}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$. Η τριγωνική ανισότητα έχει ήδη αποδειχθεί, άρα η h_K είναι νόρμα.

Τέλος, πάλι από τη συμμετρία του K, έχουμε $\pm\langle x, y\rangle = \langle \pm x, y\rangle \leq h_K(y)$ για κάθε $x \in K$, οπότε

$$\max_{x\in K} |\langle x, y\rangle| \leq h_K(y) \tag{5.3.23}$$

κι αυτό αποδεικνύει την (5.3.19). □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της υποπαραγράφου δίνει ένα χαρακτηρισμό της κλάσης των συναρτήσεων στήριξης: μια συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση στήριξης κάποιου μη κενού συμπαγούς κυρτού συνόλου αν και μόνο αν είναι κυρτή και θετικά ομογενής.

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή και θετικά ομογενής. Τότε υπάρχει (μοναδικό) κυρτό συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ ώστε $h_K = h$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq h(y) \quad \text{για κάθε} \quad y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{5.3.24}$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq h(y)\}$ είναι ημίχωρος (ή ολόκληρος ο $\mathbb{R}^n$). Συνεπώς, το K είναι κυρτό ως τομή κυρτών συνόλων.

Επειδή η h είναι συνεχής, το K είναι κλειστό. Επιπλέον, είναι συμπαγές, αφού για κάθε $x \in K$ και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$-h(-e_i) \leq -\langle -e_i, x\rangle = x_i = \langle e_i, x\rangle \leq h(e_i). \tag{5.3.25}$$

Θεωρούμε τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$. Αφού η h είναι κυρτή, από το Θεώρημα 5.2.15 υπάρχουν $x \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle x, y\rangle + \alpha = h(y) \tag{5.3.26}$$

και

$$\langle x, z\rangle + \alpha \leq h(z) \tag{5.3.27}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Αφού η h είναι θετικά ομογενής, από την (5.3.27) παίρνουμε

$$\alpha \leq t\,(h(z) - \langle x, z\rangle) \tag{5.3.28}$$

για κάθε $t > 0$. Σταθεροποιώντας z (για παράδειγμα το y) και αφήνοντας το $t \to 0^+$, βλέπουμε ότι $\alpha \leq 0$. Αφήνοντας τώρα το $t \to +\infty$ στην (5.3.28), βλέπουμε ότι

$$\langle x, z\rangle \leq h(z) \tag{5.3.29}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $x \in K$. Ειδικότερα, το K είναι μη κενό.

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha < 0$. Επιστρέφοντας στην (5.3.26) παίρνουμε

$$\langle x, y\rangle > \langle x, y\rangle + \alpha = h(y), \tag{5.3.30}$$

το οποίο είναι άτοπο από την (5.3.29). Άρα, $\alpha = 0$. Όμως τότε, οι (5.3.26) και (5.3.27) δείχνουν ότι

$$h_K(y) = \max_{z \in K}\langle z, y\rangle = \langle x, y\rangle = h(y). \tag{5.3.31}$$

Το y ήταν τυχόν, άρα $h_K = h$.

Αν M είναι ένα άλλο μη κενό, κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $h_M = h$, τότε $h_K = h_M$ και το Πόρισμα 5.3.5 δείχνει ότι $M = K$. Δηλαδή, το K είναι το μοναδικό συμπαγές κυρτό σύνολο που έχει ως συνάρτηση στήριξης την h. $\square$

5.3β′ Συνάρτηση στάθμης

Έστω L κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(L)$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda > 0$ ώστε $x \in \lambda L$: αν $r > 0$ με $B(0,r) \subseteq L$ και αν $\lambda > \|x\|_2/r$, έχουμε $x \in \lambda L$.

Ορισμός 5.3.8 (συνάρτηση στάθμης)**.** Έστω L κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(L)$. Η *συνάρτηση στάθμης* (gauge function) $g_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του L ορίζεται από την

$$g_L(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda L\}. \tag{5.3.32}$$

Παρατήρηση 5.3.9. (α) Αφού το L είναι κυρτό, αν $x \in \lambda L$ τότε $x \in \mu L$ για κάθε $\mu > \lambda$. Πράγματι, $x = \lambda z$ για κάποιο $z \in L$, άρα

$$x = \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} z + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) 0 \right) \in \mu L. \tag{5.3.33}$$

Συνεπώς, το σύνολο $\Lambda = \{\lambda > 0 : x \in \lambda L\}$ έχει τη μορφή $(a, +\infty)$ ή $[a, +\infty)$, όπου $a \geq 0$.

Αν $a > 0$, τότε το σύνολο Λ είναι κλειστό: έστω $\lambda_n \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ με $\lambda_n \to \lambda$. Υπάρχουν $z_n \in L$ ώστε $x = \lambda_n z_n$. Αφού $\lambda \geq a > 0$, ισχύει $z_n \to x/\lambda$. Αφού το L είναι κλειστό, ισχύει $x/\lambda \in L$, άρα $\lambda \in \Lambda$.

Συνεπώς, το Λ έχει τη μορφή $(0, +\infty)$ ή $[a, +\infty)$, $a > 0$.

(β) Από τον ορισμό βλέπουμε ότι αν L_1, L_2 είναι δύο κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που το εσωτερικό τους περιέχει το 0, τότε $L_1 \subseteq L_2$ αν και μόνο αν $g_{L_2} \leq g_{L_1}$ (δείτε και την απόδειξη της Πρότασης 5.3.11 παρακάτω).

Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στάθμης περιγράφονται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.3.10. *Έστω L κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(L)$. Τότε:*

(α) *$g_L(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

(β) *$g_L(x) = 0$ αν και μόνο αν $\lambda x \in L$ για κάθε $\lambda > 0$. Ειδικότερα, $g_L(0) = 0$.*

(γ) *$g_{\mu L} = \frac{1}{\mu} g_L$ για κάθε $\mu > 0$.*

(δ) *$L = \{x \in \mathbb{R}^n : g_L(x) \leq 1\}$.*

(ε) *Γενικότερα, $\mu L = \{x \in \mathbb{R}^n : g_L(x) \leq \mu\}$ για κάθε $\mu > 0$.*

(στ) *Η g_L είναι θετικά ομογενής.*

(ζ) *Η g_L είναι κυρτή.*

Απόδειξη. (α) Προφανές από τον ορισμό της g_L.

(β) Έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 5.3.9.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$g_{\mu L}(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \mu L\} = \inf\left\{\frac{\rho}{\mu} > 0 : x \in \rho L\right\} = \frac{1}{\mu} g_L(x). \tag{5.3.34}$$

(δ)-(ε) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $g_L(x) \leq \mu$. Αν $g_L(x) = 0$, τότε $\lambda x \in L$ για κάθε $\lambda > 0$, άρα $x \in \mu L$. Αν $g_L(x) > 0$, από την Παρατήρηση 5.3.9 έπεται ότι το σύνολο Λ έχει τη μορφή $[a, +\infty)$, όπου $a = g_L(x)$. Έπεται ότι $x \in g_L(x)L \subseteq \mu L$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής από τον ορισμό της g_L.

(στ) Για κάθε $\mu > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} g_L(\mu x) &= \inf\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda L\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in (\lambda/\mu)L\} \\ &= \inf\{\rho\mu > 0 : x \in \rho L\} = \mu g_L(x). \end{aligned}$$

(ζ) Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ και έστω $t \in (0,1)$. Θα δείξουμε ότι

$$g_L((1-t)x + ty) \leq (1-t)g_L(x) + tg_L(y). \tag{5.3.35}$$

Αν το δεξιό μέλος είναι ίσο με 0, τότε $x \in \lambda L$ και $y \in \lambda L$ για κάθε $\lambda > 0$. Άρα, $(1-t)x + ty \in \lambda L$ για κάθε $\lambda > 0$, απ' όπου έπεται ότι $g_L(tx + (1-t)y) = 0$.

Έστω ότι το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι θετικό. Υπάρχουν $\lambda_n > 0$, $\mu_n > 0$ ώστε $x \in \lambda_n L$, $y \in \mu_n L$ και

$$\lambda_n \to g_L(x), \quad \mu_n \to g_L(y). \tag{5.3.36}$$

Τότε, $(1-t)x + ty \in ((1-t)\lambda_n + t\mu_n)L$, δηλαδή

$$g_L((1-t)x + ty) \leq (1-t)\lambda_n + t\mu_n. \tag{5.3.37}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την (5.3.35). □

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η συνάρτηση στάθμης g_L προσδιορίζει το L.

Πρόταση 5.3.11. *Αν K, L κυρτά κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K) \cap \mathrm{int}(L)$ και $g_K = g_L$, τότε $K = L$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.10(δ) έχουμε

$$K = \{x : g_K(x) \leq 1\} = \{x : g_L(x) \leq 1\} = L, \tag{5.3.38}$$

αφού $g_K(x) \leq 1$ αν και μόνο αν $g_L(x) \leq 1$. □

Στην ειδική περίπτωση που το K είναι συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στάθμης αποδεικνύουν το εξής.

Πρόταση 5.3.12. *Έστω L συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση στάθμης g_L είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αφού η g_L είναι μη αρνητική, θετικά ομογενής και κυρτή, αρκεί να δείξουμε ότι $g_L(-x) = g_L(x)$ και ότι $g_L(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από τη συμμετρία του L ως προς το 0 και ο δεύτερος από το γεγονός ότι το L περιέχει τη μπάλα $B(0, r)$ για κάποιον $r > 0$. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της υποπαραγράφου δίνει ένα χαρακτηρισμό της κλάσης των συναρτήσεων στάθμης: μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση στάθμης κάποιου κλειστού κυρτού συνόλου που το εσωτερικό του περιέχει το 0 αν και μόνο αν είναι μη αρνητική, κυρτή και θετικά ομογενής.

Θεώρημα 5.3.13. *Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μη αρνητική θετικά ομογενής κυρτή συνάρτηση. Θέτουμε $L = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 1\}$. Τότε το L είναι κυρτό και κλειστό, $0 \in \mathrm{int}(L)$ και $g = g_L$.*

Απόδειξη. Το L είναι κυρτό ως σύνολο στάθμης κυρτής συνάρτησης. Επίσης είναι κλειστό, αφού η g είναι συνεχής.

Αφού η g είναι θετικά ομογενής, ισχύει $g(0) = 0$ και η συνέχεια της g συνεπάγεται ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 1\}$ είναι ανοικτό. Άρα, $0 \in \mathrm{int}(L)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση στάθμης g_L του L. Από το Θεώρημα 5.3.10(δ) έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 1\} = L = \{x \in \mathbb{R}^n : g_L(x) \leq 1\}. \tag{5.3.39}$$

Από αυτή την ισότητα θα εξαχθεί η ισότητα των g και g_L.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Αν $g(x) = 0$, τότε για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $g(\lambda x) = 0 \leq 1$, άρα $\lambda x \in L$. Έπεται ότι $g_L(x) = 0$. Αν $g_L(x) = 0$, τότε $\lambda x \in L$ για κάθε $\lambda > 0$, άρα $g_L(\lambda x) \leq 1$ για κάθε $\lambda > 0$. Έπεται ότι $\lambda g(x) = g(\lambda x) \leq 1$ για κάθε $\lambda > 0$, συνεπώς $g(x) = 0$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $g(x) > 0$ και $g_L(x) > 0$. Τότε $g(x/g(x)) = 1$, οπότε

$$\frac{g_L(x)}{g(x)} = g_L\left(\frac{x}{g(x)}\right) \leq 1. \tag{5.3.40}$$

Επίσης, έχουμε $x/g_L(x) \in L$ οπότε

$$\frac{g(x)}{g_L(x)} = g\left(\frac{x}{g_L(x)}\right) \leq 1. \tag{5.3.41}$$

Άρα, $g(x) = g_L(x)$. □

5.3γ΄ Σχέση των δύο συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας την έννοια του πολικού ενός κυρτού συνόλου μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση στήριξης και η συνάρτηση στάθμης ικανοποιούν την εξής σχέση δυϊσμού.

Θεώρημα 5.3.14. *Έστω K κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Τότε $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$ και $h_K = g_{K^\circ}$. Αντίστροφα, έστω L κυρτό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(L)$. Τότε το L° είναι συμπαγές και ισχύει $h_{L^\circ} = g_L$.*

Απόδειξη. Αφού το K είναι συμπαγές κυρτό και $0 \in K$, η h_K ορίζεται καλά και παίρνει μη αρνητικές τιμές. Το K° είναι κλειστό κυρτό και έχουμε δείξει ότι αν το K είναι φραγμένο τότε $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$. Άρα, η g_{K° ορίζεται καλά. Παρατηρούμε ότι

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : h_K(y) \leq 1\}. \tag{5.3.42}$$

Από το Θεώρημα 5.3.13 (με $g = h_K \geq 0$) έπεται ότι $h_K = g_{K^\circ}$.

Αντίστροφα, έστω L κυρτό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(L)$. Από την τελευταία υπόθεση συμπεραίνουμε ότι το L° είναι φραγμένο. Το L° είναι κυρτό και κλειστό (άρα, συμπαγές) και $0 \in L^\circ$. Επομένως, η h_{L° ορίζεται καλά και είναι μη αρνητική. Από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος έχουμε

$$h_{L^\circ} = g_{L^{\circ\circ}}. \tag{5.3.43}$$

Όμως,

$$L^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}}(L \cup \{0\}) = \overline{L} = L. \tag{5.3.44}$$

Άρα, $h_{L^\circ} = g_L$. □

Πόρισμα 5.3.15. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε, το K° είναι κυρτό σώμα με $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$ και*

$$h_K = g_{K^\circ}, \quad h_{K^\circ} = g_K. \tag{5.3.45}$$

Ειδικότερα, αν το K είναι συμμετρικό ως προς το 0 τότε οι h_K, g_K είναι νόρμες και ικανοποιούν την (5.3.45). □

Παράδειγμα

Για κάθε $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}. \tag{5.3.46}$$

Για $p = \infty$ θέτουμε

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|. \tag{5.3.47}$$

Για κάθε $p \in [1, \infty]$ η $\|\cdot\|_p$ είναι μη αρνητική, κυρτή και θετικά ομογενής. Άρα, είναι συνάρτηση στάθμης του συνόλου

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}. \tag{5.3.48}$$

Για κάθε p, το B_p^n είναι κυρτό, συμμετρικό ως προς το 0, συμπαγές (περιέχεται στον κύβο B_∞^n) και $0 \in \mathrm{int}(B_p^n)$. Άρα, η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα.

Από το Θεώρημα 5.3.14 έχουμε $h_{B_p^n} = g_{(B_p^n)^\circ}$. Στην υποπαράγραφο 5.3(α′) είδαμε ότι $h_{B_p^n} = \|\cdot\|_q$ όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Δηλαδή, $g_{(B_p^n)^\circ} = g_{B_q^n}$. Από την Πρόταση 5.3.11 συμπεραίνουμε ότι

$$(B_p^n)^\circ = B_q^n \tag{5.3.49}$$

για κάθε $p \in (1,\infty)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (και $q = 1$ αν $p = \infty$, $q = \infty$ αν $p = 1$).

5.4 Ασκήσεις

1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

2. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση και έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει αφινική συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Έστω V μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : V \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν C είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του V τότε η f είναι Lipschitz συνεχής στο C.

4. Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \to \mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

για κάθε $x, y \in C$.

(β) Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x \in C$ και για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i u_j \geq 0.$$

5. Έστω C κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x, C)$.

(α) Έστω $x \notin C$. Δείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n \setminus C$.

6. Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αν $C = \mathrm{conv}(A \cup B)$ δείξτε ότι

$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ δείξτε ότι
$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

8. Έστω $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή, θετικά ομογενής συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(i) $h'(u; u) = h(u)$ και $h'(u; -u) = -h(u)$,

(ii) $h'(u; y) \leq h(y)$,

όπου $h'(x; u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u.

9. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $u \neq 0$. Ορίζουμε
$$L = \{x \in C : h_C(u) = \langle x, u\rangle\}.$$
Δείξτε ότι:

(i) $h'_C(u; y) = h_L(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Η h_C είναι διαφορίσιμη στο u αν και μόνο αν το L είναι μονοσύνολο.

10. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η h_C είναι γραμμική αν και μόνο αν το C είναι μονοσύνολο.

11. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το *υποδιαφορικό* της f στο x είναι το σύνολο
$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle \ \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}^n\}.$$
(α) Δείξτε ότι το $\partial f(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό.

(β) Δείξτε ότι
$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u\rangle \leq f'(x; u) \text{ για κάθε } u \neq 0\},$$
όπου $f'(x; u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u.

(γ) Δείξτε ότι: αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

12. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\partial h_C(0) = C$.

Κεφάλαιο 6

Ακραία σημεία

6.1 Ακραία και εκτεθειμένα σημεία

Ορισμός 6.1.1 (ακραία σημεία – έδρες). (α) Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $x \in C$ λέγεται *ακραίο σημείο* του C αν δεν περιέχεται στο εσωτερικό κάποιου ευθύγραμμου τμήματος του οποίου τα άκρα ανήκουν στο C.

Για να ελέγξουμε ότι το $x \in C$ είναι ακραίο σημείο του C αρκεί, ισοδύναμα, να ελέγξουμε το εξής: αν $y, z \in C$ και $x = (1-t)y+tz$ για κάποιο $0 < t < 1$, τότε $y = z = x$ (παρατηρήστε ότι αν $y \neq z$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[y, z]$ είναι μη τετριμμένο και για κάθε $0 < t < 1$ το $(1-t)y + tz$ είναι εσωτερικό του σημείο).

Γράφουμε $\mathrm{ext}(C)$ για το σύνολο των ακραίων σημείων του C. Παραδείγματα: τα ακραία σημεία ενός δίσκου είναι όλα τα σημεία της περιφέρειάς του και τα ακραία σημεία ενός κύβου είναι οι κορυφές του. Ένα κλειστό κυρτό σύνολο μπορεί να μην έχει ακραία σημεία: αν θεωρήσετε οποιονδήποτε κλειστό ημίχωρο $\overline{G}$ τότε $\mathrm{ext}(\overline{G}) = \emptyset$.

