Μιγαδική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα, γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μεγαλύτερο ή ίσο με μηδέν. Ας δεχτούμε διαισθητικά ότι υπάρχει ένας μη πραγματικός αριθμός (φανταστικός) i που να είναι λύση αυτής της εξίσωσης. Τότε $i^2 = -1$. Με την αποδοχή ενός τέτοιου αριθμού μπορούμε να θεωρούμε παραστάσεις της μορφής $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Επεκτείνοντας το λογισμό των πραγματικών αριθμών σε αυτές τις παραστάσεις μπορούμε να κάνουμε πράξεις όπως :

(ι) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(ιι) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

1.1.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Αν K σώμα, $p(x)$ ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω του K, τότε υπάρχει μια επέκταση του K, Κ(ϑ), ώστε στο αλγεβρικό σώμα Κ(ϑ) το στοιχείο ϑ θα είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, π(ϑ)=0 .

Ορισμός 1.1.1. *(Hamilton)*
Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$ *και είναι* $\mathbb{R}^2$, *δηλαδή* $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. *Έτσι, μιγαδικός αριθμός* z *είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, δηλαδή* $z = (a, b)$ *με* $a, b \in \mathbb{R}$
Στο $\mathbb{C}$ *ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ως εξής :*
Πρόσθεση : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Πολλαπλασιασμό : $(a,b)(c,d) = (ac - bd, bc + ad)$.
Επίσης, θέτουμε $0 = (0,0)$ *και* $1 = (1,0)$.

Θεώρημα 1.1.2. *Το σύστημα* $< \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 >$ *είναι ένα αλγεβρικό σώμα.*

Απόδειξη:
$z \cdot 1 = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έστω $z = (a,b)$. Τότε $z \cdot 1 = (a,b)(1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b) = z$.

■

Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού αντίστροφου

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0, z = (a,b) \neq (0,0), a^2 + b^2 \neq 0$. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ και έχουμε $wz = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$
$(a,b) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab - ba}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0\right) = (1,0) = 1$

Πρόταση 1.1.3. *Η απεικόνιση* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \varphi(a) = (a,0)$ *είναι ομομορφισμός και 1-1, άρα είναι αλγεβρική εμφύτευση.*

Απόδειξη:
$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Πράγματι, $\varphi(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
$\varphi(a)\varphi(b) = (a,0)(b,0) = (ab - 0, a0 + b0) = (ab, 0) = \varphi(ab)$.
Έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathbb{R}$ με το $\varphi(\mathbb{R})$, δηλαδή $\mathbb{R} \equiv \varphi(\mathbb{R})$ και κάθε πραγματικό αριθμό με την εικόνα του,δηλαδή $a \equiv \varphi(a), a \equiv (a,0)$. Με αυτήν την έννοια έχουμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και κάθε πραγματικός αριθμός είναι μιγαδικός.

■

Ορισμός 1.1.4. *Θέτουμε* $i = (0,1)$.

Πρόταση 1.1.5. *Ο αριθμός* i *είναι ρίζα του πολυωνύμου* $z^2 + 1 = 0$.

Απόδειξη:
Πρέπει να δείξουμε ότι $i^2 = -1$.Πράγματι, έχουμε ότι $i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$.

■

Πρόταση 1.1.6. *Αν* $z = (a,b)$ *είναι ο μιγαδικός αριθμός,τότε* $z = a + bi$.

Απόδειξη:
$z = (a,b) = (a,0) + (0,b)$. Επίσης, $(b,0)(0,1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (0,b)$. Άρα $z = (a.b) + (b,0)(0,1) = a + bi$.

1.1.2 Γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών-Μιγαδικό επίπεδο-Επίπεδο Gauss

Εφόσον κάθε μιγαδικός αριθμός z είναι διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών $z = (a, b)$ μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο του επιπέδου.

Ορισμός 1.1.7. *Έστω* $z = a + bi \in \mathbb{C}$
Ο πραγματικός αριθμός a *καλείται πραγματικό μέρος του* z *και συμβολίζεται με* $Re(z).Re(z) = a$.
Ο πραγματικός αριθμός b *καλείται φανταστικό μέρος του* z *και συμβολίζεται με* $Im(z), Im(z) = b$. *Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός* z *είναι* $z = Re(z) + iIm(z)$.
Ο συζυγής του z *είναι ο μιγαδικός αριθμός* $\bar{z} = a - bi = Re(z) - iIm(z)$.
Το μέτρο ή η απόλυτη τιμή του z *είναι :* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re(z)^2 + Im(z)^2)}$.

Πρόταση 1.1.8. *Έστω ένας μιγαδικός αριθμός* $z = a + bi$. *Τότε:*

(i) $\bar{\bar{z}} = z$.

(ii) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.

(iii) $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

(iv) $|z| = |\bar{z}|$.

(v) $z\bar{z} = |z|^2$.

(vi) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

Πρόταση 1.1.9. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$.

(ii) $Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$.

(iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(iv) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

(v) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$.

Πρόταση 1.1.10. *Αν* z, w *είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν :*

(i) $|Re(z)| \leq |z|$.

(ii) $|Im(z)| \leq |z|$.

(iii) $|zw| = |z||w|$.

(iv) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Απόδειξη:
Ενδεικτικά θα αποδείξουμε το τελευταίο.Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. Αν $z+w=0$ η ανισότητα είναι προφανής.Έστω ότι $z+w \neq 0$. Θέτουμε $v = \frac{|z+w|}{z+w}$. Τότε $|v| = 1$. Επίσης,$|z+w| = v(z+w) = vz+vw$. Έπεται ότι $vz+vw$ είναι πραγματικός αριθμός και επομένως $vz+vw = Re(vz+vw) = Re(vz)+Re(vw)$. Άρα $|v+w| = Re(vz)+Re(vw) \leq |vz| + |vw| = |v||z| + |v||w| = |z| + |w|$. Έτσι, $|z+w| \leq |z| + |w|$.

■

1.1.3 Παράσταση μιγαδικού αριθμού με πολικές συντεταγμένες

Αν γνωρίζουμε τη γωνία θ και το r τότε γνωρίζουμε το μιγαδικό αριθμό $z = r\cos\theta + i\sin\theta$. Ο πραγματικός αριθμός r καλείται πολική ακτίνα και είναι το μέτρο του $z, r = |z|$. Η γωνία θ είναι ένα όρισμα του z. Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$z = r\cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.1}$$

Θεώρημα 1.1.11. *(ταυτότητα του Euler) Ισχύει ότι* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$. *Έτσι η παράσταση του μιγαδικού αριθμού* z *με πολικές συντεταγμένες γίνεται* $z = re^{i\theta}$.

1.1.4 Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.

Έστω μιγαδικοί αριθμοί z, w με $(z, w \neq 0)$ και $z = re^{i\theta}$ και $w = \varrho^{i\varphi}$.Τότε $zw = r\varrho^{\theta+\varphi}$. Έτσι, το γινόμενο zw προκύπτει από μια ομοιοθεσία και ακόλουθα μια στροφή.

Πόρισμα 1.1.12. *(τύπος de Moivre)*
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη:
Από την ταυτότητα του *Euler*, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

■

Παράδειγμα 1.1.13. (i) $w^3 = 1 \Rightarrow w^3 - 1 = (w-1)(w^2+w+1)$.

(ii) $w^7 = 1 \Rightarrow w^7 - 1 = (w-1)(w^6+w^5+w^4+w^3+w^2+w+1)$.

Σημείωση 1.1.14. *Ισχύει ότι* $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη:
Έχουμε $e^{i\theta}$=$\cos\theta + i\sin\theta$.
($\Leftarrow$) $\theta = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{K} \Rightarrow \cos\theta = 1$ και $\sin\theta = 0$, οπότε $e^{i\theta} = 1$.
($\Rightarrow$) $e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \cos\theta = 1 kai \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 2\kappa\pi$.

■

1.1.5 Οι ν-οστες ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Για κάθε $n = 1, 2, ...$ οι n-οστές ρίζες του z είναι όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί w που επαληθεύουν την εξίσωση $w^n = z$.

1.1.6 Έυρεση των ν-οστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$.

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Θέλουμε να βρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς w με την ιδιότητα $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$ σταθερός αριθμός (1). Ο z παρίσταται ως εξής : $z = re^{i\theta}$.
Έστω $w = \varrho e^{i\varphi}$ μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση (1). Τότε $w^n = z, \varrho^n e^i(n\varphi) = re^{i\theta}$. Έπεται $\varrho^n = r$ οπότε $\varrho = r^{\frac{1}{n}}$. Έπεται $e^i(n\varphi) = e^{i\theta}$ ή $e^{i(n\varphi-\theta)} = 1$, ισοδύναμα $n\varphi - \theta$=2κπ, κ ακαίρεος, άρα $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\kappa\pi}{n}$.
συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης (1) δίνονται από την $w_\kappa = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\kappa\pi}{n})}$, κ$\in \mathbb{K}$. θεωρούμε κ=$l_n + v, 0 \leq v \leq n-1$. Τότε $e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\kappa\pi}{n})} = e^{i2l_n\pi} = 1$.
Έπεται ότι όλες ανά δύο διαφορετικές λύσεις της (1) δίνονται από :
$w_\kappa = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\kappa\pi}{n})}$, κ=$0, 1, 2, ...n-1$.

Όταν $z = 1$ έχουμε τις n-οστές ρίζες της μονάδας που δίνονται από την $w_\kappa = e^{\frac{2\kappa\pi}{n}i}, \kappa = 0, 1, 2, ..., n-1$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

Παρατήρηση
Το σύνολο των n-οστών ριζών της μονάδας με πράξη τον πολλαπλασιασμό είναι μια Αβελιανή ομάδα, μάλιστα κυκλική.

1.1.7 Η τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$

Εφόσον $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένο με μια μετρική, την Ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}^2$. Αυτή η μετρική είναι η εξής : $\varrho : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$: $\varrho(z, w) = ||z - w|| = |z - w|$. Η μετρική ϱ

παράγει μια τοπολογία στο $\mathbb{C}$ που είναι ακριβώς η Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ και θα τη θεωρήσουμε γνωστή. Σημειώνουμε, επίσης, ότι $z_n \to z \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0$.

Θεώρημα 1.1.15. *(συμβιβαστότητα της αλγεβρικής δομής με την τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$). Έστω z_n,w_n ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ με $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $z_n \to z$ και $w_n \to w$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $z_n + w_n \to z + w$.

(ii) $z_n w_n \to zw$.

(iii) *Αν* $w_n \neq 0 \forall n$ *και* $w \neq 0$ *τότε* $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$.

Σημείωση 1.1.16. *Πολυώνυμο μιγαδικής μεταβλητής είναι μια συνάρτηση* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, a_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., n$ *σταθεροί αριθμοί,* $z \in \mathbb{C}, p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *με* $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$.

Πρόταση 1.1.17. *Κάθε πολυώνυμο είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της.*

Ορισμός 1.1.18. *Μια μιγαδική συνάρτηση f είναι ρητή αν είναι της μορφής* $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_{(q)}$ *όπου p, q είναι πολυώνυμα και $\mathbb{Z}_{(q)}$ είναι το σύνολο των ριζών του q.*

Πρόταση 1.1.19. *Η συνάρτηση* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \varphi(z) = \bar{z}$ *είναι συνεχής.*

Απόδειξη :
Για $z, w \in \mathbb{C}$ έχουμε $|\varphi(z) - \varphi(w)| = |\bar{z} - \bar{w}| = |\overline{(z - w)}| = |z - w|$ δηλαδή η φ είναι ισομετρία και άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

■

Κεφάλαιο 2

Συνεκτικότητα

2.1 Συνεκτικά σύνολα

Ορισμός 2.1.1. *Έστω (X, ϱ) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Το E καλείται συνεκτικό σύνολο αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $A, B \subseteq X$ τέτοια ώστε :*

(i) $E \subseteq A \cup B$.

(ii) $E \cap A \neq \emptyset, E \cap B \neq \emptyset$.

(iii) $E \cap A \cap B = \emptyset$.

Ο χώρος X είναι συνεκτικός αν το σύνολο X είναι συνεκτικό. Ισοδύναμα, ο χώρος X είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε :

(i) $X = A \cup B$.

(ii) $A \neq \emptyset$ *και* $B \neq \emptyset$.

(iii) $A \cap B = \emptyset$.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω (X, ϱ) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το E είναι συνεκτικό.*

(ii) *Ο μετρικός χώρος $(E, \varrho|_E)$ είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη:
Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα ανοιχτά σύνολα στο μετρικό χώρο $(E, \varrho|_E)$ είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής $E \cap A$, όπου A ανοιχτό στον X.

■

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω X, Y μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση συνεχής και επί. Τότε αν ο X είναι συνεκτικός και ο Y είναι επίσης συνεκτικός.*

Θεώρημα 2.1.4. *Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό $\leftrightarrow$ E είναι διάστημα οποιασδήποτε μορφής(πεπερασμένο ή άπειρο) όπως παραδείγματος χάριν τα ακόλουθα : (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, b]$.*

Πρόταση 2.1.5. *Έστω X μετρικός χώρος. Ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν τα μόνα ανοιχτα-κλειστα υπόσύνολα του X είανι ακριβώς το X και το $\emptyset$.*

Απόδειξη :
($\Rightarrow$)
Υποθέτουμε ότι ο X είναι συνεκτικός. Έστω ότι υπάρχει $A \subseteq X$ ανοικτό-κλειστό με $A \neq \emptyset$. Τότε το $B = X - A$ είναι ανοικτό καθώς το A είναι κλειστό και έχουμε $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ γιατί $X - B = A \neq X$. Επομένως, ο X δεν είναι συνεκτικός, άτοπο.
($\Leftarrow$)
Ας υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπαρχουν ανοικτά σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. Από τις (1) και (3) έπεται ότι $A = X - B$ είναι κλειστό καθώς το B είναι ανοικτό, δηλαδή το A είναι κλειστό. Έχουμε όμως ότι $A \neq X$ διότι $B \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$. Έτσι,παίρνουμε το άτοπο.

■

Λήμμα 2.1.6. *Έστω X μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Ο X δεν είναι συνεκτικός.*

(ii) *Υπάρχει συνάρτηση $\varphi : X \to \{0, 1\}$ συνεχής επί. Το $\{0, 1\}$ έχει τη διακριτή τοπολογία.*

Απόδειξη:
(ι)$\Rightarrow$ (ιι)
Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq X$ ανοικτά ώστε $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$,$B \neq \emptyset$ και $A \cap B = \emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : X \to \{0, 1\}$ ώστε

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in A \\ 1 & \text{αν } x \in B \end{cases}$$

Η φ είναι καλά ορισμένη διότι $X = A \cup B$ και $A \cap B = \emptyset$. Εφόσον $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ η φ είναι επί. Η φ είναι συνεχής γιατί $\varphi^{-1}(\{0\}) = A$ και $\varphi^{-1}(\{1\}) = B$.
(ιι)$\Rightarrow$(ι)
Έστω ότι υπάρχει $\varphi : X \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί. Τότε το σύνολο $A = \varphi^{-1}(\{0\})$ είναι ανοικτό-κλειστό διότι $\{0\}$ είναι ανοικτό-κλειστό στο $\{0, 1\}$. Επίσης, $A \neq \emptyset$ καθώς η φ είναι επί, $A \neq X$ καθώς η φ είναι επί. Έτσι, το A είναι ανοικτό-κλειστό και $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ που σημαίνει ότι ο X δεν είναι συνεκτικός.

■

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω X μετρικός χώρος και $(A_i)_i$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X, ώστε $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.Τότε η ένωση $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ είναι σύνολο συνεκτικό.*

Απόδειξη :
Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι συνεκτικό. Τότε από το λήμμα 2.1.6 έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση $\varphi : A \to \{0,1\}$ συνεχής επί. Επιλέγουμε $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A$. Έστω ότι $\varphi(x_0) = 0$. Εφόσον η φ είναι επί υπάρχει $x_1 \in A$ ώστε $\varphi(x_1) = 1$. Υπάρχει $i_1 \in I$ ώστε $x_1 \in A_{i_1}$ Έχουμε,επίσης, ότι $x_0 \in A_{i_1}$. Επομένως, $\varphi|_{A_{i1}} : A_1 \to \{0,1\}$. Επίσης, $\varphi|_{Ai1}$ είναι συνεχής. Άρα από το λήμμα 2.1.6 το A_{i1} δεν είναι συνεκτικό, άτοπο.

■

Πρόταση 2.1.8. *Έστω X μετρικός χώρος και ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνεκτικών υποσυνόλων του X, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Τότε το σύνολο $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη:
Θέτουμε $E_n = A_1 \cup ... \cup A_n, n = 1, 2, ...$ και θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι για κάθε n, το E_n είναι συνεκτικό.
Για $n = 1$ έχουμε ότι το $E_1 = A_1$ είναι συνεκτικό.
Επαγωγικό βήμα : Υποθέτουμε για κάποιο n ότι το E_n είναι συνεκτικό. Έχουμε $E_{n+1} = E_n \cup A_{n+1}$ και $E_n \cap A_{n+1} \supseteq A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ και εφόσον E_n συνεκτικό (από επαγωγική υπόθεση) και A_{n+1} συνεκτικό από υπόθεση, έπεται ότι η ένωση $A_n \cup A_{n+1}$ είναι σύνολο συνεκτικό, δηλαδή E_{n+1} είναι συνεκτικό.
Έχουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq A_1 \neq \emptyset$. Άρα η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι σύνολο συνεκτικό, δηλαδή το A είναι συνεκτικό.

■

2.1.1 Συνεκτική συνιστώσα

Ορισμός 2.1.9. *Έστω X μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Το E είναι συνεκτική συνιστώσα του X αν το E είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του Q, δηλαδή*

(i) *Το E είναι συνεκτικό και*

(ii) *Αν $E \subseteq E_1 \subseteq X$ και E_1 είναι συνεκτικό τότε $E = E_1$*

Μια συνεκτική συνιστώσα του X είναι κλειστό σύνολο αν E είναι συνεκτική συνιστώσα του X, τότε $E \subseteq \bar{E}$ και $\bar{E}$ είναι συνεκτικό, άρα $E = \bar{E}$ που σημαίνει ότι το E είναι κλειστό.

Σημείωση 2.1.10. (i) *Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{Z}$ είναι όλα τα μονοσύνολα.*

(ii) *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του U είναι ανοικτά σύνολα.*

(iii) *Έστω X συνεκτικός μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $f[X]$ είναι διάστημα. Αν η f παίρνει μόνο ακέραιες τιμές τότε η f είναι σταθερή.*

(iv) *Αν E_1, E_2 είναι δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου X τότε $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.*

Πρόταση 2.1.11. *Έστω X μετρικός χώρος. Τότε*

$$X = \bigcup \{E \subseteq X | E \text{ συνεκτική συνιστώσα του } X\}$$

.

Απόδειξη:
Έστω $x \in X$. Θέτουμε

$$E_x = \bigcup \{E \subseteq X | E \text{ συνεκτική συνιστώσα του } X\}$$

Το E_x είναι συνεκτική συνιστώσα του χώρου X ($x \in E_x$ γι αυτό το E_x καλείται συνεκτική συνιστώσα του σημείου x). Το E_x είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του X. Έστω $E_x \subseteq E_1 \subseteq X$ και E_1 συνεκτικό. Τότε $x \in E_1$ και άρα $E_1 \in X$, άρα $E_1 \subseteq E_x$. Συνεπώς, $E_x = E_1$.

■

Πόρισμα 2.1.12. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό μη κενό. Τότε είτε υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, ...I_n$ μη κενά και ξένα ανά δύο ώστε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_i$ ή υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ από ανοικτά μη κενά και ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα ώστε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$*

Απόδειξη :
Από την πρόταση 2.1.11 έχουμε ότι

$$U = \bigcup \{I \subseteq U | I \text{ συνεκτική συνιστώσα του } U\}$$

. Κάθε $I \in U$ είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα το I είναι ανοικτό διάστημα. Επίσης, τα στοιχεία του U είναι μη κενά και ξένα ανά δύο. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος η οικογένεια U είναι αριθμήσιμη. Έτσι, είτε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $U = \{I_1, ...I_N\}$ ή $U = \{I_n | n = 1, 2, ...\}$. Στην πρώτη περίπτωση, $U = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ και στη δεύτερη $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

■

Πρόταση 2.1.13. *Έστω X συνεκτικός μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ η οποία είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $f|_{B(x,\varepsilon)}$ είναι σταθερή συνάρτηση. Τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη :
Έστω $a \in F[X]$. Θέτουμε $A = \{x \in X | f(x) = a\}$. Το A είναι ανοικτό.
Έστω $x \in A$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $F|_{B(x,\varepsilon)}$ είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε $t \in B(x,\varepsilon)$ το $f(t) = f(x) = a$ και άρα $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Έτσι, το A είναι ανοικτό.
Το A είναι κλειστό.
Αρκεί να δείξουμε ότι $X - A$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in X - A$. Τότε $f(y) \neq a$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $F|_{B(y,\varepsilon)}$ σταθερή, οπότε για κάθε $z \in B(y,\varepsilon), f(z) = f(y) \neq a$, δηλαδή $z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow f(z) \neq a \Rightarrow z \notin A \Rightarrow z \in X - A$ και επομένως $B(y,\varepsilon) \subseteq X - A$. Άρα το $X - A$ είναι ανοικτό.
Ώστε το A είναι ανοικτό κιαι κλειστό και καθώς ο X είναι συνεκτικός, $A = Q$ ή $A = \emptyset$ γιατί από τον ορισμό του υπάρχει xA (υπάρχει $x \in X$ ωστε $f(x) = a$ διότι $a \in f[X]$. Συνεπώς $A = X$. Επομένως η f είναι σταθερή.

■

Ορισμός 2.1.14. (i) *Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z, w συμβολίζεται με $[z, w]$ και είναι το σύνολο $[z, w,] = \{(1-t)z + tw | t \in [0,1]\}$. Αν $z = w$ τότε έχουμε ότι $[z, w] = \{z\}$.*

(ii) *Έστω $z_1, z_2, ..., z_n$ σημεία του $\mathbb{C}$. Η πολυγωνική γραμμή που ορίζει μια n-άδα $(z_1, ..., z_n$ συμβολίζεται με $P(z_1, ...z_n)$ και είναι το σύνολο $P(z_1, ..., z_n) = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n]$*

Πρόταση 2.1.15. *Κάθε ευθύγραμμο τμήμα του μιγαδικού επιπέδου είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη :
Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Η συνάρτηση $\varphi : [0,1] \to [z, w]; \varphi(t) = (1-t)z + tw$ είναι συνεχής και επί. Επομένως, εφόσον το διάστημα $[0,1]$ είναι συνεκτικό, $\varphi([0,1]) = [z, w]$ είναι συνεκτικό.