(β) Γενικότερα, ένα κυρτό υποσύνολο $F \subseteq C$ λέγεται *έδρα* του C αν ισχύει το εξής: αν $y, z \in C$ και $x = (1-t)y + tz$ για κάποιο $0 < t < 1$, τότε $y, z \in F$. Μια έδρα F του C λέγεται *k-έδρα* αν $\dim(\mathrm{aff}(F)) = k$. Από τους ορισμούς είναι φανερό ότι $x \in \mathrm{ext}(C)$ αν και μόνο αν το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι 0-έδρα του C.

Λήμμα 6.1.2. *Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $x \in C$ είναι ακραίο σημείο του C αν και μόνο αν το σύνολο $C \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x \in \mathrm{ext}(C)$. Έστω $y, z \in C \setminus \{x\}$ και έστω $t \in (0, 1)$. Από την κυρτότητα του C έχουμε $(1-t)y+tz \in C$. Από την άλλη πλευρά, $(1-t)y+tz \neq x$, αφού το x είναι ακραίο σημείο του C και $y, z \neq x$. Έπεται ότι $(1-t)y + tz \in C \setminus \{x\}$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $C \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $C \setminus \{x\}$ είναι κυρτό. Αν $x \notin \mathrm{ext}(C)$, τότε υπάρχουν $y, z \in C$ ώστε το x να είναι εσωτερικό σημείο του $[y, z]$. Όμως τότε, $y, z \in C \setminus \{x\}$, και από την υπόθεση παίρνουμε $x \in [y, z] \subseteq C \setminus \{x\}$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Ορισμός 6.1.3 (εκτεθειμένα σημεία). Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $x \in C$ λέγεται *εκτεθειμένο σημείο* του C αν υπάρχει υπερεπίπεδο H ώστε το H να στηρίζει το C και το x να είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C και H: δηλαδή, $C \cap H = \{x\}$. Γράφουμε $\exp(C)$ για το σύνολο των εκτεθειμένων σημείων του C.

Λήμμα 6.1.4. *Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Κάθε εκτεθειμένο σημείο του C είναι ακραίο σημείο του C. Δηλαδή,*

$$\exp(C) \subseteq \operatorname{ext}(C). \tag{6.1.1}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \exp(C)$. Τότε, υπάρχουν $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle x, u\rangle = \alpha \tag{6.1.2}$$

και

$$\langle w, u\rangle < \alpha \quad \text{για κάθε} \quad w \in C \setminus \{x\}. \tag{6.1.3}$$

Υποθέτουμε ότι $x = (1-t)y + tz$ για κάποια $y, z \in C$ και $0 < t < 1$. Τότε,

$$\alpha = \langle x, u\rangle = (1-t)\langle y, u\rangle + t\langle z, u\rangle \leq (1-t)\alpha + t\alpha = \alpha. \tag{6.1.4}$$

Αφού $0 < t < 1$, αυτό σημαίνει ότι $\langle y, u\rangle = \langle z, u\rangle = \alpha$. Από την (6.1.3) έπεται ότι $y = z = x$. Δηλαδή, $x \in \operatorname{ext}(C)$. $\square$

Σημείωση: Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Θεωρήστε τα σύνολα

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = 1 + \sqrt{1-x^2}\} \\ C_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = -1 - \sqrt{1-x^2}\}, \end{aligned}$$

και την κυρτή τους θήκη $C = \operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)$. Τότε, $(\pm 1, \pm 1) \in \operatorname{ext}(C) \setminus \exp(C)$. Θα δείξουμε όμως ότι στην περίπτωση ενός κυρτού συμπαγούς συνόλου, το σύνολο των εκτεθειμένων σημείων είναι πυκνό στο σύνολο των ακραίων σημείων.

Θεώρημα 6.1.5 (Straszewicz). *Έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\overline{\exp(K)} \supseteq \operatorname{ext}(K). \tag{6.1.5}$$

Σημείωση: Το σύνολο των ακραίων σημείων ενός συμπαγούς κυρτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) μπορεί να μην είναι κλειστό: για παράδειγμα θεωρήστε το δίσκο $D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ και το συμπαγές κυρτό σύνολο $K = \operatorname{conv}(D \cup (0, 0, \pm 1))$. Δείξτε ότι το $\operatorname{ext}(K) = \exp(K)$ δεν είναι κλειστό σύνολο. Συνεπώς, ο εγκλεισμός $\overline{\exp(K)} \supseteq \operatorname{ext}(K)$ του Θεωρήματος 6.1.5 δεν μπορεί να αντικατασταθεί με ισότητα.

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια σειρά από λήμματα που παρουσιάζουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον. Το πρώτο δίνει έναν χαρακτηρισμό των ακραίων σημείων ενός συμπαγούς κυρτού συνόλου.

Λήμμα 6.1.6. *Έστω K ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $x \in K$ είναι ακραίο σημείο του K αν και μόνο αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει ανοικτός ημίχωρος G του $\mathbb{R}^n$ ώστε $x \in G$ και $K \cap G \subseteq B(x, r)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x \in \mathrm{ext}(K)$ και ότι $r > 0$. Τότε, το $K \setminus B(x, r)$ είναι συμπαγές, άρα το σύνολο

$$L = \mathrm{conv}(K \setminus B(x, r)) \tag{6.1.6}$$

είναι κυρτό και συμπαγές.

Παρατηρήστε ότι $x \notin L$. Αλλιώς, αφού $x \in \mathrm{ext}(K)$, από το Λήμμα 6.1.2 θα είχαμε

$$x \in \mathrm{conv}(K \setminus B(x, r)) \subseteq \mathrm{conv}(K \setminus \{x\}) = K \setminus \{x\}, \tag{6.1.7}$$

το οποίο είναι άτοπο. Αφού $x \notin L$, τα L και x διαχωρίζονται αυστηρά. Συνεπώς, υπάρχει ανοικτός ημίχωρος G ώστε $x \in G$ και $\overline{G} \cap L = \emptyset$. Τότε,

$$(K \setminus B(x, r)) \cap \overline{G} = \emptyset, \quad \text{άρα} \quad K \setminus B(x, r) \subseteq G^c. \tag{6.1.8}$$

Έπεται ότι $K \cap G \subseteq B(x, r)$.

Αντίστροφα: έστω ότι $x \notin \mathrm{ext}(K)$. Τότε, υπάρχουν $y \neq z$ στο K ώστε $x \in (y, z)$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε τα y και z να μην ανήκουν στην $B(x, r)$.

Από την υπόθεση, υπάρχει ανοικτός ημίχωρος G με την ιδιότητα: $x \in G$ και $K \cap G \subseteq B(x, r)$. Αφού $y, z \notin B(x, r)$, έχουμε $y, z \in G^c$. Όμως, το G^c είναι κυρτό (κλειστός ημίχωρος). Άρα, $[y, z] \subseteq G^c$. Δηλαδή, $x \in G^c$, το οποίο είναι άτοπο. □

Το επόμενο λήμμα περιγράφει μια «μέθοδο εντοπισμού εκτεθειμένων σημείων» ενός κυρτού συμπαγούς συνόλου.

Λήμμα 6.1.7. *Έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $w \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε $z \in K$ το οποίο έχει τη μέγιστη δυνατή απόσταση από το w:*

$$\|z - w\|_2 = \max\{\|y - w\|_2 : y \in K\} \tag{6.1.9}$$

(παρατηρήστε ότι τέτοια σημεία υπάρχουν, αφού το K είναι συμπαγές και η $y \mapsto \|y - w\|_2$ είναι συνεχής). Τότε, $z \in \exp(K)$.

Απόδειξη. Για κάθε $y \in K$ έχουμε

$$\|z - w\|_2^2 \geq \|y - w\|_2^2 = \|(y - z) + (z - w)\|_2^2, \tag{6.1.10}$$

δηλαδή

$$\|z - w\|_2^2 \geq \|y - z\|_2^2 + 2\langle y - z, z - w\rangle + \|z - w\|_2^2. \tag{6.1.11}$$

Άρα, για κάθε $y \in K$ έχουμε

$$2(\langle y, z-w\rangle - \langle z, z-w\rangle) + \|y-z\|_2^2 \leq 0. \tag{6.1.12}$$

Έπεται ότι

$$\langle y, z-w\rangle \leq \alpha := \langle z, z-w\rangle \tag{6.1.13}$$

για κάθε $y \in K$. Δηλαδή, το

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, z-w\rangle = \alpha\} \tag{6.1.14}$$

στηρίζει το K στο z. Επιπλέον, αν $\langle y, z-w\rangle = \alpha$ για κάποιο $y \in K$ τότε, επιστρέφοντας στην (6.1.12) βλέπουμε ότι $\|y-z\|_2^2 \leq 0$, δηλαδή $y = z$. Άρα, $K \cap H = \{z\}$, το οποίο δείχνει ότι το z είναι εκτεθειμένο σημείο του K. $\square$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.1.7 παίρνουμε το εξής.

Λήμμα 6.1.8. *Έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν G είναι ένας ανοικτός ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $K \cap G \neq \emptyset$, τότε $\exp(K) \cap G \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $D = \mathrm{diam}(K)$ και γράφουμε τον G στη μορφή

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle < \alpha\}, \tag{6.1.15}$$

όπου $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in K \cap G$. Θα επιλέξουμε $\lambda > 0$ κατάλληλα μεγάλο και θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Λήμμα για το $w = x + \lambda u$.

Θεωρούμε $z \in K$ το οποίο έχει τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από το w. Από το Λήμμα 6.1.7 έχουμε $z \in \exp(K)$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $z \in G$. Αφού

$$\|z-w\|_2 \geq \|x-w\|_2, \tag{6.1.16}$$

αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $y \in K \cap G^c$ ισχύει

$$\|y-w\|_2 < \|x-w\|_2. \tag{6.1.17}$$

Παρατηρούμε ότι αν $y \in K \cap G^c$ τότε $\langle y, u\rangle \geq \alpha$, οπότε

$$\|y-w\|_2^2 = \|y-x-\lambda u\|_2^2 = \|y-x\|_2^2 - 2\lambda\langle y-x, u\rangle + \|x-w\|_2^2 \tag{6.1.18}$$

αφού $\lambda u = w - x$. Αρκεί λοιπόν να εξασφαλίσουμε ότι

$$\|y-x\|_2^2 < 2\lambda(\langle y, u\rangle - \langle x, u\rangle) \tag{6.1.19}$$

για κάθε $y \in K \cap G^c$. Αφού $\|y-x\|_2 \leq D$ και $\langle y, u\rangle - \langle x, u\rangle \geq \alpha - \langle x, u\rangle > 0$, αρκεί να επιλέξουμε το $\lambda > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει η

$$D^2 < 2\lambda(\alpha - \langle x, u\rangle). \tag{6.1.20}$$

Τότε, η (6.1.17) ισχύει για κάθε $y \in K \cap G^c$, και από την (6.1.16) έχουμε $z \in \exp(K) \cap G$.
□

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5: Έστω $x \in \mathrm{ext}(K)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $r > 0$ ισχύει $B(x,r) \cap \exp(K) \neq \emptyset$. Από το Λήμμα 6.1.6 υπάρχει ανοικτός ημίχωρος G ώστε

$$x \in G \quad \text{και} \quad K \cap G \subseteq B(x,r). \tag{6.1.21}$$

Αφού $K \cap G \neq \emptyset$, από το Λήμμα 6.1.8 υπάρχει

$$z \in \exp(K) \quad \text{ώστε} \quad z \in G. \tag{6.1.22}$$

Αφού $z \in K \cap G$, από την (6.1.21) συμπεραίνουμε ότι $z \in B^{\circ}(x,r)$. Δηλαδή,

$$B(x,r) \cap \exp(K) \neq \emptyset. \tag{6.1.23}$$

Αφού το $r > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $x \in \overline{\exp(K)}$. □

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της Παραγράφου είναι το ακόλουθο θεώρημα του Minkowski.

Θεώρημα 6.1.9 (Minkowski)**.** *Έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, το K είναι η κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του:*

$$K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K)). \tag{6.1.24}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς τη διάσταση $d = \dim(\mathrm{aff}(K))$ της αφινικής θήκης του K. Αν $d = 0$, τότε το K είναι μονοσύνολο και ο ισχυρισμός του θεωρήματος ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η διάσταση του K είναι $d > 0$ και ότι το θεώρημα ισχύει για όλα τα συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που έχουν αφινική διάσταση μικρότερη από d.

Έστω $x \in K$. Αν το x είναι ακραίο σημείο του K τότε, προφανώς, $x \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \in K \setminus \mathrm{ext}(K)$.

Τότε, υπάρχει ευθεία ℓ ώστε το x να είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[y,z] = \ell \cap K$. Το y ανήκει στο σχετικό σύνορο του K στην $\mathrm{aff}(K)$. Τότε, υπάρχουν $0 \neq u \in \mathrm{aff}(K)$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle w,u\rangle \leq \alpha = \langle y,u\rangle \tag{6.1.25}$$

για κάθε $w \in K$. Θεωρούμε το υπερεπίπεδο $H_y = \{v \in \mathrm{aff}(K) : \langle v,u\rangle = \alpha\}$ του $\mathrm{aff}(K)$ και το $K \cap H_y$. Το $K \cap H_y$ είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές σύνολο με διάσταση μικρότερη από d. Άρα, είναι η κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του. Αφού $y \in K \cap H_y$, το y γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός ακραίων σημείων του $K \cap H_y$. Αν λοιπόν δείξουμε ότι κάθε ακραίο σημείο του $K \cap H_y$ είναι ακραίο σημείο του K, θα έχουμε δείξει ότι $y \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$.

Έστω w ακραίο σημείο του $K \cap H_y$ και ας υποθέσουμε ότι $w = (1-t)w_1 + tw_2$ για κάποια $w_1, w_2 \in K$ και $0 < t < 1$. Τότε,

$$\alpha = \langle w,u\rangle = (1-t)\langle w_1,u\rangle + t\langle w_2,u\rangle \leq (1-t)\alpha + t\alpha = \alpha, \tag{6.1.26}$$

απ′ όπου βλέπουμε ότι $\langle w_1, u\rangle = \langle w_2, u\rangle = \alpha$, δηλαδή, $w_1, w_2 \in K \cap H_y$. Όμως το w είναι ακραίο σημείο του $K \cap H_y$, άρα $w_1 = w_2 = w$. Αυτό αποδεικνύει ότι $w \in \mathrm{ext}(K)$.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $z \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$. Αφού $x \in [y, z]$, έπεται ότι

$$x \in \mathrm{conv}(\{y, z\}) \subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K)). \tag{6.1.27}$$

Το $x \in K \setminus \mathrm{ext}(K)$ ήταν τυχόν, άρα $K \subseteq \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$. □

Σημείωση: Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Καραθεοδωρή βλέπουμε ότι αν K είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε κάθε $x \in K$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός το πολύ $n+1$ ακραίων σημείων του K.

Ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του θεωρήματος του Minkowski είναι ο εξής.

Πόρισμα 6.1.10. *Έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $M \subseteq K$. Τότε,*

$$K = \mathrm{conv}(M) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad M \supseteq \mathrm{ext}(K). \tag{6.1.28}$$

Απόδειξη. Αφού το K είναι κυρτό και $M \subseteq K$, έχουμε $K \supseteq \mathrm{conv}(M)$. Παρατηρούμε ότι αν $M \supseteq \mathrm{ext}(K)$ τότε

$$K \supseteq \mathrm{conv}(M) \supseteq \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K)) = K. \tag{6.1.29}$$

Αντίστροφα, αν $K = \mathrm{conv}(M)$ και υπάρχει $x \in \mathrm{ext}(K) \setminus M$, τότε από την κυρτότητα του $K \setminus \{x\}$ (Λήμμα 6.1.2) και την $M \subseteq K \setminus \{x\}$ παίρνουμε

$$K = \mathrm{conv}(M) \subseteq \mathrm{conv}(K \setminus \{x\}) = K \setminus \{x\}, \tag{6.1.30}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πόρισμα 6.1.11. *Έστω K ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $M \subseteq K$. Τότε,*

$$K = \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K)). \tag{6.1.31}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Straszewicz έχουμε $\mathrm{ext}(K) \subseteq \overline{\exp(K)}$. Παρατηρήστε ότι, γενικά, $\mathrm{conv}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(A)$. Άρα,

$$K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K)) \subseteq \mathrm{conv}(\overline{\exp(K)}) \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K)) \subseteq K. \tag{6.1.32}$$

Δηλαδή, $K = \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K))$. □

Πολλές από τις εφαρμογές του Θεωρήματος του Minkowski βασίζονται στην επόμενη απλή Πρόταση.

Πρόταση 6.1.12. *Έστω K ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής κυρτή συνάρτηση και αν $M = \max\{f(x) : x \in K\}$, τότε υπάρχει ακραίο σημείο z του K ώστε $f(z) = M$.*

Απόδειξη. Αφού το K είναι συμπαγές και η f είναι συνεχής, υπάρχει $x \in K$ ώστε $f(x) = M$. Αφού $x \in K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$, υπάρχουν $z_1, \ldots, z_m \in \mathrm{ext}(K)$ και $t_i \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$ ώστε $x = t_1 z_1 + \cdots + t_m z_m$. Από την κυρτότητα της f έχουμε

$$M = f(x) = f(t_1 z_1 + \cdots + t_m z_m) \leq \sum_{i=1}^{m} t_i f(z_i) \leq \max_{1 \leq i \leq m} f(z_i) \leq M. \tag{6.1.33}$$

Άρα, υπάρχει $i \leq m$ ώστε $f(z_i) = M$ (ακριβέστερα, έχουμε $f(z_i) = M$ για όλους τους δείκτες $i \leq m$ που ικανοποιούν την $t_i > 0$). □

6.2 Πολύτοπα και πολύεδρα

Στην §2.1 ορίσαμε την κλάση των πολυτόπων και την κλάση των πολυέδρων στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο.

(α) **Πολύτοπο** στον $\mathbb{R}^n$ είναι η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου S σημείων του $\mathbb{R}^n$.