■

Πόρισμα 2.1.16. *Κάθε πολυγωνική γραμμή στο μιγαδικό επίπεδο είναι σύνολο συνεκτικό.*

Απόδειξη :
Έστω $z_1, ..., z_n$ σημεία του $\mathbb{C}$. Έχουμε ότι $p(z_1, ..., z_n) = [z_1, z_2] \cup [z_{n-1}, z_n]$. Επίσης έχουμε $[z_{i-1}, z_{i+1}] = \{z_i\}$ για $i = 1, 2, ..., n-1$. Άρα από το πόρισμα 2.1.12 , η ένωση $p(z_n, ..., n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} [z_i, z_{i+1}]$ είναι σύνολο συνεκτικό.

■

Ορισμός 2.1.17. *Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$. Το E είναι πολυγωνικά συνεκτικό αν για κάθε $z, w \in E$ υπάρχει πολυγωνικλή γραμμή $p(z, w)$ με άκρα z, w ώστε $P(z, w) \subseteq E$.*

Ορισμός 2.1.18. *Ένα υποσύνολο E του $\mathbb{C}$ λέγεται κυρτό αν για κάθε $z, w \in E$ το ευθύγραμμο τμήμα $[z, w]$ περιέχεται στο E.*

Ορισμός 2.1.19. *Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Ο ανοικτός δίσκος με κέντο το a και ακτίνα r είναι ο*

$$\Delta(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}.$$

Ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι ο

$$\bar{\Delta}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}.$$

Ο αντίστοιχος κύκλος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι ο

$$C(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}.$$

Σημείωση 2.1.20. *Κάθε κλειστός καθώς και κάθε ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ είναι κυρτό σύνολο.*

Πρόταση 2.1.21. *Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο. Τότε το E είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη:
Έστω $z_0 \in E$ Για κάθε $z \in E$ επιλέγουμε πολυγωνική γραμμή με άκρα z_0 και z ώστε $p(z_0,z) \subseteq E$. Τότε, $\bigcup_{z\in E} p(z_0,z) = E$. Για κάθε $z \in E$ το σύνολο $p(z_0,z)$ είναι συνεκτικό σύνολο και επίσης $z_0 \in \bigcup_{z\in E} p(z_0,z)$. Άρα, το σύνολο $\bigcup_{z\in E} p(z_0,z) = E$ είναι συνεκτικό σύνολο.

■

Πόρισμα 2.1.22. *Κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι συνεκτικό σύνολο και ειδικά το $\mathbb{C}$ είναι συνεκτικό. Κάθε ανοικτός καθώς και κάθε κλειστός δίσκος είναι σύνολα συνεκτικά.*

Σημείωση 2.1.23. *Κάθε κύκλος είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη :
Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r.0$. Έχουμε : $C(a,r) = \{a + re^{it} | t \in [0,2\pi]\}$. Η συνάρτηση $\gamma : [0,2\pi] \to C(a,r)$ με $\gamma(t) = a + re^{it}$ είναι συνεχής επί, άρα $\gamma([0,2\pi]) = C(a,r)$ είναι συνεκτικό σύνολο.

■

Θεώρημα 2.1.24. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Το Ω είναι πολυγωνικά συνεκτικό.*

(ii) *Το Ω είναι συνεκτικό.*

Απόδεοξη :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Έχει αποδειχθεί.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Έστω $z_0 \in \Omega$ σταθερό. Θέτουμε

$$A = \{z \in \Omega : \exists \text{ πολυγωνική γραμμή } p(z_0, z) \text{ με άκρα } z_0, z \text{ έτσι ώστε } p(z_0, z) \subseteq \Omega\}$$

(i) Το A στο μετρικό χώρο Ω είναι ανοικτό.
Έστω $z \in A \subseteq |Omega$. Εφόσον το Ω είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Υπάρχει πολυγωνική γραμμή με άκρα z_0, zώστε $z(z_0, z) \subseteq \Omega$. Για κάθε $w \in \Delta(z, \varepsilon)$ έχουμε ότι $[z, w] \subseteq \Delta(z, \varepsilon)$ (γιατί το $\Delta(z, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο)' Επομένως η πολυγωνική γραμμή $p(z_0, z) \cup [z, w]$ περιέχεται στον Ω και άρα $w \in A$. Συνεπώς $\Delta(z, \varepsilon)A$. Έτσι, το A είναι ανοικτό.

(ii) Το A στο μετρικό χώρο Ω είναι κλειστό. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\Omega - A$ είναι ανοικτό σύνολο στο μετρικό χώρο Ω. Έστω $z \in \Omega - A$. Εφόσον το Ω είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$.
Ισχυρισμός : $\Delta(z, varepsilon) \subseteq \Omega - A$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in \Delta(z, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε $w \notin \Omega - A$. Τότε $w \in A$. Από τον ορισμό του A υπάρχει πολυγωνική γραμμή με άκρα z_0, z ώστε $p(z_0, z) \subseteq \Omega$. Εφόσον το $\Delta(z, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα $[z, w] \subseteq \Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Επομένως η πολυγωνική γραμμή $p(z_0, z) \cup [z, w] \subseteq \Omega$ και άρα $z \in A$, άτοπο. Επομένως, $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega - A$. Έτσι, $\Omega - A$ είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο Ω. Δηλαδή έχουμε ότι A είναι ανοικτό-κλειστο στο μετρικό χώρο Ω. Εφόσον το Ω είναι συνεκτικό είτε $A = \Omega$ είτε $A = \emptyset$. Όμως, $A \neq \emptyset$ διότι $z_0 \in A$. Άρα $A = \Omega$.

■

Ορισμός 2.1.25. *Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό καλείται τόπος.*

2.1.2 Συμπαγές επίπεδο των μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε ένα στοιχείο $\infty \notin \mathbb{C}$ και θέτουμε $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Μια ακολουθία $\{z_n\}$ στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει στο ∞, δηλαδή $z_n \to \infty$ αν και μόνο αν $|z_n| \to \infty$.

2.1.3 Ολόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός 2.1.26. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$.*

(i) *Το πραγματικό μέρος της f συμβολίζεται με Ref και είναι η συνάρτηση*

$$Ref : A \to \mathbb{R} : (Ref)(z) = Re(f(z)).$$

(ii) *Το φανταστικό μέρος της f συμβολίζεται με Imf και είναι η συνάρτηση*

$$Imf : A \to \mathbb{R} : (Imf)(z) = Im(f(z)).$$

Είναι σαφές ότι $f = Ref + iImf$

(iii) *Η συζυγής συνάρτηση της f είναι η $\bar{f} = Ref - iImf$.*

Ορισμός 2.1.27. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και $a \in \Omega$. Υπάρχει η μιγαδική παράγωγος της f στο a αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Ισοδύναμα, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

. Η μιγαδική παράγωγος της f στο a όταν υπάρχει συμβολίζεται με $f'(a)$. Είναι, λοιπόν,

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Θεώρημα 2.1.28. *(Συνθήκες Cauchy) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}, a = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, έστω $u = Ref$ και $v = Imf$, $f = u + iv$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(a)$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a),\ \frac{\partial u}{\partial y}(a),\ \frac{\partial v}{\partial x}(a),\ \frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

και ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες που καλούνται συνθήκες Cauchy-Riemann :

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial y}(a) = \frac{-\partial v}{\partial x}(a)$

Απόδειξη :
Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \left(\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right). \end{aligned}$$

. Επομένως, υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{h \to 0, h \in \mathbb{R}} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h}$$

και

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}$$

δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a), \frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

και

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{2.1}$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih} &= \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \left(\frac{v(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h} - \frac{iu(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h} \right) \end{aligned}$$

δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a), \frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

και

$$f'(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a) \tag{2.2}$$

Άρα $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$ και $\frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a)$

■

Πόρισμα 2.1.29. *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος* $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial X}(a) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$ *και* $f'(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) + i\frac{\partial u}{\partial x}(a)$

Πόρισμα 2.1.30. *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *και* $a \in \Omega$ *ώστε να υπάρχει η μιγαδική παράγωγος* $f'(a)$.

(i) *Αν* $f[\Omega] \subseteq \mathbb{R}$, *τότε* $f'(a) = 0$.

(ii) *Αν* $f[\Omega] \subseteq i\mathbb{R}$ *τότε* $f'(a) = 0$.

Απόδειξη :
Άμεση συνέπεια των τύπων του Θεωρήματος 2.1.28

■

Ορισμός 2.1.31. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και μιγαδική συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Η f καλείται ολόμορφη στο Ω αν υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.*

Θεώρημα 2.1.32. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. έστω επίσης $u = Ref, v = Imf$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο $\Omega \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann σε κάθε σημείο του Ω, δηλαδή*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y} \forall z \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z) \forall z \in \Omega.$$

Ορισμός 2.1.33. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Συμβολίζουμε με $H(\Omega)$ το σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Ω.*

Θεώρημα 2.1.34. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε η f είναι σταθερή στο Ω.*

Λήμμα 2.1.35. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και συνάρτηση $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \Omega$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0 \forall x, y \in \Omega$. Τότε η συνάρτηση φ είναι σταθερή στο Ω.*

Απόδειξη λήμματος:
Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε το τετράγωνο $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ να περιέχεται στο Ω. Για κάθε $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ με $\varphi_y(x) = \varphi(x,y)$. Τότε έχουμε $\varphi'_y(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Επομένως $\varphi_y(x) = \varphi_y(x_0) \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Δηλαδή

$$\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]. \tag{2.3}$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\varphi_{x_0} : [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ με $\varphi_{x_0}(y) = \varphi(x_0, y)$. Τότε $\varphi'_{x_0}(y) = \frac{\partial}{\partial y}(x_0, y) = 0 \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Επομένως $\varphi_{x_0}(y) = \varphi_{x_0}(y_0) \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Δηλαδή

$$\varphi(x_0, y) = \varphi(x_0, y_0) \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]. \tag{2.4}$$

Από τις 5.1.1, 5.1.2 έπεται ότι για κάθε $(x,y) \in V, \varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \varphi(x_0,y_0)$. Έτσι, η φ είναι στεθερή στο V. Από την Πρόταση έπεται ότι η συνάρτηση φ είναι σταθερή στο Ω.

■

Απόδειξη θεωρήματος :
Έχουμε
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$
και
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$
Για κάθε $z \in \Omega$ $f'(z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$. Από το Λήμμα 2.1.35 έπεται ότι $u(z) = c_!\forall z \in \Omega$ και $v(z) = c_2$. Άρα $f(z) = u(z) + iv(z) = c_1 + ic_2, \forall z \in \Omega$.

■

Πρόταση 2.1.36. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}, a \in \Omega, r > 0$ με $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και έστω $f = u + iv$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}(z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(z)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(z)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ και είναι συνεχής. Τότε αν στο a ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann*
$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a),$$
υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(a)$.

Θεώρημα 2.1.37. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial Y}$ στο Ω και ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann σε κάθε σημείο του Ω. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.*

Σημείωση 2.1.38. *Ισχύει και το αντίστροφο.*

2.1.4 Οι διαφορικοί τελεστές $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Θέτουμε

(i) $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ και

(ii) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Θεώρημα 2.1.39. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}, f = u + iv$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο Ω, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ και είναι συνεχείς.*
Τότε η f έχει μιγαδική παράγωγο ακριβώς στα σημεία $z \in \Omega$ στα οποία ισχύει :
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$
Η μιγαδική παράγωγος στα σημεία αυτά δίνεται από τη σχέση
$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Παράδειγμα 2.1.40. (i) *Έστω* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \bar{z} = x - iy$ *για* $z = x + iy$. *Έχουμε* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$. *Επομένως, η* f *δεν έχει πουθενά μιγαδική παράγωγο.*

(ii) *Έστω* $f(z) = x^2 + y^2$ *για* $z = x + iy$. *Έχουμε* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Πρόταση 2.1.41. *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό σύνολο, συνάρτηση* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *και* $a \in \Omega$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Υπάρχει η παράγωγος* $f'(a)$.

(ii) *Υπάρχει συνάρτηση* $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ *συνεχής στο* a *ωστε* $f(z)-f(a) = \varphi(z)(z-a), z \in \Omega$. *Σε αυτήν την περίπτωση,* $f'(a) = \varphi(a)$.

Απόδειξη :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ με

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{αν } z \neq a \\ f'(a) & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Τότε, $f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a)$ για κάθε $z \in \Omega$. Η φ είναι συνεχής στο a :

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(z)}{z - a} = f'(a) = \varphi(a),$$

άρα η φ είναι συνεχής στο a. $(ii) \Rightarrow (i)$
Έχουμε $f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a), z \in \Omega$. Επομένως, $\frac{f(z)-f(z)}{z-a} = \varphi(z)$ για $z \in \Omega$ με $z \neq a$. Εφόσον η φ είναι συνεχής στο a υπάρχει το

$$\lim_{z \to a} \varphi(z)$$

με

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$$

δηλαδή υπάρχει το

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \varphi(a)$$

που σημαίνει ότι υπάρχει η $f'(a)$ και $f'(a) = \varphi(a)$.

■

Θεώρημα 2.1.42. *(Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης) Έστω* Ω, $G \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτά σύνολα,* $f : \Omega \to G$ *συνεχής και ολόμορφη συνάρτηση* $g : G \to \mathbb{C}$, *ώστε*

(i) $g'(w) \neq 0$ *για κάθε* $w \in G$

(ii) $G(f(z)) = z$ *για κάθε* $z \in \Omega$.

Τότε η συνάρτηση f είναι ολόμορφη και $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$ για κάθε $z \in \Omega$.

Απόδειξη :
Έστω $a \in \Omega$, τότε $f(z) \in G$. Από την Πρόταση 2.1.41 υπάρχει συνάρτηση $\varphi : G \to \mathbb{C}$ συνεχής στο a ώστε

$$g(w) - g(f(a)) = \varphi(w)(w - f(a)). \tag{2.5}$$

Από τη σχέση 2.5 έπεται ότι για $z \in \Omega, g(f(z)) - g(f(a)) = \varphi(f(z))(f(z) - f(a))$, δηλαδή

$$z - a = (\varphi \circ f)(z)(f(z) - f(a)) \forall z \in \Omega. \tag{2.6}$$

Από τη σχέση 2.6 και την υπόθεση έχουμε ότι $(\varphi \circ f)(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$ και άρα $f(z) - f(a) = \frac{1}{(\varphi \circ f)(z)}(z - a) \forall z \in \Omega$.
Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $f(a)$ και η f στο a, άρα η $\varphi \circ f$ είναι συνεχής στο a και επομένως η $\frac{1}{\varphi \circ f}$ είναι συνεχής στο a. Άρα από την Πρόταση 2.1.41 έχουμε ότι υπάρχει η $f'(a)$ και $f'(a) = \frac{1}{(\varphi \circ f)(a)} = \frac{1}{\varphi(f(a))} = \frac{1}{g'(f(a))}$. Ώστε $f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}$. Συνεπώς η f είναι ολόμορφη και $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$ για κάθε $a \in \Omega$.

■

Παρατηρήσεις 2.1.43. (i) *Κάθε πολυώνυμο $p(z)$, $z \in \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση.*

(ii) *Κάθε ρητή συνάρτηση $Re(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$- το σύνολο των ριζών του $q(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση ($p(z), q(z)$ πολυώνυμα).*

(iii) *Οι συνηθισμένοι κανόνες για την πραγματική παραγώγιση ισχύουν και για τη μιγαδική παραγώγιση, μάλιστα μπορούν να αποδειχθούν εύκολα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1.41.*

Ορισμός 2.1.44. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο. Μια πραγματική συνάρτηση $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ καλείται αρμονική αν έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Laplace :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^@} = 0.$$

Πρόταση 2.1.45. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $u = Ref, v = Imf$. Τότε οι συναρτήσεις u, v είναι αρμονικές συναρτήσεις στο Ω.*

Απόδειξη :
Όπως θα δούμε η f έχει μιγαδικές παραγώγους κάθε τάξης. Έτσι, οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους. Από τις συνθήκες των Cauchy-Riemann έχουμε :

(i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Από τη σχέση (i) έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{partialv}{\partial x}\right)$ (από θεώρημα Schwarz), δηλαδή $\frac{\partial^u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$.
Από τη σχέση (ii) έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}|displaystyle(\frac{\partial v}{\partial x})$.
Από τις τελευταίες σχέσεις έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

■

Σημείωση 2.1.46. *Στους απλά συνεκτικούς τόπους ισχύει και το αντίστροφο.*

Κεφάλαιο 3

Σύγκλιση σειρών

3.1 Σειρές

Ορισμός 3.1.1. *Έστω* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Θέτουμε* $s_n = a_1 + ... + a_n, n = 1, 2, ...$ *Η ακολουθία* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *καλείται σειρά των* a_n *και συμβολίζεται με*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Επίσης, η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *καλείται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν η ακολουθία* (s_n) *των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, δηλαδή αν υπάρχει* $s \in \mathbb{C}$ *ώστε* $s_n \to S$. *Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. *Η σειρά* $\sum a_n$ *αποκλίνει αν η ακολουθία* (s_n) *των μερικών αθροισμάτων δε συγκλίνει.*

Σημείωση 3.1.2. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως αν* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \infty.$

Πρόταση 3.1.3. *Έστω σειρά μιγαδικών αριθμών* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* $\Leftrightarrow$ *οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} Re(a_n)$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} Im(a_n)$ *συγκλίνουν στο* $\mathbb{R}$.
Σε αυτήν την περίπτωση αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ *τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} Re(a_n) = Rea$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} Im(a_n) = Ima.$

Παράδειγμα 3.1.4. *Η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+i}$ *δε συγκλίνει.*

Απόδειξη :

Έχουμε $Re\frac{1}{n+i}=\frac{n}{n^2+1}$, $Im\frac{1}{n+i}=-\frac{1}{n^2+1}$. Έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}=+\infty$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\infty$. Άρα η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+i}$ αποκλίνει.

■

Πρόταση 3.1.5. *Έστω σειρά μιγαδικών αριθμών* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. *Αν* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ *τότε η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη :

Έχουμε για κάθε $n\in\mathbb{N}, |Re(a_n)|\leq|a_n|, |Im(a_n)|\leq|a_n|$. Άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|Re(a_n)|<\infty$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|Im(a_n)|<\infty$. Επομένως, οι σειρές $\sum Re(a_n)$ και $\sum Im(a_n)$ συγκλίνουν. Από την Πρόταση 3.1.3 έπεται ότι η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει.

■

Ορισμός 3.1.6. *Έστω* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(i) *Ένας πραγματικός αριθμός* s *καλείται σημείο συσσώρευσης της* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *αν για κάθε* $\varepsilon>0$ *το σύνολο* $\{n\in\mathbb{N}:|a_n-s|<\varepsilon\}$ *είναι άπειρο δηλαδή στο διάστημα* $(s-\varepsilon,s+\varepsilon)$ *ανήκουν άπειροι όροι της ακολουθίας* (a_n).

   Παράδειγμα 3.1.7. *Έστω* $a_n=(-1)^n, n=1,2,....$ *Τα σημεία συσσώρευσης της* $a_n)$ *είναι τα* $-1,1$.

(ii) *Το* $+\infty$ *είναι σημείο συσσώρευσγς της* (a_n) *αν η* (a_n) *δεν είναι άνω φραγμένη. Το* $-\infty$ *είναι σημείο συσσώρευσγς της* (a_n) *αν η* (a_n) *δεν είναι κάτω φραγμένη.*

Ορισμός 3.1.8. *Έστω* $(a_n)_n\in\mathbb{N}$ *φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε*

$$A=\{s\in\mathbb{R}: s \text{ είναι σημείο συσσώρευσης της } (a_n)\}.$$

Τότε το $A\neq\emptyset$ *από Bolzano-Weierstrass. Το limes superior της* (a_n) *είναι εξορισμού*

$$\lim_{n\to\infty}sup(a_n)=maxA$$

ή

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = maxA$$

Σημείωση 3.1.9. *Αν μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_n$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = +\infty$$

Παρατηρήσεις 3.1.10. *Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i)
$$a = \lim_{n\to\infty} supa_n$$

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ στο διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ανήκουν άπειροι όροι της ακολουθίας, ενώ στο διάστημα $(a+\varepsilon, +\infty)$ ανήκουν μόνο πεπερασμένοι όροι της ακολουθίας.*

3.1.1 Η γεωμετρική σειρά

Ορισμός 3.1.11. *Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$ καλείται γεωμετρική σειρά με λόγο z.*

Πρόταση 3.1.12. (i) *Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| < 1$, τότε η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει απολύτως και $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \dfrac{1}{1-|z|}$. Επομένως $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-|z|}$.*

(ii) *Αν $|z| \geq 1$ τότε η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη :

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $s_n = \sum_{i=0}^{n} |z|^i$ τότε $s_n = 1 + |z| + |z|^2 + ... + |z|^n = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$ καθώς το $|z| < 1, |z|^{n+1} \to 0$ και άρα $s_n \to \frac{1}{1-|z|}$. Έτσι, $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \dfrac{1}{1-|z|}$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως. Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \dfrac{1}{1-z}$.

(ii) $An|z| \geq 1$ τότε $|z^n| = |z|^n \geq 1 \forall n$, άρα $z^n \nrightarrow 0$, επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δε συγκλίνει.

∎

Πρόταση 3.1.13. *Έστω σειρά μιγαδικών αριθμών* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *και*

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

(i) *Αν* $a < 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(ii) *Αν* $a > 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

(iii) *Αν* $a = 1$, *τότε και οι δύο περιπτώσεις είναι δυνατές.*

Απόδειξη :

(i) Επιλέγουμε $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a < \beta < 1$. Από την Παρατήρηση υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι όποι της ακολουθίας $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ με την ιδιότητα $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \beta$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq N \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \beta$. Έπεται ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}, |a_N| \leq \beta^N, |a_{N+1}| \leq \beta^{N+1}, ..., |a_{N+\kappa} \leq \beta^{N+\kappa}$. Άρα $\sum_{i=0}^{\kappa} |a_{N+i}| < \sum_{i=0}^{\kappa} \beta N + i = \beta^N \sum_{i=0}^{\kappa} \beta^i < \beta^N \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i$. Έτσι, $\sum_{i=0}^{\infty} |a_{N+i}| < \infty$. Συνεπώς $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| + \sum_{i=0}^{\infty} |a_{N+i}| < \infty$.

(ii) Εφόσον $a > 1$ η σχέση $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ ισχύει για άπειρα n, οπότε $|a_n| > 1$ για άπειραn και άρα δεν μπορεί $a_n \to 0$, δηλαδή $a_n \nrightarrow 0$. Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

∎

Πρόταση 3.1.14. *(Κριτήριο λόγου) Έστω η σειρά μιαδικών αριθμών* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ώστε* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a \in \mathbb{R}$$

Τότε

(i) *αν* $a < 1$, *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(ii) *αν* $a > 1$, *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

(iii) *αν* $a = 1$ *και οι δύο περιπτώσεις είναι δυνατές.*

Παράδειγμα 3.1.15. (i) *Η* $\sum \frac{1}{n}$ *αποκλίνει ενώ η* $a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$ *και* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$.

(ii) *Η* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *συγκλινει ενώ* $a_n = \frac{1}{n^2}$ *και* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$.

3.1.2 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 3.1.16. *Έστω σύνολο* $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, ...$ *και* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* Γ. *Θέτουμε* $s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + ... + f_n(z), z \in \Gamma$. *Η ακολουθία συναρτήσεων* $(s_n(z))_{n=0}^{\infty}, z \in \Gamma$ *καλείται σειρά των* f_n *και συμβολίζεται με* $\sum n = 0^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$ *ή* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
Επίσης, η ακολουθία συναρτήσεων $(s_n(z))_{n=0}^{\infty}, z \in \Gamma$ *καλείται ακολουθία μερικών αθροισμάτων των* $f_n(z), z \in \Gamma$.

Ορισμός 3.1.17. *Έστω* $\sum n = 0^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$, $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ *μια σειρά μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* Γ *και συνάρτηση* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$.

(i) *Η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$ *συγκλίνει στη συνάρτηση* $f(z), z \in \Gamma$ *αν* $s_n(z) \to (z)$ *για κάθε* $z \in \Gamma$ *(όπου* $(s_n(z))_{n=0}^{\infty}$ *είναι η αντίστοιχη ακολουθία μερικών αθροισμάτων). Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z), z \in \Gamma$ *ή* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ *κατά σημείο.*

(ii) *Η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα επί του* Γ *προς τη συνάρτηση* $f(z), z \in \Gamma$ *ν* $s_n(z) \to (z)$ *ομοιόμορφα για* $z \in \Gamma$. *ΣΕ αυτήν την περίπτωση γράφουμε* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ *ομοιόμορφα για* $z \in \Gamma$ *ή* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ *ομοιόμορφα επί του* Γ.

Θεώρημα 3.1.18. *Έστω $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$ μια σειρά μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Γ. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Η σειρά συναρτήσεων $\sum n = 0^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $m \geq n > n_0 \Rightarrow \left| \sum\limits_{\kappa=n}^{m} f_\kappa(z) \right| < \varepsilon, \forall z \in \Gamma$.*

Πόρισμα 3.1.19. *(M-κριτήριο του Weierstrass). Έστω σύνολο $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ και σειρά μιγαδικών συναρτήσεων $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$. Έστω επίσης ακολουθία $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε τα εξής :*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$.

(ii) $f_n(z)| \leq M_n$ *για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$ και για κάθε $z \in \Gamma$. Τότε η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$.*

Απόδειξη :

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ συγκλίνει από το κριτήριο του Cauchy, έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}, m \geq n > n_0 \Rightarrow \sum\limits_{\kappa=n}^{m} M_\kappa < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνθήκη του Πορίσματος 3.1.19 παίρνουμε $m \geq n > n_0$ για $z \in \Gamma \Rightarrow \left| \sum\limits_{\kappa=n}^{m} f_\kappa(z) \right| \leq \sum\limits_{\kappa=n}^{m} |f_\kappa(z)| \leq \sum\limits_{\kappa=n}^{m} M_\kappa < \varepsilon$. Ώστε $m \geq n > n_0 \Rightarrow \left| \sum\limits_{\kappa=n}^{m} f_\kappa(z) \right| < \varepsilon$ για κάθε $z \in \Gamma$. Άρα από το Θεώρημα 3.1.18 η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$.

■

3.1.3 Δυναμοσειρές

Ορισμός 3.1.20. *Έστω $a, a_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, ...$ Για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = a_n(z-a)^n, n = 0, 1, 2, ...$ Η σειρά συναρτήσεων*

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \mathbb{C}$ *καλείται δυναμοσειρά με κέντρο το* a *και συμβολίζεται με*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Λήμμα 3.1.21. *(Λήμμα του Abel). Έστω η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *με* $a_n \in \mathbb{C}$ *για* $n = 0, 1, 2, \ldots.$ *Έστω, επίσης,* $z_0 \in , z_0 \neq 0$ *ώστε η ακολουθία* $(|a_n z_0^n|)$ *να είναι φραγμένη, δηλαδή να υπάρχει* $M > 0$ *ώστε* $|z_n z_0^n| \leq M$ *για κάθε* $n = 0, 1, \ldots.$ *Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Για κάθε* $z \in \Delta(0, |z_0|)$, *δηλαδή* $|z| < |z_0|$ *η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(ii) *Για κάθε* $0 < r < |z_0|$ *η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο* $\bar{\Delta}(0, r)$.

Απόδειξη :

(i) Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < |z_0|$. Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ έχουμε $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$. Είναι : $\left|\frac{z}{z_0}\right| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$. Επομένως, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < +\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Έστω $0 < r < |z_0|$. Τότε για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0, r)$ και $n = 0, 1, 2, \ldots$ έχουμε $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = |a_n z_0^n| \frac{|z|^n}{|z_0}|^n \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \Rightarrow |a_n z^n| \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$. Εφόσον $\frac{r}{|z_0|} < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n < +\infty$. Από το M-κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η συναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

∎

Ορισμός 3.1.22. *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι :*

$$R = sup \left\{ r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n=0}^{\infty} \text{ είναι φραγμένη} \right\}.$$

Είναι προφανές ότι $0 \leq R \leq +\infty$.

Πρόταση 3.1.23. *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *με ακτίνα σύγκλισης* R. *Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Για κάθε* $z \in \Delta(0,R)$ *η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(ii) *Για κάθε* $0 < r < R$ *η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο* $\bar{\Delta}(0,r)$.

(iii) *Για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με* $|z| < R$ *η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *αποκλίνει.*

Σημείωση 3.1.24. *Οι συνθήκες* $(i), (iii)$ *χαρακτηρίζουν την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.*

Απόδειξη :

(i) Έστω $z \in \Delta(0,r)$, δηλαδή $|z| < R$. Επομένως, υπάρχει $r \in \mathbb{R}$ ώστε $|z| < r$ και η ακολουθία $(|a_n z^n|)_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Το συμπέρασμα έπεται αμέσως από το λήμμα του Abel.

(ii) Έστω $0 < r < R$. Τότε υπάρχει r_1 ώστε $r < r_1$ και η ακολουθία $(|a_n| r_1)_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από το λήμμα του Abel έπεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \bar{\Delta}(0,r)$.

(iii) Αν $|z| > R$ τότε η ακολουθία $(|a_n z^n|)_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

■

Θεώρημα 3.1.25. *(Cauchy-Hadamard). Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *όπου* $a_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \ldots$. *Θέτουμε*

$$s = \overline{\lim}(a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι: $R = \frac{1}{s}$ *(όπου* $\frac{1}{0} = +\infty$ *και* $\frac{1}{+\infty} = 0$*).*

Απόδεοξη :

(i) Έστω $z \in \Delta(0,R)$, δηλαδή $|z| < R$, οπότε $|z| < \frac{1}{s}$ και άρα $|z|s < 1$. Έχουμε

$$\overline{\lim}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}\Big(|a_n|^{\frac{1}{n}}|z|\Big) = |z|\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}} = |z|s < 1.$$

Συνεπώς από το κριτήριο ρίζας έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Έστω $z \notin \bar{\Delta}(0,R)$. Τότε έχουμε

$$\overline{\lim}|a_n z^n| = |z|s.$$

Εφόσον $|z| > R = \frac{1}{s}, |z|s < 1$ δηλαδή

$$\overline{\lim}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Άρα, πάλι από το κριτήριο της ρίζας έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

■

Παρατηρήσεις 3.1.26. (i) *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ όπου $a, c_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \ldots$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς αυτής είναι ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ και άρα $R\frac{1}{\overline{\lim}|c_n|}^{\frac{1}{n}}$.*

(ii) *Για κάθε $0 < r < R$ στον κλειστό δίσκο $\bar{\Delta}(a,r)$ η δυναμοσεορά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n|z-a|^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.*

(iii) *Για $z \notin \bar{\Delta}(a,r)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ αποκλίνει.*

Παραδείγματα 3.1.27. (i) *Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Έχουμε $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, n = 1, 2, \ldots$ οπότε $|c_n|^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και άρα $\overline{\lim}|c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R\frac{1}{e}$.*

(ii) *Έστω η δυναμοσειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{n^2}$. *Έχουμε* $c_m = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{m^2}$ *αν* $m = n^2$ *και* 0 *αλλιώς. Έπεται ότι* $\overline{\lim}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. *Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι* $R = 1$.

Πόρισμα 3.1.28. *Έστω δυναμοσειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ώστε* $a_n \neq 0$ *για κάθε* $n = 0, 1, \ldots.$ *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in \tilde{\mathbb{R}}.$$

Τότε η ακτίνα σύγκλισης R*της δυναμοσειράς είναι*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Απόδειξη :
Έπεται από το Θεώρημα 3.1.25 και από το γεγονός ότι αν $a_n \neq 0$ για κάθε n και υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{\ n+1}}\right) \in \tilde{\mathbb{R}},$$

τότε υπάρχει και το

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

και είναι ίσο με

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

■

Παράδειγμα 3.1.29. *Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ *είναι* $R = +\infty$.

Απόδειξη :
Έχουμε $a_n = \frac{1}{n!}$ για κάθε n οπότε $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = n + 1 \to +\infty$.

■

Θεώρημα 3.1.30. *(παραγώγιση δυναμοσειρών). Έστω δυναμοσειρά* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, n \in \Delta(0,R)$ *όπου* $0<R\leq +\infty$ *είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\Delta(0,R)$ *και μάλιστα*

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}, z\in\Delta(0,R).$$

Απόδειξη :

(i) Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ είανι επίσης R. Για $z\in\mathbb{C}, z\neq 0$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ συγκλίνει$\Leftrightarrow$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n}$ συγκλίνει. Άρα οι δύο τελευταόες δυναμοσείρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης R'. Από το Θεώρημα 3.1.25 έχουμε $\frac{1}{R'}=\overline{\lim}(nc_n)^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim}\Big(n^{\frac{1}{n}}|c_n|^{\frac{1}{n}}\Big)=$

$$\lim n\to\infty(n^{\frac{1}{n}}\overline{\lim}|c_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R}.$$

Άρα $R=R'$.

(ii) Έστω $z_0\in\Delta(0,R)$ σταθερό. Επιλέγουμε $|z_0|<r<R$. Για κάθε $n=1,2,...$ θέτουμε

$$\varphi_n(z)=\begin{cases}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0} & \text{αν } z\neq z\\ nz_0^{n-1} & \text{αν } z=z_0\end{cases}$$

. Από τον ορισμό έπεται ότι $z^n-z_0^n=(z-z_0)\varphi_n(z)$ για κάθε z,n. (1)
Επίσης, για κάθε $z\neq z_0$, έχουμε $\varphi_n(z)=z^{n-1}+z^{n-2}z_0+...+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}$ για κάθε z,n. (2)
Από τη σχέση (2) έπεται ότι $\varphi_n(z)$ είναι πολυώνυμο για κάθε n. Για κάθε $z\in\bar{\Delta}(0,r)$ και για κάθε n έχουμε : $|\varphi_n(z)|\leq|z|^{n-1}+|z|^{n-2}|z_0|+...+|z_0|^{n-1}\leq nr^{n-1}$. Επομένως, $|c_n\varphi_n(z)|=|c_n||\varphi_n(z)|\leq n|c_n|r^{n-1},\forall n,\forall z\in\bar{\Delta}(0,r)$ δηλαδή $|c_n\varphi_n(z)|\leq n|c_n|r^{n-1},\forall n,\forall z\in\bar{\Delta}(0,r)$ και επίσης $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n r^{n-1}<+\infty$.

Από το M-κριτήριο του Weierstrass έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z\in\bar{\Delta}(0,r)$. Κάθε $c_n\varphi_n(z)$ είναι πολυώνυμο, άρα είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα η συνάρτησηση $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(z), z\in\Delta(0,r)$ είναι συνεχής. Ειδικά είναι συνεχής στο z_0. Επομένως

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}.$$

Όμως, για $z \in \Delta(0,r)$ με $z \neq z_0$ έχουμε :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)\varphi_n(z), z \in \Delta(0,r), z \neq z_0.$$

Ώστε

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) = g(z), z \in \Delta(0,r), z \neq z_0.$$

Άρα υπάρχει το

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}$$

δηλαδή υπάρχει η $f'(z_0)$ και είναι ίση με $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}$.

■

Πόρισμα 3.1.31. *Έστω δυναμοσειρά* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in \Delta(a,R)$, *όπου* $0 < R \leq +\infty$ *είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Η* f *είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη.*

(ii) $f^{(\kappa)}(z) = \sum_{n=\kappa}^{\infty} n(n-1)...(n-\kappa+1) c_n (z-a)^{n-\kappa}$ $z \in \Delta(a,R)$ *και* $\kappa = 0, 1, ...$

(iii) $c_\kappa = \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}, \kappa = 0, 1, ...$

Απόδειξη :
$(i), (ii)$
Προκύπτουν με επαναληπτική εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.30.
(iii) Για $z = a$ και για $\kappa = 0, 1, ...$ παίρνουμε από τον τύπο (ii) ότι $f^{(\kappa)}(a) = \kappa(\kappa-1)...(\kappa-\kappa+1)c_\kappa = \kappa! c_\kappa$ και άρα $c_\kappa = \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}$.

■

Πόρισμα 3.1.32. *Έστω $0 < r < R \leq +\infty, a \in \mathbb{C}$ και $f : |delta(a, R) \to \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$. Τότε $a_n = c_n$ για κάθε $n = 0, 1, ...$*

Απόδειξη :
Από το Πόρισμα 3.1.31 έχουμε ότι $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, ...$ και $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, ...$
Άρα $a_n = c_n$ για κάθε $n = 0, 1, ...$

■

Ορισμός 3.1.33. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Η συνάρτηση f καλείται αναλυτική στο Ω ή τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω αν για κάθε $a \in \Omega$ και $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \mathbb{C}$ ισχύει:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r).$$

Σημείωση 3.1.34. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Η f είναι αναλυτική στο $\Omega \Rightarrow$ η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο $\Omega \Rightarrow$ η f είναι ολόμορφη στο Ω.*

Πρόταση 3.1.35. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Η f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω.*

(ii) *Για κάθε $a \in \Omega$ και $r > 0$ με $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$ ισχύει:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$$

Απόδειξη :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Είναι προφανές.
$(ii) \Rightarrow (i)$
Έστω $a \in \Omega$ και $\varepsilon > 0$ με $\Delta(a, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}$. Για κάθε $0 < r < \varepsilon$ έχουμε $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Delta(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Άρα για κάθε $0 < r < \varepsilon$, $f(z)\sum_{n=0}^{\infty} c_{r,n}(z-a)^n$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Από το Πόρισμα 3.1.31 έχουμε ότι $c_{r,n} = c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, για κάθε $0 < r < \varepsilon$, για κάθε $n = 0, 1, ...$ Επομένως, έχουμε :$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ για κάθε $z \in \Delta(0, r)$ για κάθε r με $0 < r < \varepsilon$. $\Rightarrow z \in \Delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |z-a| < \varepsilon \Rightarrow$ υπάρχει $r > 0$ με $(|z-a| < r < \varepsilon \Leftrightarrow$ υπάρχει $r > 0$ με $r < \varepsilon$ και $z \in \Delta(a, r)$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ για κάθε $r \in \Delta(a, \varepsilon)$.

■

3.1.4 Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης την $R = +\infty$. Έτσι, αυτή η δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C}$. Καλούμε αυτή τη συνάρτηση εκθετική (exponantional) συνάρτηση, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση είναι η :

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ...$$

Πρόταση 3.1.36. (i) *Η συνάρτηση $exp(z)$ είναι ολόμορφη.*

(ii) $exp(0) = 1$.

(iii) $exp'(z) = exp(z)$.

Απόδειξη :
(iii)
$$exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = exp(z).$$

■

Θέτουμε, επίσης, $e^z = exp(z), z \in \mathbb{C}$. Η e^z είναι η μοναδική ολόμορφη επέκταση στο $\mathbb{C}$ της γνωστής συνάρτησης $e^x, x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.1.37. $e^{z+w} = e^z e^w$, *για* $z, w \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :
Έστω $a \in \mathbb{C}$ σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = e^z e^{a-z}, z \in \mathbb{C}$. Η f είναι ολόμορφη και $f'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή, δηλαδή $f(z) = f(z)$ ή $e^z e^{a-z} = f(a) = e^a$ για κάθε $z, a \in \mathbb{C}$. Παίρνουμε $a = z + w$ και τότε $e^z e^w = e^{z+w}$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

■

Πόρισμα 3.1.38. *Ισχύει ότι $e^z \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη :
Για κάθε $z \in \mathbb{C}, e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ και άρα $e^z \neq 0$.

■

Πρόταση 3.1.39. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}, z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :
Για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\kappa!}$$

Επομένως,

$$\overline{(e^z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\kappa!}} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\kappa!}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^\kappa}{\kappa!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = e^{\bar{z}}$$

■

Πρόταση 3.1.40. $|e^z| = e^{Re(z)}, z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :
Για κάθε $z \in \mathbb{C}, |e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2Re(z)} = \left(e^{Re(z)}\right)^2$. Ώστε $|e^z|^2 = \left(e^{Re(z)}\right)^2$ και άρα $|e^z| = e^{Re(z)}, z \in \mathbb{C}$.

■

Πόρισμα 3.1.41. $|e^{it}| = 1$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη :
$|e^{it}| = e^{Re(it)} = e^0 = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

■

Παρατηρήσεις 3.1.42. *Η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ *έχει ακτίνα σύγκλισης το* $+\infty$.
Έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι :$R = \frac{1}{s}$ *όπου*

$$s = \overline{\lim_{h\to\infty}} \left(\frac{1}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

και άρα

$$R = \overline{\lim}((2n)!)^{\frac{1}{2n}}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} ((2n)!)^{\frac{1}{2n}} = +\infty$$

Επομένως,

$$R = \overline{\lim}((2n)!)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}((2n)!)^{\frac{1}{2n}} = +\infty$$

Ορισμός 3.1.43. *Η συνάρτηση συνημίτονο ορίζεται ως εξής :*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$$

Σημείωση 3.1.44. *Η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *έχει ακτίνα σύγκλισης* $R = +\infty$.

Ορισμός 3.1.45. *Η συνάρτηση ημίτονο ορίζεται ως εξής :*

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$$

Σημείωση 3.1.46. *Οι συναρτήσεις* $\cos z, \sin z$ *είναι οι μοναδικές ολόμορφες επεκτάσεις των γνωστών συναρτήσεων* $\cos x, \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ *αντίστοιχα.*

Πρόταση 3.1.47. (i) $(\sin z)' = \cos z$.

(ii) $(\cos z)' = -\sin z$.

(iii) $\sin(-z) = -\sin z$.

(iv) $\cos(-z) = \cos z$.

Πρόταση 3.1.48. (i) $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z \sin w, z, w \in \mathbb{C}$.

(ii) $\sin(z-w) = \sin z\cos w - \cos z\sin w, z, w \in \mathbb{C}$

(iii) $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w, z, w \in \mathbb{C}$.

(iv) $\cos(z-w) = \cos z\cos w + \sin z\sin w, z, w \in \mathbb{C}$

Απόδειξη :

Έστω $a \in \mathbb{C}$ *σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(z) = \sin z\cos(a-z) + \cos z\sin(a-z), z \in \mathbb{C}$. *Έχουμε* $f'(z) = \cos z\cos(a-z) + \sin z\sin(a-z) - \sin z\sin(a-z) - \cos z\cos(a-z) = 0$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$. *Άρα η* f *είναι σταθερή, επομένως* $f(z) = f(a)$. *Είναι* $f(a) = \sin a$, *άρα* $\sin a = f(z), z \in \mathbb{C}$ *δηλαδή* $\sin a = \sin z\cos(a-z) + \cos z\sin(a-z)$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$, *για κάθε* $a \in \mathbb{C}$. *Θέτουμε* $a = z + w$ *και παίρνουμε* $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos w \sin w$, *για κάθε* $z, w \in \mathbb{C}$.

∎

Θεώρημα 3.1.49. *(Euler)* $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη :
Για κάθε $z \in \mathbb{C}, e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$. Επειδή για κάθε $z \in \mathbb{C}$ η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα μπορούμε να γράψουμε :$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έπεται, $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n+1}(2n+1)! = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}}{=} \cos z + i \sin z$. Ώστε $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

■

Πόρισμα 3.1.50. (i) $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :
Από την ταυτότητα του Euler έχουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$:$e^{iz} = \cos z + i \sin z, (1)$, $e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin(-z)$ δηλαδή $e^{-iz} = \cos z - i \sin z, (2)$. Προσθέτοντας τις $(1), (2)$ κατά μέλη παίρνουμε $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$, δηλαδή $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Αφαιρώντας τη (2) από την (1) παίρνουμε $e^{iz} = e^{-iz} = 2i \sin z$ και άρα $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

■

Σημείωση 3.1.51. *Οι συναρτήσεις* $\cos z, \sin z$ *δεν είναι φραγμένες στο* $\mathbb{C}$

Πρόταση 3.1.52. *Ισχύει ότι* $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi$, *κ ακέραιος.*

Απόδειξη :
$(\Leftarrow)$
Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Έστω ότι $z = 2\kappa\pi$, κ ακέραιος. Τότε από την ταυτότητα του Euler, $e^{2\kappa\pi} = \cos(2\kappa\pi) + i \sin(2\kappa\pi) = 1$. $(\Rightarrow)$
Έστω $e^z = 1, z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $|e^z| = 1$. Όπως γνωρίζουμε, $|e^z| = e^{Re(z)} = e^x$, οπότε $e^x = 1$ και άρα $x = 0$. Συνεπώς, $e^{iy} = 1$, οπότε από την ταυτότητα του Euler $E^{iy} = \cos y + i \sin y = 1, y \in \mathbb{R}$ και άρα $2\kappa\pi, \kappa$ ακέραιος. Ώστε $z = x + iy = 2\kappa\pi, \kappa$ ακέραιος.

■

Πόρισμα 3.1.53. *Η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο* $2\pi i$.

Απόδειξη :
$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$, αφού $e^{2\pi i} = 1$.

■

Πρόταση 3.1.54. (i) $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa$ *ακέραιος.*

(ii) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi, \kappa$ *ακέραιος.*

Ορισμός 3.1.55. (i) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa$ *ακέραιος.*

(ii) $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, z = \kappa\pi, \kappa$ *ακέραιος.*

Σημείωση 3.1.56. *Οι συναρτήσεις* $\tan z, \cot z$ *είναι μερόμορφες στο* $\mathbb{C}$.

Ορισμός 3.1.57. (i) *Το υπερβολικό συνημίτονο εξορισμού είναι το :*

$$\cos hz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}.$$

(ii) *Το υπερβολικό ημίτονο εξορισμού είναι το :*

$$\sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}.$$

Πρόταση 3.1.58. (i) $\cos hz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$

(ii) $\sin hz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$

Παρατηρήσεις 3.1.59. *Η συνάρτηση* $\varphi : \mathbb{R} \to (0,1) : \varphi(t) = e^{it}$ *είναι συνεχής και επί.*

Απόδειξη:
Ότι η φ παίρνει τιμές στο $C(0,1)$ είναι γνωστό αφού $|e^{it}| = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης, είναι προφανές ότι η φ είναι συνεχής. Από την ταυτότητα $\varphi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, t \in \mathbb{R}$ έπεται ότι η φ είναι επί.