(β) **Πολύεδρο** στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια «πεπερασμένη τομή ημιχώρων», δηλαδή ένα σύνολο της μορφής

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq \alpha_i \ \text{ για } \ i = 1, \ldots, m\} \tag{6.2.1}$$

όπου $m \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_m$ είναι μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι η κλάση των φραγμένων πολυέδρων και η κλάση των πολυτόπων συμπίπτουν. Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 6.2.1. *Έστω P το πολύεδρο*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq \alpha_i, \ i = 1, \ldots, m\}. \tag{6.2.2}$$

Για κάθε $y \in P$ ορίζουμε

$$I(y) = \{i \leq m : \langle y, u_i \rangle = \alpha_i\}. \tag{6.2.3}$$

Τότε, $y \in \mathrm{ext}(P)$ αν και μόνο αν το σύνολο $\{u_i : i \in I(y)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in \mathrm{ext}(P)$ έχουμε $|I(y)| \geq n$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάποιο $y \in P$ το σύνολο $\{u_i : i \in I(y)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^n$. Έστω ότι $y = (1-t)y_1 + t y_2$ για κάποια $y_1, y_2 \in P$ και κάποιο $0 < t < 1$. Τότε, για κάθε $i \in I(y)$ έχουμε

$$\alpha_i = \langle y, u_i \rangle = (1-t)\langle y_1, u_i \rangle + t\langle y_2, u_i \rangle \leq (1-t)\alpha_i + t\alpha_i = \alpha_i, \tag{6.2.4}$$

δηλαδή

$$\langle y_1, u_i\rangle = \langle y_2, u_i\rangle = \alpha_i \quad \text{για κάθε} \quad i \in I(y). \tag{6.2.5}$$

Έπεται ότι $(y_1 - y_2) \perp u_i$ για κάθε $i \in I(y)$. Αφού τα u_i, $i \in I(y)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, συμπεραίνουμε ότι $y_1 - y_2 = 0$. Δηλαδή, $y_1 = y_2 = y$. Αυτό δείχνει ότι $y \in \mathrm{ext}(P)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\{u_i : i \in I(y)\}$ δεν παράγει τον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει $z \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα

$$\langle z, u_i\rangle = 0 \quad \text{για κάθε} \quad i \in I(y). \tag{6.2.6}$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $i \notin I(y)$ έχουμε

$$\langle y, u_i\rangle < \alpha_i. \tag{6.2.7}$$

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $y_1 = y + \varepsilon z$, $y_2 = y - \varepsilon z$. Τότε, $y_i \neq y$ και

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{6.2.8}$$

Επίσης, αν το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό, έχουμε $y_1, y_2 \in P$. Πράγματι, αν $i \in I(y)$ τότε

$$\langle y \pm \varepsilon z, u_i\rangle = \langle y, u_i\rangle \pm \varepsilon\langle z, u_i\rangle = \langle y, u_i\rangle = \alpha_i, \tag{6.2.9}$$

ενώ, αν $i \notin I(y)$ έχουμε

$$\langle y \pm \varepsilon z, u_i\rangle = \langle y, u_i\rangle \pm \varepsilon\langle z, u_i\rangle < \alpha_i \tag{6.2.10}$$

αν το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιούνται οι

$$\varepsilon|\langle z, u_i\rangle| < \alpha_i - \langle y, u_i\rangle, \quad i \notin I(y). \tag{6.2.11}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $y \notin \mathrm{ext}(P)$. □

Θεώρημα 6.2.2. *Κάθε φραγμένο πολύεδρο είναι πολύτοπο.*

Απόδειξη. Έστω P το φραγμένο πολύεδρο

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i\rangle \leq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m\}. \tag{6.2.12}$$

Το P είναι κλειστό και κυρτό (ως τομή κλειστών υποχώρων). Αφού είναι φραγμένο, το P είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα του Minkowski έχουμε $P = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(P))$. Αν δείξουμε ότι το $\mathrm{ext}(P)$ είναι πεπερασμένο σύνολο, έπεται το Θεώρημα.

Από το Λήμμα 6.2.1, κάθε $y \in \mathrm{ext}(P)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος

$$\langle y, u_i\rangle = \alpha_i, \quad i \in I(y). \tag{6.2.13}$$

Η μοναδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το σύνολο $\{u_i : i \in I(y)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, σε κάθε $y \in \mathrm{ext}(P)$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια n-άδα γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $u_{i_1}(y), \ldots, u_{i_n}(y)$ $(i_j \in I(y))$ και η απεικόνιση $y \mapsto (u_{i_1}(y), \ldots, u_{i_n}(y))$ είναι ένα προς ένα.

Το πλήθος των δυνατών n-άδων $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})$ αυτής της μορφής είναι το πολύ ίσο με $\binom{m}{n}$. Άρα,

$$|\mathrm{ext}(P)| \leq \binom{m}{n}. \tag{6.2.14}$$

Δηλαδή, το $\mathrm{ext}(P)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. □

Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρησιμοποιούμε τον δυϊσμό.

Θεώρημα 6.2.3. *Κάθε πολύτοπο είναι πολύεδρο.*

Απόδειξη. Έστω $P = \mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_m\})$ ένα πολύτοπο. Θα δουλέψουμε στην αφινική θήκη $A = \mathrm{aff}(P)$ του P. Αν δείξουμε ότι υπάρχουν $u_1, \ldots, u_s \in A$ και $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ώστε

$$P = \{x \in A : \langle x, u_i \rangle \leq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, s\}, \tag{6.2.15}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε το P σαν τομή πεπερασμένων το πλήθος κλειστών ημιχώρων του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, υπάρχουν κλειστοί ημίχωροι $F_1, \ldots, F_{2d}$ του $\mathbb{R}^n$ ώστε $A = F_1 \cap \cdots \cap F_{2d}$ (αν $n - d$ είναι η διάσταση της A και αν $v_1, \ldots, v_d$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων κάθετων στην A, τότε η A γράφεται σαν τομή κλειστών ημιχώρων της μορφής $\{x : \langle x, v_j \rangle \leq \beta_j\}$ και $\{x : \langle x, v_j \rangle \geq \gamma_j\}$). Τότε,

$$P = F_1 \cap \cdots \cap F_{2d} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, s\}. \tag{6.2.16}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mathrm{int}(P) \neq \emptyset$. Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(P)$: δεν είναι δύσκολο να δείξετε ότι για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$ το P είναι πολύεδρο αν και μόνο αν το $P + w$ είναι πολύεδρο.

Με αυτές τις υποθέσεις, το πολικό P° του P είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $0 \in \mathrm{int}(P^\circ)$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} P^\circ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } x \in P\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x_i \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το P° είναι ένα φραγμένο πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 6.2.2, το P° είναι πολύτοπο. Δηλαδή, υπάρχουν $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$P^\circ = \mathrm{conv}(\{z_1, \ldots, z_r\}). \tag{6.2.17}$$

Τότε, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω δείχνει ότι

$$P^{\circ\circ} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, z_i \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, r\}. \tag{6.2.18}$$

Δηλαδή, το $P^{\circ\circ}$ είναι πολύεδρο. Αφού $P^{\circ\circ} = P$, έπεται το συμπέρασμα. □

6.3 Το πολύτοπο του Birkhoff

Ορισμός 6.3.1. (α) Έστω σ μια μετάθεση του $\{1, \ldots, n\}$. Ο *πίνακας μετάθεσης* X^σ είναι ο $n \times n$ πίνακας $X^\sigma = (x_{ij})$ με συντεταγμένες $x_{ij} = 1$ αν $\sigma(j) = i$ και $x_{ij} = 0$ αλλιώς. Δηλαδή, $x_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$. Παρατηρήστε ότι κάθε πίνακας μετάθεσης έχει μία μονάδα και $n-1$ μηδενικά σε κάθε γραμμή ή στήλη του. Αντίστροφα, κάθε πίνακας αυτής της μορφής αντιστοιχεί σε κάποια μετάθεση σ του $\{1, \ldots, n\}$.

(β) Ένας $n \times n$ πίνακας $X = (x_{ij})$ λέγεται *διπλά στοχαστικός* αν $x_{ij} \geq 0$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ και το άθροισμα των συντεταγμένων κάθε γραμμής ή στήλης του ισούται με 1. Δηλαδή,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, n.$$

(γ) Από τον ορισμό του διπλά στοχαστικού πίνακα βλέπουμε ότι το σύνολο DS_n των διπλά στοχαστικών πινάκων είναι ένα πολύεδρο στον $\mathbb{R}^{n^2}$. Το DS_n λέγεται *πολύτοπο του Birkhoff*.

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ακραίο σημείο του DS_n. Το θεώρημα των Birkhoff – von Neumann ισχυρίζεται ότι το πολύτοπο DS_n δεν έχει άλλα ακραία σημεία.

Θεώρημα 6.3.2 (Birkhoff, 1946 – von Neumann, 1953)**.** *Το σύνολο* $\mathrm{ext}(DS_n)$ *των ακραίων σημείων του πολυτόπου του Birkhoff είναι το σύνολο των* $n \times n$ *πινάκων μετάθεσης.*

Απόδειξη. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε εδώ γίνεται με επαγωγή ως προς το n. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός του Θεωρήματος ισχύει προφανώς. Έστω $n > 1$. Θεωρούμε τον αφινικό υπόχωρο

$$L = \left\{ X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2} : (\forall i \leq n) \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ (\forall j \leq n) \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \right\} \tag{6.3.1}$$

του $\mathbb{R}^{n^2}$. Παρατηρήστε ότι $\dim(L) = (n-1)^2$. Πράγματι, κάθε $X = (x_{ij}) \in L$ προσδιορίζεται πλήρως από τις $(n-1)^2$ συντεταγμένες x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n-1$, αφού οι υπόλοιπες συντεταγμένες προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$x_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij}$$
$$x_{nj} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ij}$$

$$x_{nn} \;=\; 1-\sum_{i=1}^{n-1}x_{in}=(2-n)+\sum_{i,j=1}^{n-1}x_{ij}.$$

Αν περιοριστούμε στο χώρο L, το πολύτοπο DS_n ορίζεται από τις n^2 ανισότητες $x_{ij}\geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $X=(x_{ij})$ είναι ένα ακραίο σημείο του DS_n. Από το Λήμμα 6.2.1 υπάρχουν τουλάχιστον $(n-1)^2$ ζευγάρια (i,j) για τα οποία $x_{ij}=0$. Αφού ο X είναι διπλά στοχαστικός, δεν μπορεί να έχει n μηδενικές συντεταγμένες σε κάποια γραμμή ούτε μπορεί να έχει περισσότερες από μία μη μηδενικές συντεταγμένες σε κάθε γραμμή, γιατί τότε το πλήθος των μηδενικών συντεταγμένων του θα ήταν το πολύ ίσο με $n(n-2)<(n-1)^2$. Υπάρχει λοιπόν κάποιος δείκτης $i_0\leq n$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει μοναδικός δείκτης $j_0\leq n$ ώστε $x_{i_0j_0}\neq 0$. Αφού ο X είναι διπλά στοχαστικός, αναγκαστικά έχουμε

$$x_{i_0j_0}=1 \quad \text{και} \quad x_{i_0j}=0 \text{ αν } j\neq j_0. \tag{6.3.2}$$

Επίσης, αφού $x_{i_0j_0}=1$ και ο X είναι διπλά στοχαστικός, παίρνουμε

$$x_{i_0j_0}=1 \quad \text{και} \quad x_{ij_0}=0 \text{ αν } i\neq i_0. \tag{6.3.3}$$

Από τις (6.3.2) και (6.3.3) είναι φανερό ότι αν διαγράψουμε την i_0-στή γραμμή και την j_0-στή στήλη του X θα προκύψει ένας διπλά στοχαστικός $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας Y.

Παρατηρήστε ότι ο Y είναι ακραίο σημείο του DS_{n-1}. Αν υπήρχαν $Y_1\neq Y_2$ στο DS_{n-1} και $0<t<1$ ώστε $Y=(1-t)Y_1+tY_2$, τότε με «αντικατάσταση του Y από τους Y_1 και Y_2 αντίστοιχα μέσα στον X» θα παίρναμε δύο διπλά στοχαστικούς πίνακες $X_1,X_2\in DS_n$ με την ιδιότητα: $X_1\neq X_2$ και $X=(1-t)X_1+tX_2$. Αυτό θα ήταν άτοπο, αφού $X\in \mathrm{ext}(DS_n)$.

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση. Είδαμε ότι $Y\in\mathrm{ext}(DS_{n-1})$, άρα ο Y είναι πίνακας μετάθεσης. Έπεται ότι ο X είναι πίνακας μετάθεσης. $\square$

6.3α′ Πολύτοπα μεταθέσεων

Ορισμός 6.3.3 (πολύτοπο μεταθέσεων)**.** Συμβολίζουμε με S_n την ομάδα των μεταθέσεων του $\{1,\dots,n\}$. Έστω $w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{R}^n$. Για κάθε μετάθεση $\sigma\in S_n$ ορίζουμε

$$\sigma(w)=(w_{\sigma^{-1}(1)},\dots,w_{\sigma^{-1}(n)}). \tag{6.3.4}$$

Το *πολύτοπο των μεταθέσεων του* w είναι το πολύτοπο

$$P(w)=\mathrm{conv}(\{\sigma(w):\,\sigma\in S_n\}). \tag{6.3.5}$$

Δηλαδή, το $P(w)$ προκύπτει αν θεωρήσουμε όλα τα σημεία που παράγονται με μετάθεση των συντεταγμένων του w και πάρουμε την κυρτή τους θήκη.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι κάθε πολύτοπο μεταθέσεων είναι γραμμική εικόνα του πολυτόπου του Birkhoff.

Πρόταση 6.3.4. *Έστω $w \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T_w : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την*

$$T_w(X) = X(w), \tag{6.3.6}$$

όπου έχουμε ταυτίσει τον $\mathbb{R}^{n^2}$ με τον γραμμικό χώρο των $n \times n$ πινάκων. Τότε,

$$T_w(DS_n) = P(w). \tag{6.3.7}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα των Birkhoff – von Neumann και από το Θεώρημα του Minkowski παίρνουμε

$$T_w(DS_n) = T_w(\mathrm{conv}(\{X^\sigma : \sigma \in S_n\})) = \mathrm{conv}(\{T_w(X^\sigma) : \sigma \in S_n\}). \tag{6.3.8}$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $\sigma \in S_n$,

$$T_w(X^\sigma) = X^\sigma(w) = (w_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, w_{\sigma^{-1}(n)}) = \sigma(w). \tag{6.3.9}$$

Άρα,

$$T_w(DS_n) = \mathrm{conv}(\{\sigma(w) : \sigma \in S_n\}). \tag{6.3.10}$$

Δηλαδή, $T_w(DS_n) = P(w)$. □

6.3β΄ Εφαρμογές στην ανάλυση πινάκων

Αν X είναι ένας $n \times n$ πίνακας, γράφουμε $X = (X_1, \dots, X_n)$ όπου $X_1, \dots, X_n$ είναι τα διανύσματα-γραμμές του X. Στην προηγούμενη υποπαράγραφο είδαμε ότι αν $w \in \mathbb{R}^n$ και $X \in DS_n$ τότε $X(w) \in P(w)$. Από τη δομή του DS_n και την Πρόταση 6.1.12 παίρνουμε το εξής βασικό Λήμμα.

Λήμμα 6.3.5. *Έστω $w \in \mathbb{R}^n$ και C κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $P(w) \subseteq C$. Αν $f : C \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση, τότε η $g : DS_n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$g(X) = f(X(w)) = f(\langle X_1, w\rangle, \dots, \langle X_n, w\rangle) \tag{6.3.11}$$

είναι κυρτή συνάρτηση και

$$\max(g) = \max\{f(\sigma(w)) : \sigma \in S_n\}. \tag{6.3.12}$$

Απόδειξη. Αν $X, Y \in DS_n$ και $0 < t < 1$, τότε

$$\begin{aligned} g((1-t)X + tY) &= f[((1-t)X + tY)(w)] = f[(1-t)X(w) + tY(w)] \\ &\leq (1-t)f(X(w)) + tf(Y(w)) = (1-t)g(X) + tg(Y), \end{aligned}$$

δηλαδή η g είναι κυρτή. Από την Πρόταση 6.1.12 έπεται ότι

$$\max(g) = \max\{f(X^\sigma(w)) : \sigma \in S_n\}. \tag{6.3.13}$$

Αφού $X^\sigma(w) = \sigma(w)$, έπεται το Λήμμα. □

Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση μπορούμε να δείξουμε πλήθος ανισοτήτων για τις ιδιοτιμές συμμετρικών πινάκων. Η απόδειξη τους βασίζεται στο εξής γενικό σχήμα.

Θεώρημα 6.3.6. *Έστω T ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και έστω w το διάνυσμα που προκύπτει αν διατάξουμε με τυχόντα τρόπο τις (πραγματικές) ιδιοτιμές του T. Αν C είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $P(w) \subseteq C$ και αν $f : C \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση, τότε για κάθε ορθοκανονική βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$f(\langle Tv_1, v_1\rangle, \ldots, \langle Tv_n, v_n\rangle) \leq \max\{f(\sigma(w)) : \sigma \in S_n\}. \tag{6.3.14}$$

Απόδειξη. Έστω $\{u_1, \ldots, u_n\}$ μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $w_1, \ldots, w_n$. Δηλαδή, $Tu_i = w_i u_i$. Θεωρούμε τον πίνακα X που έχει συντεταγμένες $x_{ij} = \langle u_i, v_j\rangle^2$. Ο X είναι διπλά στοχαστικός: για παράδειγμα, έχουμε

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \langle u_i, v_j\rangle^2 = \|u_i\|_2^2 = 1 \tag{6.3.15}$$

για κάθε $i \leq n$. Όμως,

$$Tv_j = T\left(\sum_{i=1}^n \langle u_i, v_j\rangle u_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_j\rangle w_i u_i, \tag{6.3.16}$$

άρα

$$\langle Tv_j, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_j\rangle^2 w_i = \langle X_j, w\rangle, \tag{6.3.17}$$

όπου X_j είναι η j-στή στήλη του X. Από το Λήμμα 6.3.5,

$$\begin{aligned} f(\langle Tv_1, v_1\rangle, \ldots, \langle Tv_n, v_n\rangle) &= f(\langle X_1, w\rangle, \ldots, \langle X_n, w\rangle) \\ &= f(X^t(w)) \leq \max\{f(\sigma(w)) : \sigma \in S_n\}. \end{aligned}$$

Στην πραγματικότητα έχουμε αποδείξει κάτι ισχυρότερο. Αν επιλέξουμε σαν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ κατάλληλη μετάθεση $\sigma(w)$ των ιδιοτιμών του T πετυχαίνουμε ισότητα. Δηλαδή,

$$\max f(\langle Tv_1, v_1\rangle, \ldots, \langle Tv_n, v_n\rangle) = \max\{f(\sigma(w)) : \sigma \in S_n\}, \tag{6.3.18}$$

όπου το αριστερό maximum παίρνεται πάνω από όλες τις ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^n$. □

Επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση f στο προηγούμενο θεώρημα, παίρνουμε μια σειρά ανισοτήτων. Η πρώτη μας επιλογή είναι

$$f(s_1,\dots,s_n)=\sum_{i=1}^{k} s_i \tag{6.3.19}$$

για σταθερό $k\le n$.

Θεώρημα 6.3.7. *Έστω T ένας $n\times n$ συμμετρικός πίνακας και έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}\le\sum_{i=1}^{k}\langle Tv_i,v_i\rangle\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \tag{6.3.20}$$

όπου $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του T.

Απόδειξη. Η $f(s_1,\dots,s_n)=\sum_{i=1}^{k}s_i$ είναι κυρτή στον $\mathbb{R}^n$ (η $-f$ επίσης). Από το Θεώρημα 6.3.6 υπάρχει μετάθεση $\sigma\in S_n$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{k}\langle Tv_i,v_i\rangle\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_{\sigma^{-1}(i)}. \tag{6.3.21}$$

Λόγω της διάταξης των λ_i, το δεξιό μέλος είναι μικρότερο ή ίσο από το $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$, οπότε έχουμε αποδείξει τη δεξιά ανισότητα του θεωρήματος. Δουλεύοντας ανάλογα με την $-f$ παίρνουμε την αριστερή ανισότητα. Παρατηρήστε ότι έχουμε ισότητα στην αριστερή ανισότητα αν το v_i, $i\le k$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την λ_{n-i+1}, ενώ στη δεξιά ανισότητα αν το v_i είναι ιδιοδιάνυσμα για την λ_i. □

Η επόμενη επιλογή μας είναι η συνάρτηση

$$f(s_1,\dots,s_n)=(s_1s_2\cdots s_k)^{1/k} \tag{6.3.22}$$

που ορίζεται για μη αρνητικά s_i και σταθερό $k\le n$. Η f είναι κοίλη, οπότε παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα 6.3.8. *Αν T είναι ένας $n\times n$ συμμετρικός πίνακας και $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\prod_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}\le\prod_{i=1}^{k}\langle Tv_i,v_i\rangle\le\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^{k} \tag{6.3.23}$$

όπου $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του T.

Απόδειξη. Η συνάρτηση f που χρησιμοποιούμε είναι κοίλη, άρα η $-f$ είναι κυρτή στο P^n. Από το Θεώρημα 6.3.6,

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}\right)^{1/k} \leq \left(\prod_{i=1}^{k}\langle Tv_i, v_i\rangle\right)^{1/k}, \tag{6.3.24}$$

το οποίο μάς δίνει την αριστερή ανισότητα. Παρατηρούμε κι εδώ ότι έχουμε ισότητα στην αριστερή ανισότητα αν το v_i, $i \leq k$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την λ_{n-i+1}. Για τη δεξιά ανισότητα εφαρμόζουμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και το Θεώρημα 6.3.7:

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\langle Tv_i, v_i\rangle\right)^{1/k} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\langle Tv_i, v_i\rangle \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i. \tag{6.3.25}$$ □

Άμεσες συνέπειες είναι δύο πολύ γνωστές ανισότητες για ορίζουσες.

Θεώρημα 6.3.9 (ανισότητα του Hadamard). *Αν T είναι ένας $n \times n$ πίνακας με συντεταγμένες t_{ij}, τότε*

$$(\det T)^2 \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}^2\right). \tag{6.3.26}$$

Αν ο T είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος,

$$\det T \leq \prod_{i=1}^{n} t_{ii}. \tag{6.3.27}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τη δεύτερη ανισότητα. Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του, αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνήθη ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$ και χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6.3.8 με $k = n$, παίρνουμε

$$\det T = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n}\langle Te_i, e_i\rangle = \prod_{i=1} t_{ii}. \tag{6.3.28}$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή την ανισότητα για το συμμετρικό και θετικά ημιορισμένο πίνακα $S = T^tT$ (όπου τώρα T τυχών $n \times n$ πίνακας), παίρνουμε

$$(\det T)^2 = \det S \leq \prod_{j=1}^{n} s_{jj} = \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}^2\right). \tag{6.3.29}$$ □

Θεώρημα 6.3.10 (ανισότητα του Minkowski). *Αν T και S είναι συμμετρικοί θετικά ημιορισμένοι $n \times n$ πίνακες, τότε*

$$[\det(T+S)]^{1/n} \geq (\det T)^{1/n} + (\det S)^{1/n}. \tag{6.3.30}$$

Απόδειξη. Έστω $v_1, \ldots, v_n$ μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του $T+S$. Τότε,

$$\begin{aligned}
[\det(T+S)]^{1/n} &= \left[\prod_{i=1}^n \langle (T+S)v_i, v_i\rangle\right]^{1/n} \\
&= \left[\prod_{i=1}^n \langle Tv_i, v_i\rangle + \langle Sv_i, v_i\rangle\right]^{1/n} \\
&\geq \left[\prod_{i=1}^n \langle Tv_i, v_i\rangle\right]^{1/n} + \left[\prod_{i=1}^n \langle Sv_i, v_i\rangle\right]^{1/n} \\
&\geq (\det T)^{1/n} + (\det S)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Η προτελευταία ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, ενώ η τελευταία προκύπτει από το Θεώρημα 6.3.9. $\square$

6.4 Ασκήσεις

1. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν F είναι έδρα του C και $x \in \mathrm{ext}(F)$ τότε $x \in \mathrm{ext}(C)$.

2. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το σύνολο των ακραίων σημείων του C είναι κλειστό.

3. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{conv}(A)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \notin \mathrm{conv}(A \setminus \{x\})$.

4. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$ αν και μόνο αν το C δεν περιέχει καμία ευθεία.

5. Δείξτε ότι κάθε πολύεδρο έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες.

6. Δείξτε ότι κάθε έδρα ενός πολυέδρου είναι πολύεδρο.

7. Δείξτε ότι κάθε πολύτοπο έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες.

8*. Δείξτε ότι κάθε μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες είναι πολύεδρο.

9. Πολύτοπο του Birkhoff – πολύτοπα μεταθέσεων. Το DS_n περιέχεται στον αφινικό υπόχωρο

$$L = \left\{ X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2} : (\forall i \leq n) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \ (\forall j \leq n) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \right\}$$

του $\mathbb{R}^{n^2}$, ο οποίος έχει διάσταση $(n-1)^2$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{aff}(DS_n) = (n-1)^2$, οπότε το DS_n έχει εσωτερικό σημείο στον L.

(β) Βρείτε την ακτίνα της μεγαλύτερης μπάλας του L που περιέχεται στο DS_n και έχει κέντρο το σημείο $X = (x_{ij})$ με $x_{ij} = \frac{1}{n}$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$.

[*Υπόδειξη:* Αυτή η μπάλα θα ακουμπάει το σύνορο του DS_n σε κάποιον $A = (a_{ij})$ που έχει τουλάχιστον μία μηδενική συντεταγμένη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{11} = 0$. Δείξτε ότι:

(i) $\|X - A\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 - 1$.

(ii) $\sum_{j=2}^n a_{1j}^2 \geq \frac{1}{n-1}$.

(iii) Για κάθε $i = 2, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq \frac{1}{n-1} + \frac{n}{n-1} a_{i1}^2 - \frac{2}{n-1} a_{i1}.$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείξτε ότι

$$\|X - A\|_2^2 \geq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Βρείτε $A \in DS_n$ με $a_{11} = 0$ για τον οποίο ισχύει ισότητα και συμπεράνατε ότι η ακτίνα που ζητάμε είναι ίση με $\frac{1}{n-1}$.]

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{X = (x_{ij}) \in DS_n : x_{11} = 0\}$ είναι έδρα του DS_n με διάσταση $(n-1)^2 - 1$.

(δ) Δείξτε ότι το σύνολο $G = \{X = (x_{ij}) \in DS_n : x_{11} = 1\}$ είναι έδρα του DS_n με διάσταση $(n-2)^2$.

(ε) Έστω $\alpha = (1, 2, 3)$. Σχεδιάστε το πολύτοπο $P(\alpha)$ των μεταθέσεων του α.

(στ) Έστω $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Δείξτε ότι το πολύτοπο $P(\alpha)$ έχει $n!$ ακραία σημεία αν και μόνο αν οι συντεταγμένες α_i του α είναι διαφορετικές ανά δύο.

10. Ένας χαρακτηρισμός των διπλά στοχαστικών πινάκων. Έστω $w = (w_1, \dots, w_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ δύο n-άδες πραγματικών αριθμών με

$$w_1 \geq \cdots \geq w_n \quad \text{και} \quad y_1 \geq \cdots \geq y_n.$$

Λέμε ότι το διάνυσμα y *κυριαρχείται* από το διάνυσμα w και γράφουμε $y \prec w$ αν

$$\sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k w_i \quad \text{για κάθε } k = 1, \dots, n-1$$

και

$$y_1 + \cdots + y_n = w_1 + \cdots + w_n.$$

(α) Δείξτε ότι $X = (x_{ij}) \in DS_n$ αν και μόνο αν $X(w) \prec w$ για κάθε $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$.

[*Υπόδειξη:* Θα χρειαστείτε την παρατήρηση ότι το γινόμενο δύο διπλά στοχαστικών πινάκων είναι διπλά στοχαστικός πίνακας. Ειδικότερα, αν ο X είναι διπλά στοχαστικός και αν $P = X^{\sigma}, Q = X^{\tau}$ είναι δύο πίνακες μετάθεσης, τότε ο PXQ είναι διπλά στοχαστικός.]

(β)* Έστω $w = (w_1, \dots, w_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ δύο n-άδες πραγματικών αριθμών με $w_1 \geq \cdots \geq w_n$ και $y_1 \geq \cdots \geq y_n$. Δείξτε ότι $y \prec w$ αν και μόνο αν υπάρχει $X \in DS_n$ ώστε $y = X(w)$.

11. Θεώρημα Schur-Horn. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και $\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε το εξής θεώρημα του Schur: Έστω $A = (\alpha_{ij})$ ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας που έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Τότε, το $\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn})$ ανήκει στο πολύτοπο $P(\ell)$ των μεταθέσεων του ℓ.

[*Υπόδειξη.* Ο A γράφεται στη μορφή $A = UDU^t$, όπου D ο διαγώνιος πίνακας $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και $U = (u_{ij})$ ένας ορθογώνιος πίνακας. Παρατηρήστε ότι ο πίνακας $X = (u_{ij}^2)$ είναι διπλα στοχαστικός και χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $A = ADU^t$ δείξτε ότι $\alpha = X(\ell)$ για κάποιον $X \in DS_n$.]

(β)** Δείξτε ότι ισχύει το αντίστροφο (θεώρημα του Horn): Έστω $\alpha \in P(\ell)$. Τότε, υπάρχει συμμετρικός $n \times n$ πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ που έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ και διαγώνιο $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}) = \alpha$.

Κεφάλαιο 7

Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

7.1 Απόσταση Banach-Mazur

7.1α΄ Φραγμένοι τελεστές

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \tag{7.1.1}$$

για κάθε $x \in X$. Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη *νόρμα* $\|T\|$ του T σαν τη μικρότερη σταθερά c για την οποία η (7.1.1) ισχύει για κάθε $x \in X$. Τότε,

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{7.1.2}$$

Έστω $B(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα.

Ο *δυϊκός χώρος* του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $x^* : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, $X^* = B(X,\mathbb{R})$.

Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές. Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$. Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο ισομετρικά ισόμορφοι χώροι *ταυτίζονται*: έχουν την ίδια γραμμική και μετρική δομή.

Πρόταση 7.1.1. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Μπορούμε να ορίσουμε νόρμα $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε ο X να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.*

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X, και έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ μια βάση του. Ορίζουμε $T : X \to \mathbb{R}^n$, με

$$T(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n, \tag{7.1.3}$$

όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ορίζουμε $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\|t_1e_1 + \cdots + t_ne_n\|' = \|t_1x_1 + \cdots + t_nx_n\|. \tag{7.1.4}$$

Η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και

$$\|Tx\|' = \|x\| \quad \text{για κάθε} \quad x \in X. \tag{7.1.5}$$

Άρα, ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των X και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$. □

Μπορούμε λοιπόν πάντα να ταυτίζουμε έναν n-διάστατο χώρο με νόρμα με έναν χώρο της μορφής $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

7.1β′ Απόσταση Banach-Mazur

Η έννοια της απόστασης Banach-Mazur εμφανίζεται στο βιβλίο του Banach «Théorie des opérations linéaires» (1932). Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα, άπειρης ενδεχομένως διάστασης, και ας υποθέσουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y (γράφουμε $X \sim Y$). Ορίζουμε την *απόσταση Banach-Mazur* των X και Y ως εξής:

$$d(X,Y) := \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \;\big|\; T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{7.1.6}$$

Αν οι X και Y δεν είναι ισόμορφοι ($X \not\sim Y$), θέτουμε $d(X,Y) = +\infty$. Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 7.1.2. *Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα. Τότε,*

(i) $d(X,Y) \geq 1$.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(iii) $d(X,Y) \leq d(X,Z)\, d(Z,Y)$.

(iv) *Αν οι X και Y είναι αυτοπαθείς, τότε $d(X^*, Y^*) = d(X,Y)$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $I_X : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής. Για κάθε ισομορφισμό $T : X \to Y$ ισχύει

$$1 = \|I_X\| = \|T^{-1}T\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T\|, \tag{7.1.7}$$

επομένως,

$$1 \leq d(X,Y). \tag{7.1.8}$$

(ii) Είναι προφανές ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι ισομορφισμός, και $(T^{-1})^{-1} = T$. Από τον ορισμό της απόστασης βλέπουμε ότι $d(X,Y) = d(Y,X)$.
(iii) Έστω $T' : X \to Z$ και $T'' : Z \to Y$ ισομορφισμοί. Τότε, ο $T = T'' \circ T' : X \to Y$ είναι ισομορφισμός, άρα

$$\begin{aligned} d(X,Y) &\leq \|T\|\,\|T^{-1}\| = \|T'' \circ T'\|\,\|(T')^{-1} \circ (T'')^{-1}\| \\ &\leq \|T''\|\,\|(T'')^{-1}\|\,\|T'\|\,\|(T')^{-1}\|. \end{aligned}$$

Αφού το παραπάνω ισχύει για κάθε T', T'', έπεται ότι

$$d(X,Y) \leq d(X,Z)\,d(Z,Y). \tag{7.1.9}$$

(iv) Έστω $T : X \to Y$ ισομορφισμός. Τότε, ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ του T, που ορίζεται από την $T^*(y^*) = y^* \circ T$ για κάθε $y^* \in Y^*$, είναι ισομορφισμός και ικανοποιεί τις $\|T^*\| = \|T\|$, και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Άρα,

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| = \|T^*\|\,\|(T^*)^{-1}\| \geq d(X^*,Y^*), \tag{7.1.10}$$

και αφού ο T ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι

$$d(X,Y) \geq d(X^*,Y^*). \tag{7.1.11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι X και Y είναι αυτοπαθείς. Από το προηγούμενο κομμάτι της απόδειξης έχουμε $d(X^*,Y^*) \geq d(X^{**},Y^{**})$. Όμως, ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, δηλαδή $d(X,X^{**}) = 1$. Όμοια, $d(Y,Y^{**}) = 1$. Έπεται ότι

$$d(X,Y) \leq d(X,X^{**})d(X^{**},Y^{**})d(Y^{**},Y) = d(X^{**},Y^{**}) \leq d(X^*,Y^*),$$

και συνδυάζοντας με την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$. □

7.1γ΄ Γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur δίνεται στην επόμενη Πρόταση: η απόσταση δύο χώρων X και Y είναι μικρή αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του X που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του Y (περιέχει την B_Y και περιέχεται σε «μικρό» πολλαπλάσιο της B_Y).