■

Πρόταση 3.1.60. *Η συνάρτηση* $e^z, z \in \mathbb{C}$ *είναι επί του* $\mathbb{C} - \{0\}$.

Απόδειξη :
Έστω $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Τότε $\frac{w}{|w|} \in C(0,1)$ άρα υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{w}{|w|} = e^{it}$, δηλαδή $w = |w|e^{it}, (1)$. Είναι $|w| > 0$ και άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|w| = e^x, (2)$. Από τις $(1), (2)$, έπεται ότι : $w = e^x e^{it} = e^{x+it}$, δηλαδή $w = e^z$ όπου $z = x + it$.

■

Ορισμός 3.1.61. *Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Ένας πραγματικός αριθμός t είναι ένα όρισμα του z αν $z = |z|e^{it}$.*
Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός έχει τουλάχιστον ένα όρισμα.

Πρόταση 3.1.62. *Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ και $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι όρισμα του z. Ένας πραγματικός αριθμός $t \Leftrightarrow t = t_0 + 2\kappa\pi, \kappa$ ακέραιος.*

Απόδειξη :
$(\Leftarrow)$
$t = t_0 + 2\kappa\pi, \kappa$ ακέραιος. Τότε $|z|e^{it} = |z|e^{i(t_0+2\kappa\pi)} = |z|e^{it_0}e^{2\kappa\pi i} = |z|e^{it_0} = z$.
$(\Rightarrow)$
Έστω $t \in \mathbb{R}$ ώστε $z = |z|e^{it}$. Έχουμε επίσης $z = |z|e^{it_0}$. Έπεται ότι $e^{it} = e^{it_0}$ και άρα $e^{i(t-t_0)} = 1$, οπότε $t = t_0 + 2\kappa\pi, \kappa$ ακέραιος.

∎

Ορισμός 3.1.63. *Έστω $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι εξορισμού ένας λογάριθμος του w αν $w = e^z$. Από προηγούμενη πρόταση έπεται ότι κάθε $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ έχει τουλάχιστον ένα λογάριθμο.*

Πρόταση 3.1.64. *Έστω $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$ είναι όρισμα του w. Τότε ένας μιγαδικός αριθμός z είναι λογάριθμος του $w \Leftrightarrow z = log|w| + it + 2\kappa\pi i, \kappa$ ακέραιος.*

Απόδειξη :
Είναι $e^z = e^{log|w|+it+2\kappa\pi i} = e^{log|w|}e^{it}e^{2\kappa\pi i} = |w|e^{it} = |w|\frac{w}{|w|} = w$. Αντίστροφα, έστω $z \in \mathbb{C}$ με $e^z = w$. Εφόσον t είναι ένα όρισμα του w, $w = |w|e^{it}$. Άρα $e^z = |w|e^{it} = e^{log|w|}e^{it} = e^{log|w|+it}$. Ώστε $e^z = e^{log|w|+it}$ και άρα $e^{z-(log|w|+it)} = 1$, οπότε $z = log|w| + it + 2\kappa\pi i$ για κ ακέραιο.

∎

Ορισμός 3.1.65. *Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος. Μια συνεχής συνάρτηση $h : G \to \mathbb{C}$ καλείται κλάδος του λογαρίθμου στο G αν*

$$exp(h(z)) = z, \forall z \in G$$

δηλαδή $e^{h(z)} = z$ για κάθε $z \in G$.

Πρόταση 3.1.66. *Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $h : G \to \mathbb{C}$ κλάδος του λογαρίθμου. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Η H είναι ολόμορφη συνάρτηση.*

(ii) *$h'(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \in G$.*

(iii) *Μια συνάρτηση $g : G \to \mathbb{C}$ είναι κλάδος λογαρίθμου στο $G \Leftrightarrow g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$, κ σταθερός ακέραιος.*

Απόδειξη :
Υποθέτουμε τα εξής : $h : G \to \mathbb{C} \to C$, h συνεχής και $exp(h(z)) = z$ για κάθε $z \in G$. Επίσης $exp'(w) = exp(w) \neq 0$ για κάθε $w \in C$. Από το θεώρημα παραγώγισης έχουμε ότι η h είναι ολόμορφη και $h'(z) = \frac{1}{exp'(h(z))} = \frac{1}{exp(h(z))} = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \in G$.
$(iii)(\Leftarrow)$
Αν $g : G \to \mathbb{C} : g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$, τότε η g είναι συνεχής και για κάθε $z \in G$, έχουμε ότι $e^{g(z)} = e^{h(z)+2\kappa\pi i} = e^{h(z)}e^{2\kappa\pi i} = e^{h(z)} = z$ και άρα η g είναι κλάδος του λογαρίθμου στο G. $(\Rightarrow)$
Έστω $g : G \to \mathbb{C}$ κλάδος λογαρίθμου στο G. Τότε η g είναι συνεχής και $e^{g(z)} = z$ για κάθε $z \in G$. Έχουμε, επίσης, $e^{h(z)} = z$ για κάθε $z \in G$. Επομένως $e^{g(z)-h(z)} = 1$ για κάθε $z \in G$. Άρα για κάθε $z \in G$ υπάρχει $\kappa_z \in \mathbb{Z}$ ώστε $g(z) - h(z) = 2\kappa\pi i$ για κάθε $z \in G$, οπότε $g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$ για κάθε $z \in G$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : G \to \mathbb{Z} : \varphi(z) = \frac{g(z)-h(z)}{2\pi i}$. Η φ είναι συνεχής και καθώς G είναι τόπος και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Η φ είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε $\varphi(z) = \kappa$ για κάθε $z \in G$. Έπεται ότι $g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$ για κάθε $z \in G$.

■

Σε όλα τα επόμενα περιοριζόμαστε στον εξής τόπο : $D = \mathbb{C} - \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$

Λήμμα 3.1.67. *Για κάθε $z \in C(0,1) - \{1\}$ υπάρχει ακριβώς μία γωνία $\theta(z) \in (-\pi, \pi)$ τέτοια ώστε $z = e^{i\theta(z)}$.*

Σημείωση 3.1.68. *Η συνάρτηση $C(0,1) - \{1\} \ni z \to \theta(z) \in (-\pi, \pi)$ είναι συνεχής.*

Ορισμός 3.1.69. *Για κάθε $z \in D$ έχουμε προφανώς $\frac{z}{|z|} \in C(0,1) - \{1\}$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μια γωνία $\theta\left(\frac{z}{|z|}\right) \in (-\pi, \pi)$ ώστε $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta\left(\frac{z}{|z|}\right)}$.*
Η συνάρτηση $\Theta_1 : D \to (-\pi, \pi) : \theta_1(z) = \theta\left(\frac{z}{|z|}\right)$ είναι συνεχής και $z = |z|e^{i\theta_1(z)}$. Η Θ_1 καλείται κύριος κλάδος του ορίσματος.

Πρόταση 3.1.70. *Η συνάρτηση $l : D \to \mathbb{C}, l(z) = log|z| + \theta_1(z)$ είναι ένας κλάδος του λογαρίθμου στο D.*

Απόδειξη :
Προφανώς η l είναι συνεχής. Έχουμε για κάθε $z \in D$ ότι $e^{l(z)} = e^{log|z|+i\theta_1(z)} = e^{log|z|}e^{i\theta_1(z)} = |z|e^{i\theta_1(z)} = z$. Άρα η l είναι κλάδος του λογαρίθμου στο D.

■

Ορισμός 3.1.71. *Θέτουμε $arg(z) = \theta_1(z)$, $z \in D$. Η συνάρτηση $arg : D \to (-\pi, \pi)$ καλείται κύριος κλάδος του ορίσματος. Επίσης, θέτουμε $log(z) = l(z), z \in D$. Η συνάρτηση $log : D \to \mathbb{C}$ καλείται κύριος κλάδος του λογαρίθμου.*
Είναι φαφές ότι $log = log|z| + iarg(z)$ για κάθε $z \in D$.

Παρατηρήσεις 3.1.72. *Κάθε κλάδος του λογαρίθμου είναι της μορφής* $log_\kappa(z) = log(z) + 2\kappa\pi i, \kappa$ *ακέραιος. Ο κλάδος* $log_\kappa(z)$ *του λογαρίθμου κα•λείται κλάδος τάξης* κ.

3.1.5 Παράσταση του $log(1+z), |z| < 1$ με δυναμοσειρά

Για $|z| < 1$ *έχουμε* $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f : \Delta(0,1) \to \mathbb{C}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$. *Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με* 1. *Η συνάρτηση* f *της δυναμοσειράς είναι ολόμορφη και* $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, z \in (0,1)$. *Δηλαδή* $f'(z) = \frac{1}{1+z}, z \in \Delta(0,1)$. *Επίσης,* $log'(1+z) = \frac{1}{1+z}, z \in \Delta(0,1)$. *Ειδικά για* $z = 0, log(1) = f(0) + c \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$ *και άρα* $log(z+1) = f(z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}, z \in \Delta(0,1)$.
Ώστε

$$log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

Ορισμός 3.1.73. *Έστω* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Για κάθε* $z \in D$ *ο κύριος κλάδος της δύναμης* $\{z^\lambda\}$ *είναι* $z^\lambda = e^{\lambda logz}$. *Ο κλάδος τάξης* $\kappa \in \mathbb{Z}$ *της δύναμης* $\{z^\lambda\}$ *είναι* ${z_\kappa}^\lambda = e^{\lambda log z_\kappa}$.

Πρόταση 3.1.74. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $z \in D$ *ισχύουν τα εξής :*

(i) $z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z$, *n φορές.*

(ii) $z^{-n} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot ... \cdot \frac{1}{z}$, *n φορές.*

Απόδειξη :
Για $n \in \mathbb{N}$ και $z \in D$, $z^n = e^{nlogz} = \left(e^{logz}\right)^n = z^n = z \cdot ... \cdot z, n$ φορές.

∎

Πρόταση 3.1.75. *Έστω* $z \in D$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) *Αν* λ *είναι ρητός και* $\lambda = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ *και* $(p,q) = 1$ *τότε η δύναμη* $\{z^\lambda\}$ *έχει ακριβώς* q *κλάδους.*

(ii) *Αν* λ *είναι άρρητος τότε η δύναμη* $\{z^\lambda\}$ *έχει άπειρους αριθμήσιμους το πλήθος κλάδους.*

Παράδειγμα 3.1.76. $i^i = e^{ilogi}$

$logi = log|i| + iargi = i\frac{\pi}{2}$. *Επομένως,* $i^i = e^{i\left(\dfrac{i\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. *Έχουμε* $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow e^{\pi}$ *υπερβατικός.*

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώματα

4.1 Καμπύλες στο $\mathbb{C}$- Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Ορισμός 4.1.1. *Έστω συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a,b]$.*

(i) *Η συνάρτηση φ είναι διαφορίσιμη στο t_0 αν οι συναρτήσεις $Re\varphi$ και $Im\varphi$ είναι διαφορίσιμες στο t_0. Τότε η παράγωγος της φ στο t_0 είναι $\varphi'(t_0) = (Re\varphi)'(t_0) + i(Im\varphi)'(t_0)$. $\varphi'(t_0) = Re\varphi'(t_0) + iIm\varphi'(t_0)$.*

(ii) *Η συνάρτηση φ είναι διαφορίσιμη στο $[a,b]$ αν οι συναρτήσεις $Re\varphi$ και $Im\varphi$ είναι διαφορίσιμες στο $[a,b]$. Τότε η παράγωγος της φ στο $[a,b]$ είναι $\varphi'(t) = (Re\varphi)'(t) + i(Im\varphi)'(t), t \in [a,b]$, δηλαδή $\varphi'(t) = Re\varphi'(t) + iIm\varphi'(t), t \in [a,b], \varphi' = (Re\varphi)' + i(Im\varphi)'$.*

Ορισμός 4.1.2. *Έστω συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$.*

(i) *Η φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a,b]$ αν υπάρχει η $\varphi'(t), t \in [a,b]$ και είναι συνεχής.*

(ii) *Η φ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a,b]$ αν υπάρχει διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $\varphi|_{t_{i-1},t_i}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη για $i = 1, ..., n$.*

Πρόταση 4.1.3. *(Κανόνας της αλυσίδας). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $\varphi : [a,b] \to \Omega$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $f \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμη και $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$.*

Ορισμός 4.1.4. *Έστω συνάρτηση $\varphi : [a,b]\mathbb{C}$ συνεχής. Ισοδύναμα, οι συναρτήσεις $Re\varphi$ και $Im\varphi$ είναι συνεχείς. Τα ολοκληρώματα κατά Riemann της φ στο διάστημα $[a,b]$ είναι*

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b Re(\varphi)(t)dt + i\int_a^b Im(\varphi)(t)dt.$$

Πρόταση 4.1.5. *Έστω $\varphi_1, \varphi_2; [a,b]\mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε :*

$$\int_a^b [\lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t)]dt = \lambda \int_a^b \varphi_1(t)dt + \mu \int_a^b \varphi_2(t)dt.$$

Θεώρημα 4.1.6. *(Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού- Μιγαδική μορφή). Έστω συνεχής συνάρτηση $\Phi : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\Phi : [a,b] \to \mathbb{C} : \Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Τότε η συνάρτηση ϕ είναι διαφορίσιμη και $\Phi'(x) = \varphi(z)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Θεώρημα 4.1.7. *(Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού- Μιγαδική μορφή). Έστω συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε*

$$\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Πρόταση 4.1.8. *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

Απόδειξη :
Αν $\int_a^b \varphi(t)dt = 0$, το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι $\int_a^b \varphi(t)dt \neq 0$. Τότε θέτουμε $\lambda = \dfrac{\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right|}{\int_a^b \varphi(t)dt}$. Παρατηρούμε ότι $|\lambda| = 1, (1)$. Από τον ορισμό έχουμε

$$\left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \lambda \int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b \lambda\varphi(t)dt, (2),$$

Καθώς $\left| \int_a^b \varphi(t)dt \right|$ είναι πραγματικός αριθμός πρέπει $\int_a^b \lambda\varphi(t)dt$ να είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\int_a^b \lambda\varphi(t)dt = \int_a^b Re(\lambda\varphi(t))dt, (3)$. Από τις $(2), (3)$ έπεται ότι

$$\left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \int_a^b Re(\lambda\varphi(t))dt, (4).$$

Όμως για κάθε $t \in [a,b]$ έχουμε ότι $Re(\lambda\varphi(t)) \leq |\lambda\varphi(t)|=|\lambda||\varphi(t)|$ που μέσω της (1) γίνεται $|\varphi(t)|$, (5). Από τις $(4), (5)$ έπεται ότι

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

∎

Ορισμός 4.1.9. *Έστω συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε η κύμανση της φ είναι*

$$v(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|dt.$$

Σημείωση 4.1.10. (i) *Για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ θέτουμε $v(\varphi, P) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$ που είναι η μερική κύμανση της φ ως προς την P.*
Ισχύει πάντα ότι $v(\varphi, P) \leq v(\varphi)$.

(ii) *$v(\varphi) = sup\{v(\varphi, P) : P$ διαμέριση του $[a,b]\} \leq +\infty$. Δεν είναι όλες οι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης.*

Παράδειγμα 4.1.11. *Έστω $f(t) = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Τότε έχουμε : $v(f) = \int_0^{2\pi} |\cos t|dt =$* 4.

Ορισμός 4.1.12. *Έστω συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη και διαμέριση του $[a,b]P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ ώστε $\varphi|_{[t_{i_1}, t_i]}$ είναι C^1 συνάρτηση για $i = 1, ..., n$. Τότε η κύμανση της φ είναι $v(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)|dt$.*

4.1.1 Καμπύλες

Ορισμός 4.1.13. *Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καλείται καμπύλη.*

Ορισμός 4.1.14. *Μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη αν η συνάρτηση γ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη.*

Σε όλα τα επόμενα οι καμπύλες θα είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες.

Ορισμός 4.1.15. *Έστω καμπύλη γ. Τότε το μήκος της γ είναι :*

$$\mu(\gamma) = v(\gamma).$$

με $\mu(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$, αν η γ είναι C^1, (1) και $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-i}}^{t_i} |\gamma'(t)|dt$, αν γ κατά τμήματα C^1, (2).

Ορισμός 4.1.16. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Τότε η αντίθετη της καμπύλης γ είναι η καμπύλη*

$$-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} : (-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t).$$

Πρόταση 4.1.17. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Τότε $\mu(-\gamma) = \mu(\gamma)$.*

Απόδειξη :
Υποθέτουμε ότι η γ είναι C^1 καμπύλη, οπότε και η $-\gamma$ είναι C^1 καμπύλη. Τότε εξορισμού έχουμε

$$\mu(-\gamma) = \int_a^b |(-\gamma)'(t)|dt = \int_a^b |\gamma'(a + b_t)|dt.$$

Θέτουμε $a + b - t = x$, $dt =_d x$, $t = a \Rightarrow x = b$, $t = b \Rightarrow x = a$. Επομένως,

$$\mu(-\gamma) = -\int_b^a |\gamma'(x)|dx = \int_a^b |\gamma'(x)|dx = \mu(\gamma).$$

Ορισμός 4.1.18. *Έστω καμπύλη $\gamma A[a, b] \to \mathbb{C}$. Θέτουμε $\gamma^* = \gamma([a, b])$. Είναι προφανές ότι $(\gamma^*) = \gamma^*$.*

Παραδείγματα 4.1.19. (i) *Έστω $z, w\mathbb{C}$. Το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z και πέρας w είναι η καμπύλη $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = (1 - t)z + tw$. Το μήκος της γ είναι*

$$\mu(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 |w - t|dt = |w - z|.$$

Την καμπύλη γ τη συμβολίζουμε με $[z, w] \equiv \gamma$.

(ii) *Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ Ο θετικά προσανατολοσμένος κύκλος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι η καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = a + re^{it}$. Έχουμε $\mu(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|dt = \int_0^{2\pi} rdt = 2\pi r$.*

Ορισμός 4.1.20. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ και έστω διαμέριση του $[a, b]P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ ώστε $\gamma|_{t_{i-1}, t_i}$ είναι καμπύλη για $i = 1, 2, ..., n$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της γ είναι εξορισμού*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^{t_i}} f(\gamma(t))dt.$$

Όταν η καμπύλη γ είναι C^1 καμπύλη, τότε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Πρόταση 4.1.21. *Έστω καμπύλη γ και συνεχής συνάρτηση $f : \gamma^{ast} \to \mathbb{C}$. Τότε* $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$

Απόδειξη :
Υποθέτουμε ότε η γ είναι C^1 καμπύλη. Έχουμε

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_a^b (f(-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)dt = \quad \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t))dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t$$

Θέτουμε

(i) $a+b-t = x$,

(ii) $dt = -dx$,

(iii) $t = a \Rightarrow x = b$,

(iv) $t = b \Rightarrow x + a$

και έχουμε $\displaystyle\int_a^b f(\gamma(x))\gamma'(x)dx = -\int_a^b f(\gamma(x))\gamma'(x)dx = -\int_\gamma f(z)dz.$

■

Πρόταση 4.1.22. *Έστω καμπύλη γ και συνεχής συνάρτηση $f : \gamma* \to \mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε* $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M\mu(\gamma).$

Απόδειξη :
Έστω διαμέριση $P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ είναι C^1 καμπύλη για $i = 1,...,n$. Τότε, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. Έπεται, $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right| \leq \sum_{i=1}^n \int |f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} M|\gamma'(t)|dt = M\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|dt = M\mu(\gamma)$. Δηλαδή $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M\mu(\gamma).$

■

Ορισμός 4.1.23. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Η συνάρτηση F καλείται παράγουσα της f στο Ω αν $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.*

Πρόταση 4.1.24. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε η F είναι παράγουσα της f. Τότε για κάθε καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$: $\int_\gamma f(z)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα ολοκλήρωσης και όχι από το ¨δρόμο'*

Απόδειξη :
Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$. Έστω διαμέριμη $P = \{a = t_0 < ... < t_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε η $\gamma|_{t_{i-1},t_i}$ είναι C^1 καμπύλη. Τότε $\int f(z)dz = \sum_{i=1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. Έχουμε για κάθε $t \in [t_{i-1}, t_i], f(\gamma(t))\gamma'(t) = (F \circ \gamma)'(t)$ από τον κανόνα της αλυσίδας. Συνεπώς, $\int_\gamma f(z)dz = \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F \circ \gamma)'(t)dt = \sum_{i=1}^{n} [(F \circ \gamma)(t_i) - (F \circ \gamma)(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} [f(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))] = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) + F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1)) + ... + F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_{n-1})) = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

■

Ορισμός 4.1.25. *Μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι κλειστή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Πόρισμα 4.1.26. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση η ο•ποία έχει παράγουσα στο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ, με $\gamma * \subset \Omega$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Απόδειξη :
Έστω $F : \Omega \to \mathbb{C}$ παράγουσα της f και κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$. Τότε από την Πρόταση 4.1.24 $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

■

Παρατηρήσεις 4.1.27. *Αν $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε η φ έχει παράγουσα στο $[a, b]$, δηλαδή υπάρχει $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη ώστε $\Phi'(z) = \varphi(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt, x \in [a, b]$.*

Παράδειγμα 4.1.28. *Έστω $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ και $f : \Omega \to \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$. Έστω ακόμα $r > 0$ και $C(0, r) \equiv \gamma : [0, 2\pi] \to \Omega : \gamma(t) = re^{it}$. Η γ είναι κλειστή καμπύλη. Έχουμε $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$. Ώστε $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$ ή $\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}dz = 2\pi i$. Άρα η συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα στον τόπο $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$.*

Θεώρημα 4.1.29. *Έστω $\varphi, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θέτουμε $\Omega = \mathbb{C} - g([a,b])$ που είναι ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C} : f(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{g(t)-z}dz$. Τότε η συνάρτηση f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω και άρα είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και*

$$f^{(\kappa)}(z) = \kappa! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z)^{\kappa+1}}dt, \kappa = 0, 1, ...$$

Απόδειξη :
Η φ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\varphi(t)| \le M$ για κάθε $t \in [a,b]$. Έστω $z_0 \in \Omega$ και $r > 0$ ώστε $\Delta(z_0, r) \subseteq \Omega$. Για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και $t \in [a,b]$ έχουμε $|z - z_0| < r$ και $|g(t) - z_0| \ge r$ και άρα $\frac{|z-z_0|}{|g(t)-z_0|} < 1$, δηλαδή $\left|\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right| < 1$. Συνεπώς για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και $t \in [a,b]$ η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right)^n$ συγκλίνει. Επομένως, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}} = \frac{g(t)-z_0}{g(t)-z}$ για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και για κάθε $t \in [a,b]$.
Έπεται, $\frac{1}{g(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(g(t)-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n, (1)$ για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και για κάθε $t \in [a,b]$.
Έστω $z \in \Delta(z_0, r)$ σταθερά. Για κάθε $t \in [a,b]$ έχουμε

$$\left|\frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| = \frac{|\varphi(t)|}{|g(t)-z_0|}^{n+1}|z-z_0|^n \le \frac{M}{r^{n+1}}|z-z_0|^n = \frac{M}{r}\left(\frac{|z-z_0|^n}{r}\right)(2)$$

για $n = 0, 1, ...$ Έχουμε ακόμα ότι $\frac{z-z_0}{r} < 1$ και επομένως η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n < \infty$, οπότε $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{r}\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n < \infty, (3)$.