Πρόταση 7.1.3. *Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Τότε,*

$$d(X,Y) = \inf\{d > 0 \mid \exists T : X \to Y \;:\; B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq d\,B_Y\}. \tag{7.1.12}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $d(X,Y) < d < +\infty$. Από τον ορισμό της απόστασης, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με $\|T\|\,\|T^{-1}\| < d$. Από τον ορισμό της νόρμας τελεστή βλέπουμε ότι:

(α) Για κάθε $x \in B_X$ έχουμε $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\,\|x\|_X \leq \|T\|$, άρα

$$T(B_X) \subseteq \|T\|\,B_Y. \tag{7.1.13}$$

(β) Για κάθε $y \in B_Y$ έχουμε $\|T^{-1}y\|_X \leq \|T^{-1}\|\,\|y\|_Y \leq \|T^{-1}\|$, άρα

$$T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\|\,B_X, \tag{7.1.14}$$

ή, ισοδύναμα,

$$B_Y \subseteq \|T^{-1}\|\,T(B_X). \tag{7.1.15}$$

Αν θέσουμε $S = \|T^{-1}\|\,T$, τότε, από το (α) έχουμε $S(B_X) \subseteq \|T\|\,\|T^{-1}\|\,B_Y$, και από το (β) έχουμε $B_Y \subseteq S(B_X)$. Δηλαδή, υπάρχει $S : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq d\,B_Y. \tag{7.1.16}$$

Αντίστροφα, αν $B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq dB_Y$ για κάποιον $S : X \to Y$, τότε $\|S\| \leq d$ και $\|S^{-1}\| \leq 1$. Άρα, $d(X,Y) \leq \|S\|\,\|S^{-1}\| \leq d$. □

7.1δ′ Η απόσταση Banach-Mazur σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim X = \dim Y = n$. Ξέρουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y. Σε αυτή την περίπτωση, η απόσταση Banach-Mazur των X και Y «πιάνεται» για κάποιον ισομορφισμό $T : X \to Y$:

Πρόταση 7.1.4. *Αν $\dim X = \dim Y = n$, τότε*

$$d(X,Y) = \min\{\|T\|\,\|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{7.1.17}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του inf, υπάρχει ακολουθία ισομορφισμών $S_m : X \to Y$ ώστε

$$\|S_m\|\,\|S_m^{-1}\| \to d(X,Y). \tag{7.1.18}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $T_m = \|S_m^{-1}\|\,S_m$. Τότε, $\|T_m^{-1}\| = 1$ και

$$\|T_m\| = \|T_m\|\,\|T_m^{-1}\| = \|S_m\|\,\|S_m^{-1}\| \to d(X,Y). \tag{7.1.19}$$

Λόγω της συμπάγειας της μοναδιαίας μπάλας του $B(Y,X)$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $T_{k_m}^{-1} \to S$, όπου $S \in B(Y,X)$ με $\|S\| = 1$. Η $\{\|T_{k_m}\|\}$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει υπακολουθία $T_{\lambda_{k_m}} \to T$, όπου $T \in B(X,Y)$. Επίσης,

$$I_Y = T_{\lambda_{k_m}} \circ T_{\lambda_{k_m}}^{-1} \to T \circ S$$

και $I_X = T_{\lambda_{k_m}}^{-1} \circ T_{\lambda_{k_m}} \to S \circ T$, άρα οι S, T είναι ισομορφισμοί και $S = T^{-1}$. Τέλος,

$$\|T\|\,\|S\| = \lim_{m\to\infty} \|T_{\lambda_{k_m}}\|\,\|T_{\lambda_{k_m}}^{-1}\| = d(X,Y). \tag{7.1.20}$$

Δηλαδή, $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(X,Y)$. □

Πόρισμα 7.1.5. *Αν $\dim X = \dim Y = n$ τότε, $d(X,Y) = 1$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y.*

Απόδειξη: Έστω ότι $d(X,Y) = 1$. Από την Πρόταση 7.1.4, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ ώστε $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(X,Y) = 1$. Άρα, $\|T\| = 1/\|T^{-1}\|$. Έστω $x \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|x\| = \|T^{-1}Tx\| &\leq \|T^{-1}\|\,\|Tx\| = \frac{1}{\|T\|}\|Tx\| \\ &\leq \frac{1}{\|T\|}\|T\|\,\|x\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα, ο $T' = T/\|T\| : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Το αντίστροφο είναι προφανές: αν ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, τότε $1 \leq d(X,Y) \leq \|T\|\,\|T^{-1}\| = 1$. □

7.2 Το Λήμμα του Auerbach

Ορισμός 7.2.1 (διορθογώνιο σύστημα)**.** Έστω X χώρος με νόρμα. Ονομάζουμε *διορθογώνιο σύστημα* στον X μια ακολουθία ζευγαριών $(x_i, x_i^*)_{i\in I} \subseteq X \times X^*$ που ικανοποιεί τις

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{για κάθε} \quad i,j \in I. \tag{7.2.1}$$

Αν, επιπλέον, ικανοποιούνται οι

$$\|x_i\|_X = \|x_i^*\|_{X^*} = 1 \quad \text{για κάθε} \quad i \in I, \tag{7.2.2}$$

τότε το σύστημα λέγεται *νορμαρισμένο*.

Το *λήμμα του Auerbach* εξασφαλίζει την ύπαρξη νορμαρισμένου διορθογώνιου συστήματος σε κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα.

Θεώρημα 7.2.2 (λήμμα του Auerbach)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα διάστασης n. Μπορούμε να βρούμε διανύσματα $x_1, \dots, x_n \in X$ και $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ που ικανοποιούν τις $\|x_i\| = 1$, $\|x_i^*\| = 1$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$.*

Απόδειξη. Έστω $e_1, e_2, \dots, e_n$ μια βάση του X. Κάθε $y \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Για κάθε επιλογή n διανυσμάτων $y_1, \dots, y_n \in X$, γράφουμε

$$y_k = \sum_{i=1}^n y_{ki} e_i, \quad (k = 1, \dots, n). \tag{7.2.3}$$

Τότε, τα $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$|\det(y_{ki})_{i,k=1}^n| > 0. \tag{7.2.4}$$

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, ορίζουμε $F : X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$ με

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \det(y_{ki}) \tag{7.2.5}$$

και γράφουμε f για τον περιορισμό της F στο $S_X \times \cdots \times S_X$. Η f είναι $\|\cdot\|$-συνεχής: Αν $y_k^{(m)} \in S_X$, και $\|y_k^{(m)} - y_k\| \to 0$, τότε η ισοδυναμία της $\|\cdot\|$ με την Ευκλείδεια νόρμα δείχνει ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^n (y_{ki} - y_{ki}^{(m)})e_i\right\| \geq c\left(\sum_{i=1}^n |y_{ki} - y_{ki}^{(m)}|^2\right)^{1/2} \tag{7.2.6}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα e_i, άρα $y_{ki}^{(m)} \to y_{ki}$ για κάθε $i, k \leq n$. Τότε,

$$f(y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) = \det(y_{ki}^{(m)}) \to \det(y_{ki}) = f(y_1, \dots, y_m). \tag{7.2.7}$$

Έπεται ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποια n-άδα $(x_1, \dots, x_n) \in S_X \times \cdots \times S_X$. Η f είναι περιττή ως προς κάθε y_k, και προφανώς υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητες n-άδες $(y_1, \dots, y_n)$ στο πεδίο ορισμού της. Άρα, στο σημείο μεγίστου έχουμε

$$f(x_1, \dots, x_n) > 0 \quad \text{και} \quad |f(y_1, \dots, y_n)| \leq f(x_1, \dots, x_n) \tag{7.2.8}$$

για κάθε $y_1, \dots, y_n \in S_X$. Για $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε

$$x_i^*(x) := \frac{F(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}. \tag{7.2.9}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι σταθερός και διάφορος του μηδενός, ενώ ο αριθμητής είναι ορίζουσα με μεταβλητή τη στήλη του x (άρα, τα x_i^* είναι γραμμικά συναρτησοειδή). Επίσης,

(α) $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, άρα $\|x_i^*\| \geq x_i^*(x_i) = 1$, και

(β) Αν $\|x\| = 1$, τότε

$$|x_i^*(x)| = \frac{|f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)|}{|f(x_1, \dots, x_n)|} \leq 1, \tag{7.2.10}$$

άρα $\|x_i^*\| \leq 1$.

Τα (α) και (β) δίνουν το ζητούμενο. □

Με τη βοήθεια του Λήμματος του Auerbach, μπορούμε να δώσουμε μια πρώτη εκτίμηση για την απόσταση Banach-Mazur μεταξύ ενός χώρου X διάστασης n και του ℓ_1^n.

Θεώρημα 7.2.3. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X ισχύει η*

$$d(X,\ell_1^n)\le n. \tag{7.2.11}$$

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα είναι ισομετρικά ισόμορφος με χώρο της μορφής $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$.

Από το Λήμμα του Auerbach, υπάρχουν $x_1,\ldots,x_n\in X$ και $x_1^*,\ldots,x_n^*\in X^*$ με $\|x_i\|=1$, $\|x_i^*\|=1$ και $x_i^*(x_j)=\delta_{ij}$. Από την τελευταία ιδιότητα έπεται (άσκηση) ότι τα $x_1,\ldots,x_n$ σχηματίζουν βάση του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, για κάθε $t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|\le\sum_{i=1}^n|t_i| \tag{7.2.12}$$

και για κάθε $j\le n$ ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|\ge\left|x_j^*\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)\right|=|t_j|, \tag{7.2.13}$$

συνεπώς,

$$\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|\ge\max_{1\le j\le n}|t_j|\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|t_i|. \tag{7.2.14}$$

Ορίζουμε $T:\ell_1^n\to X$ με $T(e_i)=x_i$. Τότε, για κάθε $y=\sum_{i=1}^n t_ie_i\in\ell_1^n$ έχουμε

$$\|T(y)\|=\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|\le\sum_{i=1}^n|t_i|=\|y\|_{\ell_1^n} \tag{7.2.15}$$

και

$$\|T(y)\|=\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|t_i|=\frac{1}{n}\|y\|_{\ell_1^n}. \tag{7.2.16}$$

Δηλαδή, για κάθε $y\in\ell_1^n$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\|y\|_{\ell_1^n}\le\|Ty\|\le\|y\|_{\ell_1^n}. \tag{7.2.17}$$

Από την πρώτη ανισότητα βλέπουμε ότι $\|T^{-1}\|\le n$, ενώ από τη δεύτερη ότι $\|T\|\le 1$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το Θεώρημα 7.2.3 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την απόσταση Banach-Mazur δίνουν ένα άνω φράγμα για την απόσταση οποιωνδήποτε n-διάστατων χώρων X και Y.

Πόρισμα 7.2.4. *Αν X και Y είναι n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X,Y)\le n^2$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $d(X,Y)\le d(X,\ell_1^n)\cdot d(\ell_1^n,Y)\le n\cdot n=n^2$. □

7.3 Το Banach-Mazur compactum

Το γεγονός ότι ο λογάριθμος της απόστασης Banach-Mazur μοιάζει πολύ με μετρική, οδηγεί στην ιδέα να ορίσουμε τον «μετρικό χώρο των n-διάστατων χώρων». Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{B}_n$ η κλάση όλων των n-διάστατων χώρων με νόρμα. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{B}_n$, θέτοντας

$$X \sim Y \Leftrightarrow d(X,Y) = 1, \tag{7.3.1}$$

δηλαδή αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y. Συμβολίζουμε (πάλι) με $\mathcal{B}_n$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\sim$, και ορίζουμε τη μετρική ρ που επάγεται από την $\log d$ στο $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n$: Αν $[X],[Y]$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των X και Y, θέτουμε

$$\rho([X],[Y]) = \log d(X,Y). \tag{7.3.2}$$

Η ρ είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n,\rho)$ ονομάζεται *Banach-Mazur compactum.* Στη συνέχεια ταυτίζουμε την $[X]$ με τον X, γιατί σε όλα τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν, ισομετρικά ισόμορφοι χώροι ουσιαστικά συμπίπτουν. Ο όρος compactum δικαιολογείται από την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 7.3.1. *Το Banach-Mazur compactum $(\mathcal{B}_n,\rho)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Το Λήμμα του Auerbach εξασφαλίζει ότι για κάθε $[X] \in \mathcal{B}_n$ υπάρχει $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \in [X]$ ώστε

$$\frac{1}{n}\|x\|_{\ell_1^n} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\ell_1^n} \tag{7.3.3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Γράφουμε Φ_n για το σύνολο όλων των νορμών στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την (7.3.3) και θέτουμε

$$\mathcal{A}_n = \{f = F|_{S_{\ell_1^n}} \mid F \in \Phi_n\}, \tag{7.3.4}$$

το σύνολο των περιορισμών των $F \in \Phi_n$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n. Σε κάθε $f \in \mathcal{A}_n$, αντιστοιχεί ένας χώρος $(\mathbb{R}^n, F)$ που ανήκει σε κάποια κλάση $[X]_F \in \mathcal{B}_n$.

Θεωρούμε το $\mathcal{A}_n$ σαν υποσύνολο του $C(S_{\ell_1^n})$ με τη συνήθη μετρική $\|f-g\|_\infty$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι ισοσυνεχές, ομοιόμορφα φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του $C(S_{\ell_1^n})$.

(α) Το $\mathcal{A}_n$ είναι ισοσυνεχές: Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \varepsilon$. Αν $x,\, y \in S_{\ell_1^n}$ με $\|x-y\|_{\ell_1^n} < \delta$ και $f \in \mathcal{A}_n$, τότε $f = \|\cdot\|\,|_{S_{\ell_1^n}}$ για κάποια $\|\cdot\| \in \Phi_n$. Άρα,

$$|f(x)-f(y)| = \Big|\|x\|-\|y\|\Big| \leq \|x-y\| \leq \|x-y\|_{\ell_1^n} < \delta = \varepsilon. \tag{7.3.5}$$

(β) Το $\mathcal{A}_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο: Έστω $f \in \mathcal{A}_n$. Τότε, υπάρχει νόρμα $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\ell_1^n}$ ώστε $f = \|\cdot\|\,|_{S_{\ell_1^n}}$, άρα

$$\max_{x\in S_{\ell_1^n}} |f(x)| = \max_{x\in S_{\ell_1^n}} \|x\| \leq \max_{x\in S_{\ell_1^n}} \|x\|_{\ell_1^n} = 1. \tag{7.3.6}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι κλειστό, άρα το Θεώρημα Ascoli μας εξασφαλίζει ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι συμπαγές.

Ορίζουμε τώρα μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$ ως εξής: αν $f \in \mathcal{A}_n$, τότε υπάρχει $\|\cdot\|_f$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $\|\cdot\|_f|_{S_{\ell_1^n}} = f$ και $\frac{1}{n}\|\cdot\|_{\ell_1^n} \leq \|\cdot\|_f \leq \|\cdot\|_{\ell_1^n}$. Θέτουμε $\phi(f) = [X_f]$, όπου $X_f = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_f)$. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι *επί*. Αφού ο $\mathcal{A}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_\infty$, αν δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής, θα συμπεράνουμε ότι ο $\phi(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι $f_m, f \in \mathcal{A}_n$ και ότι $f_m \to f$ ομοιόμορφα στην $S_{\ell_1^n}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $X_{f_m} \to X_f$ ως προς την απόσταση Banach-Mazur.

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I_m : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_m) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού η $\|\cdot\|_m$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\|\cdot\|$ στην $S_{\ell_1^n}$, υπάρχει $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m \geq m_0$ και κάθε $x \in S_{\ell_1^n}$, $\Big|\|x\|_m - \|x\|\Big| < \varepsilon$. Άρα,

$$\|x\| \leq \|x\|_m + \varepsilon \leq \|x\|_m + \varepsilon n\|x\|_m = (1+\varepsilon n)\|x\|_m \tag{7.3.7}$$

και

$$\|x\|_m \leq \|x\| + \varepsilon \leq (1+\varepsilon n)\|x\|. \tag{7.3.8}$$

Αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}} \in S_{\ell_1^n}$, οπότε για κάθε $m \geq m_0$ έχουμε

$$\Big\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}}\Big\| \leq (1+\varepsilon n)\Big\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}}\Big\|_m \quad \Longrightarrow \quad \|x\| \leq (1+\varepsilon n)\|x\|_m. \tag{7.3.9}$$

Δηλαδή, $\|I_m\| \leq 1 + \varepsilon n$. Όμοια, $\|x\|_m \leq (1+\varepsilon n)\|x\|$, άρα

$$\|I_m^{-1}\| \leq (1+\varepsilon n). \tag{7.3.10}$$

Έπεται ότι

$$d(\|\cdot\|_m, \|\cdot\|) \leq \|I_m\| \cdot \|I_m^{-1}\| \leq (1+\varepsilon n)^2 \tag{7.3.11}$$

για κάθε $m \geq m_0$. Άρα,

$$d(\|\cdot\|_m, \|\cdot\|) \to 1, \tag{7.3.12}$$

όταν το $m \to \infty$. □

7.4 Ελλειψοειδές μέγιστου όγκου ενός κυρτού σώματος

Ορισμός 7.4.1. *Ελλειψοειδές* στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\}, \tag{7.4.1}$$

όπου $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα).

Πρόταση 7.4.2. *Ένα κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $E = T(B_2^n)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ελλειψοειδές, δηλαδή ορίζεται από την (7.4.1) για κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ και κάποιους $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$. Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \dots, n$. Ο T είναι προφανώς αντιστρέψιμος, και $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν υπάρχει $y = \sum_{j=1}^n t_j v_j \in B_2^n$ με $x = Ty$. Τότε όμως, η ισότητα

$$\sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \sum_{j=1}^n t_j\alpha_j v_j, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n t_i^2 \tag{7.4.2}$$

δείχνει ότι $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν $x \in E$, δηλαδή $E = T(B_2^n)$.
Αντίστροφα, έστω $T \in GL(n)$ και $E = T(B_2^n)$. Αν γράψουμε $S = T^{-1}$, έχουμε

$$\|x\|_E^2 = \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^2 = \|Sx\|_2^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle. \tag{7.4.3}$$

Ο S^*S είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα γράφεται στη μορφή U^*DU όπου D διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\alpha_1^{-2}, \dots, \alpha_n^{-2}$ (όπου α_i θετικοί πραγματικοί αριθμοί) και ο U είναι ορθογώνιος πίνακας. Θεωρούμε το διαγώνιο πίνακα $D_1 = \sqrt{D}$ με διαγώνια στοιχεία τα $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος, έχουμε $S^*S = A^2$, όπου $A = U^*D_1U$. Δηλαδή,

$$\|x\|_E^2 = \langle A^2x, x\rangle = \|Ax\|_2^2 = \|D_1Ux\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle Ux, e_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2}, \tag{7.4.4}$$

όπου τα $v_i = U^*e_i$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $x \in E$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η (7.4.1) για τα συγκεκριμένα v_i και α_i, δηλαδή το E είναι ελλειψοειδές. □

Παρατήρηση. Από την απόδειξη είναι φανερό ότι ο όγκος του E ισούται με

$$|E| = |B_2^n| \prod_{i=1}^n \alpha_i. \tag{7.4.5}$$

Θεωρούμε τώρα ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ο F. John (1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Θα λέμε ότι το E είναι το **ελλειψοειδές μέγιστου όγκου** του K. Θα δούμε ταυτόχρονα ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχει το K και έχει ελάχιστο όγκο:

Θεώρημα 7.4.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \supseteq K$ με ελάχιστο όγκο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F}(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχουν το K και ορίζουμε

$$V = \inf\{|E| : \ E \in \mathcal{F}(K)\} > 0. \tag{7.4.6}$$

Υπάρχει ακολουθία $T_m \in GL(n)$ για την οποία έχουμε $E_m = T_m^{-1}(B_2^n) \supseteq K$ και

$$|E_m| = \frac{|B_2^n|}{|\det(T_m)|} \to V. \tag{7.4.7}$$

Αφού $\|T_m : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{k_m}\}$ και $S \in L(\mathbb{R}^n)$ με $T_{k_m} \to S$. Τότε,

$$|\det(S)| = |B_2^n|/V > 0, \tag{7.4.8}$$

άρα $S \in GL(n)$. Ορίζουμε $E = S^{-1}(B_2^n)$. Τότε,

$$\|S : X_K \to \ell_2^n\| = \lim_{m\to\infty} \|T_{k_m} : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1, \tag{7.4.9}$$

άρα $E \supseteq K$. Αφού $|E| = V$, το E είναι ένα ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει τον ελάχιστο δυνατό όγκο.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μόνο ελλειψοειδές με αυτή την ιδιότητα. Έστω ότι τα E_1 και E_2 περιέχουν το K και έχουν ελάχιστο όγκο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_1 = B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle^2/\alpha_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{7.4.10}$$

Θεωρούμε ένα τρίτο ελλειψοειδές, το

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1+\alpha_i^{-2})\langle x, v_i\rangle^2 \leq 1 \right\}. \tag{7.4.11}$$

Αφού $F \supseteq E_1 \cap E_2 \supseteq K$, έχουμε

$$|F| \geq |E_1| = |E_2| = |B_2^n|, \tag{7.4.12}$$

άρα $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Παίρνοντας υπόψιν την (7.4.5), γράφουμε την (7.4.12) στη μορφή

$$\begin{aligned} 1 = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 &\leq \prod_{i=1}^n \frac{2}{1+\alpha_i^{-2}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i^2}. \end{aligned}$$

Όμως, $2\alpha_i \leq 1+\alpha_i^2$ για κάθε $i=1,\ldots,n$ με ισότητα μόνο αν $\alpha_i = 1$. Άρα, $\alpha_i = 1$, $i=1,\ldots,n$. Έπεται ότι $E_1 = E_2$. □

Το Θεώρημα 7.4.3 και ένα απλό επιχείρημα δυϊσμού εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του K.

Θεώρημα 7.4.4. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \in \mathcal{E}(K)$ με μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.4.3 υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές F ελάχιστου όγκου του K°. Θεωρούμε το $E = F^\circ$. Τότε $E \subseteq K$, το E είναι ελλειψοειδές (άσκηση) και αν E_1 είναι ένα άλλο ελλειψοειδές με $E_1 \subseteq K$, τότε $E_1^\circ \supseteq K^\circ$, άρα $|E_1^\circ| \geq |F|$. Τότε,

$$|E_1| = \frac{|B_2^n|^2}{|E_1^\circ|} \leq \frac{|B_2^n|^2}{|F|} = |E|. \tag{7.4.13}$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $E_1^\circ = F$, δηλαδή $E_1 = E$. Άρα, το E είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. □

7.5 Το θεώρημα του John: στοιχειώδης απόδειξη

Ο F. John (1948) έδειξε ότι αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$. Άμεση συνέπεια αυτού του ισχυρισμού είναι ένα άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur τυχόντος n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον ℓ_2^n.

Θεώρημα 7.5.1. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε $d(X,\ell_2^n) \leq \sqrt{n}$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B_X του X και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου E της B_X. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε $E = T^{-1}(B_2^n)$. Τότε, $T(B_X) \subseteq B_2^n$ και η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του $T(B_X)$. Αν δεχτούμε το θεώρημα του John, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq T(B_X) \subseteq B_2^n. \tag{7.5.1}$$

Έπεται ότι

$$\|T : X \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to X\| \leq 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}, \tag{7.5.2}$$

άρα, $d(X,\ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. □

Το Θεώρημα 7.5.1 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d μας δίνουν ένα άνω φράγμα για τη διάμετρο του Banach-Mazur compactum.

Θεώρημα 7.5.2. *Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X,Y) \leq n$.* □

Δίνουμε τώρα μια στοιχειώδη απόδειξη του Θεωρήματος του John:

Θεώρημα 7.5.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Τότε,*

$$B_2^n \subseteq \sqrt{n}K. \tag{7.5.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει x στο σύνορο του K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο της $(1/\sqrt{n})B_2^n$. Αλλάζοντας συντεταγμένες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του K στο x είναι παράλληλο με το $\{x : x_1 = 0\}$. Δηλαδή,

$$K \subset P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq \frac{1}{c} \right\}, \tag{7.5.4}$$

όπου $c > \sqrt{n}$. Για κάθε $a, b > 0$ ορίζουμε το ελλειψοειδές

$$E_{a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^2 x_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{7.5.5}$$

Ισχυρισμός. Αν $\frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leq 1$, τότε $K \subseteq E_{a,b}$.

Πράγματι: αν $y \in K$, τότε $y \in P \cap B_2^n$. Άρα,

$$|y_1| \leq \frac{1}{c} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq 1. \tag{7.5.6}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} a^2 y_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} y_i^2 &= (a^2 - b^2) y_1^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &\leq \frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $y \in E_{a,b}$. □

Ο όγκος του $E_{a,b}$ ισούται με $|E_{a,b}| = |B_2^n|/(ab^{n-1})$. Αν λοιπόν $ab^{n-1} > 1$, τότε $|E_{a,b}| < |B_2^n|$. Με την υπόθεση ότι $c > \sqrt{n}$, θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$ab^{n-1} > 1 \quad \text{και} \quad \frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \leq 1. \tag{7.5.7}$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έχουμε βρεί ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει όγκο γνήσια μικρότερο από τον όγκο της B_2^n.
Για κάθε $\varepsilon \in (0,1/2)$, θέτουμε $b_\varepsilon = 1-\varepsilon$ και $a_\varepsilon = (1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{n-1}$. Τότε,

$$a_\varepsilon b_\varepsilon^{n-1} = [(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)]^{n-1} = (1+\varepsilon^2-2\varepsilon^3)^{n-1} > 1. \tag{7.5.8}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{a_\varepsilon^2-b_\varepsilon^2}{c^2}+b_\varepsilon^2 &= \frac{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{2(n-1)}}{c^2}+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-\varepsilon)^2 \\ &= \frac{1}{c^2}[1+2(n-1)\varepsilon+O(\varepsilon^2)]+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-2\varepsilon+\varepsilon^2) \\ &= 1+2\varepsilon\left(\frac{n}{c^2}-1\right)+O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Αφού $(n/c^2)-1<0$, είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 1 αν αφήσουμε το $\varepsilon\to 0^+$. Για μικρό λοιπόν $\varepsilon>0$, το ελλειψοειδές $E_{a_\varepsilon,b_\varepsilon}$ μας οδηγεί σε άτοπο. $\square$

7.6 Σημεία επαφής και η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η B_2^n. Το $u\in\mathbb{R}^n$ λέγεται *σημείο επαφής* των K και B_2^n αν $\|u\|_2=\|u\|_K=1$, δηλαδή αν $x\in \mathrm{bd}(K)\cap\mathrm{bd}(B_2^n)$. Η «πλήρης έκδοση» του θεωρήματος του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 7.6.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m>0$ και σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ των K και B_2^n ώστε*

$$x=\sum_{j=1}^m \lambda_j\langle x,u_j\rangle u_j \tag{7.6.1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις. Το Θεώρημα 7.6.1 λέει ότι η ταυτοτική απεικόνιση I του $\mathbb{R}^n$ αναπαρίσταται στη μορφή

$$I=\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j\otimes u_j, \tag{7.6.2}$$

όπου $u_j\otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j\otimes u_j)(x)=\langle x,u_j\rangle u_j$.

Από την (7.6.1) έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2. \tag{7.6.3}$$

Επίσης, παίρνοντας $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \|e_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle e_i, u_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \langle e_i, u_j\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = n. \tag{7.6.4}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Από την (7.6.4), αν υπάρχει η ζητούμενη αναπαράσταση θα πρέπει να ισχύει $\sum(\lambda_j/n) = 1$. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι ο I/n γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός προβολών της μορφής $u \otimes u$, όπου u σημείο επαφής των K και B_2^n. Ορίζουμε

$$T = \{u \otimes u : \|u\|_2 = \|u\|_K = 1\}, \tag{7.6.5}$$

και θα δείξουμε ότι $I/n \in \mathrm{conv}(T)$. Παρατηρήστε ότι το $\mathrm{conv}(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και ότι $T \neq \emptyset$: αν η B_2^n δεν ακουμπούσε το σύνορο του K, θα μπορούσαμε να βρούμε $r > 1$ ώστε $rB_2^n \subseteq K$, οπότε η B_2^n δεν θα ήταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Έστω ότι $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$. Από διαχωριστικό θεώρημα, μπορούμε να βρούμε $\phi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $r \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, A\rangle \tag{7.6.6}$$

για κάθε $A \in \mathrm{conv}(T)$. Ειδικότερα, για κάθε σημείο επαφής u των K και B_2^n έχουμε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, u \otimes u\rangle. \tag{7.6.7}$$

Οι πίνακες I/n και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί, οπότε παίρνοντας τον $\psi = (\phi + \phi^*)/2$ αντί του ϕ έχουμε ότι ο ψ είναι συμμετρικός και εξακολουθεί να ικανοποιεί την

$$\langle \psi, I/n\rangle < r \leq \langle \psi, u \otimes u\rangle \tag{7.6.8}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Έστω $\beta = \mathrm{tr}(\psi)/n$. Αφού $\mathrm{tr}(I/n) = 1$ και $\mathrm{tr}(u \otimes u) = \sum u_i^2 = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \psi - \beta I, I/n \rangle &= \langle \psi, I/n \rangle - \beta \\ &= 0 < r - \beta \\ &\leq \langle \psi - \beta I, u \otimes u \rangle \end{aligned}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Παίρνοντας $B = \psi - \beta I$ και $s = r - \beta$, έχουμε:

Λήμμα 7.6.2. *Αν $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$, τότε υπάρχουν $s > 0$ και B συμμετρικός με $\mathrm{tr}(B) = 0$ με την ιδιότητα*

(7.6.9) $$\langle B, u \otimes u \rangle \geq s$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. □

Για $\delta > 0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το ελλειψοειδές

(7.6.10) $$E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (I + \delta B)x, x \rangle \leq 1\}.$$

[Παρατηρήστε ότι αν $M = \max\{|\langle Bx, y \rangle| : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$ και $0 < \delta < 1/M$, τότε ο $I + \delta B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει συμμετρική θετική τετραγωνική ρίζα S_δ. Αφού $E_\delta = S_\delta^{-1}(B_2^n)$, το E_δ είναι ελλειψοειδές.]

Ορισμός 7.6.3 (ακτινική συνάρτηση)**.** *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε*

(7.6.11) $$\rho_K(\theta) = \max\{t > 0 : t\theta \in K\}.$$

Η $\rho_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ λέγεται ακτινική συνάρτηση του K: «μετράει» την απόσταση του συνόρου του K από το 0 στη διεύθυνση του θ. Αφού $\rho_K(\theta)\theta \in \mathrm{bd}(K)$, έχουμε

(7.6.12) $$\rho_K(\theta) \cdot \|\theta\|_K = 1.$$

Θα δείξουμε ότι $E_\delta \subseteq K$ αν το δ είναι μικρό, δείχνοντας ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$ για κάθε $v \in S^{n-1}$:

1η Περίπτωση: Έστω U το σύνολο των σημείων επαφής των K και B_2^n. Αν $u \in U$ και $v \in S^{n-1}$ με $\|u - v\|_2 < s/2M$, τότε από το Λήμμα 7.6.2,

(7.6.13) $$\langle (I + \delta B)u, u \rangle \geq 1 + \delta s,$$

ενώ

$$\begin{aligned} |\langle v + \delta Bv, v \rangle - \langle u + \delta Bu, u \rangle| &= \delta |\langle Bv, v \rangle - \langle Bu, u \rangle| \\ &\leq \delta |\langle Bv, v - u \rangle| + \delta |\langle Bu, u - v \rangle| \\ &\leq 2M\delta \|u - v\|_2 < \delta s. \end{aligned}$$

Άρα, αν η απόσταση του $v \in S^{n-1}$ από το U είναι μικρότερη από $s/2M$, τότε

$$\langle (I+\delta B)v, v\rangle > 1 + \delta s - \delta s = 1, \tag{7.6.14}$$

δηλαδή $v \notin E_\delta$. Όμως, $v \in B_2^n \subseteq K$ για κάθε $v \in S^{n-1}$. Άρα, σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\rho_{E_\delta}(v) < 1 \leq \rho_K(v). \tag{7.6.15}$$

2η Περίπτωση: Έστω V το σύνολο των $v \in S^{n-1}$ για τα οποία $d(v,U) \geq s/2M$. Τότε, το V είναι συμπαγές και $r = \max\{\|v\|_K : v \in V\} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \min\{\langle Bv, v\rangle : v \in V\}$. Αν $0 < \delta < (1-r^2)/|\lambda|$, τότε

$$\langle (I+\delta B)(v/\|v\|_K), v/\|v\|_K\rangle = \frac{1+\delta\langle Bv, v\rangle}{\|v\|_K^2} \geq \frac{1+\delta\lambda}{r^2} > 1, \tag{7.6.16}$$

δηλαδή $v/\|v\|_K \notin E_\delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \frac{1}{\|v\|_K} = \rho_K(v)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

Λήμμα 7.6.4. *Υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε $E_\delta \subseteq K$ για κάθε $0 < \delta < \delta_0$.* □

Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε άτοπο: Παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο $I + \delta B$ να είναι θετικά ορισμένος και το ελλειψοειδές E_δ να περιέχεται στο K. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, έχουμε $|E_\delta| \leq |B_2^n|$. Όμως,

$$|E_\delta| = |S_\delta^{-1}(B_2^n)| = |B_2^n|/\sqrt{\det(I+\delta B)}. \tag{7.6.17}$$

Άρα, $\det(I+\delta B) \geq 1$. Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μας δίνει

$$[\det(I+\delta B)]^{1/n} \leq \frac{\mathrm{tr}(I+\delta B)}{n} = 1 + \delta\frac{\mathrm{tr}(B)}{n} = 1, \tag{7.6.18}$$

αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$. Για να ισχύουν τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τότε όμως, όλες οι ιδιοτιμές του $I+\delta B$ είναι ίσες, δηλαδή $I+\delta B = \mu I$. Έπεται ότι ο B είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, και αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$ παίρνουμε $B = 0$.

Αυτό είναι άτοπο, γιατί από το Λήμμα 7.6.2 έχουμε $\langle Bu, u\rangle \geq s > 0$, $u \in U$. Συνεπώς, $I/n \in \mathrm{conv}(T)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη για το θεώρημα του John:

Πρόταση 7.6.5. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{7.6.19}$$

του Θεωρήματος 7.6.1. Αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j \rangle \leq \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, m. \tag{7.6.20}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j τα K και B_2^n έχουν το ίδιο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το u_j (για τη μπάλα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο σε κάθε σημείο $u \in S^{n-1}$ έχει κάθετο διάνυσμα το u). Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j \rangle \leq 1$, και λόγω συμμετρίας του K,

$$|\langle x, u_j \rangle| \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in K. \tag{7.6.21}$$

Δηλαδή,

$$\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_2 = 1 \tag{7.6.22}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Έστω τώρα $x \in K$. Από τις (7.6.3), (7.6.4) και (7.6.21) παίρνουμε

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{7.6.23}$$

Δηλαδή, $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}$. Άρα, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n} B_2^n$. □

Παρατήρηση 7.6.6. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K°. Επίσης, η (7.6.22) δείχνει ότι κάθε σημείο επαφής των K και B_2^n είναι σημείο επαφής των K° και B_2^n. Άρα, αλλάζοντας τους ρόλους των K και K°, βλέπουμε ότι η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μέσω σημείων επαφής εξασφαλίζεται και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς ελάχιστου όγκου.

7.7 Λήμματα Dvoretzky-Rogers

Σε αυτή την Παράγραφο υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό σώμα K έχει σαν ελλειψοειδές μέγιστου ή ελάχιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Στην §7.6 αποδείξαμε το θεώρημα του John για την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης: υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{7.7.1}$$

Συνέπειες της (7.7.1) είναι οι εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \tag{7.7.2}$$

και

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{7.7.3}$$

Χρησιμοποιώντας την (7.7.1) μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν πολλά σημεία επαφής ανάμεσα στο K και στην B_2^n.

Πρόταση 7.7.1. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου ή μέγιστου όγκου του K, τότε για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει σημείο επαφής των K και B_2^n με την ιδιότητα:*

$$\langle u, Tu \rangle \geq \frac{\mathrm{tr} T}{n}. \tag{7.7.4}$$

Απόδειξη. Από την (7.7.1) έχουμε

$$\mathrm{tr} T = \langle T, I \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle T, u_j \otimes u_j \rangle. \tag{7.7.5}$$

Παίρνοντας υπόψιν και την $\sum \lambda_j = n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $j \leq m$ με την ιδιότητα

$$\langle u_j, Tu_j \rangle = \langle T, u_j \otimes u_j \rangle \geq \frac{\mathrm{tr} T}{n}. \tag{7.7.6}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει αν πάρουμε $u = u_j$. □

Οι Dvoretzky και Rogers έδειξαν ακριβή αποτελέσματα γιά την κατανομή των σημείων επαφής του K με την B_2^n. Ολα τους εκφράζουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο την αρχή ότι υπάρχουν πολλές και «αρκετά ορθογώνιες» διευθύνσεις στις οποίες οι δύο νόρμες $\|\cdot\|_K$ και $\|\cdot\|_2$ συγκρίνονται καλά.

Πρόταση 7.7.2. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*

$$\left(\frac{n-i+1}{n} \right)^{1/2} \leq \|y_i\|_K \leq \|y_i\|_2 = 1 \tag{7.7.7}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τα y_i επαγωγικά. Σαν y_1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο επαφής των K και B_2^n. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Θέτουμε $F_i = \text{span}\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$. Τότε, $\text{tr}(P_{F_i^\perp}) = n - i + 1$, και από την Πρόταση 7.7.1 υπάρχει σημείο επαφής u_i ώστε

$$\|P_{F_i^\perp} u_i\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_i^\perp} u_i \rangle \geq \frac{n-i+1}{n}. \tag{7.7.8}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έπεται ότι

$$\|P_{F_i} u_i\|_K \leq \|P_{F_i} u_i\|_2 \leq \sqrt{(i-1)/n}. \tag{7.7.9}$$

Ορίζουμε $y_i = P_{F_i^\perp} u_i / \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2$. Τότε,

$$1 = \|y_i\|_2 \geq \|y_i\|_K \geq |\langle u_i, y_i \rangle| = \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2 \tag{7.7.10}$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την (7.7.8). □

Πόρισμα 7.7.3. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν $k = [n/2] + 1$, μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $y_1, \ldots, y_k$ ώστε*

$$\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1 \tag{7.7.11}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. □

Το επόμενο λήμμα «τύπου Dvoretzky-Rogers» αποδείχθηκε από τους Szarek και Talagrand (1988).