Από τις σχέσεις $(2), (3)$ και το M-κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{g(t)-z_0{}^{n+1}}(z-z_0)^n, (4)$ συγκλινει ομοιόμορφα για $t \in [a,b]$. Από τις $(1), (4)$ έπεται ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \frac{\varphi(t)}{g(t)-z}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \in [a,b]$. Συνεπώς, $\int_a^b \frac{\varphi(t)}{g(t)-z}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}dt}\right](z-z_0)^n$, δηλαδή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1}dt}\right)(z-z_0)^n$ για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ ή $f(z) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, n \in \Delta(z_0, r)$ όπου $c_n = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)\,dt}, n = 0, 1, ...$ Έτσι, η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στον $\Delta(z_0, r)$. Όπως είναι γνωστό, οι συντελεστές $c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$, οπότε

$$f^n(z_0) = n! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z_0)^{n+1} dt}, n = 0, 1, ... \tag{4.1}$$

Εφόσον το z_0 είναι αυθαίρετο σημείο του Ω η σχέση 5.1.1 ισχύει για κάθε $z \in \Omega$ που σημαίνει ότι $f^{(n)}(z) = n! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t)-z)^{n+1} dt}$ για $n = 0, 1, ...$

■

4.1.2 Δείκτης στροφής καμπύλης

Ένα σημείο κινούμενο κατά μήκος της καμπύλης Γ από τη θέση w_1 στη θέση w_2 θα διαγράψει $\frac{\theta}{2\pi}$ μέρος της μιας στροφής, δηλαδή θα διαγράψει $\frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi}$ μέρος της μιας στροφής. Έχουμε

(i) $w_1 = e^{i\theta_1}$

(ii) $w_2 = e^{i\theta_2}$

και επομένως

(i) $logw_1 = i\theta_1$

(ii) $logw_2 = i\theta_2$,

άρα

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{i}(logw_2 - logw_1)$$

οπότε

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}(logw_2 - logw_1).$$

Έπεται ότι

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z} dz.$$

Ώστε το μέρος της μιας στροφής γύρω από το μηδέν που θα διαγράψει ένα σημείο κινούμενο κατά μήκος της Γ καμπύλης από τη θέση w_1 στη θέση w_2 δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z} dz.$$

Ορισμός 4.1.30. *Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $z \neq \gamma^*$. Ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς z εξορισμού είναι*

$$\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma 1\zeta - z d\zeta.$$

Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $\delta_\gamma : \mathbb{C} - \gamma* \to \mathbb{C} : \delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta$. Η συνάρτηση δ_γ καλείται δείκτης της καμπύλης γ.

Θεώρημα 4.1.31. *Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Ο δ_γ είναι ακέραιος για κάθε $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$.*

(ii) *Η συνάρτηση δ_γ είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - \gamma$.*

(iii) *Η δ_γ μηδενίζεται στη μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - \gamma$.*

Απόδειξη :
Υποθέτουμε ότι η καμπύλη γ είναι C^1 καμπύλη. Η συνάρτηση δ_γ είναι συνεχής :

$$\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - z}\gamma'(t)dt.$$

Άρα από το τελευταίο θεώρημα η δ_γ είναι συνεχής.

(i) Έστω $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$ σταθερό. Έχουμε $\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C} : \varphi(x) = e^{\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt}$. Η συνάρτηση φ είναι διαφορίσιμη και $\varphi'(t) = e^{\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt}\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έτσι έχουμε $\varphi'(x)\varphi(x)\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}, x \in [a, b]$. Έπεται ότι $\varphi'(x)[\gamma(x) - z] - \varphi(x)\gamma'(x) = 0, x \in [a, b]$ ή $\varphi'(x)[\gamma(x)-z]-\varphi(x)[\gamma()-z]' = 0$. Συνεπώς $\left(\frac{\varphi(x)}{\gamma() - z}\right) = \frac{\varphi'(x)[\gamma(x) - z] - \varphi(x)[\gamma(x) - z]'}{[\gamma(x) - z]^2}$. Άρα η συνάρτηση $\frac{\varphi(x)}{\gamma(x)-z}, x \in [a, b]$ είναι σταθερή. Επομένως $\frac{\varphi(x)}{\gamma(x)-z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z}$ για κάθε $z \in [a, b]$. Είναι σαφές ότε $\varphi(a) = e^0 = 1$, οπότε $\varphi(x) = \frac{\gamma(x)-z}{\gamma(a)-z}$ για κάθε $x \in [a, b]$ και ειδικά γοα $x = b$ έχουμε $\varphi(b) = \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} = 1$ διότι $\gamma(a) = \gamma(b)$ λόγω κλειστής καμπύλης. Ώστε $\varphi(b) = 1$ δηλαδή $e^{\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt} = 1$ και άρα $\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt = 2\kappa\pi i$ για κάποιο $z \in \mathbb{Z}$. Ώστε $\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt = \frac{1}{2\pi i}2\kappa\pi i = \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$. Άρα $\delta_\gamma(z) = \kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$.

(ii) Έστω $C \subseteq \mathbb{C} - \gamma^*$ συνεκτική συνιστώσα. Εφόσον η συνάρτηση δ_γ είναι συνεχής το σύνολο $\delta_\gamma[C]$ είναι συνεκτικό και $\delta_\gamma[C] \subseteq \mathbb{C}$ επομένως $\delta_\gamma[C] = \{\kappa\}$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $\delta_\gamma(z) = \kappa$ για κάθε $\kappa \in C$.

(iii) Το σύνολο $\gamma^* = \gamma([a,b])$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ άρα είναι φραγμένο, επομένως υπάρχει $r > 0$ ώστε $\gamma^* \subseteq \Delta(0,r)$. Για $z \notin \bar{\Delta}(0,r)$ και για $\zeta \in \gamma^*$ έχουμε $|\zeta - z| \geq |z| - |\zeta| > |z| - r > 0$ επομένως $\frac{1}{|\zeta - z|} < \frac{1}{|z|-r|}$ για κάθε $\zeta \in \gamma^*$. Άρα $\left|\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \frac{1}{|z| - r}\mu(\gamma)$, οπότε $|\delta_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|z| - r}\mu(\gamma)$. Ώστε $|\delta_\gamma(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|z|-r}\mu(\gamma)$ για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0,r)$ και άρα

$$\lim_{z\to\infty} |\Delta_\gamma(z)| = 0,$$

οπότε

$$\lim_{z\to\infty} \delta_\gamma(z) = 0.$$

Έτσι $\delta_\gamma(0)$ για κάθε $z \notin \bar{\Delta}(0,r)$, οπότε $\delta_\gamma(z)$ για κάθε σημείο z της μη φραγμένης συνεκτικής συνιστώσας του $\mathbb{C} - \gamma^*$.

■

Παρατηρήσεις 4.1.32. (i) *Αν $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $f(x) = x$.*

(ii) *Αν $f : \bar{\Delta}(0,1) \to \bar{\Delta}(0,1)$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει $z \in \bar{\Delta}(0,1)$ ώστε $f(z) = z$.*

(iii) *Έστω γ κλειστή καμπύλη. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(α′) $\displaystyle\int_\gamma z^n dz = 0, n = 0, 1, \ldots.$

(β′) Υποθέτουμε ότι $0 \notin \gamma^*$. Τότε $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = 0, n = 2, 3, \ldots.$

(γ′) Υποθέτουμε ότι $0 \notin \gamma^*$. Τότε $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \delta_\gamma(0).$

4.1.3 Τοπικό θεώρημα του Cauchy

Συμβολισμός Έστω τρία σημεία a, b, c στο επίπεδο. Συμβολίζουμε με $T = T(a,b,c)$ το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία a, b, c. Επίσης, συμβολίζουμε με $\partial T(a,b,c)$ την περίμετρο του τριγώνου, μια κλειστή καμπύλη προσανατολισμένη με τη θετική φορά.

Λήμμα 4.1.33. *(Cauchy-Gousart) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a, b, c \in \Omega$ ώστε το τρίγωνο $T = T(a, b, c)$ να περιέχεται στο Ω. Τότε*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Απόδειξη :
Έστω a_1, b_1, c_1 τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $[bc], [ca], [ab]$ αντίστοιχα και θεωρούμε τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζονται T_1, T_2, T_3, T_4. Τότε έχουμε $\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz + \int_{\partial T_3} f(z)dz + \int_{\partial T_4} f(z)dz$. Έστω T^1 εκείνο από τα τέσσερα τρίγωνα που το ολοκλήρωμα $\int_{\partial T^1} f(z)dz$ έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Τότε $\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial T^1} f(z)dz\right|$. Επίσης, $\mu(\partial T^1) = \frac{1}{2}\mu(\partial T)$ και η διάμετρος $\delta(T^1) = \frac{1}{2}\delta(T)$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα και κατασκευάζουμε με αυτόν τον τρόπο επαγωγικά μια ακολουθία τριγώνων $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ με τις ιδιότητες

(i) $T \supset T^1 \supset T^2 \supset ... \supset T^n \supset T^{n+1} \supset ....$

(ii) $\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial T^n} f(z)dz\right|$ για $n = 1, 2, ...$

(iii) $\mu(\partial T^n) = \frac{1}{2^n}\mu(\partial T)$ για $n = 1, 2, ...$

(iv) $diam(T^n) = \frac{1}{2^n}diam(T)$.

Κάθε τρίγωνο T^n είναι κλειστό σύνολο. Έτσι, από τις ιδιότητες $(i), (iv)$ καθώς ο μετρικός χώρος $\mathbb{C}$ είναι πλήρης, έπεται ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n = \{z_0\}, z_0 \in \Omega$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(z_0)$ και $\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right) \to 0$ καθώς $z \to z_0$. Επομένως, υπάρχει $\delta > 0$ με $\Delta(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ ώστε $z \in \Delta(z_0, \delta), z \neq z_0 \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$, οπότε $z \in \Delta(z_0, \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|, (1)$. Επιλέγουμε n ώστε $\mathrm{diam}(T^n) < \delta$. Τότε $T^n \subseteq \Delta(z_0, \delta)$.
Έστω $w \in T^n$. Έχουμε $z_0 \in T^n$. Επομένως $|w - z_0 \leq \mathrm{diam}(T^n) < \delta$ δηλαδή $w \in T^n \Rightarrow |w - z_0| < \delta$ άρα $T^n \subseteq \Delta(z_0, \delta)$. Συνεπώς, από την (1) έπεται ότι

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|, \forall z \in T^n,$$

άρα $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon\mathrm{diam}(T^)$ για κάθε $z \in \partial T^n$, (2). Από τη (2) έπεται ότι

$$\int_{\partial T^n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\, dz \leq \varepsilon\mathrm{diam}(T^n)\mu(\partial T^n), (3).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες $(iii), (iv)$ η (3) δίνει :

$$\left|\int_{\partial T^n}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz\right| \leq \varepsilon\frac{1}{4^n}\text{diam}(T)\mu(\partial T).$$

Όμως $\displaystyle\int_{\partial T}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz=\int_{\partial T^n}f(z)dz$. Άρα $\displaystyle\int_{\partial T}f(z)dz\leq\varepsilon\frac{1}{4^n}\text{diam}(T)\mu(\partial T)$.
Οι συναρτήσεις $f(z_0), f'(z_0)(z-z_0)$ έχουν παράγουσα και επειδή μιλάμε για κλειστή καμπύλη τα ολοκληρώματα μηδενίζονται.
Από την ιδιότητα (ii) παίρνουμε

$$\left|\int_{\partial T}f(z)dz\right|\leq 4^n\left|\int_{\partial T^n}f(z)dz\right|.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται :

$$\left|\int_{\partial T}f(z)dz\right|\leq 4^n\varepsilon\frac{1}{4^n}\text{diam}(T)\mu(\partial T)=\varepsilon\text{diam}(T)\mu(\partial T).$$

Ώστε $\displaystyle\left|\int\partial Tf(z)dz\right|\leq\varepsilon\text{diam}(t)\mu(\partial T)$ για κάθε $\varepsilon>0$. Άρα $\displaystyle\left|\int\partial Tf(z)dz\right|=0$ οπότε $\displaystyle\int_{\partial T}f(z)dz=0$

■

Σημείωση 4.1.34. *Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0\in\Omega$ και συνεχής συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{C}$, ώστε $f|_{\Omega-\{z_0\}}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση. Έστω ακόμα ένα τρίγωνο T με $T\subseteq\Omega$. Τότε $\displaystyle\int_{\partial T}f(z)dz=0$.*

Απόδειξη :

(i) Πρώτη περίπτωση $z_0\notin T$.
Τότε το συμπέρασμα έπεται από την απόδειξη του Λήμματος Cauchy-Gousart 4.1.33. Χρειάστηκε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του T.

(ii) Δεύτερη περίπτωση το z_0 να είναι κορυφή του T και έστω ότι $z_0=a$.
Εφόσον το T είναι συμπαγές και η f είναι συνεχής υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(z)|\leq M$ για κάθε $z\in T$. Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε σημεία x,y στα εσωτερικά των πλευρών $[a,b]$ και $[c,a]$ ώστε $|x-y|+|a-y|+|x-a|<\frac{\varepsilon}{M}$. Ακολούθως θεωρούμε τα τρίγωνα T_1,T_2,T_3. Τότε

$$\int_{\partial T}f(z)dz=\int_{\partial T_1}f(z)dz+\int_{\partial T_2}f(z)dz+\int_{\partial T_3}f(z)dz=0+0+\int_{\partial T_3}f(z)dz$$

από την πρώτη περίπτωση. Άρα $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_3} f(z)dz$. Έπεται ότι $\displaystyle\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_3} f(z)dz\right| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Ώστε

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Άρα

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

(iii) Τρίτη περίπτωση το z_0 είναι εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του τριγώνου, έστω της πλευράς $[c, a]$.
Τότε, θεωρούμε τα τρίγωνα T_1, T_2 και έχουμε

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz = 0,$$

από τη δεύτερη περίπτωση.

(iv) Τέταρτη περίπτωση το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του T.
Τότε, θεωρούμε τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3 και έχουμε

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz + \int_{\partial T_3} f(z)dz = 0,$$

από τη δεύτερη περίπτωση. Άρα $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

■

Θεώρημα 4.1.35. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό και συνεχής συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$, Τότε η f έχει παράγουσα στο Ω, δηλαδή υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$.

Απόδειξη :
Επιλέγουμε $z_0 \in \Omega$ σταθερό σημείο και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{C} : F(z) = \displaystyle\int_{[z_0,z]} f(z)dz$. Τότε η F είναι ολόμορφη και $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Έστω $w \in \Omega$.

Θεωρούμε το τρίγωνο $T = T(z_0, z, w)$. Επειδή το Ω είναι κυρτό το T περιέχεται στο Ω και άρα $\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = 0$. Είναι

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{[z_0,z]} f(z)dz + \int_{[z,w]} f(z)dz + \int_{[w,z_0]} f(z)dz.$$

Έπεται $\int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z,w]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[w,z_0]} f(\zeta)d\zeta$ ή $F(z) - F(w) = \int_{[w,z]} f(\zeta)d\zeta$. Οπότε για $z \in \Omega$ με $z \neq w$, $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w}\int_{[z,w]} f(\zeta)d\zeta$ Άρα $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w) = \frac{1}{z-w}\int_{[z,w]} f(\zeta)d\zeta - f(w) = \frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} [f(\zeta) - f(w)]d\zeta$.

Θεώρημα 4.1.36. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$. Τότε η f έχει παράγουσα στο Ω.*

Απόδειξη :

Επιλέγουμε $z_0 \in \Omega$ σταθερό και θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta$. Έστω $w \in \Omega$. Αποδείξαμε ότι $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w) = \frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} f(\zeta) - f(w)d\zeta, (1)$ για κάθε $z \in \Omega$ με $z \neq w$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο w υπάρχει $\delta > 0$ με $\Delta(w,\delta) \subseteq \Omega$ ώστε $z \in \Delta(w,\delta) \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Για $z \in \Delta(w,\delta) \Rightarrow [w,z] \subseteq \Delta(w,\delta)$. Επομένως, $z \in \Delta(w,\delta), \zeta \in [w,z] \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Έστω $z \in \Delta(w,\delta)$. Τότε, $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ για κάθε $\zeta \in [w,z]$. Συνεπώς

$$\left|\int f(z) - f(w)d\zeta\right| \leq \varepsilon|z-w|[w,z].$$

Επομένως από την (1) έπεται ότι για $z \in \Delta(w,\delta), z \neq w$, $\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w)\right| = \frac{1}{|z-w|}\left|\int_{[w,z]} f(z) - f(w)d\zeta\right| \leq \frac{1}{|z-w|}\varepsilon = \varepsilon$. Ώστε για κάθε $z \in \Delta(w,\delta), z \neq w$, $\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w)\right| \leq \varepsilon$. Άρα υπάρχει η παράγωγος $F'(w)$ και ισχύει $F'(w) = f(w)$.

■

Πόρισμα 4.1.37. *(Τοπικό θεώρημα του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε $f|_{\Omega-\{a\}}$ είναι ολόμορφη. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$ το $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Απόδειξη :
Από το Λήμμα Cauchy-Gousart 4.1.33 έχουμε ότι $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$. Συνεπώς, από το προηγούμενο θεώρημα, η f έχει παράγουσα στο Ω και ισχύει ότι $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$.

■

Θεώρημα 4.1.38. *(Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και γ κλειστή καμπύλη που περιέχεται στο Ω, δηλαδή $\gamma^* \subseteq \Omega$. Τότε $z \in \Omega - \gamma^*, \delta_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.*

Απόδειξη :
Έστω $z \in \Omega - \gamma^*$ σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{αν } \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{αν } \zeta = z \end{cases}$$

Προφανώς, η g είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{z\}$ άρα και συνεχής στο $\Omega - \{z\}$. Επίσης, καθώς

$$g(z) = f'(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \lim_{\zeta \to z} g(\zeta)$$

η g είναι συνεχής και στο z. Από το τοπικό θεώρημα του Cauchy έχουμε $\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0$ ή $\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta = 0$. Επομένως $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i\delta_\gamma(z)f(z)$. Άρα $\delta_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.

■

Πόρισμα 4.1.39. *Έστω $\Omega \to \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega, r > 0$ με $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$. Τότε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta$$

για κάθε $z \in \Delta(a, r)$.

Απόδειξη:
Εφόσον το σύνολο $\bar{\Delta}(a, r)$ είναι συμαγές, το $\mathbb{C} - \Omega$ είναι κλειστό και $\bar{\Delta}(a, r) \cap (\mathbb{C} - \Omega) = 0, \operatorname{dist}(\bar{\Delta}(a, r), \mathbb{C} - \Omega) > 0$. Έστω $\delta = \operatorname{dist}(\bar{\Delta}(a, r), \mathbb{C} - \Omega) > 0$. Θέτουμε $R = r + \frac{\delta}{2}$. Τότε $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Delta(a, R) \subseteq \Omega$. Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την

f περιορισμένη στο ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Delta(a,R)$ και για την καμπύλη $C(a,r) \equiv \gamma : [0,2\pi] \to \Delta(a,r) : \gamma(t) = a + re^{it}$ και παίρνουμε για κάθε $z \in \Delta(a,r), \delta_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.

∎

Θεώρημα 4.1.40. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Η f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω, δηλαδή είναι αναλυτική στο Ω και άρα είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη.*

(ii) *Αν $a \in \Omega, r > 0$ με $\bar{\Delta}(a,r) \subseteq \Omega$ τότε*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}, \forall z \in \Delta(a,r), \forall n = 0,1,...$$

όπου $C(a,r) \equiv \gamma : [0,2\pi] \to \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$.

Απόδειξη :
Έστω $a \in \Omega, r > 0$ ώστε $\bar{\Delta}(a,r) \subseteq \Omega$. Από το Πόρισμα 4.1.39 έχουμε ότι $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$, όπου $gamma : [0,2\pi] \to \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$. Έπεται ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt, \forall z \in \Delta(a,r).$$

Συνεπώς, από προηγούμενο βασικό θεώρημα, η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο δίσκο $\Delta(a,r)$. Επίσης, από το ίδιο θεώρημα έχουμε ότι

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^{n+1}dt}, \forall n = 0,1,....$$

Είναι $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^{n+1}dt} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}d\zeta}$ Άρα $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}d\zeta}$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$.

∎

Πόρισμα 4.1.41. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε :*

(i) *Η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και ειδικά*

(ii) *Η f' είναι ολόμορφη.*

Πόρισμα 4.1.42. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega, f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f_{\Omega - \{a\}}$ είναι ολόμορφη. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.*

Απόδειξη :
Έστω $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Έχουμε ότι στο ανοικτό και κυρτό σύνολο ισχύει :

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Delta(a, r)$. Από γνωστό θεώρημα υπάρχει $F : \Delta(a, r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Από το Πόρισμα 4.1.41 η F' είναι επίσης ολόμορφη στον $\Delta(a, r)$, δηλαδή η f είναι ολόμορφη στον $\Delta(a, r)$.

■

Πόρισμα 4.1.43. *(Θεώρημα Morera). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f συνεχής, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ ισχύει :*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Απόδειξη :
Έστω $a \in \Omega$ και $R > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Έχουμε ότι

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Delta(a, r)$ και καθώς το $\Delta(a, r)$ είναι ανοικτό και κυρτό από προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $F : \Delta(a, r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Η F' είναι ολόμορφη στο $\delta(a, r)$ άρα και η f είναι ολόμορφη στο $\Delta(a, r)$ για κάθε $a \in \Omega$ και για κάθε $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$.

■

Θεώρημα 4.1.44. *(Εκτιμήσεις του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega, r > 0$ με $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$ και $M(a, r) < \infty$ ώστε $|f(\zeta)| \leq M(a, r)$ για κάθε $\zeta \in C(a, r)$. Τότε*

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq n! \frac{M(a, r)}{r^n}$$

για κάθε $n = 0, 1, \dots$.

Απόδειξη :
Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega : \gamma(T) = a + re^{it}$ παραμέτρηση του $C(a,r), \gamma \equiv C(a,r)$. Όπως γνωρίζουμε $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}d\zeta}, n = 0, 1, \dots$. Για κάθε $\zeta \in \gamma^*$, $\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\right| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|^{n+1}} = \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \leq \frac{M(a,r)}{r^{n+1}}$. Ώστε $\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\right| \leq \frac{M(a,r)}{r^{n+1}}$ για κάθε $\zeta \in \gamma^*, n = 0, 1, \dots$. Συνεπώς, για κάθε $n = 0, 1, ..$ έχουμε $|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}d\zeta} \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M(a,r)}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{nM(a,r)}{r^n}$. Δηλαδή $|f'(a)| \leq \frac{M(a,r)}{r}$.