Πρόταση 7.7.4. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Για κάθε $k \leq n$, μπορούμε να βρούμε σημεία επαφής $y_1, \ldots, y_k$ των K και B_2^n, με την εξής ιδιότητα: Αν $j \in \{1, \ldots, k\}$ και $F_j = \text{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε*

$$|P_{F_j^\perp}(y_j)| \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{7.7.12}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$.

Απόδειξη. Έστω $k \leq n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{7.7.13}$$

Από όλες τις k-άδες που μπορούμε να επιλέξουμε μέσα από το $\{u_1, \ldots, u_m\}$, επιλέγουμε εκείνα τα $y_1 = u_{i_1}, \ldots, y_k = u_{i_k}$ για τα οποία μεγιστοποιείται ο k-διάστατος όγκος $|\text{conv}\{\pm u_{i_1}, \ldots, \pm u_{i_k}\}|$. Αν θέσουμε $F_j = \text{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 \geq \|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2 \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, k \text{ και } i = 1, \ldots, m. \tag{7.7.14}$$

Όμως, από την Πρόταση 7.7.1, υπάρχει $i \leq m$ ώστε

$$\|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_j^\perp}(u_i)\rangle \geq \frac{\mathrm{tr}(P_{F_j^\perp})}{n} = \frac{n-k+1}{n}. \tag{7.7.15}$$

Άρα,

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 = \max_{i\leq m} \|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2 \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{7.7.16}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. □

7.8 Ασκήσεις

1. Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_q \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|x\|_q.$$

2. Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

3. Δείξτε ότι: αν $y_1, \ldots, y_m \in \ell_2^n$ τότε

$$\sum_{j=1}^m \|y_j\|_2^2 = \mathrm{Ave}_{\varepsilon=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j y_j\right\|_2^2,$$

όπου με Ave συμβολίζουμε το μέσο όρο ως προς όλες τις δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$.

4. Έστω $2 \leq q \leq \infty$ και έστω $T : \ell_q^n \to \ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T : \ell_q^n \to \ell_2^n\| = 1$.
(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2 \leq n^{2/q},$$

και συμπεράνατε ότι $\|Te_j\|_2 \leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ για κάποιον $j \leq n$.
(β) Δείξτε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_q^n\| \geq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

5. Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

6. Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d και την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι: αν $2 \leq p < q \leq +\infty$ τότε

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

7. Έστω $1 \leq p < q \leq 2$. Χρησιμοποιώντας την $d(X^*, Y^*) = d(X, Y)$ δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

8. Οι πίνακες Walsh είναι ορθογώνιοι $2^k \times 2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά ως εξής: Θέτουμε $W_0 = [1]$, και

$$W_k = \begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 1.$$

Δείξτε ότι ο $\frac{1}{2^{k/2}} W_k$ είναι ορθογώνιος πίνακας με την ιδιότητα: όλες του οι συντεταγμένες έχουν απόλυτη τιμή $\frac{1}{2^{k/2}}$.

9. Έστω $n = 2^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο τελεστής που αντιστοιχεί στον $\frac{1}{2^{k/2}} W_k$.
(α) Παρατηρήστε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1$$

και συμπεράνατε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_\infty^n \to \ell_1^n\| \leq n.$$

(β) Παρατηρήστε ότι $\|Te_j\|_\infty = 1/\sqrt{n}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και συμπεράνατε ότι

$$\|T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(γ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leq \sqrt{n}$.

10*. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leq c\sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n$ ισομορφισμός, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\frac{1}{d} B_\infty^n \subseteq T(B_1^n) \subseteq B_\infty^n,$$

όπου B_∞^n, B_1^n οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_∞^n, ℓ_1^n αντίστοιχα.
(α) Αν $x_j = T(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$|T(B_1^n)| = \frac{2^n}{n!} |\det X|,$$

όπου X ο πίνακας με στήλες τα $x_1,\dots,x_n$. [*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $|B_1^n| = 2^n/n!$.]

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x_1,\dots,x_n \in B_\infty^n$ και την ανισότητα του Hadamard, δείξτε ότι $|\det X| \leq n^{n/2}$.

(γ) Δείξτε ότι $d \geq c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1>0$ σταθερά ανεξάρτητη από τον T και από το n.

(δ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \geq c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1>0$ η σταθερά στο (γ).

12*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m>0$ και σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ των K και B_2^n ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

13. Δίνονται $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j\otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι $\sum_{j=1}^m \|x_j\|_2^2 = n$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1,\dots,a_m$,

$$\left\|\sum_{j=1}^m a_jx_j\right\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^m a_j^2\right)^{1/2}.$$

14*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Δείξτε ότι υπάρχει παραλληλεπίπεδο P ώστε $K\subseteq P$ και

$$|P| \leq 2^n\frac{n^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

15. Έστω $v_1,\dots,v_m\in\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K = \{y\in\mathbb{R}^n : |\langle y, v_j\rangle| \leq 1 \text{ για κάθε } j=1,\dots,m\}$$

ικανοποιεί την $B_2^n\subseteq K\subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha>1$. Δείξτε ότι $m\geq \exp(n/(2\alpha^2))$.

16. Έστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon\in(0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $N\leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$ και $T: X\to \ell_\infty^n$ με την ιδιότητα

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|T(x)\|_{\ell_\infty^n} \leq (1+\varepsilon)\|x\|$$

για κάθε $x\in X$.

Κεφάλαιο 8

Το θεώρημα του Dvoretzky

8.1 Εισαγωγή

Αφετηρία για το θεώρημα του Dvoretzky είναι το εξής Λήμμα των Dvoretzky και Rogers (1950).

Πρόταση 8.1.1. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K. Υπάρχουν $k \simeq \sqrt{n}$ και $y_1, \dots, y_k$ ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ώστε, για κάθε $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \max_{1\le i\le k} |a_i| \le \left\| \sum_{i=1}^k a_i y_i \right\| \le \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2}. \qquad \square \tag{8.1.1}$$

Με αφορμή αυτό το αποτέλεσμα, ο Grothendieck έθεσε το ερώτημα αν είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε το $\max_{i\le k} |a_i|$ με το $\left(\sum_{i\le k} a_i^2\right)^{1/2}$ στην παραπάνω Πρόταση, και ταυτόχρονα να έχουμε $k = k(n) \to \infty$ καθώς το $n \to \infty$. Ισοδύναμα, αν υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ (με το k να «μεγαλώνει» με το n) ώστε

$$B_2^n \cap F \subseteq K \cap F \subseteq cB_2^n \cap F, \tag{8.1.2}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ο Dvoretzky (1960) έδωσε καταφατική απάντηση στο ερώτημα.

Θεώρημα 8.1.2 (Dvoretzky)**.** *Έστω $\varepsilon > 0$ και k φυσικός αριθμός. Υπάρχει $N = N(k, \varepsilon)$ με την εξής ιδιότητα: Αν X είναι χώρος με νόρμα διάστασης $n \ge N$, μπορούμε να βρούμε k-διάστατο υπόχωρο F του X με $d(F, \ell_2^k) \le 1 + \varepsilon$.*

Σε γεωμετρική γλώσσα, το Θεώρημα του Dvoretzky μας λέει ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα αρκετά μεγάλης διάστασης έχει κεντρικές τομές διάστασης k που είναι σχεδόν ελλειψοειδή. Η ακριβής εξάρτηση του $N(k,\varepsilon)$ από τα k και ε μελετήθηκε συστηματικά, και το θεώρημα του Dvoretzky πήρε πολύ πιο συγκεκριμένη ποσοτική μορφή.

Θεώρημα 8.1.3. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν ακέραιος $k \geq c\varepsilon^2(\log 1/\varepsilon)^{-1}\log n$ και k-διάστατος υπόχωρος F του X ο οποίος ικανοποιεί την $d(F,\ell_2^k) \leq 1+\varepsilon$.*

Δηλαδή, το Θεώρημα 8.1.2 ισχύει με $N(k,\varepsilon) = \exp(c\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|k)$.Η αρχική απόδειξη του Dvoretzky έδινε την εκτίμηση $N(k,\varepsilon) = \exp(c\varepsilon^{-2}k^2\log k)$. Η (βέλτιστη ως προς n) εκτίμηση του Θεωρήματος 8.1.3 αποδείχτηκε από τον Milman (1971).

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να περιγράψει την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.3. Ένα από τα βασικότερα στοιχεία της απόδειξης είναι το λεγόμενο *φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου* στην S^{n-1}, το οποίο θα συζητήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

8.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με τη γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x,y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x,y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|}, \tag{8.2.1}$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα και

$$\tilde{A} := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leq s \leq 1\}. \tag{8.2.2}$$

Θα χρειαστούμε τον «τύπο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες»:

Λήμμα 8.2.1 (ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες)**.** *Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = n\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty f(r\theta)r^{n-1}\,dr\,d\sigma(\theta). \tag{8.2.3}$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}, \tag{8.2.4}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x,y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq \|x-y\|_2 \leq \rho(x,y). \tag{8.2.5}$$

Έστω $t > 0$. Η t-περιοχή ενός Borel υποσυνόλου A της S^{n-1} είναι το σύνολο

$$A_t = \{x \in S^{n-1} : \rho(x, A) \leq t\}. \tag{8.2.6}$$

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα. *Έστω $\alpha \in (0,1)$ και*

$$B(x,r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leq r\} \tag{8.2.7}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x, r+t)\big). \tag{8.2.8}$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς τη διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν $\sigma(A) = 1/2$ και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\left(B\big(x, \frac{\pi}{2} + t\big)\right) \tag{8.2.9}$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος της (8.2.9) οδηγούμαστε στην ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 8.2.2. *Έστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2). \tag{8.2.10}$$

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση στην (8.2.10) είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2 n/2)$ τείνει στο 0 καθώς το $n \to \infty$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Επομένως, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = 1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.2 βασίζεται πολύ ισχυρά στη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μια ανισότητα σαν την (8.2.10) και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη της (8.2.10) χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Λήμμα 8.2.3. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A) = |A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel $A \subseteq B_2^n$. Αν $A, C \subseteq B_2^n$ συμπαγή, και*

$$d(A,C) := \min\{\|a-c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0, \tag{8.2.11}$$

τότε

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \tag{8.2.12}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε $\left|\frac{A+C}{2}\right| \geq \min\{|A|, |C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geq \min\{\mu(A), \mu(C)\}. \tag{8.2.13}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leq 4 - \rho^2, \tag{8.2.14}$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n. \tag{8.2.15}$$

Συνδυάζοντας τις (8.2.13) και (8.2.15) βλέπουμε ότι

$$\min\big\{\mu(A), \mu(C)\big\} \leq \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \tag{8.2.16}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.2. Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1\} \tag{8.2.17}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geq \sin\frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}. \tag{8.2.18}$$

Από το Λήμμα 8.2.3 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leq \exp(-d^2 n/8)|B_2^n| \leq \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|. \tag{8.2.19}$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1-2^{-n})|\tilde{C}|$. Συνδυάζοντας με την (8.2.19) βλέπουμε ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leq \frac{1}{1-2^{-n}} \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right). \tag{8.2.20}$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n) \tag{8.2.21}$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Η (8.2.21) είναι εντελώς ανάλογη με την ανισότητα του Θεωρήματος 8.2.1 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. $\square$

Ορισμός 8.2.4 (μέτρο συνέχειας)**.** Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε $\omega_f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ (το μέτρο συνέχειας της f) με

$$\omega_f(t) = \max\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) \leq t,\ x, y \in S^{n-1}\}. \tag{8.2.22}$$

Ορισμός 8.2.5 (μέσος Lévy)**.** Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχει μοναδικός αριθμός $L_f \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$\sigma\left(\{x : f(x) \leq L_f\}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\left(\{x : f(x) \geq L_f\}\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{8.2.23}$$

Ο L_f ονομάζεται *μέσος Lévy* της f.

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι αν το μέτρο συνέχειας της $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ έχει «ομαλή συμπεριφορά» και αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη, τότε οι τιμές της f συγκεντρώνονται ισχυρά (με την έννοια του μέτρου) γύρω από τον μέσο Lévy της f.

Λήμμα 8.2.6. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq \omega_f(\varepsilon)\right) \leq 2c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n). \tag{8.2.24}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $A_f = \{x : f(x) = L_f\}$. Θεωρούμε επίσης τα σύνολα

$$A_f^- = \{x : f(x) \leq L_f\} \quad \text{και} \quad A_f^+ = \{x : f(x) \geq L_f\}. \tag{8.2.25}$$

Από τον ορισμό του μέσου Lévy L_f και από το Θεώρημα 8.2.2, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma\left((A_f^{\pm})_\varepsilon\right) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n}. \tag{8.2.26}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της f ελέγχουμε (άσκηση) ότι

$$(A_f)_\varepsilon = (A_f^+)_\varepsilon \cap (A_f^-)_\varepsilon. \tag{8.2.27}$$

Άρα,

$$\sigma\left((A_f)_\varepsilon\right) \geq 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}. \tag{8.2.28}$$

Αφού $|f(x) - L_f| \leq \omega_f(\varepsilon)$ στο $(A_f)_\varepsilon$, έπεται το συμπέρασμα. □

Αν υποθέσουμε ότι η $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq b|x - y|$ για κάθε $x, y \in S^{n-1}$, τότε $\omega_f(\varepsilon) \leq b\varepsilon$. Από το Λήμμα 8.2.6 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 8.2.7. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Τότε,*

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq b\varepsilon\right) \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n) \tag{8.2.29}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. □

8.3 Το θεώρημα του Dvoretzky

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα διάστασης n. Η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$, δηλαδή υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε

$$\frac{1}{a}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2 \tag{8.3.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι a, b είναι οι μικρότεροι θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει η (8.3.1).

Η συνάρτηση $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ με $r(x) = \|x\|$, είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Γράφουμε L_r για τον μέσο Lévy της r.

Λήμμα 8.3.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει το εξής: αν $m \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$ και $y_1, \ldots, y_m \in S^{n-1}$, τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$,*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon. \tag{8.3.2}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι υπάρχει φυσιολογικό μέτρο πιθανότητας ν στην $O(n)$ το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: αν $x_0 \in S^{n-1}$ και $A \subset S^{n-1}$, τότε

$$\sigma(A) = \nu\{U \in O(n) \,:\, Ux_0 \in A\}. \tag{8.3.3}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in S^{n-1} \,:\, L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon\}. \tag{8.3.4}$$

Από την Πρόταση 8.2.7 έχουμε

$$\sigma(A) \geq 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}. \tag{8.3.5}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ θέτουμε

$$B_i = \{U \in O(n) \,:\, L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon\}. \tag{8.3.6}$$

Οι (8.3.3) και (8.3.5) δείχνουν ότι

$$\nu(B_i) > 1 - 2c_1 e^{-c_2\varepsilon^2 n}. \tag{8.3.7}$$

Αφού $m \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, το $B = \bigcap B_i$ έχει μέτρο

$$\nu(B) \geq 1 - \sum \nu(B_i^c) \geq 1 - 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n/2). \tag{8.3.8}$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε $\nu(B) > 0$ δηλαδή $B \neq \emptyset$. Τότε, αν $U \in B$ παίρνουμε

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon \tag{8.3.9}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Λήμμα 8.3.2 (δ-δίκτυο). *Έστω $\delta \in (0,1)$. Υπάρχει $\mathcal{N} \subset S^{k-1}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε $y \in S^{k-1}$ υπάρχει $x \in \mathcal{N}$ ώστε $\|x - y\|_2 < \delta$.*

(ii) $|\mathcal{N}| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{N} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ένα υποσύνολο της S^{k-1} του οποίου τα σημεία έχουν ανά δύο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του δ και έχει τον μέγιστο δυνατό πληθάριθμο. Τέτοιο υποσύνολο υπάρχει λόγω της συμπάγειας της S^{k-1}.

Τότε, το $\mathcal{N}$ ικανοποιεί το (i): αν όχι, υπάρχει $y \in S^{k-1}$ ώστε $\|x_i - y\|_2 \geq \delta$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$. Όμως τότε, το $\mathcal{N}' = \{x_1, \ldots, x_m, y\}$ είναι ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στην S^{k-1} και οι αποστάσεις τους ανά δύο είναι μεγαλύτερες ή ίσες του δ. Αυτό είναι άτοπο αφού το $\mathcal{N}'$ έχει περισσότερα στοιχεία από το $\mathcal{N}$.

Για το (ii) θεωρούμε τα σύνολα $x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k$, $i \leq m$. Αυτά έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και

$$x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k \subset B_2^k + \frac{\delta}{2}B_2^k \tag{8.3.10}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Συνεπώς,

$$\left|\bigcup_{i=1}^m \left(x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k\right)\right| \leq \left|\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) B_2^k\right|. \tag{8.3.11}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^m \left|\frac{\delta}{2}B_2^k\right| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k|, \tag{8.3.12}$$

δηλαδή,

$$m\left(\frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k| \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k|. \tag{8.3.13}$$

Άρα, $m \leq (1+\frac{2}{\delta})^k$. □

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείχνουμε το εξής.

Πρόταση 8.3.3. *Έστω $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Αν $(1+2/\delta)^k \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, τότε υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ και υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_F : S^{n-1} \cap F$ με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon \tag{8.3.14}$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε υπόχωρο F_0 του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $\dim(F_0) = k$. Από το Λήμμα 8.3.2, υπάρχει δ-δίκτυο $\{y_1, \ldots, y_m\}$ της μοναδιαίας σφαίρας S_{F_0} του F_0, με $m \leq (1+2/\delta)^k$.

Αφού $(1+2/\delta)^k \leq \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, το Λήμμα 8.3.1 δείχνει ότι υπάρχει $U \in O(n)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i \leq m$,

$$L_r - b\varepsilon \leq \|Uy_i\| \leq L_r + b\varepsilon. \tag{8.3.15}$$

Θέτουμε $F := U(F_0)$ και $x_i := Uy_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, το $\{x_1, \ldots, x_m\}$ είναι δ-δίκτυο της S_F, για το οποίο ισχύει

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x_i\| \leq L_r - b\varepsilon. \tag{8.3.16}$$

Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα, θα περάσουμε από το δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F σε ολόκληρη την S_F.

Πρόταση 8.3.4. *Έστω F ένας k-διάστατος υπόχωρος του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ για τον οποίο υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leq \|x\| \leq L_r + b\varepsilon \tag{8.3.17}$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}$. Τότε, για κάθε $y \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \tag{8.3.18}$$

Απόδειξη. Έστω $y \in S_F$. Υπάρχει $x_0 \in \mathcal{N}$ ώστε $\|y - x_0\|_2 = \delta_1 < \delta$. Τότε, $\frac{y-x_0}{\delta_1} \in S_F$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\left\|\frac{y-x_0}{\delta_1} - x_1\right\|_2 = \delta_2 < \delta. \tag{8.3.19}$$

Τότε,

$$\|y - x_0 - \delta_1 x_1\|_2 = \delta_1\delta_2 < \delta^2. \tag{8.3.20}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\left\| y - \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\|_2 \leq \delta^{n+1}, \tag{8.3.21}$$

όπου $\delta_0 = 1$. Αφού $\delta < 1$,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i. \tag{8.3.22}$$

Όμως, $\prod_{j=0}^{i} \delta_j \leq \delta^i$, άρα

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \|x_i\| \leq (L_r + b\varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \\ &= \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \|y\| &\geq \|x_0\| - \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\| \geq L_r - b\varepsilon - \frac{\delta}{1-\delta}(L_r + b\varepsilon) \\ &= \frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta} \tag{8.3.23}$$

για κάθε $y \in S_F$. □

Επιλέγοντας κατάλληλα τα δ, ε, παίρνουμε μια πρώτη εκτίμηση για τη διάσταση των σχεδόν Ευκλείδειων υποχώρων του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Θεώρημα 8.3.5. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα $r(x) = \|x\|$ που ικανοποιεί την $\|x\| \leq b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Αν*

$$k \leq k_X(\varepsilon) := c_3 \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{L_r}{b} \right)^2, \tag{8.3.24}$$

όπου $c_3 > 0$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά, τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon). \tag{8.3.25}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 8.3.4, αν $\zeta, \delta \in (0,1)$ και ο $k \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την $(1+2/\delta)^k \leq \exp(c_2\zeta^2 n/2)$, τότε για τον τυχαίο k-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta} \leq \|x\| \leq \frac{L_r + b\zeta}{1-\delta}. \tag{8.3.26}$$

Για την (8.3.25) αρκεί να επιλέξουμε τα $\delta, \zeta \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$\frac{L_r + b\zeta}{1-\delta} \leq L_r(1+\varepsilon) \tag{8.3.27}$$

και

$$\frac{L_r}{1+\varepsilon} \leq \frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta}. \tag{8.3.28}$$

Αν επιλέξουμε $\zeta = \frac{L_r\delta}{b}$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, παρατηρούμε ότι οι δύο ανισότητες επαληθεύονται.

Μένει να προσδιορίσουμε την ελάχιστη τιμή του k η οποία ικανοποιεί την

$$\left(1 + \frac{6}{\epsilon}\right)^k \leq \exp\left(\frac{c_2}{18}\varepsilon^2 n \left(\frac{L_r}{b}\right)^2\right). \tag{8.3.29}$$

Ζητάμε

$$k \log \frac{6}{\varepsilon} \leq c_2' \varepsilon^2 n \left(\frac{L_r}{b}\right)^2, \tag{8.3.30}$$

οπότε αρκεί να ικανοποιείται η $k \leq k_X(\varepsilon)$. □

Το Θεώρημα 8.3.5 μας λέει ότι η διάσταση των σχεδόν Ευκλείδειων υποχώρων του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ εξαρτάται απο την τάξη της ποσότητας $\frac{L_r}{b}$. Θεωρούμε τη *μέση τιμή* της $r(x) = \|x\|$

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\| \, d\sigma(x). \tag{8.3.31}$$

Τότε, οι L_r και M συγκρίνονται αν το γινόμενο ab δεν είναι «πολύ μεγάλο».

Λήμμα 8.3.6. *Υποθέτουμε ότι η $r(x) = \|x\|$ ικανοποιεί την $\frac{1}{a}|x| \leq \|x\| \leq b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και ότι $ab \leq \sqrt{n}$. Τότε,*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{M}{L_r} \leq c, \tag{8.3.32}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2$, όπου $b \leq \sqrt{n}$. Από την Πρόταση 8.2.7, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma\{x : |r(x) - L_r| \geq b\varepsilon\} \leq 2c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n). \tag{8.3.33}$$

Γράφουμε

$$|M - L_r| \leq \int_{S^{n-1}} |r(x) - L_r|\, d\sigma(x) = \int_0^\infty \sigma\{x : |r(x) - L_r| \geq t\} dt. \tag{8.3.34}$$

Θέτουμε $b\varepsilon = t$. Χρησιμοποιώντας την $b \leq \sqrt{n}$, παίρνουμε

$$|M - L_r| \leq \int_0^\infty 2c_1 \exp(-c_2 t^2) dt = c_4. \tag{8.3.35}$$

Συνεπώς,

$$\left| \frac{M}{L_r} - 1 \right| \leq \frac{c_4}{L_r}. \tag{8.3.36}$$

Όμως, αν $x \in S^{n-1}$ τότε $\|x\| \geq \|x\|_2 \geq 1$. Άρα, $L_r \geq 1$. Έπεται ότι

$$\frac{M}{L_r} \leq c = 1 + c_4. \tag{8.3.37}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, παρατηρούμε ότι

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x) \geq \int_{\{x:\ \|x\| \geq L_r\}} \|x\|\, d\sigma(x) \geq \frac{1}{2} L_r. \tag{8.3.38}$$

Άρα, $M/L_r \geq 1/2$. □

Λήμμα 8.3.7. *Για κάθε $1 \leq m \leq n$ ισχύει*

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j \leq m} |x_j|\, d\sigma(x) \geq c_5 \left(\frac{\log m}{n} \right)^{1/2}, \tag{8.3.39}$$

όπου $c_5 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την $(2\pi)^{-n/2} \exp(-\|x\|_2^2/2)$. Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \max_{j \leq m} |t_j| d\gamma_m(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \max_{j \leq m} |t_j| d\gamma_n(t) \\ &= \lambda_n \int_{S^{n-1}} \max_{j \leq m} |x_j| \sigma(dx), \end{aligned}$$

όπου $\lambda_n \simeq \sqrt{n}$. Όμως,

$$\begin{aligned}\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m}|t_j| < s\right) &= (2\pi)^{-m/2}\int_{-s}^{s}\cdots\int_{-s}^{s}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}t_j^2\right)dt_1\cdots dt_m\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-s}^{s}e^{-t^2/2}dt\right)^m \leq (1-ce^{-s^2/2})^m.\end{aligned}$$

Άρα, αν επιλέξουμε $s \simeq c_1\sqrt{\log m}$, καταλήγουμε στην

$$\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m}|t_j| \geq c_1\sqrt{\log m}\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{8.3.40}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}}\max_{j\leq m}|x_j|\sigma(dx) &\simeq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}^m}\max_{j\leq m}|t_j|d\gamma_m(t)\\ &\geq \frac{c_1\sqrt{\log m}}{\sqrt{n}}\gamma_m\left(t : \max_{j\leq m}|t_j| \geq c_1\sqrt{\log m}\right)\\ &\geq \frac{c_1}{2}\left(\frac{\log m}{n}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το θεώρημα του Dvoretzky. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 8.1.3 (αρκεί να θυμηθείτε τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur).

Θεώρημα 8.3.8. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, διάστασης n, ώστε η B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της B_X. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει υπόχωρος F του X διάστασης $k \geq c\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]\log n$, με την ιδιότητα: για κάθε $x \in S_F$,*

$$(1+\varepsilon)^{-1}L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon). \tag{8.3.41}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του John, έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \|x\|_2 \tag{8.3.42}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, το Λήμμα 8.3.6 δείχνει ότι

$$\frac{1}{2} \leq \frac{M}{L_r} \leq c, \tag{8.3.43}$$

όπου $M = \int_{S^{n-1}}\|x\|\,d\sigma(x)$. Από το λήμμα Dvoretzky-Rogers (Πόρισμα 7.7.3) υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1,\dots,x_n\}$, με $\|x_i\| \geq \frac{1}{2}$ για $i = 1,2,\dots,[\frac{n}{2}]$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις Rademacher $r_i : [0,1] \to \{-1,1\}$ με

$$r_i(t) = \operatorname{sign}\sin(\pi 2^i t). \tag{8.3.44}$$

Τότε, ο τελεστής $T_t : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με

$$T_t\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i \tag{8.3.45}$$

είναι ισομετρία (για όλες, εκτός από πεπερασμένες, τις τιμές του $t \in [0,1]$. Το σ είναι αναλλοίωτο ως προς τις ισομετρίες, άρα

$$M = \int_{S^{n-1}} \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|\, d\sigma(a) = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i\| dt\, d\sigma(a). \tag{8.3.46}$$

Ισχυρισμός. *Για κάθε $j = 1, \dots n$,*

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\right\| dt \geq \|y_j\|. \tag{8.3.47}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές, οπότε υποθέτουμε ότι

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\right\| dt \geq \|y_j\| \tag{8.3.48}$$

για κάθε $j = 1, \dots, n-1$. Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$2\left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i + y_n\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i - y_n\right\|, \tag{8.3.49}$$

οπότε, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) y_i\right\| dt \leq \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\right\| dt. \tag{8.3.50}$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t) y_i\right\| dt \geq \|y_j\| \tag{8.3.51}$$

για κάθε $j = 1, \dots, n-1$, και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώνεται με κυκλική εναλλαγή των y_j. □

Παίρνοντας $y_i = a_i x_i$, έχουμε

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i x_i \right\| dt \geq \max_{1\leq i\leq n} \|a_i x_i\|. \tag{8.3.52}$$

Επιστρέφοντας στην (8.3.46) παίρνουμε

$$M \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq n} \|a_i x_i\| \, d\sigma(a) \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq [\frac{n}{2}]} \|a_i x_i\| \, d\sigma(a). \tag{8.3.53}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το λήμμα Dvoretzky-Rogers έχουμε

$$M \geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq [\frac{n}{2}]} |a_i| \, d\sigma(a), \tag{8.3.54}$$

και από το Λήμμα 8.3.7 έπεται ότι

$$M \geq c\sqrt{\frac{\log [\frac{n}{2}]}{n}} \geq c'\sqrt{\frac{\log n}{n}}. \tag{8.3.55}$$

Αφού $L_r \geq cM$, από το Θεώρημα 8.3.5 συμπεραίνουμε ότι, αν

$$\begin{aligned} k = [k_X(\varepsilon)] &= \left[c_3 \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{L_r}{b}\right)^2 \right] \\ &\geq c_3' \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{M}{b}\right)^2 \\ &\geq c_3'' \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] \log n, \end{aligned}$$

τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leq \|x\| \leq L_r(1+\varepsilon). \tag{8.3.56}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.3. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/4$, οπότε $(1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$.

Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του $T(B_X)$ να είναι η B_2^n. Ορίζουμε $r(x) = \|x\|_{T(B_X)}$ και θεωρούμε τον μέσο L_r της r. Από το Θεώρημα 8.3.8, υπάρχουν $k \geq c(\delta)\log n = c(\varepsilon)\log n$ και k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$\frac{L_r}{(1+\delta)} (B_2^n \cap F) \subseteq T(B_X) \cap F \subset (1+\delta) L_r (B_2^n \cap F). \tag{8.3.57}$$

Αν ορίσουμε $F_1 = T^{-1}(F)$, έχουμε $d(F_1, \ell_2^k) \leq (1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$. □

Η γεωμετρική διατύπωση του Θεωρήματος 8.1.3 είναι η εξής: Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $k \geq c\varepsilon^2 \log n$, υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, και ελλειψοειδές E στον F ώστε

$$E \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)E. \tag{8.3.58}$$

8.4 Ασκήσεις

1. Έστω $g_1,\ldots,g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω και έστω $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
(α) Έστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$\|G\|_q := \left(\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\|^q d\omega\right)^{1/q} = c_{n,q}M_q(X)$$

όπου

$$M_q(X)=\left(\int_{S^{n-1}}\|x\|^q d\sigma(x)\right)^{1/q},$$

και υπολογίστε τις σταθερές $c_{n,1}$ και $c_{n,2}$.
(β) Δείξτε ότι, αν $1\leq k\leq n$,

$$\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^k g_i(\omega)e_i\right\| d\omega \leq \int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\| d\omega.$$

(γ) Δείξτε ότι, αν Y είναι ένας k-διάστατος υπόχωρος του X, τότε

$$M_1(Y)\leq c\sqrt{n/k}M_1(X),$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

2. Έστω $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1 και έστω L ο μέσος Lévy της f.
(α) Δείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\sigma)\{(x,y)\in S^{n-1}\times S^{n-1}:|f(x)-f(y)|\geq t\}) &\leq 2\sigma(\{x\in S^{n-1}:|f(x)-L|\geq t/2\})\\ &\leq c_1\exp(-c_2t^2n).\end{aligned}$$

(β) Έστω $\mathbb{E}(f)=\int_{S^{n-1}}f(x)\,d\sigma(x)$. Δείξτε ότι, για κάθε $a\in\mathbb{R}$,

$$\int_{S^{n-1}}\exp(a^2|f(x)-\mathbb{E}(f)|^2)\,d\sigma(x)\leq\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}\exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y).$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}\exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\leq ca^2\int_0^\infty te^{a^2t^2-ct^2n}dt,$$

και, επιλέγοντας $a\simeq\sqrt{n}$, δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}\exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\leq c_2,$$

όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές.

(δ) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\sigma(\{x : |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geq t\}) \leq c_3 \exp(-c_4 t^2 n),$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

3. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leq b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\max\left\{M_1, c_1 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leq M_q \leq \max\left\{2M_1, c_2 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q \in [1, n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

(α) *Υπόδειξη για την δεξιά ανισότητα.* Η συνάρτηση $\|\cdot\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma\Big(x \in S^{n-1} : \Big|\, \|x\| - M_1 \Big| > t\Big) \leq 2\exp(-ct^2 n / b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$,

$$M_q - M_1 \leq \| \, \|x\| - M_1 \, \|_q.$$

(β) *Υπόδειξη για την αριστερή ανισότητα.* Υπάρχει $z \in S^{n-1}$ ώστε $B_X \subseteq \{y : |\langle y, z\rangle| \leq 1/b\}$. Συνεπώς,

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geq t\} \supseteq C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geq t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιήστε την

$$M_q = \left(q \int_0^\infty t^{q-1} \sigma(\{x : \|x\| \geq t\})\, dt\right)^{1/q} \geq \left(q \int_0^\infty t^{q-1} \sigma(C_t)\, dt\right)^{1/q}.$$

4. Έστω $x_1, \ldots, x_t \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S^{n-1}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^t |\langle y, x_i\rangle \geq t.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε όλα τα διανύσματα της μορφής $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i x_i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, και επιλέξτε ένα με τη μεγαλύτερη δυνατή Ευκλείδεια νόρμα.

5. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Έστω $t(X)$ ο μικρότερος φυσικός t για τον οποίο υπάρχουν $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{2} M\|x\|_2 \leq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \|U_i(x)\| \leq 2M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$t(X) \geq \frac{1}{4}(b/M)^2,$$

όπου b η μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leq b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιους $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$. Θεωρήστε $x_0 \in S^{n-1}$ με $\|x_0\| = b$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4 για τα $x_i = U_i^{-1}(x_0)$.

6. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Υποθέτουμε ότι $v(B_X) \leq n^\alpha$ και $v(B_{Y^*}) \leq n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta \geq 1$, όπου $v(P)$ είναι το πλήθος των κορυφών ενός πολυτόπου P. Δείξτε ότι

$$d(X,Y) \leq c\sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{n\log n}.$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n \subseteq B_Y \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $U \in O(n)$, ισχύουν οι $\|U^{-1} : Y \to X\| \leq n$ και

$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x \in B_X} \|U(x)\|_Y = \max_{x \in \mathrm{ext}(B_X)} \max_{y^* \in \mathrm{ext}(B_{Y^*})} |\langle U(x), y^* \rangle|,$$

όπου $\mathrm{ext}(P)$ είναι το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου P. Για σταθερά x, y^* και $\varepsilon > 0$ εκτιμήστε το

$$\nu(\{U \in O(n) : |\langle U(x), y^* \rangle| \geq \varepsilon\}).$$

7. Έστω $1 \leq k \leq n$ και έστω $f_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}.$$

Δηλαδή, $f_k(x) = \|P_k(x)\|_2$, όπου P_k η ορθογώνια προβολή στον $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.
(α) Δείξτε ότι ο μέσος Lévy $\mathrm{med}(f_k)$ ικανοποιεί την

$$\mathrm{med}(f_k) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

αν $k \geq C\log n$, όπου $C > 0$ (αρκετά μεγάλη) απόλυτη σταθερά.
(β) Έστω $u \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι, για κάθε $t \in (0,1)$,

$$\nu_{n,k}(\{F \in G_{n,k} : |\, \|P_F(u)\|_2 - \mathrm{med}(f_k)\,| \geq t \cdot \mathrm{med}(f_k)\}) \leq c_1 \exp(-c_2 t^2 k).$$

(γ) Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχουν $k \leq c\log n$ (όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά) και $F \in G_{n,k}$ ώστε

$$\frac{1}{2}\mathrm{med}(f_k)\|x_i - x_j\|_2 \leq \|P_F(x_i) - P_F(x_j)\|_2 \leq 2\mathrm{med}(f_k)\|x_i - x_j\|_2$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

8. Έστω P ένα συμμετρικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_P)$. Γράφουμε $f(P)$ για το πλήθος των $(n-1)$-διάστατων εδρών του και $v(P)$ για το πλήθος των κορυφών του.

(α) Δείξτε ότι $k(X) \leq \log f(P)$ και $k(X^*) \leq \log v(P)$.

(β) Δείξτε ότι $\log f(P) \cdot \log v(P) \geq cn$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

9. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και ότι $(|K|/|B_2^n|)^{1/n} = A$.

(α) Δείξτε ότι
$$\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta)\nu(dU) = A^{2n}.$$

(β) Για κάθε $U \in O(n)$ και $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε $N_U(\theta) = \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε
$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{[N_U(\theta)]^{2n}} \sigma(d\theta) \leq A^{2n}$$
και συμπεράνατε ότι $N_U(\theta) \geq \frac{c}{A^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(γ) Αν ο U ικανοποιεί το (β), δείξτε ότι
$$B_2^n \subseteq K \cap U(K) \subseteq 8A^2 B_2^n.$$