■

Ορισμός 4.1.45. *Μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται ακέραια συνάρτηση.*

Θεώρημα 4.1.46. *(Liouville). Κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.*

Απόδειξη :
Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση ώστε να υπάρχει $M < \infty$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έστω $z \in \mathbb{C}$ αυθαίρετο σταθερό και για κάθε $r > 0$ θεωρούμε τον $\bar{\Delta}(z,r)$. Από την εκτίμηση του Cauchy για την $f'(z)$ εφαρμοσμένη στο δίσκο $\bar{\Delta}(z,r)$ έχουμε $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$ για κάθε $r > 0$ άρα

$$|f'(z)| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{M}{r} = 0.$$

Έτσι, $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η f είναι σταθερή.

■

Πόρισμα 4.1.47. *(Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας). Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδι•κούς συντελεστές έχει μια μιγαδική ρίζα.*

Απόδειξη :
Έστω πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, a_j \in \mathbb{C}, j \leq n, n \geq 1, a_n \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty.$$

Πράγματι, έχουμε για $z \neq 0 : p(z) = z^n\Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z}\Big), p(z) \to \infty, a_n = \infty$ καθώς $z \to \infty$. Ας υποθέσουμε ότι $p(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ και είναι ακέραια. Επίσης,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = 0.$$

Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$ ώστε $|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| < 1$. Η $f|_{\bar{\Delta}(0,R)}$ είναι φραγμένη διότι η $|f|$ είναι συνεχής και $\bar{\Delta}(0, R)$ είναι συμπαγής. Δηλαδή υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0, R)$. Έπεται ότι $|f(z)| \leq M + 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή η f είναι φραγμένη. Από το θεώρημα του Liouville έπεται ότι η f είναι σταθερή. Είναι $p(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c}$ οπότε το πολυώνυμο είναι σταθερό, άτοπο.

■

4.2 Θεμελιώδεις ιδιότητες ολόμορφων συναρτήσεων

4.2.1 Αρχή μοναδικότητας ή Αρχή αναλυτικής συνέχειας

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $a \in \mathbb{C}, r > 0$ και δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$ ώστε $f(a) = 0$ και $f \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \geq 1$ και μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $g : \Delta(a, r) \to \mathbb{C}$ ώστε*

$$f(z) = (z - a)^m g(z), z \in \Delta(a, r), g(a) \neq 0.$$

Απόδειξη :

(i) Ύπαρξη :
Έχουμε $c_0 = f(a) = 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των $\{n \in \mathbb{N} : {}_{\ltimes} \neq \nvdash\}$ είναι μη κενό γιατί η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Έστω m το ελάχιστο στοιχείο, $m = min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\} \geq 1$. Τότε $f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$ ή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^{n+m}, z \in \Delta(a, r)$. Έπεται ότι $f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$. Θέτουμε $g : \Delta(a, r) \to \mathbb{C}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^n$. Τότε η g είναι ολόμορφη και $f(z) = (z-a)^m g(z), z \in \Delta(a, r)$. Επίσης, $g(a) = c_m \neq 0$.

(ii) Το μονοσήμαντο :
Ας υποθέσουμε ότι m είναι ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας και $g : \Delta(a, r) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση ώστε

$$f(z) = (z - a)^{m_1} g_1(z), z \in \Delta(a, r), g_1(a) \neq 0.$$

Από τις 4.2.1, ii έπεται ότι $(z-a)^{m_1}g_1(z) = (z-a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$. Ας υποθέσουμε ότι $m_1 > m$. Τότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a, g(z) = (z-a)^{m_1-m}g_1(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a$. Επομένως, καθώς η g είναι συνεχής,

$$g(a) = \lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)^{m_1-m}g_1(z) = 0,$$

δηλαδή $g(a) = 0$, άτοπο.
Ομοίως έχουμε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $m > m_1$. Άρα $m = m_1$. Εφόσον $m = m_1$, από τις 4.2.1, ii $(z-a)^m g_1(z) = (z-a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ και άρα $g_1(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a$. Καθώς g και g_1 είναι συνεχείς έπεται ότι

$$g_1(a) = \lim_{z\to a} g_1(z) = \lim_{z\to a} g(z) = g(a)$$

και άρα $g_1(a) = g(a)$. Συνεπώς, $g_1(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$.

■

Συμβολισμός :
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Θέτουμε $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε, στο μετρικό χώρο Ω το σύνολο $Z(f)'$ είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο.*

Υπενθύμιση :

(i) το $x \in X$ όπου X μετρικός χώρος είναι σημείο συσσώρευσης αν για κάθε

$$\varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset.$$

(ii) $Z(f)' \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. Τότε στο μετρικό χώρο Ω, το σύνολο $Z(f)'$ είναι ανοικτό και κλειστό.*

Απόδειξη :
Έχουμε $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ άρα $Z(f)$ είναι κλειστό σύνολο, επομένως $Z(f)' \subseteq Z(f)$.

(i) Το $Z(f)'$ είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Το $Z(f)'$ είναι ανοικτό σύνολο.
Έστω $a \in Z(f)'$. Τότε $a \in Z(f)$. Επιλέγουμε $r > 0$ με $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$. Η f είναι δυναμοσειρά στο $\Delta(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, z \in \Delta(a,r)$. Έχουμε $f(a) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $f \neq 0$ στο $\Delta(a, r)$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχουν ακέραιος $m \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση $g : \Delta(a, r)$ ώστε $f(z) = (z-a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ και $g(a) \neq 0$. Εφόσον η g είναι συνεχής και $g(a) \neq 0$ υπάρχει $0 < r_1 < r$ ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0, r_1)$. Έχουμε $f(z) = (z-a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r_1)$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(a, r_1)$. Επομένως, $(Z(f) - \{a\}) \cap \Delta(a, r_1) = \emptyset$ οπότε το $a \notin Z(f)'$, άτοπο. Συνεπώς, $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ και άρα $\Delta(a, r) \subseteq Z(f)'$. Έτσι, το $Z(f)'$ είναι ανοικτό.

■

Θεώρημα 4.2.4. *(Αρχή της μοναδικότητας). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν το σύνολο ριζών $Z(f)$ της f έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω, δηλαδή $Z(f)' \neq 0$ στο μετρικό χώρο Ω, τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$.*

Απόδειξη :
Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι στο μετρικό χώρο Ω το σύνολο $Z(f)'$ είναι ανοικτό και κλειστό και εφόσον Ω είναι συνεκτικός μετρικός χώρος πρέπει $Z(f)' = \Omega$ ή $Z(f)' = \emptyset$. Από υπόθεση, $Z(f)' \neq \emptyset$. Άρα $Z(f)' = \Omega$. Επομένως, $Z(f) = \Omega$ διότι $Z(f)' \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$. Όμως $Z(f) = \Omega$ σημαίνει ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$.

■

Σημείωση 4.2.5. *Εκτός του τόπου Ω μπορεί το σύνολο $Z(f)$ να έχει σημεία συσσώρευσης χωρίς να είναι ταυτοτικά μηδέν.*

Παράδειγμα 4.2.6. *Έστω $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}, f(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1, z \in \Omega$. Έχουμε για $z \neq 0$: $E^{\frac{1}{z}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 2\kappa\pi i, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \neq 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\kappa\pi i}, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \neq 0$. Άρα $Z(f) = \left\{ \dfrac{1}{2\kappa\pi i} : \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \neq 0 \right\}$. Το $0 \in Z(f)'$. Η $f \neq 0$ διότι $0 \notin \Omega$.*

Πόρισμα 4.2.7. *(Αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις. Θέτουμε $A = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Αν το A έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Omega$*

Απόδειξη :
Εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος για τη συνάρτηση $h = f - g$.

■

Παράδειγμα 4.2.8. *Έστω $f : \bar{\Delta}(0,1) \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στον $\Delta(0,1)$. Τότε υπάρχει ακέραιος $n > 1$ ώστε $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \neq \dfrac{1}{n+1}$.*

Απόδειξη :
Ας υποθέσουμε ότι $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$ για κάθε $n = 2, 3, ..$. Τότε $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(z) = \frac{z}{1+z}, z \in \Delta(0,1)$ Τότε, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = h\left(\dfrac{1}{n}\right)$ για κάθε $n = 2, 3...$

. Επομένως, το σύνολο $A = \{z \in \Delta(0,1) : f(z) = h(z)\} \supseteq \left\{\frac{1}{n} : n = 2,3,...\right\}$ και άρα $0 \in \Delta(0,1)$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Από την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων έχουμε $f(z) = h(z)$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$ δηλαδή $f(z) = \frac{z}{1+z}$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$. Έπεται ότι

$$\mathbb{C} \ni f(-1) = \lim_{z\to-1} f(z) = \lim_{z\to-1} \frac{z}{1+z} = \infty,$$

άτοπο.

■

Θεώρημα 4.2.9. *(Αρχή μεγίστου). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $|f|$ δε λαμβάνει μέγιστη τιμή στο Ω.*

Απόδειξη :
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in \Omega$. Επιλέγουμε $r > 0$ με $\Delta(z_0, r) \subseteq \Omega$ Η f είναι δυναμοσειρά στον $\Delta(z_0,r)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, για $z \in \Delta(z_0,r)$. Έχουμε $a_0 = f(z_0)$ και επομένως $a_0 \neq 0$, διότι αν $a_0 = 0$ τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0, n \geq 1\} \neq \emptyset$. Αν $A = \emptyset$ τότε $f(z) = a_0$ για κάθε $z \in \Delta(z_0,r)$ και από την αρχή της μοναδικότητας θα ήταν $f(z) = a_0$ για κάθε $z \in \Omega$ δηλαδή f σταθερή στο Ω, άτοπο. Έστω $K = minA$. Τότε $f(z) = a_0 + a_\kappa(z-z_0)^\kappa + a_{\kappa+1}(z-z_0)^{\kappa+1} + ..., z \in \Delta(z_0,r)$. Έπεται $f(z) = \left[1 + \frac{a_\kappa}{a_0(z-z_0)^\kappa} + \frac{a_{\kappa+1}}{a_0}^{\kappa+1} + ...\right] = a_0[1 + b_\kappa(z-z_0)^\kappa(1 + (z-z_0)g(z))], z \in \Delta(z_0,r)$, όπου $b_\kappa = \frac{a_\kappa}{a_0}$ και $g(z), z \in \Delta(z_0,r)$ συνεχής συνάρτηση. Ώστε $f(z) = a_0(1 + b_\kappa(z-z_0)^\kappa(1 + (z-z_0)g(z))), z \in \Delta(z_0,r)$. Το σύνολο $\bar{\Delta}\left(z_0, \frac{r}{2}\right) \subseteq \Delta(z_0,r)$ είναι συμπαγές. Επομένως, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \bar{\Delta}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$. Έχουμε $b_\kappa = \varrho e^{i\theta}, \varrho > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Επιλέγουμε $9 < r_1 \leq min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2M}\right\}$. Επιλέγουμε το εξής σημείο του κύκλου $C(z_0,r_1)$: $z_1 = z_0 + r_1 e^{i\left(\frac{2\pi-\theta}{\kappa}\right)} \in \Delta(z_0,r)$. Τότε έχουμε

$$f(z_1) = a_0\left[1 + \varrho e^{i\theta} r_1^\kappa e^{i(2\pi-\theta)}(1 + (z_1-z_0)g(z))\right] = a_0[1 + \varrho r_1^\kappa + \varrho r_1^\kappa(z_1-z_0)g(z_1)].$$

Έπεται $|f(z_1)| \geq |a_0|[1 + \varrho r_1^\kappa - \varrho r_1^\kappa|z_1-z_0||g(z_1)|] \geq |a_0|\left[1 + \varrho r_1^\kappa - \varrho r_1^\kappa \frac{1}{2M}M\right] = |a_0|\left[1 + \frac{\varrho r_1^\kappa}{2}\right] >$ $|a_0|$. Δηλαδή $|f(z_1)| > |a_0| = |f(z_0|$ και έτσι $|f(z_0| > |f(z_0)|$ που είναι άτοπο.

■

Πόρισμα 4.2.10. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη στεθερή συνάρτηση. Τότε, ούτε το πραγματικό μέρος της f, Ref ούτε το φανταστικό μέρος της f, Imf παίρνουν μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη :
Η συνάρτηση Ref δεν παίρνει μέγιστη τιμή. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C} : g(z) = e^{f(z)}$. Η g είναι ολόμορφη και μη στεθερή. Επομένως, η $|g|$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή. Όμως $|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{Ref(z)}$. Αν η $Ref(z), z \in \Omega$ έπαιρνε μέγιστη τιμή στο $z \in \Omega$ τότε $Ref(z) \leq Ref(z_0)$ για κάθε $z \in \Omega$ και άρα $e^{f(z)} \leq e^{f(z_0)}$. Όμως $e^{Ref(z)} = |g(z)|$ και άρα $|g(z)| \leq |g(z_0)|$ για κάθε $z \in \Omega$, άτοπο.

■

Πόρισμα 4.2.11. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε $|f|$ δεν παίρνει ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη :
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C} : g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Η g είναι ολόμορφη μη σταθερή άρα η $|G|$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή που σημαίνει ότι η $|f|$ δεν παίρνει ελάχιστη τιμή.

■

Σημείωση 4.2.12. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένος τόπος $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο Ω. Τότε*

$$|f(z)| \leq sup\left\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial\Omega\right\}, \forall z \in \Omega.$$

Παράδειγμα 4.2.13. *Έστω $f : \bar{\Delta}(0,1) \to \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο $\Delta(0,1)$, μη σταθερή ώστε $|f(\zeta)| = 1$ για κάθε $zeta \in C(0,1)$. Τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\Delta(0,1)$. Αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$ τότε από την αρχή του ελαχίστου έχουμε*

$$|f(z)| > inf\left\{|f(z)| : \zeta \in (0,1)\right\} = 1.$$

Επίσης, από την αρχή του μεγίστου $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$.

Σημείωση 4.2.14. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $a \in \Omega$ και $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υπουέτουμε ότι υπάρχει $r > 0$ με $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ ώστε η $f|_{\Delta(a,r)-\{a\}}$ είναι φραγμένη. Τότε η f μπορεί να ορισθεί και στο a ώστε η νέα συνάρτηση να είναι ολόμορφη στο Ω.*

Απόδειξη :
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{αν } z \neq 0 \\ 0 & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

. Προφανώς η g είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Έχουμε

$$\lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} (z-a)f(z) = 0 = g(a).$$

Έτσι, η g είναι συνεχής στο Ω και ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Επομένως, κατά τα γνωστά η g είναι ολόμορφη στο Ω, ειδικά υπάρχει η παράγωγος $g'(a)$ δηλαδή υπάρχει το

$$\lim_{z\to a}\frac{g(z)-g(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)f(z)}{z-a}=\lim_{z\to a}f(z).$$

Έτσι, υπάρχει το όριο

$$\lim_{z\to a}f(z)=b.$$

■

Παράδειγμα 4.2.15. *Έστω $f(z)=e^{\frac{1}{z}}-1, z\in\mathbb{C}-\{0\}$ το οποίο είναι τόπος. Έχουμε $f(z)=0\Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}}=1\Leftrightarrow\frac{1}{z}=2\kappa\pi i,\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2\kappa\pi i},\kappa\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Δηλαδή, $0\in Z(f)'$ αλλά η f δεν ορίζεται στο μηδέν.*

Εφαρμογή :
Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη επέκταση της συνάρτησης $f(x)=logx, x>0$ στο $\mathbb{C}-\{0\}$.
Απόδειξη :
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f(x)=logx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, x>0$. Τότε $f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}:g(z)=\frac{1}{z}$. Έχουμε τότε $f'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, x>0$ και επομένως το σύνολο $\{z\in\mathbb{C}-\{0\}:f'(z)=g(z)\}$ έχει σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{C}-\{0\}$. Δηλαδή $f'(z)=\frac{1}{z}$, για κάθε $z\in\mathbb{C}-\{0\}$. Επομένως η συνάρτηση $\frac{1}{z}$ όπου $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}-\{0\}$. Άρα το ολοκλήρωμα αυτής σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^*\subset\mathbb{C}-\{0\}$ πρέπει να είναι μηδέν. Όμως, $\displaystyle\int_{C(0,1)}\frac{1}{z}dz=2\pi i$, άτοπο.

■

Πρόταση 4.2.16. *(Τύπος μέσης τιμής του Cauchy) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και $z_0\in\Omega$. Αν $r>0$ ώστε $\delta(z_0,r)\in\Omega$ τότε*

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt.$$

Απόδειξη :
Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Gauss έχουμε ότι

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta,$$

όπου $\gamma:[0,2\pi]\to\Omega:\gamma(t)=z_0+re^{it}$. Επομένως,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})rie^{it}}{re^{it}}dt.$$

Συνεπώς, $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt$.

■

Δεύτερη Απόδειξη για την Αρχή του μεγίστου :
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, για κάθε $z \in \Omega$. Εφόσον η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν έχουμε ότι $f(z_0) \neq 0$. Έστω $r > 0$ ώστε $\overline{\delta(z_0, r)} \subset \Omega$. Από τον τύπο μέσης τιμής του Gauss έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \tag{4.2}$$

Από τη σχέση 4.2 έπεται ότι $1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}dt$ και επομένως $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}dt$, συνεπώς $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}\right)dt = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$: $g(t) = 1 - \frac{f(z_0+re^{it})}{f(z_0)}$. Τότε έχουμε $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$ και άρα είναι

$$\int_0^{2\pi} g(t)dt = \int_0^{2\pi} Reg(t)dt + i\int_0^{2\pi} Img(t)dt = 0$$

άρα $\int_0^{2\pi} Reg(t)dt = 0$ και $\int_0^{2\pi} Img(t)dt = 0$. Έχουμε $Reg(t) = 1 - Rr\frac{f(z_0+re^{it})}{f(z_0)} \geq 1 - \left|\frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}\right| \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επίσης, η $Reg(t)$ είναι συνεχής. Επομένως $Reg(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$, δηλαδή $1 = Re\frac{f(z_0+re^{it})}{f(z_0)} \leq \left|\frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}\right| \leq 1$, για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Άρα $\left|\frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}\right| = Re\frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} = 1$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επομένως $Im\frac{f(z_0+re^{it})}{f(z_0)} = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και συνεπώς $\frac{f(z_0+re^{it})}{f(z_0)} = Re\frac{f(z_0+re^{it})}{f(z_0)} = 1$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Έπεται, λοιπόν, ότι $f(z_0 + re^{it}) = f(z_0)$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Δηλαδή $f(\zeta) = f(z_0)$ για κάθε $\zeta \in C(z_0, r)$. Κάθε σημείο της $C(z_0, r)$ είναι και σημείο συσσώρευσης αυτής. Άρα το σύνολο $A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$ έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω. Από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας έπεται ότι $f(z) = f(z_0)$ για κάθε $z \in \Omega$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η συνάρτηση f σύμφωνα με την υπόθεση είναι μη σταθερή.

■

Θεώρημα 4.2.17. *(Ανοικτής Απεικόνισης) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μη σταθερή. Τότε η f είναι ανοικτή, δηλαδή για κάθε $G \subseteq \Omega$ ανοικτό, το $f[G]$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη :
Η απόδειξη του θεωρήματος θα δοθεί •παρακάτω με βάση την αρχή του ορίσματος.

■

Πόρισμα 4.2.18. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μη σταθερή. Τότε*

(i) *η $|f|$ δε λαμβάνει μέγιστη τιμή.*

(ii) *Οι συναρτήσεις Ref, Imf δεν λαμβάνουν ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.*

(iii) *Αν $f9z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ τότε η συνάρτηση $|f|$ δε λαμβάνει ελάχιστη τιμή.*

Παρατηρήσεις 4.2.19. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένος τόπος και $f\bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε ο περιορισμός $f|_\Omega$ να είναι ολόμορφη συνάρτηση. Τότε $|f(z)| \leq sup\left\{|f(\zeta)| : \zeta \in \bar{\Omega} - \Omega\right\} = max\left\{|f(\zeta)| : \zeta \in \bar{\Omega} - \Omega\right\}$. Αυτό προκ'υπτει από τη συμπάγεια του $\bar{\Omega} - \Omega$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή η ανισότητα αυτή είναι γνήσια.*

4.3 Σημεία ανωμαλίας

Θεωρούμε τις ακόλουθες συναρτήσεις :

(i) $f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0.$

(ii) $g(z) = \frac{4z^2-1}{2z-1}, z \neq \frac{1}{2}.$

(iii) $h(z) = e^{frac1z}, z \neq 0.$

Παρατηρούμε ότι

(i)
$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty.$$
Το μηδέν είναι πόλος της f.

(ii)
$$\lim_{z \to \frac{1}{2}} g(z) = 2.$$
Το $\frac{1}{2}$ είναι επουσιώδης ανωμαλία της g.

(iii) Το
$$\lim_{z \to 0} h(z)$$
δεν υπάρχει. Το μηδέν είναι ουσιώδης ανωμαλία της h.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό , $a \in \Omega$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$. Τότε το a καλείται σημείο ανωμαλίας της f.*

Ορισμός 4.3.2. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$.*

(i) *Το a καλέιται επουσιώδης ανωμαλία της f αν η f δεν μπορεί να ορισθεί στο a ώστε η νέα συνάρτηση να είναι ολόμορφη στο Ω.*

(ii) *Το a καλείται πόλος της f αν*

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

(iii) *Το a καλείται ουσιώδης ανωμαλία της f αν δεν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

στο $\bar{\mathbb{C}}$.

Συμβολισμός :
Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Τότε συμβολίζουμε $S(a, 0, r) = S(a, r) - \{a\}$ δηλαδή $S(a, 0, r)$ είναι ο δακτύλιος με μικρή ακτίνα μηδέν και μεγάλη ακτίνα r.

Θεώρημα 4.3.3. *(Riemann) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της f.*

(ii) *Η f είναι τοπικά φραγμένη στο a δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$, ώστε $f|_{S(a,0,\varepsilon)}$ είναι φραγμένη συνάρτηση.*

Απόδειξη :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Προφανές.
$(ii) \Rightarrow (i)$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{αν } z \neq a \\ 0 & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Η h είναι προφανώς ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Επίσης, η h παραγωγίζεται στο a και $h'(a) = 0$. Έχουμε για $z \in \Omega, z \neq a$, $\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \frac{h(z)}{z-a} = \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = (z-a)f(z)$. Έπεται ότι

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$$

διότι η f είναι τοπικά φραγμένη στο a. Άρα υπάρχει η παράγωγος $h'(a)$ και $h'(a) = 0$. Η h είναι επομένως παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω. Έστω $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$. Τότε $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ για κάθε $z \in S(a, r)$. Είναι $c_0 = h(a) = 0, c_1 = h'(a) = 0$. Επομένως

$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^{n+2}$ για κάθε $z \in S(a,r)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : S(a,rr) \to \mathbb{C} : g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n$. Η συνάρτηση g είναι ολόμορφη και $h(z) = (z-a)^2 g(z)$ για κάθε $z \in S(a,r)$. Συνεπώς $g(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2}$ για κάθε $z \in S(a,r) - \{a\}, (1)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης h έχουμε $f(z) = \frac{h'(z)}{(z-a)^2}$ για κάθε $z \in \Omega - \{a\}, (2)$. Από τις $(1), (2)$ έπεται ότι $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in S(a,0,r)$. Επομένως, αν ορίσουμε $f(a) = g(a) = c_2$ τότε $f|_{S(a,r)} = g_| S(a,r)$ και η $g|_{S(a,r)}$ είναι ολόμορφη άρα η συνάρτηση f έχει επεκταθεί σε μια συνάρτηση ολόμορφη σε ολόκληρο το Ω.

■

Πόρισμα 4.3.4. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$. Τότε το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν υπάρχει το*

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

στο mathbbC.

Απόδειξη :
Αν υπάρχει το

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

στο $\mathbb{C}$ τότε η f είναι τοπικά φραγμένη και άρα από το θεώρημα Riemann το a είναι επουσιώδης ανωμαλία. Το αντίστροφο είναι προφανές.

■

Θεώρημα 4.3.5. *(Casorati-Weierstrass) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ με $S(a,\varepsilon) \subseteq \Omega$, το σύνολο $f[S(a,0,\varepsilon)]$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$, δηλαδή $\overline{f[S(a,0,\varepsilon)]} = \mathbb{C}$*

Απόδειξη :
$(ii) \Rightarrow (i)$
Είναι προφανές.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S(a,\varepsilon) \subseteq \Omega$ ώστε το $f[S(a,0,\varepsilon)]$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Τότε υπάρχουν $w \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ ώστε $S(w,r) \cap f[S(a,0,\varepsilon)] = \emptyset$. Ορίζεται τότε η συνάρτηση $g : S(a,0,\varepsilon) \to \mathbb{C} : g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ και είναι ολόμορφη. Έχουμε ότι για κάθε $z \in S(a,0,\varepsilon)$ το $f(z) \notin S(w,r)$. Άρα $|f(z) - w| \geq r$. Επομένως $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} \leq \frac{1}{r}$

για κάθε $z \in S(a, 0, r)$. Συνεπώς από το θεώρημα Riemann το a είναι σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της g. Έτσι, υπάρχει το

$$\lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z) - w}$$

στο $\mathbb{C}$. Άρα υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

στο $\bar{\mathbb{C}}$. Επομένως το a δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, άτοπο. Άρα το $f[S(a, 0, \varepsilon)]$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

■

Σημείωση 4.3.6. *Ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο. Συγκεκριμένα*

(i) ***Μεγάλο θεώρημα του Picard***
Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ ώστε το a είναι ουσιώδης ανωμαλία. Τότε $f[S(a, 0, \varepsilon)] = \mathbb{C}-$το πολύ ένα σημείο.

(ii) ***Μικρό θεώρημα του Picard***
Αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια, μη σταθερή συνάρτηση, τότε $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}-$το πολύ ένα σημείο.

Οι αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων απαιτούν πιο προχωρημένες γνώσεις και δε θα δοθούν.

Θεώρημα 4.3.7. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $f(a) = 0$ και $f \neq 0$. Τότε υπάρχουν ένας μοναδικός $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ και μια μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $h : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = (z - a)^m h(z)$ για κάθε $z \in \Omega$ και $h(a) \neq 0$.*

Απόδειξη :
Από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας έπεται ότι η ρίζα a είναι μεμονωμένη, δηλαδή υπάρχει $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Η $f|_{S(a,r)}$ είναι δυναμοσειρά, επομένως από το λήμμα 4.2.1 έπεται ότι υπάρχουν $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ και $g : S(a, r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f(z) = (z - a)^m g(z)$ για κάθε $z \in S(a, r)$ και $g(a) \neq 0$. Έπεται ότι $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : \Omega \to \mathbb{C}$ με

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m} & \text{αν } z \neq a \\ g(a) & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Τότε η h είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$ και $h|_{S(a,r)} = g$. Επομένως, η h είναι ολόμορφη στο Ω και $f(z) = (z - a)^m h(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, $h(a) = g(a) \neq 0$.
Η μοναδικότητα των m και h αποδεικνύεται όπως ακριβώς έχει δειχθεί στο λήμμα 4.2.1.

■

Παρατηρήσεις 4.3.8. (i) *Ο τόπος χρειάστηκε ώστε η ρίζα a να είναι μεμονωμένη.*

(ii) *Το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει αν το Ω είναι ανοικτό και η ρίζα a είναι μεμονωμένη.*

4.3.1 Πόλοι

Θεώρημα 4.3.9. *(Χαρακτηρισμός πόλων) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :*

(i) *Το a είναι πόλος της f.*

(ii) *Υπάρχουν ένας μοναδικός $\kappa \in \mathbb{N}, \kappa \geq 1$ και μια μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε*
$$f(z) = (z-a)^{-\kappa} g(z)$$
για κάθε $z \in \Omega, z \neq a$ και $g(z) \neq 0$.

(iii) *Υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί $c_1, c_2, ..., c_\kappa$ με $c_\kappa \neq 0$ ώστε η συνάρτηση*
$$f(z) - \left(\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + ... + \frac{c_\kappa}{(z-a)^\kappa} \right)$$
έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a.

Απόδειξη :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Εφόσον
$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$
από τον ορισμό του πόλου υπάρχει $r > 0$ με $S(a,r) \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a,0,r)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : S(a,r) \to \mathbb{C}$ με
$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{αν } z \neq a \\ 0 & \text{αν } z = a \end{cases}$$
, (1) Η h είναι προφανώς ολόμορφη στο $S(a,0,r)$, όμως
$$\lim_{z \to a} h(z) = 0 = h(a).$$
Επομένως, η h είναι ολόμορφη στο δίσκο $S(a,r)$ από το θεώρημα Riemann, $h(a) = 0$ και $h(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a,r)$ με $z \neq a$. Από το θεώρημα 4.3.7 υπάρχουν $\kappa \in \mathbb{N}, \kappa \geq 1$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $h_1 : S(a,r) \to \mathbb{C}$ ώστε $h(z) = (z-a)^\kappa h_1(z)$ για κάθε $z \in S(a,r)$ και $h_1 \neq 0, (2)$. Έπεται ότι $h_1(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a,r)$. Από $(1), (2)$ έχουμε ότι

$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^{-\kappa} h_1(z)$ δηλαδή $f(z) = (z-a)^{-\kappa} \frac{1}{h_1(z)}$ για κάθε $z \in S(a,0,r)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{\kappa} f(z) & \text{αν } z \neq a \\ \frac{1}{h_1(a)} & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Τότε προφανώς η g είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Επίσης, $g|_S(a,r) = \frac{1}{h_1}$. Έτσι, η g είναι ολόμορφη στο Ω. Έχουμε $g(a) = \frac{1}{h_1(a)} \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^{-\kappa} g(z)$ για κάθε $z \in \Omega$ με $z \neq a$. Η μοναδικότητα του κ αποδεικνύεται όπως σε προηγούμενες προτάσεις. $(ii) \Rightarrow (iii)$
Έστω $r > 0$ ώστε $S(a,r) \subseteq \Omega$. Τότε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

για κάθε $z \in S(a,r), (1)$. Επομένως για κάθε $z \in S(a,0,r)$ έχουμε

$$f(z) = (z-a)^{-\kappa}[a_0 + a_1(z-a) + ... + a_{\kappa}(z-a)^{\kappa} + ...]$$

ώστε για κάθε $z \in S(a,0,r)$,

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^{\kappa}} + \frac{a_1}{(z-a)^{\kappa-1}} + ... + \frac{a_{\kappa-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n}(z-a)^n.$$

Θέτουμε $c_i = a_{\kappa-i}, i = 1,2,...\kappa$. Τότε $f(z) - \left[\frac{c_1}{z-a} + ... + \frac{c_{\kappa}}{(z-a)^{\kappa}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n}(z-a)^n, (2)$. Η συνάρτηση $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n}(z-a)^n$ είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$. Απ·ο την (1) έχουμε $c_{\kappa} = a_0 = g(a) \neq 0 \Rightarrow c_{\kappa} \neq 0$. Επίσης, από τη (2) έπεται ότι υπάρχει το $lim\left[f(z) - \left(\frac{c_1}{z-a} + ... + \frac{c_{\kappa}}{(z-a)^{\kappa}}\right)\right] \in \mathbb{C}$ και επομένως αυτή η συνάρτηση έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a. Η μοναδικότητα των $c_i, i = 1,2,...,\kappa$ προκύπτει από τις σχέσεις $c_i = a_{\kappa-i} = \frac{g^{\kappa-i}(a)}{(\kappa-i)!}$ για $i = 1,2,...,\kappa$. $(iii) \Rightarrow (i)$
Έχουμε

$$\lim_{z\to\infty} \left[\frac{c_1}{(z-a)} + ... + \frac{c_{\kappa}}{(z-a)^{\kappa}}\right] = \infty$$

εφόσον $c_{\kappa} \neq 0$ και άρα πρέπει

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

■

Ορισμός 4.3.10. *Ο αριθμός κ καλείται τάξη του πόλου a και η παράσταση* $\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + ... + \frac{c_{\kappa}}{(z-a)^{\kappa}}$ *καλείται κύριο μέρος της f στο a.*

Θεώρημα 4.3.11. *(Το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$, ώστε $Ind\gamma(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{C} - \Omega$, έχουμε*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Ορισμός 4.3.12. *Ένας τόπος $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ καλείται απλά συνεκτικός τόπος αν για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$ έχουμε $Ind\gamma(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{C} - \Omega$.*

Ορισμός 4.3.13. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f συνάρτηση. Η f καλείται μερόμορφη στο Ω αν υπάρχει $A \subseteq \Omega$ ώστε το A να μην έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω -άρα το A είναι αριθμήσιμο- ώστε $f : \Omega - A \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και κάθε σημείο του A είναι πόλος της f.*

Παράδειγμα 4.3.14. *Μια ρητή συνάρτηση είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$.*

Κεφάλαιο 5

Αρχή του ορίσματος

5.1 Εισαγωγή

Λήμμα 5.1.1. *Έστω $h_1, h_2, ..., h_n$ μερόμορφες συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο Ω και $h = h_1 h_2 ... h_n$. Τότε για κάθε $z \in \Omega$ έτσι ώστε η h_κ να ορίζεται και $h_\kappa \neq 0$ έχουμε $\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{h_1'(z)}{h_1(z)} + ... + \frac{h_n'(z)}{h_n(z)}$. Η $\frac{h'}{h}$ καλείται λογαριθμική παράγωγος του h.*

Απόδειξη :
Έχουμε $h = h_1 h_2 ... h_n$ και άρα $h'(z) = h_1'(z)h_2(z)...h_n(z) + h_1(z)h_2'(z)...h_n(z) + ... + h_1(z)h_2(z)...h_n'(z)$. Συνεπώς

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{h'(z)}{h_1(z)h_2(z)...h_n(z)} = \frac{h_1'(z)h_2...h_n(z)}{h_1(z)h_2(z)...h_n(z)} + ... + \frac{h_1(z)h_2...h_n'(z)}{h_1(z)h_2(z)...h_n(z)} = \frac{h_1'(z)}{h_1(z)} + \frac{h_2'(2)}{h_2(z)} + ... \frac{h_n'(z)}{h_n(z)}$$

■

Λήμμα 5.1.2. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f μια μερόμορφη συνάρτηση στο Ω με ρίζες $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ και πόλους $a_1, a_2, ...a_\kappa$ όπου κάθε πόλος λαμβάνεται τόσες φορές όση είναι και η τάξη του. Τότε υπάρχει $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ με τις εξής ιδιότητες :*

(i) $f(z) = \frac{(z-\varrho_1)...(z-\varrho_n)}{(z-q_1)...(z-q_\kappa)} g(z)$ *για κάθε* $z \in \Omega - \{a_1, ..., a_\kappa\}$.

(ii) $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z-\varrho_1)} + \frac{1}{z-\varrho_2} + ... + \frac{1}{z-\varrho_n} - \left[\frac{1}{z-q_1} + \frac{1}{z-q_2} + ... + \frac{1}{z-q_\kappa}\right] + \frac{g'(z)}{g(z)}$ *για κάθε* $z \in \Omega - \{a_1, a_2, ..., a_\kappa, \varrho_1, ..., \varrho_n\}$.

Απόδειξη :
Με επαναληπτική χρήση των θεωρημάτων για τις ρίζες και τους πόλους βρίσκουμε μια

συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ ώστε

$$f(z) = \frac{(z-\varrho_1)(z-\varrho_2)...(z-\varrho_n)}{(z-a_1)(z-a_2)...(z-a_\kappa)} g(z),$$

για κάθε $z \in \Omega - \{a_1, a_2, ...a_\kappa\}$. Από το λήμμα 5.1.1 έχουμε $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z-\varrho_1)} + \frac{1}{(z-\varrho_2)} + ... + \frac{1}{(z-\varrho_n)} - \left[\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + ... + \frac{1}{z-a_\kappa}\right] + \frac{g'(z)}{g(z)}$ για κάθε $z \in \Omega - \{a_1, a_2, ..., a_\kappa, \varrho_1, ..., \varrho_n\}$.

■

Θεώρημα 5.1.3. *(Αρχή του ορίσματος) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, f μερόμορφη συνάρτηση στο Ω με πόλους $a_1, a_2, ...a_\kappa$. Έστω $w \in \mathbb{C}$ και $\varrho_1, \varrho_2, ...\varrho_n \in \Omega$ οι ρίζες της $f - w$ όπου κάθε πόλος και κάθε ρίζα λαμβάνεται τόσες φορές όση είναι η τάξη του. Έστω, επίσης $\gamma : [a, b] \to \Omega - \{a_1, ..., a_\kappa, \varrho_1, ..., \varrho_n\}$ ώστε $Ind_\gamma = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C} - \Omega$. Τότε $Ind_{f\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{\zeta=1}^{n} Ind_\gamma(\varrho_\zeta) - \sum_{\zeta=1}^{n} Ind_\gamma(a_\zeta)$.*

Απόδειξη :
Από το λήμμα 5.1.2 υπάρχει $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ ώστε

$$\frac{f'(z)}{f(z)-w} = \sum_{\zeta=1}^{n} \frac{1}{z-\varrho_\zeta} - \sum_{\zeta=1}^{n} \frac{1}{z-a_\zeta} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

για κάθε $z \in \Omega \{\varrho_1, ..., \varrho_n, a_1, ..., a_\kappa\}$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{\zeta}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-\varrho_\zeta}dz - \zeta = 1^\kappa \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a_\zeta}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz.$$

Από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0$. Επίσης, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-\varrho_\zeta}dz = Ind_\gamma(\varrho_\zeta)$, για κάθε $\zeta = 1, 2, ..., n$ και $\frac{1}{2\pi i}\int_{gamma} \frac{1}{z-a_\zeta}dz = Ind_\gamma(z_\zeta)$, για κάθε $\zeta = 1, 2, ...\kappa$. Άρα $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{\zeta=1}^{n} Ind_\gamma(\varrho_\zeta) - \sum_{\zeta=1}^{\kappa} Ind_\gamma(a_\zeta)$. Θα δείξουμε ότι $Ind_{f\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz$. Έχουμε υποθέσει ότι η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Έχουμε εξ' ορισμού ότι

$$Ind_{f\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z-w}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)-w}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))-w}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz.$$

■

Πόρισμα 5.1.4. *Έστω f μερόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}, a \in \Omega, r > 0$ ώστε $\overline{S(a,r)} \subseteq \Omega$. Έστω $w \in \mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι στην περιφέρεια $C(a,r)$ η $f - w$ δεν έχει ούτε ρίζες ούτε πόλους και έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$. Τότε*

(i) $Ind_{f\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}dz$ *= αριθμός ριζών της $f - w$ στο $S(a,r)$- αριθμός πόλων της $f - w$ στο $S(a,r)$, όπου κάθε ρίζα και κάθε πόλος λαμβάνεται τόσες φορές όσες η τάξη του.*

(ii) *Αν η f είναι ολόμορφη τότε $Ind_{f\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}dz$=αριθμός των ριζών της $f - w$ στο εσωτερικό του $S(a,r)$.*

5.1.1 Ανοικτές απεικονίσεις

Πόρισμα 5.1.5. *(Το θεώτημα της ανοικτής απεικόνισης) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μια ολόμορφη μη σταθερή μιγαδική συνάρτηση. Τότε η f είναι ανοικτή, δηλαδή αν $G \subseteq \Omega$ ανοικτό τότε $f(G)$ ανοικτό.*

Απόδειξη :
Έστω $G \subseteq \Omega$ ανοικτό, $a \in G$. Θέτουμε $b = f(a)$. Η $f - b$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν άρα η ρίζα της a είναι μεμονωμένη, δηλαδή υπάρχει $r > 0$ με $\overline{S(a,r)} \subseteq G$ ώστε $f(z) - b \neq 0$ για κάθε $z \in \overline{S(a,r)}$ με $z \neq a$. Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to G : \gamma(t) = a + re^{it}$. Τότε από την αρχή του ορίσματος έχουμε ότι $Ind_{f\circ\gamma}(b)$= αριθμός των ριζών της $f - b$ στην $S(a,r) \neq 0$. Έχουμε $b \notin f[C(a,r)]$ και το $f[C(a,r)]$ είναι συμπαγές άρα κλειστό. Επομένως, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(b,\varepsilon) \cap f[C(a,r)] = \emptyset$. Είναι $(f \circ \gamma)^* = f[C(a,r)]$. Έτσι $S(b,\varepsilon) \cap (f \circ \gamma)^* = \emptyset$. Επομένως για κάθε $w \in S(b,\varepsilon)$ τα σημεία b και w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - (f \circ \gamma)^*$. Συνεπώς $Ind_{f\circ\gamma}(w) = Ind_{f\circ\gamma}(b) \neq 0$ και άρα $Ind_{f\circ\gamma}(w) \neq 0$. Από την αρχή του ορίσματος έπεται ότι υπάρχει $z \in S(a,r)$ ώστε $f(z) = w$. Ώστε $S(b,\varepsilon) \subseteq f(G)$ και άρα $f(G)$ ανοικτό.

■

Θεώρημα 5.1.6. *(Rouche) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f, g μερόμορφες συναρτήσεις στον Ω, $a \in \Omega$ ώστε $\overline{S(a,r)} \subseteq \Omega$. Υποθέτουμε ότι*

(i) *Η f δεν έχει ρίζες στην περιφέρεια $C(a,r)$ και η g δεν έχει πόλους στην περιφέρεια $C(a,r)$.*

(ii) *$|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε $\zeta \in C(a,r)$. Τότε : αριθμός ριζών της $f + g$ στο $S(a,r)$- αριθμός των πόλων της $f + g$ στο $S(a,r)$=αριθμός των ριζών της f στο $S(a,r)$- αριθμός των πόλων της f στο $S(a,r)$.*

Απόδειξη :
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = 1 = \frac{g}{f}$. Αυτή είναι μερόμορφη στο Ω και για κάθε $\zeta \in C(a,r)$ έχουμε $|h(\zeta) - 1| = \frac{|g(\zeta)|}{|f(\zeta)|} < 1$ από την υπόθεση (ii). Άρα $Re(1 - h(\zeta)) \leq |h(\zeta) - 1| < 1$ για κάθε $\zeta \in C(a,r)$. Δηλαδή $1 - Reh(\zeta) < 1$ και επομένως $Reh(\zeta) > 0$ για κάθε $\zeta \in C(a,r)$. Έστω η καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$. Τότε $Re(h \circ \gamma)(t) > 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ Επομένως το μηδέν ανήκει στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - (h \circ \gamma)^*$ και άρα $Ind_{f \circ \gamma}(0) = 0$. Άρα από την αρχή του ορίσματος έπεται ότι

(i) $0 = Ind_{f\circ\gamma}(0)$=αριθμός ριζών της h στο $S(a,r)$-αριθμός των πόλων της h στο $S(a,r)$. Είναι $h = \frac{f+g}{f}$ και επομένως

(ii) αριθμός ριζών της h στο $S(a,r)$= αριθμός ριζών της $f+g$ στο $S(a,r)$+ αριθμός των πόλων της f στο $S(a,r)$. Επίσης,

(iii) αριθμός των πόλων της h στο $S(a,r)$= αριθμός των πόλων της $f+g$ στο $S(a,r)$+ αριθμός των ριζών της f στο $S(a,r)$.

Από τις $(i), (ii), (iii)$ προκύπτει ότι ο αριθμός των ριζών της $f + g$ στο $S(a,r)$+ αριθμός των πόλων της f στο $S(a,r)$= αριθμός των πόλων της $f + g$ στο $S(a,r)$+ αριθμός των ριζών της f στο $S(a,r)$. Άρα, αριθμός των ριζών της $f + g$ στο $S(a,r)$- αριθμός των πόλων της $f + g$ στο $S(a,r)$= αριθμός των ριζών της f στο $S(a,r)$- αριθμός των πόλων της f στο $S(a,r)$. Στην περίπτωση που έχουμε αμοιβαία αναίρεση ριζών και πόλων ο τύπος εξακολουθεί να ισχύει.

■

Θεώρημα 5.1.7. *(Θεώρημα Rouche για ολόμορφες συναρτήσεις) Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος και την επιπλέον υπόθεση ότι οι f, g είναι ολόμορφες συναρτήσεις έπεται ότι ο αριθμός των ριζών της $f+g$ στο $S(a,r)$= αριθμός των ριζών της f στο $S(a,r)$.*

Πόρισμα 5.1.8. *(Θεώρημα του D' Alembert) Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει ακριβώς n ρίζες.*

Απόδειξη :
Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ με $a_n \neq 0, n \geq 1$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(z) = a_n z^n$ και $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$. Τότε

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty.$$

Επομένως για αρκετά μεγάλο $R > 0$ έχουμε $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| > 1$ για κάθε $z \in C(0,R)$. Από το θεώρημα 5.1.6 έπεται ότι: αριθμός ριζών της $f + g$ στο $S(0,R)$= αριθμός ριζών της f στο $S(0,R)$=n (από τον τύπο της f). Αλλά $p(z) = f(z) + g(z)$ άρα το $p(z)$ έχει n ακριβώς ρίζες στο $S(0,R)$.

∎

Παράδειγμα 5.1.9. *Να υπολογιστεί ο αριθμός των ριζών της* $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ *στο* $S(0,1)$.
Λύση :
Απομονώνουμε το μονώνυμο με το μεγαλύτερο κατ΄ απόλυτη τιμή συντελεστή, δηλαδή το $-4z^5$. *Θεωρούμε τις συναρτήσεις* $f(z) = -4z^5$ *και* $g(z) = z^8 + z^2 - 1$. *Παρατηρούμε ότι για κάθε* ζ *με* $|\zeta| = 1$ *έχουμε* $|g(\zeta)| \leq |z^8| + |z|^2 + 1 = 3 < 4|\zeta|^5 = |f(\zeta)|$. *Δηλαδή* $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ *για κάθε* ζ *με* $|\zeta| = 1$. *Άρα από το θεώρημα 5.1.6 έχουμε ότι : αριθμός των ριζών της* $f + g$*=αριθμός των ριζών της* f *στο* $S(0,1)$*=5.*

5.1.2 Σύγκλιση

Θεώρημα 5.1.10. *(Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass) Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό,* $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, ...$ *ώστε για κάθε* n *η* f_n *να είναι ολόμορφη και* $f_n \to f$ *ολόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* Ω. *Τότε*

(i) *η* f *είναι ολόμορφη.*

(ii) $f_n' \to f'$ *ολόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* Ω.

Απόδειξη :

(i) Η f είναι συνεχής κατά τα γνωστά. Έστω $a \in \Omega, r > 0$ με $S(a,r) \subseteq \Omega$. Το $S(a,r)$ είναι ανοικτό-κυρτό. Από το λήμμα Cauchy-Gousart έχουμε ότι $\int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$ και για κάθε n. Για κάθε τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$ το $\partial\Delta$ είναι συμπαγές και άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\partial\Delta$ επομένως

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \to \int_{\partial\Delta} f(z)dz.$$

Έτσι, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subseteq S(a,r)$. Από το θεώρημα Morera έπεται ότι η f είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$.

(ii) Η απόδειξη παραλείπεται.

∎

Θεώρημα 5.1.11. *(Hurwitz) Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό και* $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}, n = 1, 2, ...$ *ώστε κάθε* f_n *είναι ολόμορφη και* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* Ω. *Έστω, επίσης,* $a \in \Omega, r > 0$ *με* $\overline{S(a,r)} \subseteq \Omega$. *Υποθέτουμε ότι* $f(\zeta) \neq 0$ *για κάθε* $\zeta \in C(a,r)$. *Τότε υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n \geq N \Rightarrow$ *αριθμός των ριζών της* f_n *στο* $S(a,r)$*= αριθμός των ριζών της* f *στο* $S(a,r)$. *Κάθε ρίζα λαμβάνεται τόσες φορές όσος είναι ο βαθμός πολλαπλότητας.*

Απόδειξη :
Από το Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass η f είναι ολόμορφη. Θέτουμε $\varepsilon = inf\,\{|f(\zeta)| : \zeta \in C(a,r)\} = min\,\{|f(\zeta)| : \zeta \in C(a,r)\} > 0$. Η $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $C(a,r)$ άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να έχουμε $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε $\zeta \in C(a,r)$. Από το θεώρημα Rouche έπεται ότι : αριθμός ριζών της $f_n - f + f$ στο $S(a,r)$= αριθμός ριζών της f στο $S(a,r)$ για κάθε $n \geq N$. Δηλαδή : αριθμός ριζών της f_n στο $S(a,r)$= αριθμός ριζών της f στο $S(a,r)$ για κάθε $n \geq N$.

■

Πόρισμα 5.1.12. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}, n = 1,2,...$ ώστε κάθε f_n είναι ολόμορφη και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Υποθέτουμε ότι $f_n(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \Omega$ και για κάθε $n = 1,2....$ Τότε είτε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$ ή $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$.*

Απόδειξη :
Ας υποθέσουμε ότι $f \neq 0$ και ότι υπάρχει $a \in \Omega$ ώστε $f(a) = 0$. Τότε από της αρχή της αναλυτικής συνέχειας η ρίζα a είναι μεμονωμένη εφόσον ο Ω είναι τόπος. Δηλαδή υπάρχει $r > 0$ με $\overline{S(a,r)} \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \overline{S(a,r)}$ με $z \neq a$. Ειδικά $f(\zeta) \neq 0$ για κάθε $\zeta \in C(a,r)$. Από το θεώρημα Hurwitz υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq N$, αριθμός των ριζών της f_n στο $S(a,r)$= αριθμός ριζών της f στο $S(a,r) \neq 0$. Άρα η f_n έχει ρίζα στο $S(a,r)$ για κάθε $n \geq N$, που αντιβαίνει στην υπόθεση.

■

5.1.3 Ανάπτυγμα Laurent

Συμβολισμός :
Έστω $a \in \Omega, 0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Θέτουμε $S(a_1, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$. Το σύνολο $S(a_1, r_1, r_2)$ καλείται δακτύλιος κέντρου a και ακτίνων r_1, r_2.

Θεώρημα 5.1.13. *(Weierstrass-Laurent) Έστω $a \in \Omega$ και $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ και $f : S(a_1, r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ μαι ολόμορφη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια μοναδική διπλή ακολουθία $\{a_n, n = 0, -1, 1, -2, 2, ...\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ για κάθε $z \in S(a, r_1, r_2)$. Επιπλέον, η σύγκλιση των δύο σειρών είναι απόλυτη για κάθε $z \in S(a, r_1, r_2)$ και ομοιλόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $S(a, r_1, r_2)$. Επίσης, $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$ για κάθε $n = 0, -1, 1, -2, 2, ...$ και για κάθε ϱ με $r_1 < \varrho < r_2$. Ειδικά για $n = -1$ έχουμε $\int_{C(a,r)} f(\zeta) d\zeta$ για κάθε $r_1 < \varrho < r_2$.*

Παρατηρήσεις 5.1.14. (i) *Αν $f : S(a, 0, R) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση ($R > 0$) και το a είναι πόλος τάξης $m \geq 1$ τότε η παράσταση που μας δίνει το θεώρημα Weierstrass-Laurent συμπίπτει με την παράσταση που προκύπτει από το θεώρημα χαρακτηρισμού των πόλων. Τότε το δεύτερο άθροισμα είναι πεπερασμένο και είναι το κύριο μέρος της f στο a :*

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m}.$$

(ii) *Έστω συνάρτηση $f : S(a, 0, R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $R > 0$. Έστω επίσης το ανάπτυγμα Laurent της f : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}, z \in S(a, 0, R)$. Τότε*

(α΄) Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η f επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση στο $S(a, r)$ θέτοντας $f(a) = a_0$.

(β΄) Η F έχει πόλο τάξης $m \geq 1$ στο a αν και μόνο αν $a_{-m} \neq 0$ και $a_{-n} = 0$ για κάθε $n > m$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m}$$

είναι το κύριο μέρος της f στο a.

(γ΄) Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} \neq 0$ για άπειρα $n > 0$.

Παράδειγμα 5.1.15. *Η συνάρτηση $z \sin \frac{1}{z}$ έχει ανωμαλία στο μηδέν. Θα δούμε τι είδους ανωμαλία είναι το μηδέν. Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor του $\sin \omega = \omega = \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \ldots$. Άρα $z \sin \frac{1}{z} = z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \ldots$. Επομένως, το μηδέν είναι ουσιώδης ανωμαλία της $z \sin \frac{1}{z}$.*

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

6.1 Εισαγωγή

Ορισμός 6.1.1. *Έστω* $a \in \mathbb{C}$ *και* $R > 0$ *και μια ολόμορφη συνάρτηση* $f : S(a, 0, R) \to \mathbb{C}$. *Έστω, επίσης, το ανάπτυγμα Laurent της* f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n},$$

για κάθε $z \in S(a < 0, R)$. *Τότε ο αριθμός* a_{-1} *καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της* f *στο* a *και συμβολίζεται με* $Res(f, a)$. *Έχουμε*

$$Res(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(\zeta) d\zeta$$

για κάθε $0 < \varrho < R$, *δηλαδή*

$$\int_{C(a,r)} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i Res(f, a).$$

Παράδειγμα 6.1.2. (i) *Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της* $z \sin \frac{1}{z}$ *στο μηδέν είναι* $Res(z \sin \frac{1}{z}, 0) = 0$ *και άρα* $\displaystyle\int_{C(0,\varrho)} z \sin \frac{1}{z} dz = 0$ *για κάθε* $\varrho > 0$.

(ii) *Έστω* $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots$. *Ο συντελεστής του* $\frac{1}{z}$ *είναι* 1. *Άρα* $Res(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1$ *και επομένως* $\displaystyle\int_{C(0,\varrho)} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i Res(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 2\pi i 1$ *για κάθε* $\varrho > 0$.

(iii) *Έστω* $z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ...\right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - ....$ *Επομένως* $Res(z^2 \sin \frac{1}{z}, 0) = -\frac{1}{6}$ *και άρα* $\int_{C(0,\varrho)} z^2 \sin \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{6} 2\pi i = -\frac{\pi i}{3}$ *για κάθε* $\varrho > 0$.

Θεώρημα 6.1.3. *(Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_\kappa \in \Omega$ και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{\varrho_1, ..., \varrho_\kappa\} \to \mathbb{C}$ ώστε κάθε $\varrho_j, j = 1 = 2, ..., \kappa$ να είναι πόλος της f. Έστω, επίσης, κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega - \{\varrho_1, ..., \varrho_\kappa\}$ και $Ind_\gamma(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{C} - \Omega$. Τότε*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\kappa} Res(f, \varrho_j) Ind_\gamma(\varrho_j).$$

Απόδειξη :
Για κάθε $j = 1 = 2, ..., \kappa$ έστω $R_j(z) = \frac{c_{j,1}}{z-\varrho_j} + ... \frac{c_{j,\kappa}}{(z-\varrho_j)^{\kappa_j}}$ το κύριο μέρος της f στον πόλο ϱ_j. Τότε η συνάρτηση $f - \sum_{j=1}^{\kappa} R_j$ έχει επουσιώσεις ανωμαλίες στα σημεία $\varrho_1, ...\varrho_\kappa$. Επομένως, από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy έχουμε

(i) $\int_\gamma \left[f(z) - \sum_{j=1}^{\kappa} R_j(z) \right] dz = 0.$

(ii) $\int_\gamma R_j(z)dz = c_{j,1} \int_\gamma \frac{1}{z - \varrho_j} dz + c_{j,2} \int_\gamma \frac{1}{(z - \varrho_j)^2} dz + ... + c_{j,\kappa} \int_\gamma \frac{1}{(z - \varrho_j)^{\kappa_j}} dz.$

Έχουμε $\int_\gamma \frac{1}{(z - \varrho_j)^r} dz = 0$ για κάθε $r = 2, ..., \kappa_j$ διότι οι συναρτήσεις $\frac{1}{(z-\varrho_j)^r}$ έχουν παράγουσες για κάθε $r = 2, 3, ..., \kappa_j$. Επομένως, η (ii) γίνεται

$$\int_\gamma R_j(z)dz = c_{j,1} 2\pi i Ind_\gamma(\varrho_j)$$

για κάθε $1 \leq j \leq \kappa$. Είναι $c_{j,1} = Res(f, \varrho_j)$ επομένως από την (i) έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{\kappa} \int_\gamma R_j(z)dz.$$

Δηλαδή $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{\kappa} 2\pi i Res(f, \varrho_j) Ind_\gamma(\varrho_j).$

■

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ ώστε το σημείο a είναι πόλος της f τάξης m. Έστω, επίσης, ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε*

$$f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$$

για κάθε $z \in \Omega - \{a\}$, $g(a) \neq 0$ (όπως προκύπτει από το χαρακτηρισμό των πόλων). Τότε $Res(f,a) = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!}$.

Παρατηρήσεις 6.1.5. (i) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ ώστε το a να είναι πόλος της f. Η τάξη του πόλου a της f είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός $m \geq 1$ ώστε το*

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z)$$

υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

(ii) *Αν m είναι η τάξη του πόλου a της f τότε*

$$Res(f,a) = \lim_{z \to a} \frac{[(z-a)^m f(z)]}{(m-1)!}.$$

Παράδειγμα 6.1.6. *Έστω ότι η τάξη είναι $m = 1$. Τότε*

$$Res(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Οι πόλοι της f είναι το i και το $-i$. Έχουμε $(z-i)f(z) = (z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}$. Επομένως,

$$Res(f,i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

(iii) *Αν το a δεν είναι πόλος αλλά επουσιώδης ανωμαλία τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο θα βρεθεί βρίσκοντας το αντίστοιχο ανάπτυγμα Laurent μέσω του αναπτύγματος Taylor χρησιμοποιώντας βοηθητική μεταβλητή.*

(iv) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $a \in \Omega$ μια μεμονωμένη ρίζα. Ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας a είναι $m \geq 1$ αν και μόνο αν*

$$f(a) = f'(a) = ... = f^{m-1}(a) = 0$$

και $f^m(a) \neq 0$.

Πρόταση 6.1.7. *(Κανόνας De L' Hospital) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις, $a \in \Omega$ μεμονωμένη ρίζα των f, g τάξης κ και m αντίστοιχα. Τότε*

(i) *Το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της $\frac{f}{g}$ αν $\kappa \geq m$. Σε αυτήν την περίπτωση*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \kappa > m \\ \frac{f^{\kappa}(a)}{g^{\kappa}(a)} & \text{αν } \kappa = m \end{cases}$$

(ii) *Το a είναι πόλος της $\frac{f}{g}$ τάξης $m-\kappa$ αν $m > \kappa$ και άρα*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \infty.$$

Απόδειξη :
Έστω $r > 0$ με $S(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a,r), z \neq a$. Έστω, επίσης, τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor

(i) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

(ii) $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$

για κάθε $z \in S(a,r)$. Τότε $a_0 = a_1 = ... = a_{\kappa-1} = 0$, $a_\kappa \neq 0$ και $b_1 = b_2 = ...b_{m-1}$, $b_m \neq 0$. Άρα $f(z) = \displaystyle\sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n(z-a)^n$ και $g(z) = \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} b_n(z-a)^n$ για κάθε $z \in S(a,r)$. Επομένως $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n}(z-a)^{\kappa+n}$ και $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^{n+m}$. Δηλαδή $f(z) = (z-a)^{\kappa}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n}(z-a)^n$ και $g(z) = (z-a)^m\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n$ και $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^{\kappa}}{(z-a)^m}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n}(z-a)^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n}$ για κάθε $z \in S(a,r), z \neq a$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim_{z\to a} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \kappa > m \\ \frac{\kappa! a_\kappa}{\kappa! b_\kappa} & \text{αν } \kappa = m \\ \infty & \text{αν } m > \kappa \end{cases}$$

■

Λήμμα 6.1.8. *Έστω* $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. *Θέτουμε* $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : z = |z|e^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\right\}$. *Για κάθε* $r > 0$ *έστω καμπύλη* $\gamma_r = [\theta_1, \theta_2] \to \Omega : \gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$. *Έστω επίσης* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *συνεχής εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων. Αν*

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$

τότε

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

Απόδειξη :
Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο $S(a, r)$ να ανήκουν όλα τα σημεία ασυνέχειας της f. Για κάθε $r > r_0$ θέτουμε $M(r) = sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r^*\} = max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r^*\} = |f(z_r)|$ με $z_r \in \gamma_r^*$. Τότε $\left|\int_{\gamma_r} f(z)dz\right| \leq M(r)r(\theta_2 - \theta_1) \leq |f(z_r)||z_r|(\theta_2 - \theta_1) \leq |z_r f(z_r)|(\theta_2 - \theta_1) \to 0$ καθώς $r \to 0$. Άρα

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

■

Πρόταση 6.1.9. *Έστω* f *ολόμορφη συνάρτηση στο* $\mathbb{C}$ *εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων* $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ *τα οποία δεν ανήκουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *και είναι πόλοι της* f. *Υποθέτουμε ακόμα ότι*

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0.$$

Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \left\{Res(f, \varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\right\}.$$

Απόδειξη :
Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο δίσκο $S(0, r_0)$ να ανήκουν όλα τα σημεία $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$. Για κάθε $r > r_0$ θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $c_r = [-r, r] + \gamma_r$, όπου $\gamma_r(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{c_r} f(z)dz = \int_{r-}^{r} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum \left\{Res(f, \varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\right\}.$$

Από γνωστό λήμμα έχουμε ότι

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$$

και άρα

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i \sum \left\{Res(f, \varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\right\},$$

δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \{Res(f, \varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\}$.

■

Παράδειγμα 6.1.10. *Το ολοκλήρωμα* $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη :
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ Η f έχει τα σημεία i και $-i$ πόλους τάξης 1. Επίσης,

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} z\frac{1}{1+z^2} = 0.$$

Έχουμε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i Res(f, i)$ από το θεώρημα. Είναι

$$Res(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}.$$

Επομένως $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$, άρα $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ εφόσον η $\frac{1}{1+x^2}$ είναι άρτια.

■

Λήμμα 6.1.11. *(Jordan) Έστω* $0 \le a < b \le \pi$ *και* $\lambda > 0$. *Τότε*

$$\int_a^b e^{-\lambda \sin t}dt < \frac{\pi}{\lambda}.$$

Απόδειξη :
Παρατηρούμε ότι $\int_a^b e^{-\lambda \sin t}dt \le \int_0^\pi e^{-\lambda \sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda \sin t}dt$. Είναι $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda \sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t}dt$. Πράγματι, με αλλαγή μεταβλητής έχουμε

(i) $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

(ii) $t = \pi \Rightarrow x = 0$

(iii) $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda \sin t}dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-\lambda \sin(\pi - x)}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-\lambda \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin x}dx$. Άρα $\int_a^b e^{-\lambda \sin t}dt \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t}dt$. Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$ για κάθε $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Επομένως $\int_a^b e^{-\lambda \sin t}dt \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t}dt \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-\lambda 2t}{\pi}}dt = \frac{\pi}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) < \frac{\pi}{\lambda}$.

∎

Λήμμα 6.1.12. *Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Imz \geq 0\}$ και συνάρτηση σημείων ώστε*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Για κάθε $r > 0$ έστω η καμπύλη $\gamma_r : [0.2\pi] \to \Omega : \gamma_r(t) = re^{it}$. Τότε

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

Απόδειξη :
Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο δίσκο $S(0, r_0)$ να ανήκουν όλα τα σημεία ασυνέχειας της f. Για κάθε $r > r_0$ έχουμε $\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = \int_0^\pi f(\gamma_r(t))e^{i\lambda r(\cos t + i\sin t)}ire^{it}dt$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [0, \pi]$, $\left|f(\gamma_r(t))e^{i\lambda r(\cos t+i\sin t)}ire^{it}dt\right| = r|f(\gamma_r(t))|e^{-(\lambda r)\sin t} \leq rM(r)e^{-(\lambda r)\sin t}$ όου $M(r) = sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r^*\} = |f(z_r)|$ για κάποιο $z_r \in \gamma_r^*$ Επομένως $\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz\right| \leq |z_r||f(z_r)|\int_0^\pi e^{-(\lambda r)\sin t}dt \leq |z_r||f(z_r)|\dfrac{\pi}{\lambda r}$ Από το λήμμα Jordan. Άρα

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0$$

εφόσον

$$\lim_{r\to\infty} f(z_r) = 0.$$

∎

Θεώρημα 6.1.13. *Θέτουμε $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Imz \geq 0\}$. Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το Ω και είναι ολόμορφη εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων$\varrho_1, ..., \varrho_\kappa$ τα οποία δεν ανήκουν στον άξονα $\mathbb{R}$ και είναι πόλοι της f. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

Έστω επίσης $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum \left\{Res(f(z)e^{i\lambda z}, \varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\right\}.$$

Απόδειξη :
Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο δίσκο $S(0, r_0)$ να ανήκουν όλα τα σημεία ϱ_1, ϱ_n. Για κάθε $r > r_0$ θεωρούμε την καμπύλη $c_r = [-r, r] + \gamma_r$ όπου $\gamma_r : [0, \pi] \to \Omega : \gamma_r(t) = re^{it}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{c_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = \int_{-r}^{r} f(z)e^{i\lambda z}dz + \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum \left\{Res(f(z)e^{i\lambda z}, \varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\right\}.$$

Από το λήμμα,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i\sum\left\{Res(f(z)e^{i\lambda z},\varrho_\kappa) : Im\varrho_\kappa > 0\right\}.$$

■

6.1.1 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 6.1.14. *Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx.$

Η συνάρτηση $\frac{\cos x}{1+x^2}$ *είναι άρτια. Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ *η οποία έχει πόλους τα σημεία* i *και* $-i$ *τάξης* 1. *Επίσης,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx = 2\pi i Res\big(f(z)e^{iz}, i\big).$$

Έχουμε

$$Res\big(f(z)e^{iz}, i\big) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie}.$$

Άρα από τη σχέση 6.1.14 έπεται ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx = \frac{2\pi i}{2ei} = \frac{\pi}{e}$. *Επομένως* $\frac{\pi}{e} = Re\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}Re\frac{e^ix}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}Re\frac{(\cos x + i\sin x)}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx.$

Έπεται ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$

Παράδειγμα 6.1.15. *Να αποδειχθεί ότι* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

Απόδειξη *:*

Η μέθοδος αντιμετώπισης αυτού του παραδείγματος είναι η μέθοδος που αντιμετωπίζουμε γενικά ανάλογα υπολογιστικά προβλήματα που εμφανίζονται πόλοι στον πραγματικό άξονα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}, z\in\mathbb{C}-\{0\}$. *Για κάθε* $0<r<R$ *έστω η καμπύλη* $c_{R,r} = [-R,-r]+(-\gamma_r)+[r,R]+\gamma_r$ *όπου* $\gamma_r(t) = re^{it}, \gamma_R(t) = Re^{it}$ *με* $0\le t\le\pi$. *Από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι* $\displaystyle\int_{C_{r,R}}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$. *Άρα* $\displaystyle\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_r^R\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0, (1)$. *Η* f *έχει το μηδέν πόλο τάξης ένα και το ολοκληρωτικό*

υπόλοιπο της f στο μηδέν είναι $Res(f,0)=1$. Επομένως, το κύριο μέρος της f στο μηδέν είναι $\frac{1}{z}$. Άρα υπάρχει μια συνάρτηση $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f(z)=\frac{1}{z}+h(z)$. Έστω r_0 σταθερό. Η h είναι φραγμένη στο δίσκο $\overline{S(0,r_0)}$. Έστω $M>0$ ώστε $|h(z)|\leq M$ για κάθε $z\in S(0,r_0)$. Τότε, για κάθε $0<r<r_0$ έχουμε $\left|\int_{\gamma_r} h(z)dz\right|\leq M\pi r\to 0$ καθώς $r\to 0$ άρα και

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} h(z)dz=0.$$

Επίσης $\int_{\gamma_r}\frac{1}{z}dz=\pi i$. Επομένως

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz=\pi i.$$

Λαμβάνοντας στην (1) διαδοχικά τα όρια καθώς $r\to 0$ και $R\to+\infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{iz}}{z}dz+(-\pi i)+\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

και άρα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz=\pi i$. Επομένως $\pi=Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Im\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$ Έπεται ότι $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$, εφόσον η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια.

■

Πρόταση 6.1.16. *Έστω μια συνάρτηση $R(\sin\theta,\cos\theta),\theta\in[0,2\pi]$ όπου R ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Θέτουμε $f(z)=R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{1}{iz}$. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει πόλους στην περιφέρεια $C(0,1)$. Έστω $z_1,...,z_n$ οι πόλοι της f στο δίσκο $S(0,1)$. Τότε*

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}Res(f,z_\kappa).$$

Απόδειξη :

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε ότι $\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}Res(f,z_\kappa)$ όπου $\gamma=C(0,1)$ δηλαδή $\gamma(\theta)=e^{i\theta},0\leq\theta\leq 2\pi$. Εξ' ορισμού έχουμε ότι $\int_\gamma f(z)dz=\int_0^{2\pi}f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta$. Επίσης, $f(e^{i\theta})=R\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\frac{1}{ie^{i\theta}}$.

Άρα $2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}Res(f,z_\kappa)=\int_\gamma f(z)dz=\int_0^{2\pi}\frac{R\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta.$

∎